Építés- Építészettudomány XXVIII (1–4) 7–20

KERETSZERKEZETEK RÚDKERESZTMETSZETEINEK KÖZELÍTŐ FELVÉTELE

DR. KOLLÁR LAJOS

1. BEVEZETÉS

A tartószerkezetek tervezésének egyik lényeges lépése a rúdkeresztmetszetek méreteinek felvétele. Ez nem szokott problémát okozni a két- vagy többtámaszú tartók esetében, de a keretszerkezetek igénybevételeit általában kénytelenek vagyunk önkényesen felvett rúdkeresztmetszetekkel, számítógéppel – esetleg többször is – kiszámítani ahhoz, hogy meghatározhassuk a rudak keresztmetszeti méreteit. Csak ily módon kaphatunk választ arra a kérdésre is, hogy egyáltalán lehet-e keretet tervezni, vagy merevítőfalak (is) szükségesek az állékonyság biztosítására.

A következőkben először igyekszünk röviden és szemléletesen bemutatni a keretszerkezetek erőjátékát, majd egy közelítő módszert javaslunk az igénybevételek (és ezzel együtt a rúdkeresztmetszetek) gyors meghatározására.

2. A KERETEK ERŐJÁTÉKÁNAK SZEMLÉLETES ISMERTETÉSE

A keretszerkezetekben általában a vízszintes terhek, elsősorban a szélerők okozzák a mértékadó igénybevételeket. A vízszintes erőkből származó erőjátékot az jellemzi, hogy a külső teherből az oszlopokra jutó nyomaték egy részét a gerendák – saját hajlításuk révén – az oszlopokban működő húzó-nyomó (derék-)erőkké alakítják át. Minél merevebbek a gerendák az oszlopokhoz képest, annál nagyobb része alakul át a nyomatékoknak derékerőkké, és ennek megfelelően annál nagyobb mértékben csökkennek az oszlopok hajlítónyomatékai. Ezzel egyidejűleg természetesen megnőnek a gerendákban a nyomatékok.

Láthatjuk tehát, hogy az oszlopok és a gerendák merevségének arányával befolyásolhatjuk a bennük ébredő nyomatékok nagyságát. Ahhoz azonban, hogy ezt megtehessük, szükségünk van egy egyszerű, áttekinthető, közelítő módszerre, amellyel gyorsan meghatározhatjuk ezeket a nyomatékokat, és amely megmutatja: mit és milyen mértékben kell változtatnunk ahhoz, hogy megfeleljenek a rúdkeresztmetszetek. Ezért egy célszerű modellt kell választanunk a keretszerkezetekhez.

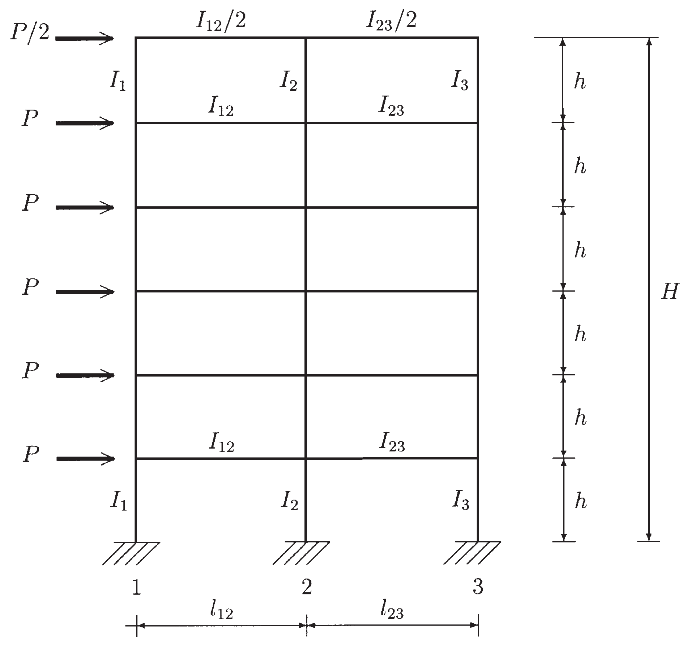
Ebben a dolgozatban nem kívánunk a stabilitási kérdésekkel foglalkozni (a nyomóerők okozta nyomatéknövekedéstől is eltekintünk), és az oszlopokat összenyomhatatlanoknak tekintjük. Nem vesszük figyelembe a gerendák nyírási alakváltozását.

Az oszlopokban ébredő nyomóerők kiszámítását sem részletezzük, mivel a függőleges terhekből származókat igen könnyű megkapni, a szélteherből keletkezők pedig ezekhez képest általában kicsik.

3. A KERETSZERKEZETEK SZÁMÍTÁSÁHOZ ALKALMAZHATÓ EGYSZERŰ MÓDSZER

A keretszerkezetekhez célszerűen alkalmazható egyszerű módszer Csonka P. két dolgozatán [1], [2] alapul. Alkalmazhatóságának feltételei a következők:

- az egyes oszlopok keresztmetszete állandó;
- az egymás fölött lévő gerendák merevsége minden szinten azonos, kivéve a legfelsőt, amelynek hajlítási merevsége a többiekének fele *(1. ábra)*;
- az emeletmagasságok is azonosak;



1. ábra

– az oszlopok mereven be vannak fogva az alapba;
– a keret „arányos”, azaz az oszlopok és a gerendák merevségi arányai olyanok, hogy az egyes oszlopok kilendülés közben azonos deformációt szenvednek. Ez akkor teljesül, ha az egyes oszlopok merevsége úgy aránylik egymáshoz, mint a hozzájuk csatlakozó gerendavégek merevségeinek összege. Az *1. ábrá*n vázolt háromlábú keret esetében ez az oszlopok és a gerendák merevségeinek alábbi arányát kívánja meg:

$$\frac{I_1/h}{I_{12}/l_{12}} = \frac{I_2/h}{I_{12}/l_{12} + I_{23}/l_{23}} = \frac{I_3/h}{I_{23}/l_{23}}. \tag{1}$$

Ha a vizsgált keret merevségei nem felelnek meg az arányos keretekre előírtaknak, akkor eredményeink annál pontatlanabbak lesznek, minél inkább eltérnek a merevségek az arányos keretekre megadottaktól.

A Csonka-féle módszerhez alkalmazott modell előállításához először is a keret oszlopait egyetlen helyettesítő oszloppá fogjuk össze, melynek *I* inercianyomatéka az egyes oszlopok inercianyomatékainak összege. A gerendavégek hajlítási merevségeit ugyancsak összegezzük egy-egy szinten, és egyenletesen elosztjuk („elkenjük”) az oszlop hossza mentén. Ily módon egy olyan „kontinuum-oszlopot” kapunk, amely elfordulás ellen folytonosan rugalmasan van ágyazva, és alul az alaptestbe mereven be van fogva. Először ennek a kontinuum-oszlopnak az erőjátékát határozzuk meg, majd figyelembe vesszük, hogy a gerendák a valóságban nem elosztottan, hanem összpontosan (koncentráltan) fogják meg az oszlopokat.

Ennek a modellnek a segítségével Csonka zárt képleteket adott meg a gerendákról az oszlopokra ható (összpontos) nyomatékok meghatározására. Ezek ismeretében a keretszerkezet oszlopainak nyomatékait Csonka szerint úgy határozhatjuk meg, hogy működtetjük az oszlopokra a szélerőket és a gerendákról leadódó összpontos nyomatékokat, majd ezekből az oszlop nyomatékait a statika szabályai szerint számítjuk ki.

Közelítően azonban úgy is meghatározhatjuk az oszlopnyomatékokat, hogy a kontinuum-oszlopra kiszámított folytonos nyomatékábrához minden gerendaszinten hozzáadjuk (ill. levonjuk belőle) a gerenda által leadott összpontos nyomaték felét, és az így kapott pontokat egyenesekkel összekötjük. (Ez azért közelítés, mert a valóságban a gerendanyomatékoknak nem pontosan a felét kell levonni, ill. hozzáadni a folytonos nyomatékábrához.) A legfelső gerenda helyén természetesen a gerendáról leadódó teljes nyomatékot kell az oszlopra működtetnünk. E módosított, közelítő módszer előnyeit a következőkben vázoljuk.

A Csonka-féle modell előnye egyszerűsége és szemléletessége. Az egyszerűség abban áll, hogy szélteher esetében zárt képleteket lehet megadni mind a legalsó keresztmetszetben, mind az oszlop közepetáján ébredő legnagyobb oszlopnyomaték-ra, valamint a legnagyobb gerendanyomatékra. A vázlattervezés során többre általában nincs is szükségünk. Ha pedig az oszlopnyomatékokat az imént említett módon, vagyis a kontinuum nyomatékábrájának és a gerendanyomatékok felének összegezésével állítjuk elő, akkor a módszer szemléletesen mutatja a keret erőjátékának alakulását mind a végtelen merev, mind a zérus merevségű gerendák esetében: a modell mind a két szélsőséges esetben szemmel látható módon átmegy a pontos megoldásba. A végtelen merev gerendás esetben a kontinuum-oszlop nyomatékai zérussá válnak és csak a (merev) gerendákkal megfogott oszlop nyomatékai maradnak meg, amit azonnal fel tudunk írni; a zérus merevségű gerendák esetében viszont eltűnnek a gerendák megfogó nyomatékai és csupán a kontinuum-oszlop nyomatékai maradnak meg: ezek most egy alul befogott szabad oszlop nyomatékaival lesznek egyenlők. (Szabatosan véve ilymódon nem kapjuk meg pontosan a végtelen merev gerendáknak megfelelő nyomatékokat, mivel ehhez nem megfelezni kellene a gerendanyomatékokat, de az így elkövetett hiba kicsiny.)

A következőkben a Csonka-féle módszer főbb eredményeit fogjuk összefoglalni, majd bemutatjuk a módszer továbbfejlesztését:

– megvizsgáljuk a fentemlített közelítést, vagyis a gerendanyomatékok felének a kontinuum nyomatékábrájához való hozzáadását, ill. a belőle történő kivonását;
– ugyanezzel a közelítéssel meghatározzuk az oszlop közepe táján keletkező, helyi maximumot adó nyomaték helyét;
– meghatározzuk a keret felső pontjának vízszintes eltolódását;
– ahol lehet, kiküszöböljük a képletekből a nagy számok kis különbségét;
– megvizsgáljuk: milyen feltételek mellett maradnak érvényesek a képletek a magasság mentén változó oszlop- és gerendamerevségek esetében.

4. A KERET ERŐJÁTÉKA A FÜGGŐLEGES MENTÉN EGYENLETESEN MEGOSZLÓ VÍZSZINTES TEHERRE

Csonka [1], [2] zárt képleteket adott meg a magasság mentén egyenletesen megoszló erőkkel terhelt keretek igénybevételeire. Mi ezeket az eredményeket ki fogjuk egészíteni a keret felső pontjának Szerémi L.-tól [4] származó kifejezésével. Megadjuk az oszlop közepetáján ébredő, helyi maximumot adó oszlopnyomaték helyét és nagyságát is. Ezenkívül – Szerémi L. [4] alapgondolatát követve – úgy fogjuk átalakítani a képleteket, hogy ahol csak lehet, kiküszöböljük belőlük a nagy számok kis különbségét adó, hiperbolikus függvényekből álló kifejezéseket. E célból ezeket a hiperbolikus függvényeket, jól ismert definiciós képletüket felhasználva, átalakítjuk e^x és e^{-x} típusú függvényekké.

Először Csonka eredeti képleteit fogjuk közölni, majd utána a fentiek szerint átalakított kifejezéseket.

A szélteherről feltételezzük, hogy intenzitása a magasság mentén nem változik. Ha a keretszerkezetes épület szélessége állandó, akkor a szélteher a magasság mentén egyenletesen megoszlónak tekinthető. A keretre a szélteher a födémek magasságában egyenlő nagyságú $P = ph$ koncentrált erők formájában hat (kivéve a legfelső gerendát, amelyre csak feleekkora erő működik), mivel a falszerkezet általában födémtől-födémig hordja át a szélterhet és a keretre a födémek adják át az erőket, a kontinuum-modellre azonban egyenletesen megoszló terhet vehetünk fel. Vizsgáljuk meg, milyen eredményeket ad a Csonka-modell erre a terhelési esetre.

4.1. MEGOLDÁS A MAGASSÁG MENTÉN ÁLLANDÓ OSZLOPKERESZTMETSZETEK ÉS GERENDAMEREVSÉGEK ESETÉRE

Abból a célból, hogy egyszerű képleteket kapjunk, az alábbi közelítésekkel fogunk élni:

$$\sinh \alpha H \approx \cosh \alpha H \approx \frac{e^{\alpha H}}{2}, \tag{2}$$

valamint

$$\sinh \frac{\alpha h}{2} \approx \frac{\alpha h}{2}, \tag{3}$$

$$\cosh \frac{\alpha h}{2} \approx 1. \tag{4}$$

A (2)–(4) összefüggésekkel elkövetett hiba mintegy 5%, ha

$$\alpha H > 1,5, \quad \text{ill.} \quad \alpha h < 0,6, \tag{5}$$

és mintegy 10%, ha

$$\alpha H > 1,2, \quad \text{ill.} \quad \alpha h < 1,2. \tag{6}$$

(Pontosabban fogalmazva: $\alpha h = 1,2$-nél a (3) képlet hibája 6%, a (4) képleté 15%.) Az α mennyiséget a (10) képlet definiálja.

Az igénybevételek kiszámításához szükségünk lesz néhány segédmennyiségre, ill. összefüggésre.

Mivel a gerendák a keret kilendülő alakváltozása során antimetrikus alakváltozást szenvednek, ezért pl. az *i* és *k* oszlopok között elhelyezkedő gerenda egyik végének hajlítási merevsége

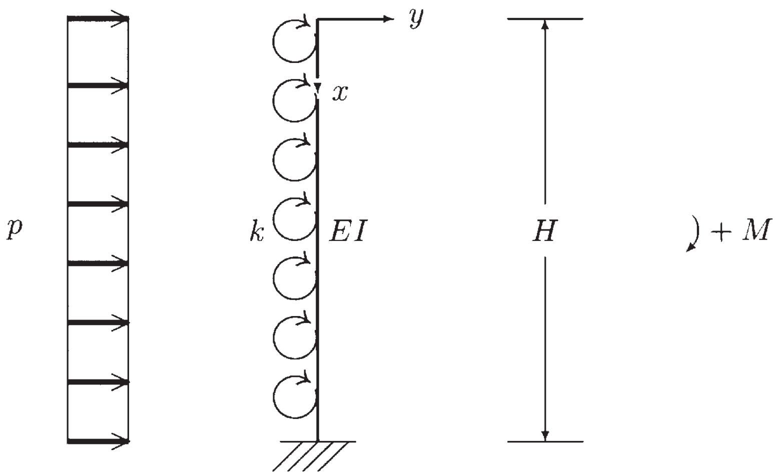
$$K_{ik} = \frac{6EI_{ik}}{l_{ik}}, \tag{7}$$

a gerendák befogó hatását helyettesítő folytonos befogás *k* merevsége pedig

$$k = \frac{\sum K_{ik}}{h}, \tag{8}$$

ahol az összegezést egy emelet valamennyi gerendavégére kell kiterjeszteni. A kontinuum-oszlop *(2. ábra)* I inercianyomatéka az egyes *i* oszlopok inercianyomatékainak összege:

$$I = \sum I_i. \tag{9}$$



2. ábra

A kontinuum-oszlop nyomatékábráját Csonka az

$$\alpha = \sqrt{\frac{k}{EI}} \tag{10}$$

merevségi arány segítségével a következőképpen írta fel:

$$M_{\text{kont}}(x) = \frac{p}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha H - \sinh \alpha H}{\cosh \alpha H}\sinh \alpha x + \cosh \alpha x - 1\right). \tag{11a}$$

A képletet a korábban mondottak szerint átalakítva:

$$M_{\text{kont}}(x) = \frac{p}{\alpha^2}\left[\frac{2\alpha H}{\mathrm{e}^{\alpha H}}\sinh \alpha x + \mathrm{e}^{-\alpha x} - 1\right]. \tag{11b}$$

A gerendákról az oszlopra átadódó összpontos nyomaték Csonka szerinti kifejezése (amely csak a gerendák helyén, azaz $x = h$, $2h$, $3h$, ...-nál érvényes):

$$M_{\text{ger}}(x) = -\frac{ph}{\alpha}\frac{\sinh \frac{\alpha h}{2}}{\frac{\alpha h}{2}}\left(\frac{\alpha H - \sinh \alpha H}{\cosh \alpha H}\cosh \alpha x + \sinh \alpha x\right) + phx. \tag{12a}$$

Átalakítva:

$$M_{\text{ger}}(x) = -\frac{ph}{\alpha}\left[\frac{2\alpha H}{e^{\alpha H}}\cosh \alpha x - \mathrm{e}^{-\alpha x}\right] + phx. \tag{12b}$$

A legfelső gerendára eltérő képlet vonatkozik. Csonka szerint:

$$M_{\text{ger}}(0) = -\frac{p}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha H - \sinh \alpha H}{\cosh \alpha H}\sinh \frac{\alpha h}{2} + \cosh \frac{\alpha h}{2} - 1\right) + \frac{ph^2}{8}. \tag{13a}$$

Átalakítva:

$$M_{\text{ger}}(0) = -\frac{p}{\alpha^2}\left[\frac{2\alpha H}{\mathrm{e}^{\alpha H}}\sinh \frac{\alpha h}{2} + \mathrm{e}^{-\frac{\alpha h}{2}} - 1\right] + \frac{ph^2}{8}. \tag{13b}$$

Az oszlop legalsó keresztmetszetében ébredő, maximális nyomaték nagysága Csonka szerint:

$$M_{\text{oszl.}}^{\max}(H) = \frac{p}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha H - \sinh \alpha H}{\cosh \alpha H}\sinh \alpha (H - \frac{h}{2}) + \cosh \alpha (H - \frac{h}{2}) - 1\right] +$$

$$+p\left(\frac{Hh}{2}-\frac{h^2}{8}\right) \tag{14a}$$

Átalakítva:

$$M_{\text{oszl.}}^{\max}(H)=\frac{p}{\alpha^2}\left(\frac{\alpha H}{e^{\frac{\alpha h}{2}}}-1\right)+\frac{p}{2}\left(Hh-\frac{h^2}{4}\right). \tag{14b}$$

A gerendákra ható legnagyobb nyomaték helye Csonka szerint:

$$x_k(M_{\text{ger}}^{\max})=H-\frac{1}{\alpha}\ln(\alpha H), \tag{15}$$

nagysága pedig:

$$M_{\text{ger}}^{\max}=ph\left\{H-\frac{1}{\alpha}[1+\ln(\alpha H)]\right\}. \tag{16}$$

Ezt a két képletet nem szükséges átalakítani, mivel Csonka már felhasználta előállításukhoz az említett közelítéseket, és ezeken kívül még feltételezte, hogy nemcsak H-ra, hanem x-re is érvényesek a közelítő (2) összefüggések. $x_k(M_{\text{ger}}^{\max})$ általában nem esik pontosan egy gerenda helyére, de mivel egy függvény a maximumának környezetében csak lassan változik, az így kiszámított nyomatékot érvényesnek vehetjük a legközelebbi gerendára.

Az oszlop közepe táján ébredő, helyi maximumot adó, az alsó, befogási keresztmetszetben fellépővel ellenkező előjelű oszlopnyomaték kiszámításához összegezzük a kontinuum-oszlop (11b) nyomatékát és a gerendákról leadódó (12b) nyomaték felét:

$$M_{\text{oszl.}}=\frac{p}{\alpha^2}\left[\frac{\alpha H}{\mathrm{e}^{\alpha H}}\mathrm{e}^{\alpha x}+\mathrm{e}^{-\alpha x}-1\right]+\frac{ph}{2\alpha}\left[\frac{\alpha H}{\mathrm{e}^{\alpha H}}\mathrm{e}^{\alpha x}+\mathrm{e}^{-\alpha x}\right]-\frac{phx}{2}. \tag{17}$$

Ennek x szerinti deriváltját zérussal egyenlővé téve a következő másodfokú egyenletet kapjuk $e^{\alpha x}$-re

$$\left(\frac{H}{\mathrm{e}^{\alpha H}}+\frac{\alpha hH}{2\mathrm{e}^{\alpha H}}\right)\mathrm{e}^{2\alpha x}-\frac{h}{2}\mathrm{e}^{\alpha x}+\left(\frac{h}{2}-\frac{1}{\alpha}\right)=0. \tag{18}$$

(A gyök előtti negatív előjel nem ad valós eredményt, így nem vesszük figyelembe.) Ebből:

$$x_k = \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \frac{\dfrac{h}{2} + \sqrt{\dfrac{h^2}{4} - 4\left(\dfrac{H}{e^{\alpha H}} + \dfrac{\alpha h H}{2e^{\alpha H}}\right)\left(\dfrac{h}{2} - \dfrac{1}{\alpha}\right)}}{\dfrac{2H}{e^{\alpha H}} + \dfrac{\alpha h H}{e^{\alpha H}}} \right\}. \tag{19}$$

Az így kapott x_k-val a (17) képletből számíthatjuk ki a helyi maximumot adó oszlopnyomatékot.

Az oszlop közepe táján ébredő nyomaték mindig kisebb az oszlop alsó keresztmetszetére ható (14) nyomatéknál, de változó oszlopkeresztmetszet esetében (l. a 4.2. pontban) mégis szükségünk lehet rá.

A fentiekben megadott nyomatékok a teljes keretre működnek. Az egyes oszlopokra ható nyomatékokat úgy kapjuk meg, hogy a fenti oszlopnyomatékokat szétosztjuk az egyes oszlopok merevségeinek arányában:

$$M_i = \frac{I_i}{I} M_{\text{oszl.}}, \tag{20}$$

az egyes gerendavégekre ható nyomatékok előállításához pedig a (12), (13), ill. (16) képlettel megadott gerendanyomatékot az illető gerendavég-merevségnek és az egy szinten összegezett gerendavég-merevségeknek az arányában osztjuk szét:

$$M_{ik} = \frac{k_{ik}}{\sum k_{ik}}. \tag{21}$$

Végül megadjuk a keret felső pontja vízszintes eltolódásának közelítő kifejezését:

$$y(0) = \frac{1}{EI} \frac{p}{\alpha^2} \left[\frac{1 - \alpha H}{\alpha^2} + \frac{H^2}{2} \right] \left(1 + \frac{kh^2}{12EI} \right). \tag{22}$$

Itt a képlet első fele a kontinuum-oszlop eltolódását adja meg Szerémi dolgozata [4] alapján, amit úgy is megkaphatunk, hogy a (11a) képletet kétszer integráljuk, meghatározzuk az integrálási állandókat a peremfeltételekből, és felhasználjuk a (2) közelítéseket. A második zárójeles kifejezés az oszlopoknak a gerendák közötti többletkilendülését veszi közelítően figyelembe [3] szerint. E többletkilendülést a valódi keretre és a kontinuum-oszlopra ható nyomatékábra különbsége okozza, amely emeletenként egy-egy „fűrészfog-alakú” nyomatékábrarészből áll, l. a *4. ábrá*t. Ezt az oszlopra ható megoszló nyomatékok ellentettjei és a gerendákról ténylegesen ható összpontos nyomatékok okozzák. [3]-ban ebből a fűrészfog-alakú nyomatékábrából számítottuk ki a többletkilendülést, a számítás egyszerűsítése céljából a kontinuum-oszlopra ható megoszló nyomatékokat egy emeletmagasságon belül konstansnak tekintve, nagyságukat egyenlőnek véve az emeletmagasság felében működő megoszló nyomaték intenzitásával, és feltételezve, hogy az emeletenként jelentkező fűrészfog-nyomatékábra alsó és felső ordinátája egymással egyenlő.

4.2. MEGOLDÁS LEFELÉ NÖVEKVŐ OSZLOP- ÉS GERENDAMEREVSÉGEK ESETÉRE

Amennyiben a közelítő számítás szerint akár az oszlopok, akár a gerendák keresztmetszete nem felel meg, akkor megnövelhetjük az oszlopok, ill. a gerendák keresztmetszetét. Ekkor megváltozik a *k/EI* arány, és ezért újra el kell végeznünk a számítást, azaz iterálnunk kell. Itt érdemes meggondolnunk a következőket.

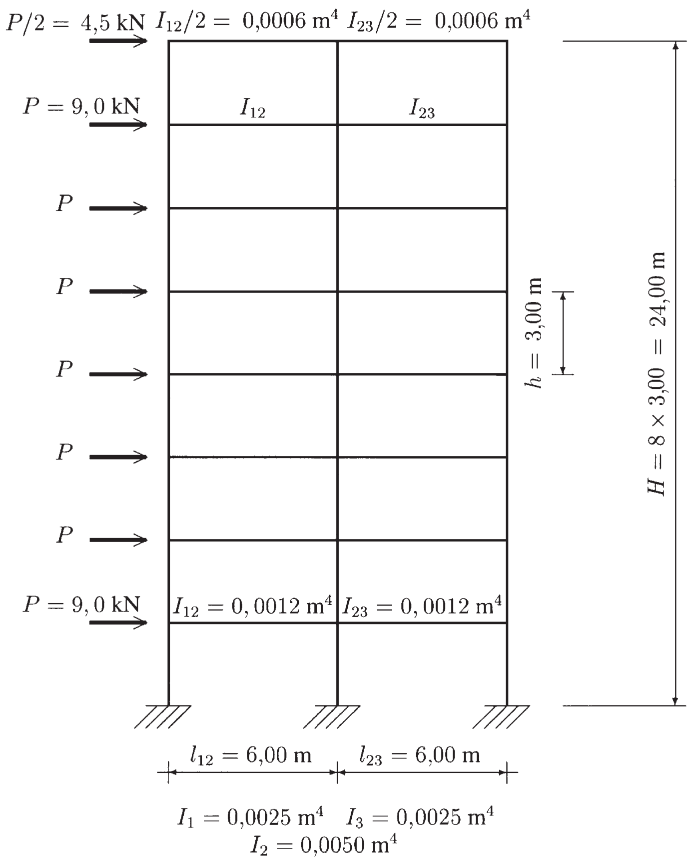
Ha növeljük a gerendák hajlítási merevségét az oszlopokéhoz képest, akkor ezek a külső hajlítónyomatékból egyre többet alakítanak át az oszlopokban működő derékerőkké, azaz egyre jobban tehermentesülnek az oszlopok a hajlítás szempontjából. Ez pedig előnyös lehet, mivel a derékerőket az oszlopok sokkal könnyebben fel tudják venni, mint a nyomatékokat. Ebből rögtön levonhatjuk azt a következtetést, hogy ha csökkenteni akarjuk az oszlop-keresztmetszeteket, akkor a gerendák merevségét kell növelnünk. A gerendák merevségének növelésével azonban az oszlopnyomatékokat legfeljebb a végtelen merev gerendákkal bíró kereten fellépő oszlopnyomatékok szintjére tudjuk leszállítani, ennél tovább nem tudjuk őket csökkenteni.

Eljárhatunk azonban másképp is. Az előző pontban láttuk, hogy mind a kontinuum-oszlop nyomatékai, mind a gerendákról az oszlopokra átadódó nyomatékok csupán a *k/EI* aránytól, azaz a gerendák és az oszlopok merevségének egymáshoz viszonyított nagyságától függenek. Ebből következik, hogy ha mind a gerendák, mind az oszlopok merevségét ugyanolyan módon változtatjuk a magasság mentén (pl. lineárisan növeljük lefelé), akkor a *k/EI* arány állandó marad, és érvényesek maradnak az állandó gerenda- és oszlopkeresztmetszetű keretek nyomatékaira az előzőkben megadott képletek. (Megváltozik viszont az alakváltozások kifejezése.)

Ha tehát a közelítő számítás azt mutatja, hogy a keretoszlopoknak akár a legalsó, akár a középtáji keresztmetszete nem felel meg, vagy a gerendák túlságosan gyengék, akkor megtehetjük azt is, hogy az oszlopok és a gerendák merevségét a magasság mentén tetszőlegesen, de egymással arányosan megnöveljük. Ekkor ugyanis nem változik meg a magasság mentén állandó oszlop- és gerendamerevségekre kiszámított nyomatékok értéke és így feleslegessé válik az iteráció. Ez a merevség-változtatás lehet folyamatos (pl. a magasság mentén lineáris), de lehet lépcsőzetes is.

5. SZÁMPÉLDA

A következőkben Csonka [1], [2] számpéldáját vesszük alapul *(3. ábra)*. Amikor megvizsgáljuk, mekkora hibát követünk el azzal a közelítéssel, hogy a kontinuum-oszlop nyomatékábrájához hozzáadjuk (ill. levonjuk belőle) a gerendákról az osz-

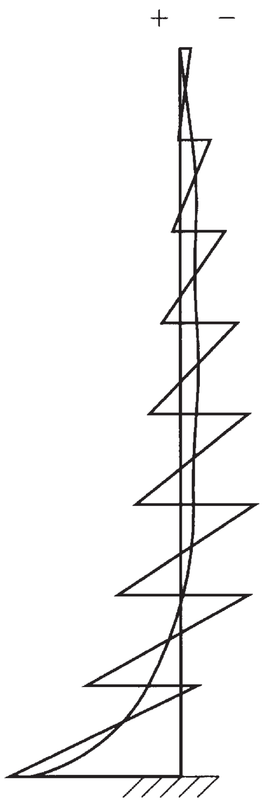


3. ábra

lopra átadódó nyomatékok felét, a Csonka által kiszámított értékeket tekintjük pontosnak. Az ábrán nem szereplő adatok:

$$
\begin{aligned}
p &= 3{,}0 \text{ kN/m} \\
E &= 22{,}5 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2 \\
I &= 0{,}010 \text{ m}^4 \\
k &= 0{,}016E \text{ m}^2 \\
\alpha &= 0{,}4 \text{ m}^{-1}
\end{aligned}
$$

A keret nyomatékait a *4. ábrá*n tüntettük fel. Az utolsó oszlopban szerepelnek a kontinuum-oszlop nyomatékai, amelyeket segédmennyiségeknek tekinthetünk.



$M_{oszl.}$(kNm) Csonka	$M_{oszl.}$(kNm) közelítő	a kontinuum-oszlop nyomatéka (kNm)
− 11,82		0
+ 1,68 − 32,45	+ 3,994 − 30,126	− 13,066
+ 8,05 − 47,93	+ 11,08 − 44,90	− 16,916
+ 19,57 − 61,33	+ 22,66 − 58,24	− 17,79
+ 33,17 − 73,13	+ 36,03 − 70,27	− 17,114
+ 48,37 − 80,37	+ 50,58 − 78,16	− 13,785
+ 68,13 − 73,08	+ 68,20 − 73,01	− 2,40675
+102,41 − 17,55	+ 95,45 − 24,51	+ 35,469
+184,95		+161,25

4. ábra

A magasság közepetáján ébredő, helyi maximumot adó oszlopnyomaték helye a (19) képlet szerint: $\alpha H = 9{,}6$; $e^{\alpha H} = 14765$;

$$x_k = \frac{1}{0{,}4} \ln \frac{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} - 4\left(\frac{24}{14\,765} + \frac{1{,}2 \cdot 24}{2 \cdot 14\,765}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{0{,}4}\right)\right)}}{\frac{48}{14\,765} + \frac{1{,}2 \cdot 24}{14\,765}} = 15{,}90\ \mathrm{m}$$

a nyomaték nagysága pedig a (17) képletből:

$$\alpha x_k = 6{,}3586; \quad e^{6{,}3586} = 577{,}44;$$

$$M_{\text{oszl.}}(x) = \frac{3}{0{,}16}\left[\frac{9{,}6}{14\,765} 577{,}44 + \frac{1}{577{,}44} - 1\right] +$$

$$+ \frac{3 \cdot 3}{0{,}8}\left[\frac{9{,}6}{14\,765} 577{,}44 - \frac{1}{577{,}44}\right] - \frac{3 \cdot 3 \cdot 15{,}90}{2} = -79{,}00\ \mathrm{kNm}.$$

Csonka szerint a legnagyobb (negatív) oszlopnyomaték $x = 15$ m-nél ébred, nagysága –80,37 kNm.

A keret legfelső pontjának vízszintes eltolódása a (22) képletnek megfelelően:

$$y(0) = \frac{1}{22500 \cdot 0{,}010} \frac{3{,}0}{0{,}4^2}\left[\frac{1 - 9{,}6}{0{,}4^2} + \frac{24^2}{2}\right]\left(1 + \frac{0{,}0016 \cdot 3{,}0^2}{12 \cdot 0{,}010}\right)$$

$$= 0{,}022\ \mathrm{m} = 2{,}2\ \mathrm{cm}.$$

Láthatjuk, hogy a javasolt közelítéssel mindenütt csak kis hibát követünk el. Ezek alapján ajánlhatjuk a közelítő módszer alkalmazását a keretek méretfelvételéhez. A végleges méretezéshez természetesen pontosabb módszerre van szükség, amelyben nem szerepelnek az itt alkalmazott elhanyagolások és közelítések, és amely megadja az oszlopokban működő nyomóerők nagyságát is.

IRODALOM

[1] Csonka P.: Egyszerűsített eljárás szélerőkkel terhelt emeletes keretek számítására. *Az MTA Műszaki Tud. Oszt. Közl.* **35** (1965): 209–219.
[2] Csonka P.: Szélerőkkel terhelt sokemeletes derékszögű keretek legnagyobb nyomatékai. *Az MTA Műszaki Tud. Oszt. Közl.* **35** (1965): 271–275.
[3] Kollár L.: Bestimmung der horizontalen Eigenfrequenz von Hochhaus-Stockwerkrahmen. *Die Bautechnik* **44** (1967): 385–388.
[4] Szerémi L.: Magasházak merevítőrendszerének számítása kontinuum modell alkalmazásával (Tanulmány). Budapest, 1973.

APPROXIMATE DETERMINATION OF THE BAR CROSS SECTIONS OF FRAME STRUCTURES

Summary

When designing a frame structure we have to assume its cross sections. To avoid lengthy iterative computer calculations, a simple straightforward method is needed to assess the adequate cross sections of the bars. In this paper such a method is presented, based on the earlier work of P. Csonka, who replaced the frame by a single column whose cross sections are elastically restrained against rotation. A numerical example shows the applicability of the method.