

Kutatásaink az elmúlt 4 évben az OTKA pályázat keretein belül a geodinamikai idősorok vizsgálati módszereinek tanulmányozására, a Kálmán szűrési technika geodéziai alkalmazásának vizsgálatára és a nemlineáris geodéziai modellek megoldási módszereinek kidolgozására irányultak.

A földtudományokban előforduló idősorok matematikai modellezése az adott idősorra nézve alkalmas matematikai modell kiválasztásából, a kiválasztott modell paramétereinek a megfigyelt idősorok alapján történő becsléséből, valamint a kiválasztott és illesztett modell minőségi tulajdonságával foglalkozik, azaz, hogy a modell mennyire jól illeszkedik a megfigyelt idősor adataihoz. A különböző becslési módszerek általában különböznek a geodéziában megszokottól, mert a geodéziában megfigyelt értékek, amelyek alapján becsljük a modell paramétereit, általában nem függetlenek, ezért speciális megközelítést igényelnek.

A stacionárius folyamatok képezik a sztochasztikus folyamatok egyik legfontosabb osztályát, amelyek az idősorok modellezése során előfordulnak. Stacionárius folyamatok igen széles osztálya megadható mozgóátlag, autoregresszív és ARMA modellekkel, melyek a geodéziai gyakorlatban is nagy szerepet játszanak idősorok modellezésében és vizsgálatában. Az idősorokban gyakran különböző tendenciák figyelhetők meg, amelyek meghatározása nem mindig egyszerű feladat. Megkülönböztethető determinisztikus és sztochasztikus trend. Determinisztikus trend leválasztására kidolgoztunk egy általánosan használható módszert a generalizált spline-függvények segítségével. Idősorok vizsgálatánál igen fontos feladat az előrejelzés: a folyamat megfigyelt múltbeli értékei alapján becslési módszereket adtunk a folyamat jövő időpontbeli viselkedésére. Újszerű megközelítésnek tűnik, hogy a lineáris előrejelzést nem négyzetes középben legjobb, hanem abszolút értékben legjobb becsléssel közelítettük.

Kutatásaink az OTKA téma célkitűzéseinek megfelelően az idősoranalízis geodéziai alkalmazásának kutatására koncentráltak, ezen belül főként a Föld pólusának mozgását elemeztük, de más geodinamikai idősorok vizsgálati módszereit is tanulmányoztuk.

Vizsgáltuk az IERS által az 1993-2022 évekre közölt napi átlagolású pólus-koordináta adatsort. A korábban kidolgozott spline trendszámítással és a szűrésre alkalmassá tett trigonometrikus interpolációval előállítottuk a 20-120 nap periódus-tartományra redukált adatsort, amely így lehetővé teszi az El Nino kimutatását.

Új modelleket dolgoztunk ki az IERS 1995-1998 évek pólus-koordináta adatsora és intézetünk nagyeceni obszervatóriumának Schumann-rezonancia idősora közötti korrelációs számításra - különös tekintettel a trend-leválasztásra.

Az IERS által az 1995-1998 évekre órás időközzel előállított pólus-koordináta adatsort korreláltuk a nagyeceni obszervatóriumban mért Schumann-rezonancia idősor értékekkel. Ehhez kifejlesztettük a kétváltozós kovariancia-számításokat végrehajtó programot, amelynek alkalmazásával igazoltuk, hogy a légköri változásokat a pólusmozgás 40-50 napi késéssel követi. Melléktermékként az adódott, hogy az IERS által közölt LOD adatok spike-kat tartalmaz, így azok tudományos számításokra nem alkalmasak.

Továbbfejlesztettük a pólusmozgás analízálására szolgáló matematikai modellek kidolgozását. Ennek során a korábban, a mesterséges holdak pályadatainak elemzésére kidolgozott spline interpolációs módszert általánosítottuk tetszőleges hosszúságú idősorra. Az új eredményeket az Acta Geod. Geoph. Hung. folyóiratban megjelent tanulmány foglalja össze.

Elmélyítettük a pólusmozgás analízálására szolgáló matematikai modellek tanulmányozását. A stacionárius sztochasztikus folyamatok egyik legfontosabb osztályát, a mozgóátlag (MA), és az autoregresszív mozgóátlag (ARMA) modelleket használtuk fel a pólusmozgás modellezésére. A generalizált spline-függvények alkalmazásával a determinisztikus trend leválasztására egy általánosan használható módszert adtunk meg.

Geodéziai idősorok vizsgálatánál igen fontos feladat az előrejelzés: a folyamat megfigyelt múltbeli értékei alapján becslést kell adni a folyamat jövő időpontbeli viselkedésére. Újszerű megközelítésnek tűnik, hogy a lineáris előrejelzést nem négyzetes középben legjobb, hanem abszolút értékben legjobb becsléssel konstruáltuk meg.

Az általunk geodéziai feladatokra kidolgozott Kálmán szűrés elvének és technikájának a geodéziai gyakorlatba való bevezetésének nagy jelentősége van, mivel a hagyományos legkisebb négyzetek módszerét helyettesíthetjük egy hatékonyabb, rekurzív számolási eljárással. Az alábbi tervezett Kálmán szűrési technikát általánosítottuk geodéziai feladatok megoldására:

A Kálmán szűrés algoritmus a több lépésre bontható. Fel kell állítani az állapotter modellt a rendszer tulajdonságainak megfelelően. Ez általában elsőrendű differenciál egyenletekkel történik, amelyek leírják a rendszer állapotának változását az idő függvényében. Matematikailag ez az állapot-átviteli egyenletekkel adható meg. A kapcsolatot a megfigyelések és az állapot vektor között a közvetítő egyenletek teremtik meg. Mind az állapot-átviteli, mind a közvetítő egyenletek fehér zajjal terheltek. Kiindulva egy ismert állapot vektorból és a hozzátartozó kovariancia mátrixból egy adott időpontban, a Kálmán szűrés algoritmusával kiszámoljuk a következő időpont állapot vektorának és kovariancia mátrixának egy becslését, amely előrejelzést ad a leendő mérés értékeire. Ez nyilván hibával terhelt. Ekkor elvégezzük az ehhez az időponthoz tartozó megfigyelést. A következő korrekciós lépésben a predikált és a mért megfigyelés eltérése alapján megkonstruáljuk a Kálmán féle nyereség mátrixot. Ez használható a predikált állapot vektor javítására. Bizonyított, hogy a Kálmán szűrő szolgáltatja a legjobb becslést az állapot vektorra és annak kovariancia mátrixára. A Kálmán szűrő nagy előnye, hogy nem kell az állapot vektor valamennyi komponensére megfigyelést végezni, hanem lehetséges egyéb ismeretleneket is az állapot vektorba befoglalni. Ez lehetővé teszi, hogy egy mesterséges hold helyzet és sebesség vektoraiból kiszámoljuk a nem megfigyelt gravitációs gyorsulást, és ez szolgálhat a mesterséges hold egy pályaszakaszának analízisére.

Kutatásainkat a matematikai analízálási eljárásainak tanulmányozása keretében a Kálmán szűrési technika geodéziai alkalmazási lehetőségeinek megismerésére koncentráltuk.

A mesterséges holdak pályáját 3. fokú spline függvényekkel modelleztük. Az interpoláció intervallumainak végpontjában adott második deriváltakkal rendelkező pontok spline interpolációjára új összefüggéseket vezettünk le.

Modellszámításokat végeztünk a sebesség vektor és a gyorsulás vektor meghatározására csupán a helyzeti paraméterek felhasználásával, és megállapítottuk, hogy a kidolgozott spline módszer a Newton interpolációs eljárásnál megbízhatóbb eredményeket szolgáltat.

Időben változó, zajos adatok feldolgozására a Kálmán szűrési technikát alkalmaztuk, és megadtuk a mesterséges holdak pályaelemeinek analízisére vonatkozó Kálmán szűrő matematikai modelljét.

Idősorok Kálmán-szűrésének végzésére a NASA által erre a célra kifejlesztett programrendszert installáltuk saját számítógépi környezetbe, és megkezdtük a rendszer tesztelését.

Levezettük a súlyponti koordinátra vonatkozó spline interpoláció összefüggéseit.

Megjavítottuk a konvexitás feltételéből levezetett interpolációs módszernek az optimális mérési helyek kiválasztására szolgáló matematikai elvét.

Geodinamikai modellek analizálására szolgáló matematikai módszerek kidolgozásával foglalkoztunk. A modellekben előforduló idősorok trendjét 3. fokú spline függvényekkel modelleztük. Az interpoláció során a szakaszonként egymáshoz csatlakozó rész-intervallumok végpontjában adott második deriváltakkal rendelkező pontok spline típusú interpolációjára új összefüggéseket vezettünk le.

A kutatás kezdetén munkahipotézisünk a következő volt: A geodéziában nagyon sok kiegyenlítési feladat nemlineáris, ezért matematikai modelünket leíró egyenleteket először linearizálni kell. A hagyományos kiegyenlítés során a nemlineáris egyenleteket az elsőrendű tagig Taylor sorba fejtik a becsült paraméterek kezdő értékei körül, a magasabb rendű tagokat elhanyagolják. Így a paramétereket lineáris becslési módszerekkel – mint például a legkisebb négyzetek módszere – meg lehet határozni. Természetesen, ha az alapmodellünk közel lineáris, vagy a paraméterek kezdőértékei közel vannak a valódi értékekhez, akkor a fentiekben leírt eljárás jól alkalmazható. A gyakorlatban néhány nemlineáris modell alkalmas transzformációval lineárisra vezethető vissza, de az esetek többségében nem kerülhető el egzakt nemlineáris kiegyenlítési módszerek kidolgozása és azok alkalmazása. A kutatás eredményeként igen jelentős elméleti és gyakorlati eredményeket hozott a nem lineáris hibaterjedési törvény alkalmazása az alábbi geodéziai alapfeladatok esetén.

81 közös pont alapján meghatároztuk L1 normában az európai GPS-hálózat ETRS89 térbeli derékszögű vonatkozási rendszere és hazánk térbeli geodéziai rendszere, a HD72 közötti transzformáció paramétereit.

Az L1 normával kapott becslés paramétereit összehasonlítottuk a legkisebb négyzetek módszere alapján kapott értékekkel, és megállapítottuk, hogy a becsült paraméterek különböznek egymástól, ennek következtében a durva hibákkal terhelt pontok is eltérnek a két módszernél.

Kimutattuk, hogy az L1 normával végzett becslés megbízhatóbb eredményeket szolgáltat, mint a legkisebb négyzetek módszere, mivel csökkenti a durva hibás pontok hatását, és a nagy javításokat nem osztja szét az egész ponthalmazra.

A relatív tájékozás paramétereinek robusztus becsléssel történő meghatározására olyan számítási módszert dolgoztunk ki, amely figyelembe veszi bizonyos geometriai elemek (egyenes, kör) invarianciáját a kamera kalibrációjával és pozíciójával szemben.

Pontosítottuk a fotogrammetriai térbeli hátrametszés nemlineáris egyenletekkel leírt matematikai modelljének korábbi változatát. Algoritmust adtunk meg a nemlineáris egyenletrendszer megoldására.

Statisztikai hipotézisvizsgálatok elvégzésével kimutattuk, hogy a 7 paraméteres dátum transzformációs probléma megoldásának nemlineáris eljárása alkalmasabb durvahibák szűrésére, mint a linearizált legkisebb négyzetek módszere.

Statisztikai hipotézisvizsgálatok megadásával kimutattuk, hogy a minden kombinációban végzett kiegyenlítési algoritmust fel lehet használni a fotogrammetriai adatok durvahibáinak szűrésére is.

Megállapítottuk, hogy ha valamely pont koordinátája durva hibával terhelt, akkor az egzakt megoldás torzított becslést ad és statisztikai hipotézisvizsgálattal kimutatható a szennyezés, így a módszer alkalmas adatrendszerek durva hibáinak szűrésére is.

Továbbfejlesztettük a szakirodalomban tárgyalt túlhatározott 7 paraméteres 3D hasonlósági transzformáció L2 normás matematikai modelljét, és kidolgoztuk ennek L1 normás megoldásának algoritmusát is.

A szakirodalomban tárgyalt túlhatározott 7 paraméteres 3D hasonlósági transzformáció L2 normás megoldásának algoritmusát tovább finomítottuk, és újabb pontosság-növekedést értünk el az L1 normás megoldási algoritmus fejlesztésével is.

A 7 paraméteres 3D hasonlósági transzformáció L2 normás matematikai modelljét összevetettük az L1 normás megoldással, és megállapítottuk, hogy ez utóbbi megoldás kevésbé érzékeny a durva hibákra.

A Gauss-Jacobi kombinatorikus kiegyenlítő számítási elv alkalmazásával speciális geodéziai transzformációs feladatok megoldására analitikus levezetést adtunk, amely tétel bizonyítja, hogy a kombinatorikus megoldás egybeesik a lineáris Gauss-Markov modell megoldásával.

Összehasonlítottuk a 7 paraméteres dátum transzformációs problémának a linearizált legkisebb négyzetek módszerével nyerhető, és a nemlineáris Gauss-Jacobi kombinatorikus eljárásból származtatott megoldását. Eredményül az adódott, hogy

mindkét módszer azonos nagyságrendű residuálokat szolgáltat, de a nemlineáris algoritmus numerikusan stabilabb, mint a hagyományos eljárás.

A 7 paraméteres 3D hasonlósági transzformáció nemlineáris egyenletrendszerének a megoldására két algoritmust adtunk. Ezek a módszerek nem iteratívek, és nem követelik a közvetítő egyenletek linearizálását. Linearizálásra a variancia-kovariancia matrix levezetésénél van szükség.

Új algoritmust adtunk meg a 3D transzformáció 7 paraméteres nemlineáris egyenlet rendszerének megoldására a forgatási matrix parametrizálásával, amely eljárás sem nem iteratív, sem nem követeli meg a megfigyelési egyenletek linearizálását. Kimutattuk, hogy linearizálásra csak a nemlineáris variancia-covariancia matrix meghatározásához van szükség.

További nemlineáris geodéziai problémák megoldási algoritmusainak kidolgozásához tanulmányoztuk a Gröbner bázisra való áttérés elméletét, és a 3D transzformáció skála paraméterének számolásához negyed-fokú polinom-egyenletet vezettünk le.

Megteremtettük annak az elméleti hátterét, hogy a Gauss-Jacobi kombinatorikus kiegyenlítőszámítási elvet a legfontosabb nemlineáris geodéziai transzformációs feladatok megoldására tudjuk használni.

A nemlineáris egyenletek megoldási módszereinek tanulmányozása alapján arra a következtetésre jutottunk, hogy a Gröbner bázisra való áttérés és a multipolinomiális rezultáns technika alkalmas geodéziai problémák megoldásának zárt alakban történő előállítására. Algoritmusokat adtunk meg az ilyen nemlineáris egyenletrendszerek megoldására.

A Gröbner bázisra való áttéréssel megoldási algoritmusokat adtunk a nemlineáris normál egyenletek gyökeinek megkeresésére, így a 3D transzformáció skálaparaméterének szigorú megoldására 4. fokú polinom egyenleteket vezettünk le.

A nemlineáris hibaterjedési tétel segítségével kidolgoztuk a súlyozott kombinatorikai megoldásokból az általános megoldás levezetésének elméletét. Ennek során a kovariancia matrixokat explicite alakban vezettük le.