Elsősorban három fontos részterületen sikerült új eredményeket elérni: *Kódok, véletlen metsző rendszerek, Ramsey típusú kérdések.*

Kódok.

A [1, 3, 4, 7-9, 13, 14] eredmények közvetlenül kódokhoz kapcsolódnak.

Tracing Kódok.

A [7, 9] dolgozatokban bevezettük az *egy felhasználót meghatározó superimposed kódokat*. A kutatott kérdés egy genetikai eljárás során, a Pooled Genomic Indexing-nél merült föl. Egy bináris kód akkor egy felhasználót meghatározó superimposed kód, ha legfeljebb r kódszó *bitenkénti vagy* műveletéből meg lehet határozni legalább az egyik kódszót. Ez a meghatározás gyengítése az eredeti *superimposed kód* definíciónak, ahol a *bitenkénti vagy* műveletéből meg kell határozni mindegyik kódszót.

Alon és Körner lokálisan vékony halmazcsaládokra vonatkozó eredményeit felhasználva sikerült a fenti kód hosszára felső korlátokat kapni. Alsó korlátunkat a superimposed kódokra ismert korlátokból kaptuk meg. A két korlát között exponenciálisan nagy volt a különbség. Ezt a különbséget később Noga Alon és Vera Asodi megjavította: valószínűségi módszerrel belátták, hogy az általunk adott felső korlát az éles.

Viszont később nekünk sikerült hasznosítani és erősíteni Noga Alon és Vera Asodi eredményeit. A [3] dolgozatban bevezettük a *k felhasználót meghatározó superimposed kódokat*. Egy bináris kód akkor k felhasználót meghatározó superimposed kód, ha legfeljebb r kódszó *bitenkénti vagy* műveletéből meg lehet határozni legalább k kódszót. Ez a meghatározás az eredeti superimposed kódokat kapcsolja össze egy felhasználót meghatározó superimposed kódokkal. Itt éles aszimptotikát láttunk be konstans k esetén és meghatároztuk azt a tartományt ahol feltétlenül rövidebb ezeknek a kódoknak a hossza, mint a superimposed kódoknak.

Fontos megemlíteni, hogy a fenti problémák a sokat vizsgált union-free kérdéskörbe tartoznak. Egy halmazrendszer *r-union-free*, ha akárhogy kiveszek két különböző legfeljebb r-es részcsaládot, a két unió különböző lesz. Egy halmazrendszer *disjointly r-union-free*, ha akárhogy kiveszek két diszjunkt legfeljebb r-es részcsaládot, a két unió különböző lesz. A fenti két család extremális aszimptotikája nagyon eltér és a [7, 9] dolgozatokban egyrészt ezekre korlátokat adtunk, másrészt a a tracing kódkorlátokat beágyaztuk a union-free korlátok közé. Eredményeinket a témakör legrangosabb folyóiratában, az IEEE Transactions on Information Theory-ban tettük közzé.

Kódok és nagy konvex kúpok.

Bináris sorozatoknak egy halmaza *pozitív lineáris kombináció mentes*, ha semelyik kódszó nem áll elő a többi kódszó pozitív lineáris kombinációjaként. Rudolph Ahlswede és Levon Khachatryan vizsgálták azt a kérdést, hogy ha n a sorozatok hossza, akkor hány sorozatot lehet úgy megadni, hogy a halmaz pozitív lineáris kombináció mentes legyen. Azt sejtették, hogy 2^n-nél sokkal kisebb ez a maximum. Füredi Zoltánnal cáfoltuk ezt a sejtést. A [14] dolgozatban megadtunk egy olyan, aránylag egyszerű pozitív lineáris kombináció mentes konstrukciót, ahol a sorozatok száma 2^n(1-o(1)). Sőt, véletlen módszerrel még a hibatagra is sikerült éles becslést kapni. A nagyon éles felső korlátot pontos fedéseket kiküszöbölő permutációs módszerekkel sikerült belátni.

Identifying kódok.

Egy adott G gráf pontjainak valamely C részhalmaza identifying kód, ha ennek a halmaznak a metszetei a pontok zárt szomszédságával mind különbözőek. A cél a minimális C ponthalmaz meghatározása. Az identifiyng kódokat eddig rögzített (grid, stb) gráfokban vizsgálták. Abból kiindulva, hogy egy hálózatról nincs előzetes információnk, vizsgáltuk ezeket a kódókat véletlen gráfokban [1,8]. Korrelációs, Lovász Local Lemma szerű módszerek segítségével sikerült (1 valószínüséggel) nagyon éles korlátot kapni a minimális kód méretére. A felső korlát Erdős és Rényi eredményeiből következik.
Egy adott G gráf pontjainak valamely C részhalmaza r identifying kód, ha ennek a halmaznak a metszetei a legfeljebb r-es ponthalmazok zárt szomszédságainak az uniójával mind különbözőek. It is a cél a minimális C ponthalmaz meghatározása. E dolgozatokban ezeket a kódokat is vizsgáltuk, és az eredetileg ismert korlátoknál (Chakrabarty, Lavitin, stb) sokkal erősebbeket sikerült bizonyítani. A legfontosabb felismerés itt is az volt, hogy sikerült ezt a problémát a union-free problémakörre visszavezetni és ezáltal lehetőség nyílott az ott ismert,

aránylag erős korlátoknak a használatára. Vizsgáltuk az r identifying kódokat is véletlen gráfokban. Ezek esetében azonban nem kaptunk ugyanolyan éles eredményeket mint a sima identifiyng kódok esetében. Ezekben a vizsgálódásokban a szerzőtársaim Alan Frieze, Ryan Martin, Julien Moncel, és Cliff Smyth voltak.

Többszörös hozzáférésű csatornák.

A többszörös hozzáférésű csatornák elmélete több diszciplinához is kapcsolódik. A matematikai kapcsolódási pontjai közé tartoznak a Sidon típusú kérdések, a halmaz lefedési problémák, additív számelmélet, hogy csak néhányat említsek. Hogy összefoglaljuk a született külső és saját eredményeinket, Györfi László, Győri Sándor, Laczay Bálint társszerzőimmel egy könyv írásába kezdtünk [4], címe Multiple Access Channels. Eddig mintegy 250 oldallal készültünk el.

Turán rendszerek.

Kódolási kérdések kezelésében nagyon fontos a *szabályos* kombinatorikai struktúrák ismerete. Ilyenek például a design-ok, a Turán rendszerek, véges geometriák, lottó designe-ok, stb. A CRC Handbook of Combinatorial designs új kiadásához felkértek, hogy írjak egy rövid fejezetet a Turán rendszerekről, amit meg is tettem [13].

Reguláris superimposed kódok.

Dyackov és Rykov szerzőpáros vezette be az úgynevezett reguláris superimposed kódokat. A regularitás miatt ezeknek a kódoknak a vizsgálatához inkább algebrai és véges geometriai megközelítésre van szükség. A Dyackov és Rykov által kapott korlátokat Füredi Zoltánnal közösen jelentősen megjavítottuk. A konstrukciók egy része Ruzsa Imre egyik szép tételén alapul mely kimondja, hogy elég nagy számhalmazokat lehet kiválasztani úgy, hogy a bennük szereplő számok nem megoldásai egy lineáris egyenletnek. A többi konstrukciónk is lényegesen erősebb a fenti szerzőpáros eredményeinél, és ezek is algebrai megközelítésen alapúlnak. (A kapott eredményeket tartalmazó dolgozat jelenleg előkészületi stádiumban van, így cikkek listájára nem vettem fel.)

Véletlen metsző rendszerek.

A kódok korrelációs tulajdonságaihoz és a klasszikus Erdős-Ko-Rado tételhez kapcsolódóan véletlen metsző halmazrendszerek tulajdonságait vizsgáltuk az [5,6] dolgozatokban.

Egy halmazrendszer metsző, ha bármely két elemének nem üres a metszete. Egy metsző halmazrendszer maximális, ha bárhogyan veszek hozzá a rendszerhez egy újabb halmazt, az a már meglévők valamelyikét üresen metszi. Az Erdős-Ko-Rado tétel azt állítja, hogy egy k-uniform metsző halmazrendszer maximális méretű, ha mindazokból a k-asokból áll egy n elemű alaphalmazon, amelyek egy fix elemet tartalmaznak. A tételnek számos általánosítása és továbbfejlesztése ismert, azonban eddig véletlen megfelelője nem volt ismert. Rényi vizsgálta a Sperner (antilánc) tulajdonságot véletlen halmazrendszerekre. Analóg módon bevezettük a véletlen metsző halmazrendszereket.

A véletlen metsző k-uniform halmazrendszereket a következő folyamat definiálja. Első lépésben kivesszünk véletlen módon, egyenletes valószínűséggel egy tetszőleges k-ast. Föltéve, hogy a folyamat első i lépése definálva van, az (i+1)-edik lépésben véletlen módon, egyenletes valószínűséggel választunk egy k-ast azon még be nem választott k-asok közül, amelyek metszik a meglévő rendszer összes elemét. A folyamat akkor áll meg, ha a még be nem választott halmazok között már nincs olyan, amely meglévő rendszer összes k-asát metszi. A [6] dolgozatban szerzőtársaimmal (Tom Bohman, Colin Cooper, Alan Frieze, Ryan Martin) azt a kérdést vizsgáltuk, hogy milyen k=k(n) értékek mellett kapunk Erdős-Ko-Rado rendszert (egy ponton átmenő össze k-as) 1 valószínűséggel. A kapott eredmény azt mutatja, hogy $k=n^{1/3}$-nál van a váltás, pontosabban: Ha $k=c_n*n$, akkor annak a valószínűsége, hogy Erdős-Ko-Rado rendszert kapunk a fent definált folyamat eredményeként

- 1-hez tart abban az esetben, ha c_n tart 0-hoz,
- 0-hoz tart abban az esetben, ha c_n tart 1-hez,
- $1/(1+c)$-hez tartabban az esetben, ha c_n tart c-hez.

A [5] dolgozatban majdnem ugyanazokkal a szerzőtársakkal (Tom Bohman, Alan Frieze, Ryan Martin, Cliff Smyth) a $k=n^{1/3}$ küszöbb fölött vizsgáltuk a véletlen metsző k-uniform halmazrendszereket. Sikerült 1 valószínűséggel leírni a kapott rendszer struktúráját arra az esetre nézve, ha $n^{1/3}<k< n^{5/12}$. Ekkor a folyamat a következő módon fog lezajlani 1-hez tartó valószínűséggel. A első $k/(n^{1/3})$ lépésben a kapott halmazok egymást páronként egy pontban metszik és nincs harmadfokú pont. Ekkortájt megjelenik egy harmadfokú pont, és a fent definiált folyamat eredményeként azt a rendszert fogjuk kapni, mely olyan halmazokból áll, amelyek metszik a mindegyik az elején beválasztott halmazt és tartalmazzák a harmadfokú pontot. (A folyamat ennél azért bonyolultabb, nem pontosan így megy végbe, de lényegében így.) A kezdetben nagyon bonyolult bizonyítást (50 oldallal indult), sikerült jelentősen karcsúsítani, de még így is meglehetősen nehéz.

Ramsey típusú kérdések.

Ajtai, Komlós, Szemerédi (és mások) elméleti számítógép-tudományi munkáiból kiderül, hogy a Ramsey típusú kérdések lépten-nyomon előjönnek ebben a témakörben. Kutatásaink legújabb eredményei is itt születtek. Szerzõtársaimmal (Gyárfás András, Sárközy Gábor, Szemerédi Endre) sikeresen használtuk a Szemerédi Regularitás lemmát néhány évtizedeken át nyitott probléma megoldásában [2,10,11,12]. E bizonyítások egyik legfontosabb eleme az a megfigyelés, hogy az n pontot lefedő, összefüggő matching Ramsey száma aszimptotikusan ugyanaz, mint az utak Ramsey száma.

Utak Ramsey száma.

Talán a legfontosabb eredmény az a 35 oldalas bizonyítás, amelyben pontosan meghatározzuk az út Ramsey számát három szín esetén [10]. Bár a helyes választ Faudree és Schelp még 1975-ben megsejtette, a probléma ezidáig nyitott volt (Az analóg problémát páratlan körökre Kohayakawa, Simonovits és Skokan oldották meg nagyjából velünk egy időben.) A kérdés megoldásában Figaj és Luczak a helyes aszimptotikus eredményig jutottak el. E bizonyítás egyik legfontosabb eleme az a megfigyelés, hogy az n pontot lefedő, összefüggő matching Ramsey száma aszimptotikusan ugyanaz, mint az utak Ramsey száma. Persze a pontos eredmény kihozásáhos stabilitási tételre van szükségünk: vagy találunk az adott szinezésben nagyon nagy összefüggő matchinget, vagy a szinezés a két leírt Ramsey szinezés valamelyike. Ennek a bizonyítása húsz oldalon keresztül történik. A cikket a Combinatorica-ba fogadták el közlésre annak ellenére, hogy terjedelme túllépte a megadott határt.

Két szín esetén sikerült általánosítani a Gerencsér-Gyárfás tételt, mely szerint az utak Ramsey száma két szín esetén [(3n-2)/2]. Itt azt erősebb állítást láttuk be, hogy akárhogy szinezzük a K(n/2,n/2,n/2) 3 partit gráf éleit két színnel, mindig találunk benne egyszínű, n hosszú utat. Ebben az esetben is az egyszínű összefüggő matchingek módszere adta a bizonyítás gerincét.

Körpartíciók.

Erdős, Gyárfás és Pyber bebizonyították, hogy akárhogy színezzük egy teljes gráf éleit r színnel, a gráf ponthalmaza lefedhető legfeljebb r^2*log r darab egyszínű, pontdiszjunkt körrel. Könnyen belátható, hogy r alá nem lehet menni és Erdősék azt sejtették, hogy r darab kör is elég. A fenti eredményt javítva beláttuk, hogy akárhogy szinezzük egy teljes gráf éleit r színnel, a gráf ponthalmaza lefedhető legfeljebb r*log r darab egyszínű, pontdiszjunkt körrel. Itt is a nagy egyszínű összefüggő matching segített, de ezt nemcsak egy nagy kör megkereséséhez alkalmaztuk, hanem, lényegében, ez a struktúra helyettesíti az Erdősék cikkében található háromszög-kört. A bizonyítás meglehetősen szerteágazó, és hosszú: a fenti meggondolásokon kívül használjuk – többek között - Mader észrevételeit.

Teljes páros gráfok élszínezései.

A fenti problémák kezelésében, de máshol is nagyon gyakran előjönnek olyan Ramsey problémák, ahol egy teljes gráf élei helyett csak egy teljes páros gráf éleit szinezzük. Ilyen kérdésekkel foglalkozik a [12] dolgozat. Ebben a cikkben, többek között, megjavítjuk Erdős, Gyárfás és Pyber, illetve Haxell és Kohayakawa eredményeit.

E jelentést azzal zárnám, hogy dolgoztunk még több, a témába vágó problémán, de ezek a kutatási eredmények még jelenleg nincsenek abban az állapotban, hogy itt most beszámoljak róluk.