

GERENDAMODELLEK ÖSSZEHASONLÍTÁSA

HAZAY MÁTÉ* – BOJTÁR IMRE**

*PhD hallgató. BME Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék. 1111 Budapest,
Műgyetem rakpart 3. K mfsz. 63. E-mail: mhazay@mail.bme.hu

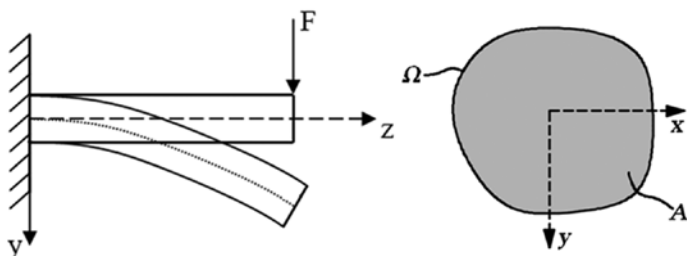
**Dr. habil. egyetemi tanár. BME Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék. 1111 Budapest, Műgyetem
rakpart 3. K mfsz. 63. E-mail: ibojtar@mail.bme.hu

A gerendák mechanikai viselkedésének vizsgálata immáron több évszázada foglalkoztatja a mérnököket, számtalan különböző modell látott már napvilágot. Ezek a modellek az általános 3D kontinuummechanikai modellalkotáshoz képest bizonyos elhanyagolásokat tartalmaznak, így az általuk kapott eredmények rendszerint különböznek a „pontos” megoldástól. Tekintve, hogy az eltérések a gyakorlatban előforduló esetek többségében viszonylag kicsik, ezek a modellek nagyon elterjedtek a mérnökök körében, megbízható használatukhoz azonban célszerű, ha ismerjük alkalmazhatósági korlátjaikat, valamint hibáik nagyságrendjét. Ebben a cikkben homogén, izotrop, valamint szendvics keresztmetszetű síkbeli gerendák modelljeinek összehasonlító vizsgálatával foglalkozunk. Különböző elméletekkel meghatározzuk a konzolok lehajlásait és feszültségeit, majd a vizsgált modellek megítélése céljából a kapott eredményeket 3D végelelemes szimulációk eredményeivel hasonlítjuk össze. Cikkünk fő célja, hogy megbecsüljük az egyes modellekre jellemző számítási hiba mértékét, tájékoztatást adva mérnökhallgatóknak és gyakorló mérnököknek ezen modellek alkalmazhatóságáról. Eredményeink azt mutatják, hogy tömör keresztmetszetű izotrop gerendák esetén a modelljeink igen megbízhatóak, azonban vékonyfalú, valamint szendvics keresztmetszet esetén a kapott eredmények számottevően eltérhetnek a pontos megoldástól. Szendvics keresztmetszetű gerendák esetén a modellek megbízhatósága erősen függhet a keresztmetszet geometriai és merevségi viszonyaitól, ezért némelyik modellnél szigorú alkalmazhatósági korlát figyelhető meg.

Kulcsszavak: klasszikus gerendaelmélet, Timoshenko-elmélet, nyírási deformáció hatása, magasabb fokú gerendaelméletek, szendvics keresztmetszetű gerendák, végelelemes szimulációk

BEVEZETÉS

Munkánkban egyenes tengelyű és állandó keresztmetszetű hajlított gerendák lehajlásainak és feszültségeinek vizsgálatával foglalkozunk. Ez a témakör több évszázada foglalkoztatja a mérnököket, a korábbi kutatások eredményeként számtalan különböző modell született. Ezek a modellek az általános kontinuummechanikai megközelítéshez képest bizonyos elhanyagolásokat, egyszerűsítéseket tartalmaznak, melyből adódóan eredményeik rendszerint különböznek a „pontos” megoldástól. Cikkünkben homogén, izotrop anyagú, valamint szendvics keresztmetszetű gerendák modelljeivel foglalkozunk. Megjegyezzük, hogy jelen munkánk egy részletesebb elemzés [Hazay, 2015] rövid kivonata. Néhány – szakirodalomban megtalálható – modell esetén bemutatjuk a bennük alkalmazott egyszerűsítéseket, majd nume-



1. ábra. Rúdvégen koncentrált erővel terhelt konzol

rikus példákon keresztül vizsgáljuk ezek „hibáját”, tájékoztatást adva a mérnököknek ezen modellek alkalmazhatóságával kapcsolatban.

Vizsgálatainkat koncentrált erővel terhelt konzol esetére végezzük el. Megjegyezzük, hogy munkánkban kizárólag egyenes hajlítással és vele egyidejű nyírás esetével foglalkozunk, ezért a levezetések során azzal a feltételezéssel élünk, hogy az 1. ábrán látható x és y súlyponti tengelyek főtengetyek, valamint hogy a koncentrált erő hatásvonala áthalad a keresztmetszet nyírási középpontján. Kizárólag statikus terhelési esetet vizsgálunk, és elemzésünket a kis elmozdulások és kis alakváltozások tartományára korlátozzuk.

A klasszikus- (Bernoulli–Navier-) modell alkalmazása során feltételezzük, hogy a keresztmetszetek síkjukban végtelenül merevek, valamint hogy a deformált állapotban is síkok, és merőlegesek maradnak a semleges tengelyre. Ekkor tehát a γ_{zy} és γ_{zx} keresztirányú nyírási alakváltozásokat elhanyagoljuk, így a 3D alakváltozástensor elemei közül csak az ε_z hosszirányú megnyúlást vesszük figyelembe. A klasszikus gerendamodell alkalmazásakor az 1. ábrán látható konzol $v_0(z)$ lehajlásfüggvényének meghatározásánál az alábbi jól ismert eredményre jutunk:

$$v_0(z) = + \frac{FL}{EI_x} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6L} \right), \quad (1)$$

ahol F a koncentrált erő nagysága, L a gerenda hossza, E a gerenda anyagának rugalmassági modulusa, I_x pedig a keresztmetszet x tengelyre vett inercianyomatéka. A σ_z hosszirányú normálfeszültségeket az ugyancsak jól ismert Navier-képlettel számíthatjuk ki. A klasszikus modell legfőbb hibája, hogy elhanyagolja a valóságban létező nyírási alakváltozást ($\gamma_{zy} \neq 0$). A nyírási alakváltozás következtében a keresztmetszetek nem maradnak síkok, és nem is lesznek merőlegesek a gerenda deformált hossztengetyére. Ezen elhanyagolásnak a hatása a gerenda karcsúságának az ismeretében becsülhető, ennek ellenére ezzel a modellel is elvégezzük a numerikus számításokat, hogy a kapott eredmények egyfajta referenciaértékként szolgáljanak. A következőkben a nyírási alakváltozások hatását figyelembe vevő modellek ismertetésére térünk rá.

A *Timoshenko-modell* [Timoshenko, 1921 & 1922] alkalmazásánál figyelembe vesszük, hogy a nyírási alakváltozások következtében a keresztmetszetek a deformáció után már nem merőlegesek a semleges tengelyre, azonban a rúdelemek deformációinak vizsgálatakor a keresztmetszetek öblösödésének leírásától továbbra is eltekintünk. Ilyen deformáció olyan esetben alakulna ki, ahol a nyírófeszültségek eloszlása egyenletes a keresztmetszet mentén. Ilyen esetben a keresztmetszet S nyírási merevségét az $S = GA$ összefüggéssel határozhatjuk meg, ahol G az anyag nyírási modulusa, pedig A a keresztmetszeti terület. Tudván, hogy a hajlítással egyidejű nyírásnak kitett gerendákban a nyírófeszültségek eloszlása nem egyenletes, a *Timoshenko-modellben* a nyírási merevség fenti képlettel meghatározott értékét egy κ szorzótényezővel módosítjuk, melyet *nyírási korrekciós tényezőnek* nevezünk. Ennek meghatározására a múltban számos kutatást végeztek [Timoshenko, 1921 & 1922], [Cowper, 1966], [Kaneko, 1975], [Stephen, 1980], [Bhat-de Oliviera, 1985], [Nayfeh, 2004], mely során különböző módszerek és eredmények láttak napvilágot. A leggyakrabban használt módszer esetén a *korrekciós tényezőt* abból a feltételtől határozzák meg, hogy a κ -val módosított nyírási merevség akkora legyen, hogy a *Timoshenko-gerenda* nyírási alakváltozási energiája megegyezzen a 3D szerkezetre jellemző nyírási alakváltozási energiával [Timoshenko, 1921 & 1922]. A *rúd nyírási szögtorzulását* tehát a κ -val módosított nyírási merevség figyelembevételével határozzuk meg. A *Függelék F1. táblázatában* – az említett források alapján – összefoglaltuk, hogy az általunk vizsgált keresztmetszettípusok esetén mekkora ez az érték. A *Timoshenko-modell* alkalmazása esetén az (1. ábrán látható konzolra vonatkozóan) az alábbi lehajlásfüggvényt kapjuk eredményül:

$$v_0(z) = \frac{Fz}{\kappa GA} + \frac{FL}{EI_x} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6L} \right). \quad (2)$$

Mivel hajlítással egyidejű nyírás esetén a keresztmetszetek a deformáció után nem maradnak síkok, számos kutató [Bickford, 1982], [Heyliger-Reddy, 1988], [Wang-Reddy-Lee, 2000], [Shi-Voyiadjis, 2011], [Ghugal-Sharma, 2011] olyan *magasabb fokú nyírási gerendamodell* létrehozásával foglalkozott, amelynél valamilyen öblösödési függvény alkalmazásával vesszük figyelembe, hogy a keresztmetszeti pontok a deformáció során kilépnek a keresztmetszet síkjából. A következőkben ezek közül két modellel, *Reddy* és *Bickford harmadfokú nyírási gerendamodelljével* [Wang-Reddy-Lee, 2000], valamint *Ghugal* és *Sharma hiperbolikus modelljével* [Ghugal-Sharma, 2011] foglalkozunk.

Reddy és *Bickford harmadfokú nyírási gerendamodelljénél* a keresztmetszeti pontok hosszirányú $w(z, y)$ eltolódását az alábbi módon írjuk le:

$$w(z, y) = y\phi_x(z) - \frac{4}{3h^2} y^3 \left(\phi_x + \frac{dv_0}{dz} \right), \quad (3)$$

ahol h a keresztmetszeti magasság, ϕ_x pedig a keresztmetszet x tengely körüli elfordulása. Ez a modell téglalap keresztmetszet esetén kielégíti a keresztmetszet alsó és felső peremén érvényes peremfeltételeket, azonban valójában mindig az adott keresztmetszetre levezetett öblösödési függvényt kellene alkalmazni ahhoz, hogy a modell elméleti szempontból korrekt legyen. A gerendaelméletet az alábbi differenciálegyenlet-rendszer írja le:

$$-\frac{d}{dx} \left(\bar{D}_x \frac{d\phi_x}{dz} - \frac{4}{3h^2} \hat{F}_x \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) + \bar{A}_y \left(\phi_x + \frac{dv_0}{dz} \right) = 0, \quad (4a)$$

$$-\frac{4}{3h^2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\hat{F}_x \frac{d\phi_x}{dz} - \frac{4}{3h^2} H_x \frac{d^2 v_0}{dz^2} \right) - \frac{d}{dx} \left[\bar{A}_y \left(\phi_x + \frac{dv_0}{dz} \right) \right] = q_y, \quad (4b)$$

amelyben q_y a gerendára ható függőleges megoszló teher intenzitása (az egyenletekben szereplő eddig nem ismertett konstansokat a *Függelékben* (F1–F3) foglaltuk össze).

Az 1. ábrán látható konzol esetén, ennek a modellnek az alkalmazásával az alábbi lehajlásfüggvényt kapjuk eredményül:

$$v_0 = + \frac{FL}{EI_x} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6L} \right) + \frac{\mu}{\lambda^3} F \frac{\bar{D}_x}{D_x \bar{A}_y} (\tanh(\lambda L) \cosh(\lambda L) - \sinh(\lambda L) + \lambda L - \tanh(\lambda L)). \quad (5)$$

A hiperbolikus nyírási gerendamodellnél a keresztmetszeti pontok z irányú elmozdulásait az y koordináták szinusz hiperbolikus z függvényeként írjuk le az alábbi módon:

$$w(z, y) = -y \frac{dv_0}{dz} + \left[y \cosh\left(\frac{1}{2}\right) - h \sinh\left(\frac{y}{h}\right) \right] \varphi(z), \quad (6)$$

ahol $\varphi(z)$ függvényt (ami a keresztmetszet semleges tengely körüli elfordulásával van összefüggésben) az adott feladatnál érvényes peremfeltételek figyelembevételével kell meghatározni [Ghugal–Sharma, 2011]. A gerendaelmélet differenciálegyenlet-rendszere a következő módon alakul (az egyenletekben szereplő eddig nem ismertett konstansokat a *Függelékben* (F4–F5) foglaltuk össze):

$$EI_x \frac{d^4 v_0}{dz^4} - EI_x A_0 \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = q_y, \quad (7a)$$

$$EI_x A_0 \frac{d^3 v_0}{dz^3} - EI_x B_0 \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + GAC_0 \varphi = 0. \quad (7b)$$

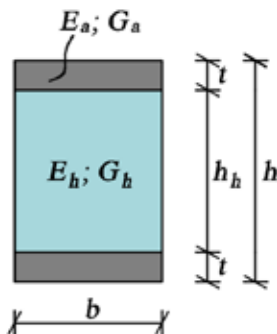
Az 1. ábrán látható konzol esetén az alábbi lehajlásfüggvényt kapjuk eredményül:

$$v_0(z) = + \frac{FL^3}{6EI_x} \left(3 \frac{z^2}{L^2} - \frac{z^3}{L^3} \right) + \frac{6FL}{5GA} \left(\frac{z}{L} + \frac{\cosh(\lambda z) - \sinh(\lambda z) - 1}{\lambda L} \right). \quad (8)$$

A fent említett *kétdimenziós nyírási modellek* már figyelembe vették a keresztmetszetek síkra merőleges (z tengely irányú) torzulását, azonban a keresztmetszeteket síkjukban ezek is végtelenül merevnek tekintették, ez pedig az ún. *Poisson-hatás elhanyagolását* eredményezte. Megemlítjük, hogy ennek a problémának a megoldására ún. *háromdimenziós gerendamodellek* [Carrera–Giunta–Petrolo, 2011] is ismertek, melyek már a síkbeli, és a síkra merőleges keresztmetszeti torzulást is figyelembe veszik.

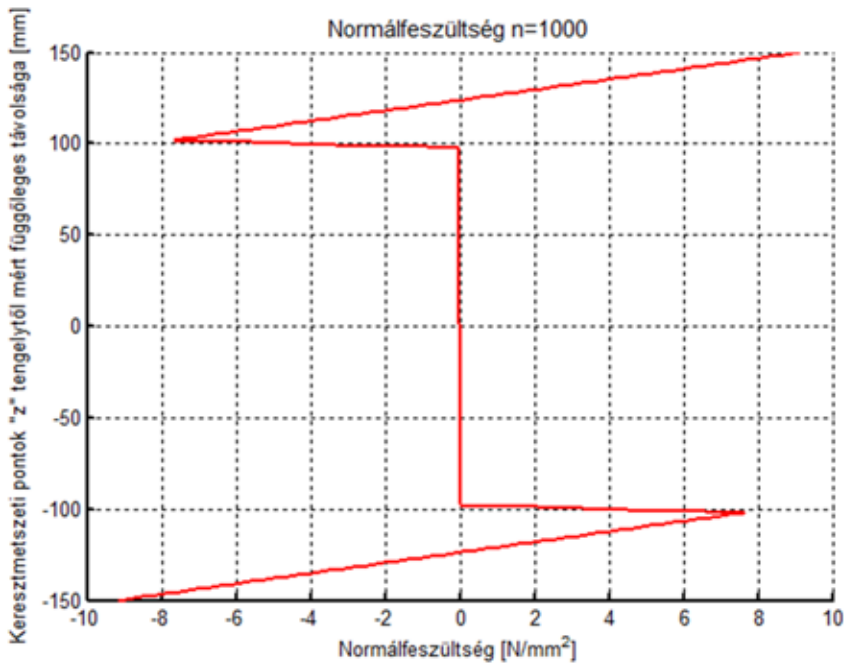
Terjedelmi okokból a feszültségek számításának részletezésétől eltekintünk. Ennek részletei a *Timoshenko- és Reddy–Bickford-modellre* vonatkozóan a [Wang–Reddy–Lee, 2000] alatti könyvben, míg a *hiperbolikus modell* esetén a [Ghugal–Sharma, 2011] alatti cikkben találhatók.

Homogén keresztmetszetű gerendák mellett röviden érintjük a *szendvics keresztmetszetű gerendák* vizsgálatát is. Ezek általában két merev és igen vékony *kéregrétegből*, valamint az ezeket elválasztó, viszonylag puha és vastag *magból* állnak (2. ábra).



2. ábra. Szendvics keresztmetszet jelölései

Az ilyen gerendáknál a *nyírási merevség hajlítási merevséghez* viszonyított aránya drasztikusan lecsökkenhet a homogén keresztmetszetekre jellemző értékekhez képest, mert általában a keresztmetszeti terület jelentős részét a kis nyírási modulussal rendelkező mag foglalja el. Ez oda vezet, hogy *szendvics keresztmetszetű gerendáknál* a *nyírási alakváltozásoknak* kiemelt szerepük van. Továbbá, az ilyen a gerendák viselkedése nagyban függ attól, hogy az egyes rétegek milyen anyagból készülnek. A 3. ábra ezt illusztráló példaként azt mutatja, hogy az 1. ábrán látható konzol középső keresztmetszeténél puha belső mag ($n = E_a/E_h = 1000$) esetén hogyan alakul a normálfeszültségek eloszlása.



3. ábra. Hosszirányú normál feszültségek eloszlása ($x = 0$ -nál) a középső keresztmetszetben $n = 1000$ esetén (a számítás további bemenő adatai a következő bekezdésben a numerikus számítások részletezésénél olvashatók)

A fenti ábrán az látható, hogy a felső (az 1. ábrán látható konzol esetén „elvileg húzott”) kéregben nyomófeszültségek, az alsó („elvileg nyomott”) kéregben pedig húzófeszültségek is megjelennek. Ennek az az oka, hogy amikor a belső vastag mag (a kéregrétegekhez képest) nagyon kis merevségű anyagból készül, akkor a kéregrétegek nem az $y = 0$ -hoz tartozó semleges tengely, hanem egy „saját” tengely körül fordulnak el, így módon a puha mag nem biztosítja a kéregrétegek tökéletes együtdolgozását.

A legegyszerűbb modellnél, az ún. *mérnöki szendvicselméletben* ugyanazokkal a kinematikai feltételezésekkel élünk, melyeket korábban a *Bernoulli–Navier-elmélet* kapcsán már ismertettünk, így a lehajlásfüggvény az (1) alatti képlethez hasonlatos. Az inhomogén keresztmetszet hajlítási merevségét (D) az alábbi módon számíthatjuk:

$$D = 2E_a \left(\frac{bt^3}{12} + bt \left(\frac{h_h}{2} + \frac{t}{2} \right)^2 \right) + \frac{E_h b h_h^3}{12}. \quad (9)$$

A *mérnöki elmélet* alkalmazásakor a nyírási alakváltozásokat elhanyagoljuk, valamint nem kerül sor arra, hogy megvizsgáljuk a keresztmetszet együtdolgozásának

kérdését. Ez a modell így komoly hiányosságokat tartalmaz, ezért nem célszerű *szendvicsgerendák* mechanikai vizsgálatakor alkalmazni.

A *Timoshenko-modell* elméleti hátterét a homogén, izotrop anyagú gerendák vizsgálatakor már röviden ismertettük. Az ott említett alapfeltevések a *szendvics keresztmetszetű gerendák* vizsgálatakor is érvényesek. Ezek alapján a konzol lehajlásfüggvényét az alábbi képlettel határozhatjuk meg:

$$v_0(z) = +\frac{Fz}{\kappa S} + \frac{FL}{D} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6L} \right), \quad (10)$$

ahol S a *nyírási merevség*, melyet a következőképpen számolhatunk ki:

$$S = 2G_a b t + G_h b h_h. \quad (11)$$

Mint azt korábban már láttuk, a *Timoshenko-elmélet* alkalmazásakor az egyik legfontosabb lépés a megfelelő κ *nyírási korrekciós tényező* felvétele. Szendvics keresztmetszetű gerendák esetén az ennek meghatározására irányuló módszerek eredményei között olykor jelentős – akár több nagyságrendbeli – eltérést tapasztalunk.

Léteznek olyan eljárások, melyek szerint κ értéke független a keresztmetszet geometriai és merevségi viszonyaitól. Ide tartozik például az a módszer, amelynél a *nyírási korrekciós tényezőt* az alapján vesszük fel, hogy a *Timoshenko-elmélettel* meghatározott nyírófeszültségek keresztmetszetre vonatkozó átlaga egyenlő legyen a *rugalmasságtan* összefüggései alapján kapott nyírófeszültségek átlagával. Ezzel a módszerrel – a részletek ismertetése nélkül – a (12) alatti eredményre jutunk [Birman–Bert, 2002] (mely a 2. ábrán látható kétszeresen szimmetrikus keresztmetszet esetén $\kappa = 1$ -et ad eredményül):

$$\kappa = -\frac{D}{\int_{-h/2}^{h/2} \left[\int_{-h/2}^y E(y) y dy \right] dy}. \quad (12)$$

Némelyik modell esetén a *nyírási korrekciós tényező* meghatározására szolgáló képletek a *szendvicskeresztmetszet geometriai jellemzőit* tartalmazzák, azonban a *merevségi viszonyokat* nem. Erre példa egy dinamikai vizsgálatokon alapuló módszer, amelynél a *szendvics keresztmetszetű gerendát* *diszkrét tömegekből* álló rendszerrel helyettesítik [Birman–Bert, 2002]. Ennél az elméletnél a *nyírási korrekciós tényezőt* szimmetrikus keresztmetszetű gerenda (2. ábra) esetén az alábbi összefüggéssel határozhatjuk meg:

$$\kappa = \left(1 + \frac{t}{h_h} \right)^2. \quad (13)$$

Ezenfelül olyan módszerek is léteznek, melyeknél a *nyírási korrekciós tényező* meghatározására szolgáló képletek a szendvicskeresztmetszet *geometriai és merevségi jellemzőit* egyaránt tartalmazzák. Erre példa az ún. *Reuss-módszer* [Rikards, 1999], melynek alapgondolata, hogy a *nyírási rugalmassági modulus* értékét az alábbi módon átlagoljuk a keresztmetszet mentén:

$$\frac{1}{G_R} = \sum_{k=1}^K \frac{1}{G^k} \frac{h^k}{h}, \quad (14)$$

ahol G_R a *Reuss-szerinti* átlagolt *nyírási rugalmassági modulus*, K pedig a rétegek száma. Ez alapján a 2. ábrán látható szimmetrikus keresztmetszet esetén a *nyírási korrekciós tényező* a következőképpen alakul:

$$\kappa = \frac{1}{\left(2 \frac{t}{h} \frac{1}{G_a} + \frac{h_h}{h} \frac{1}{G_h}\right) \left(2 \frac{t}{h} G_a + \frac{h_h}{h} G_h\right)}. \quad (15)$$

Egy másik, ebbe a csoportba tartozó eljárás az, amelynél a *rugalmasságtan összefüggéseivel* és a *lineáris nyírási elmélettel* kapott *nyírási alakváltozások* keresztmetszeti területen vett *integrálját* teszik egyenlővé a megfelelő *nyírási korrekciós tényező* felvételével [Birman–Bert, 2002]. A 2. ábrán látható *szendvicskeresztmetszet* esetén ez az alábbi formát ölti:

$$\kappa = \frac{2}{3} \frac{E_a \left[1 - (h_c^*)^3\right] + E_h (h_c^*)^3}{\left[G_a (1 - h_c^*) + G_h h_c^*\right] \left[\frac{E_a}{G_a} \left[\frac{2}{3} - h_c^* + \frac{1}{3} (h_c^*)^3\right] + \frac{E_a}{G_h} h_c^* \left[1 - (h_c^*)^2\right] + \frac{2}{3} \frac{E_h}{G_h} (h_c^*)^3\right]}, \quad (16)$$

ahol $h_c^* = h_h/h$.

Mint azt az imént láttuk, a *Timoshenko-modellek* családjába tartozó módszerek között jelentős különbségek vannak abban, hogy a *nyírási korrekciós tényezőt* hogyan származtatják, így ezek eredményei is jelentősen eltérhetnek egymástól. Megemlítjük továbbá, hogy ezen modellek egyike sem vizsgálta a keresztmetszet együttlétezésének kérdését, mindegyiknél *tökéletesen együttlétező* („összetett”) keresztmetszetet feltételeztünk.

Az imént említett modelleken túl *Allen modelljével* [Allen, 1969] is elvégezzük a számításokat. Ennek a modellnek az alkalmazásakor a kéreg nyírási alakváltozásait elhanyagoljuk, és a mag nyírási szögtorzulásainak meghatározásakor pedig külön figyelmet szentelünk annak, hogy a keresztmetszetet „vékony” vagy pedig „vastag” kéregrétegek alkotják. Ezen felül itt már a keresztmetszet együttlétezésének kérdése is vizsgálható (a részletek a hivatkozott műben megtalálhatók). Az 1. ábrán látható konzol lehajlásfüggvénye az alábbi módon írható fel:

$$v_0(z) = + \frac{FL}{D} \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6L} \right) + \frac{FL}{A_s G_h} \left(1 - \frac{I_a}{I_s} \right)^2 \left(\frac{z}{L} - \frac{\sinh(a_s z) + \beta_1 (1 - \cosh(a_s z))}{a_s L} \right), \quad (17)$$

ahol:

$$d = h_h + t, \quad A_s = \frac{bd^2}{h_h}, \quad I_a = \frac{bt^3}{6}, \quad I_s = \frac{bt^3}{6} + \frac{btd^2}{2}, \quad a_s^2 = \frac{A_s G_h}{E_a I_a (1 - I_a / I_s)}, \quad (18a)$$

valamint:

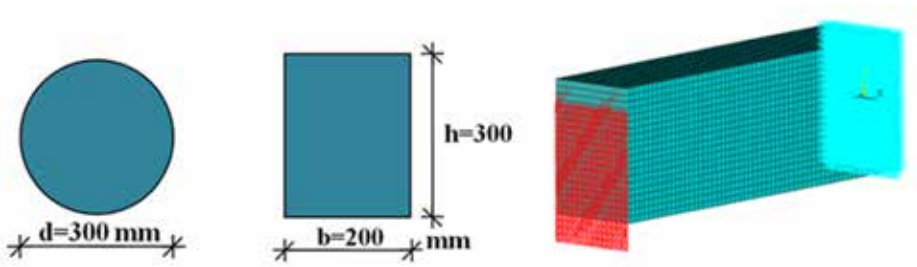
$$\beta_1 = \frac{\sinh \theta - (1 - \cosh \theta) \tanh \phi}{\sinh \theta \tanh \phi + \cosh \theta}, \quad \text{ahol } \theta = \frac{a_s L}{2}, \quad \phi = 0. \quad (18b)$$

A kéregben keletkező maximális normálfeszültség eloszlása a gerenda hossza mentén az alábbi függvénnyel írható le:

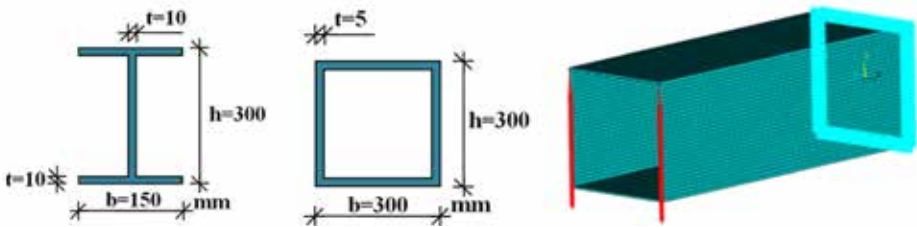
$$\sigma_z(z) = FL \left[\left(\left(1 - \frac{z}{L} \right) - \frac{\beta_1 \cosh(a_s z) - \sinh(a_s z)}{a_s L} \right) \frac{h_h + 2t}{2t} + \frac{\beta_1 \cosh(a_s z) - \sinh(a_s z)}{a_s L} \frac{t}{2I_a} \right]. \quad (19)$$

AZ ÖSSZEHASONLÍTÁS NUMERIKUS MÓDSZEREI

Munkánkban a gerendamodellek eredményeit a klasszikus kontinuummechanikai megközelítéssel kapott („pontosnak” tekintett) eredményekkel hasonlítjuk össze. A rugalmasságtani összefüggések bonyolultsága miatt a kontinuummechanikai eredményeket numerikusan, *3D végeselemes szimulációk* segítségével állítjuk elő. Az *izotrop gerendák* vizsgálatok a numerikus számításokat az *1. ábrán* látható konzolra *téglalap, kör, négyzet alakú zártszelvény*, valamint *I keresztmetszetű* gerendákra végezzük el. A vizsgálatokat a keresztmetszeti méretek változtatása nélkül különböző gerendahosszokra hajtjuk végre, és az egyes modellekkel kapott eredményeket az adott h/L arány ismeretében adjuk meg. A végeselemes futtatásokat az *Ansys 15.0* szoftverrel végeztük el, a számításokhoz 20 csomópontos *Solid186*-os testelemeket használtunk. Az alkalmazott kör és téglalap keresztmetszet, valamint egy téglalap keresztmetszetű gerenda *végeselemes modellje* a *4. ábrán* látható. A befogásnál a támaszkeresztmetszeten lévő csomópontok eltolódásait mindhárom irányban gátoltuk. A feladatban az anyagi állandókra az acélra jellemző értékeket használtuk, $E = 210$ GPa, $G = 81$ GPa és $\nu = 0,3$ (*Poisson-tényező*). A konzolvégen a terhelés $F = 100$ kN volt. Tömör keresztmetszetű gerendák esetén a koncentrált F erő nagyságát egyenletesen szétosztottuk a végkeresztmetszeten lévő csomópontokra (*4. ábra*).



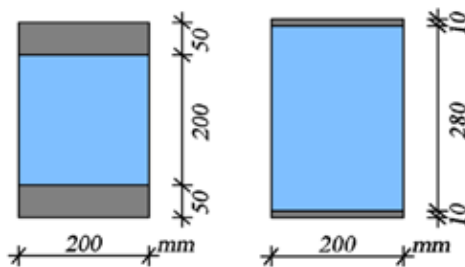
4. ábra. Kör és téglalap keresztmetszet, valamint a gerenda végelemes modellje



5. ábra. Vékonyfalú keresztmetszetek és a gerenda végelemes modellje

Az I- és vékonyfalú zártszelvényű gerendák esetén a terhet a gerinc csomópontjaira helyeztük rá. Ezeknek a gerendáknak a keresztmetszete és egyik végelemes modellje az 5. ábrán látható.

A megfelelő pontosság elérése céljából a numerikus számításokat minden esetben *konvergenciavizsgálattal* kezdtük. A konvergencia ellenőrzésekor a konzolvég lehajlását és a középső – peremzavartól mentes – keresztmetszet ($x = 0$ -hoz tartozó) szélso szálban ébredő feszültségeit vizsgáltuk. A különböző elemszámmal kapott eredmények sorozatának konvergenciája alapján, a végelelemmódszerrel kapott eredményeink relatív hibája a pontos eredményekhez viszonyítva várhatóan a tízezredes nagyságrenden belül alakul. A különböző gerendamodellekhez szükséges analitikus számításokat a *Matlab R2014a* szoftver segítségével végeztük el.



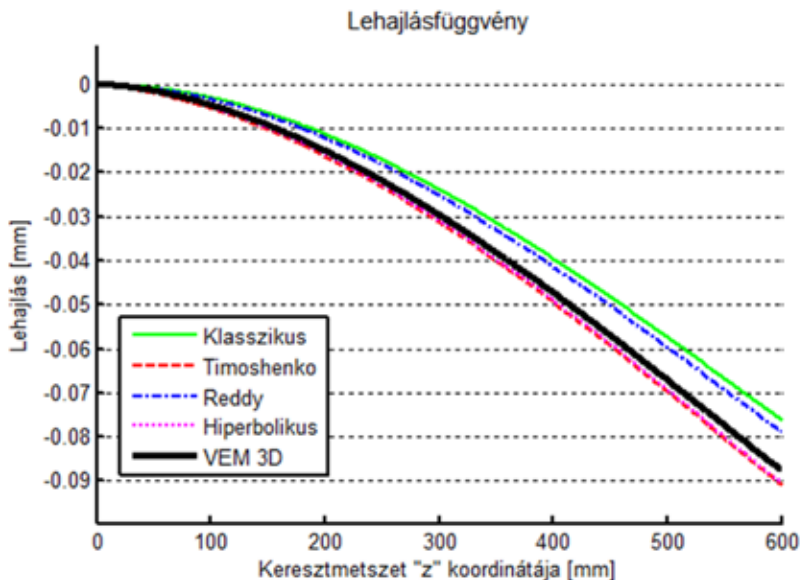
6. ábra. „Vastag” és „vékony” kéreggel rendelkező keresztmetszeti kialakítás

Szendvics keresztmetszetű gerendák esetén, azért, hogy megvizsgálhassuk, hogy a *keresztmetszet geometriai viszonyai* hogyan befolyásolják a kapott végeredmények pontosságát, a számításokat kétféle keresztmetszettípusra készítettük el (6. ábra).

A vizsgált szerkezet itt is az 1. ábrán látható konzol volt. A számításokat különböző rugalmassági modulussal rendelkező magréteg esetére végezzük el azért, hogy megfigyelhessük, hogy a *merevségi viszonyok változása* milyen hatást gyakorol az eredmények pontosságára (a kéregréteg anyagjellemzői megegyeznek az izotrop gerendáknál alkalmazottakkal). Jelen számítások során a terhelést ($F = 10$ kN) egyenletesen osztottuk szét a gerenda végkeresztmetszetén fekvő csomópontjai mentén, melyből adódóan puha magréteg esetén a terhelt csomópontok közvetlen környezetében viszonylag nagy elmozdulások és alakváltozások alakulhatnak ki. Azért, hogy ez a lokális hatás ne befolyásolja a kapott eredményeket, a pontok függőleges eltolódását a kéregrétegekben határoztuk meg. A feszültségek vizsgálatánál ezúttal is a gerenda középső keresztmetszetét vizsgáltuk.

EREDMÉNYEK

A következőkben bemutatjuk az *izotrop anyagú gerendák* vizsgálatakor kapott fontosabb eredményeket. A 7. ábrán az látható, hogy egy $L = 60$ cm hosszú, téglalap keresztmetszetű gerenda vizsgálatakor a *lehajlásfüggvény* hogyan alakult a különböző modellek esetén.



7. ábra. 60 cm hosszú téglalap keresztmetszetű gerenda lehajlásai különböző modellek alapján

1. táblázat. Konzolvég lehajlásának relatív hibái a végeleemes szimulációk eredményéhez viszonyítva

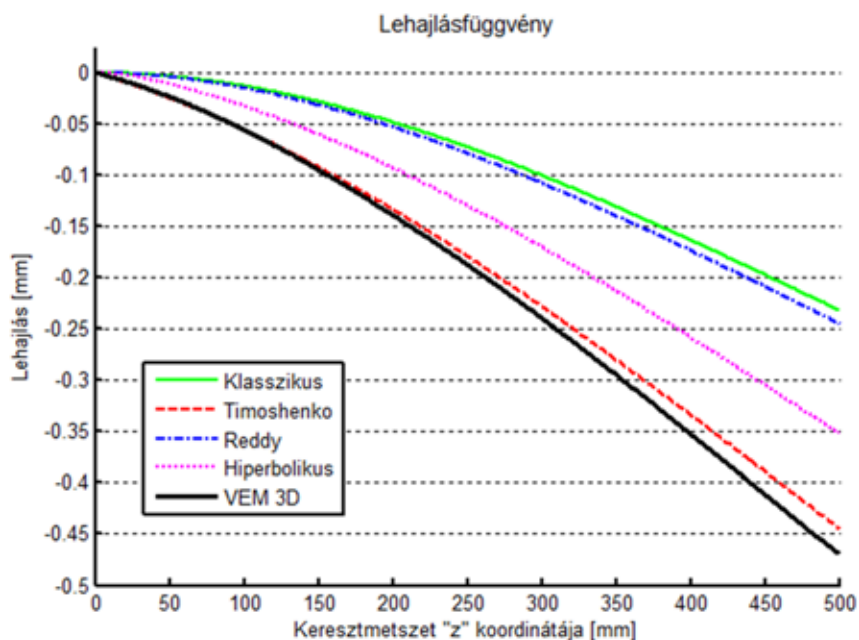
h/L	0,6	0,5	0,333	0,2
Bernoulli–Navier	–17,49%	–12,73%	–4,70%	–0,82%
Timoshenko	5,52%	4,21%	3,57%	2,27%
Reddy–Bickford	–13,19%	–9,53%	–3,11%	–0,22%
Hiperbolikus	4,77%	3,76%	3,42%	2,23%

A téglalap keresztmetszetű konzolok végkeresztmetszetének lehajlására végzett számítások eredményeit az 1. táblázatban foglaltuk össze. Ez a táblázat az egyes gerendamodellekkel kapott eredmények relatív hibáját tartalmazza a végeleemes számítások eredményéhez viszonyítva (a táblázatban szereplő negatív előjel arra utal, hogy az adott modell alábecsüli a lehajlás értékét).

Terjedelmi okokból a kör keresztmetszetű gerendára végzett számítások eredményeit nem részletezzük, ugyanis ennek vizsgálatakor az iméntihez hasonló eredményeket kaptunk.

Vékonyfalú zártszelvényű, $L = 50$ cm hosszú gerenda esetén, a 8. ábrán látható lehajlásfüggvényeket kaptuk eredményül.

Az egyes gerendamodellek maximális lehajlásra kapott eredményeinek relatív hibáját a 2. táblázatban foglaltuk össze.

**8. ábra.** 50 cm hosszú vékonyfalú zártszelvényű gerenda lehajlása különböző modellek alapján

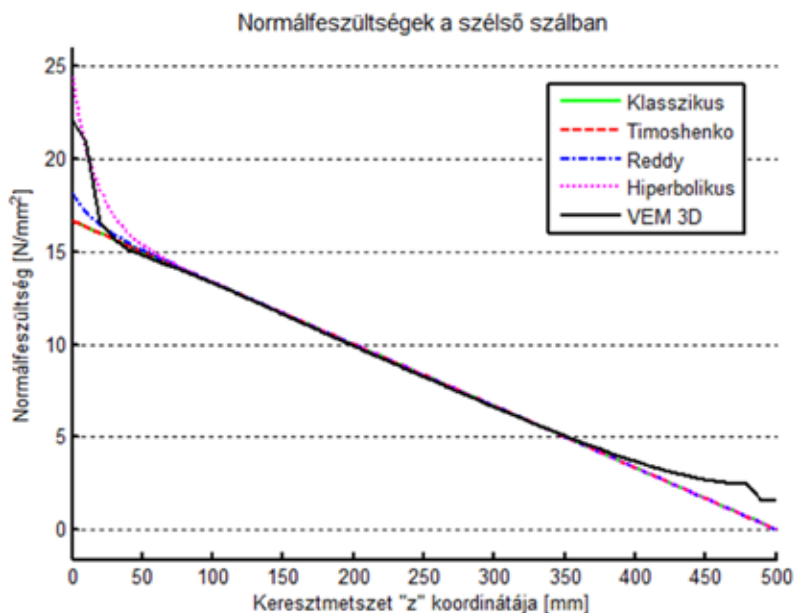
2. táblázat. Konzolvég lehajlásának relatív hibái a végeleemes szimulációk eredményéhez viszonyítva

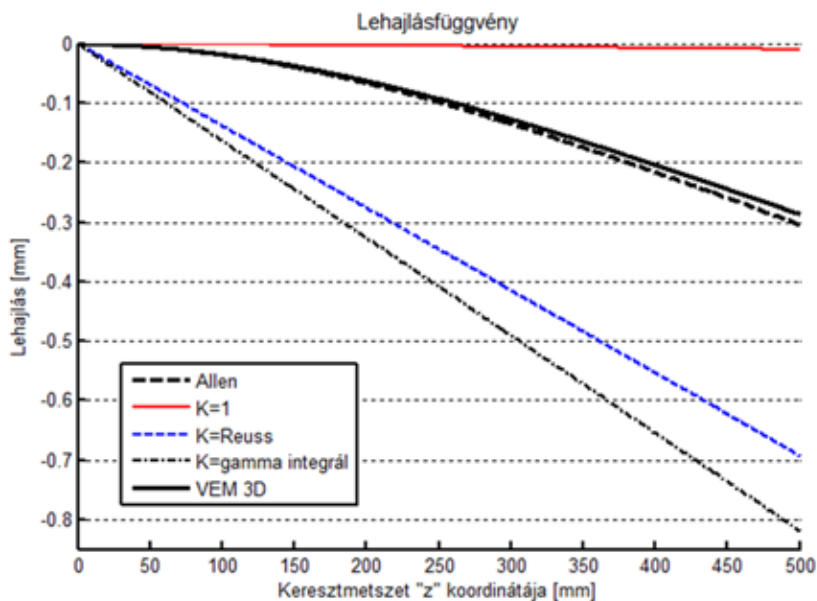
h/L	0,6	0,5	0,333	0,2
Bernoulli–Navier	–50,57%	–41,01%	–23,44%	–9,39%
Timoshenko	0,67%	1,45%	1,05%	1,04%
Reddy–Bickford	–47,82%	–38,71%	–22,10%	–8,80%
Hiperbolikus	–25,02%	–19,67%	–10,97%	–4,02%

Megjegyezzük, hogy az I keresztmetszetű gerendák vizsgálatokor kapott eredmények hasonlóak a 8. ábrán és a 2. táblázatban látottakhoz, így ezeket itt nem részletezzük.

A lehajlások elemzését követően a *hosszirányú normálfeszültségek* vizsgálatára térünk rá. Egy $L = 50$ cm hosszú, téglalap keresztmetszetű gerenda esetén, a felső szélső száiban keletkező normálfeszültségek koordináta szerinti változását a 9. ábra mutatja.

A fenti ábra alapján látható, hogy a feszültségek számításakor minden modell többé-kevésbé ugyanarra az eredményre vezetett. Megjegyezzük, hogy a végeleemes számítások eredményeinél a gerenda két végén jól kivehetők a *Saint-Venant-féle lokális hatások*, melynek részletesebb vizsgálatától eltekintettünk. A feszültségek 9. ábrán látható egyezésének az az oka, hogy az általunk vizsgált gerenda statikailag határozott konzol volt.

**9. ábra.** 50 cm hosszú téglalap keresztmetszetű gerenda feszültségei különböző modellek alapján



10. ábra. 50 cm hosszú, „vastag” kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása $n = 1000$ esetén

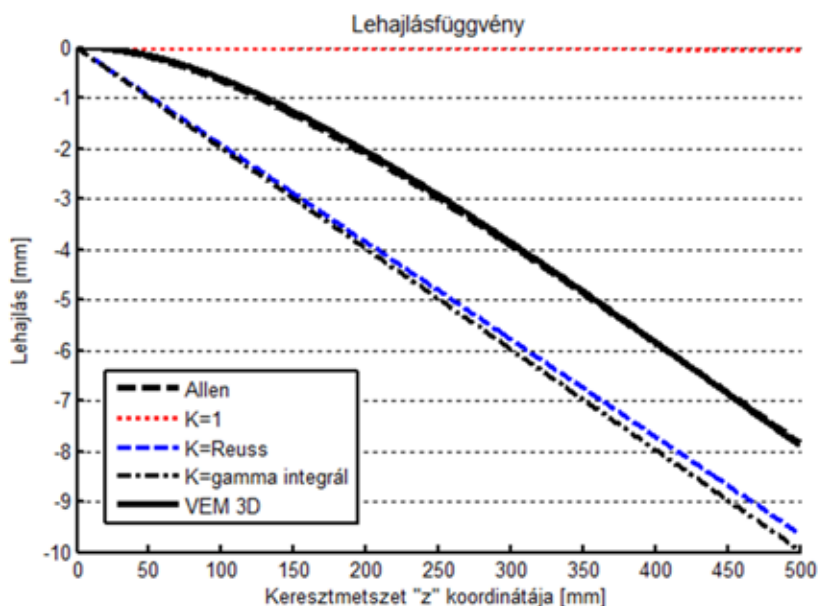
A továbbiakban rátérünk a *szendvics keresztmetszetű gerendák lehajlásainak* vizsgálatára. Először „vastag” kéreggel (6. ábra) rendelkező szendvicsgerendákkal foglalkozunk. Egy $L = 50$ cm hosszú, puha belső maggal ($n = 1000$) rendelkező gerenda vizsgálata esetén a 10. ábrán látható lehajlásfüggvényeket kaptuk eredményül.

A maximális lehajlásokra kapott eredmények (a végeselemes számításokhoz viszonyított) relatív hibáját különböző értékek esetén a 3. táblázat tartalmazza.

Azért, hogy megvizsgáljuk a *geometriai viszonyok* egyes modellek megbízhatóságára gyakorolt hatását, a „vékony” kéreggel rendelkező keresztmetszetű (6. ábra) konzolokra is elvégezzük a számításokat. Például $n = 10000$ esetén az alábbi lehajlásfüggvényeket (11. ábra) kaptuk eredményül:

3. táblázat. Konzolvég lehajlásának relatív hibái ($L = 50$ cm, $t = 5$ cm)

n	10	100	1000	10000
Ménoiki elmélet	-60,53%	-92,09%	-97,79%	-98,44%
Timoshenko ($\kappa = 1$)	-43,42%	-88,14%	-96,74%	-97,67%
Timoshenko ($\kappa = \text{Reuss}$)	-13,16%	-4,08%	142,64%	1605,24%
Timoshenko ($\kappa = \text{dinamika}$)	-49,34%	-89,54%	-97,13%	-97,96%
Timoshenko ($\kappa = \gamma_{zy} \text{ int.}$)	-5,27%	11,99%	186,90%	1919,05%
Allen modellje	-2,63%	-1,40%	6,24%	11,82%



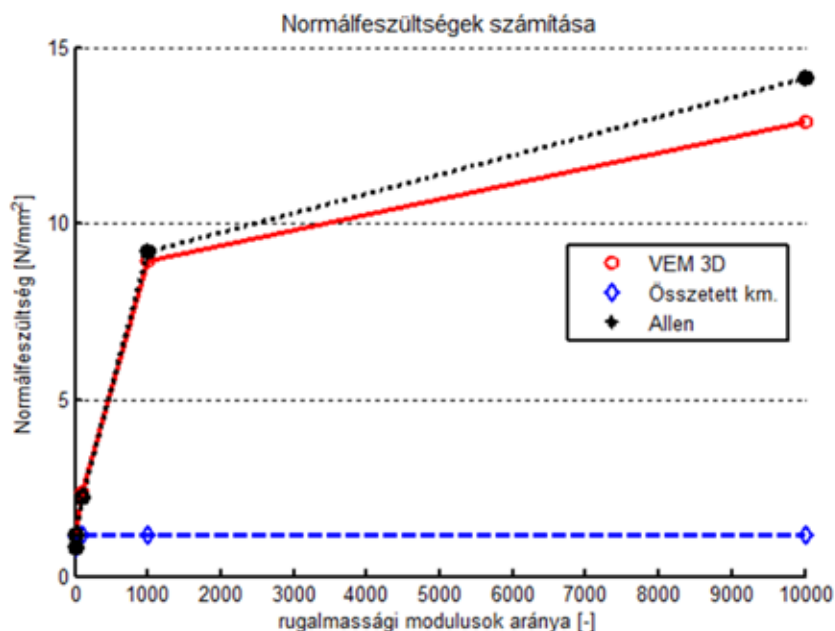
11. ábra. „Vékony” kéreggel rendelkező szendvics keresztmetszetű gerenda lehajlása $n = 10000$ esetén

A maximális lehajlásokra kapott eredmények (a végeselemes számításokhoz viszonyított) relatív hibáját különböző n értékek esetén a 4. táblázat tartalmazza.

Az izotrop anyagú gerendák vizsgálatakor megfigyelhettük, hogy statikailag határozott tartó esetén, noha a nyírási alakváltozások következtében a lehajlásra kapott eredmények között volt némi különbség, a feszültségekre igen pontos eredményeket kaptunk (9. ábra). Sajnos ez a megállapítás már nem lesz igaz abban az esetben, amikor szendvicsgerendák esetén a kéregrétegek együttdolgozásának vizsgálatától eltekintünk. Ezt mutatja a 12. ábra, ahol a középső keresztmetszet szélső szálban számított normálfeszültségét ábrázoltuk különböző merevségi viszonyok esetén.

4. táblázat. Konzolvég lehajlásának relatív hibái ($L = 50$ cm, $t = 1$ cm)

n	10	100	1000	10000
Mérnöki elmélet	-40,74%	-81,45%	-97,68%	-99,70%
Timoshenko ($\kappa = 1$)	-14,81%	-70,97%	-96,06%	-99,50%
Timoshenko ($\kappa = \text{Reuss}$)	-3,70%	-4,03%	-0,61%	22,28%
Timoshenko ($\kappa = \text{dinamika}$)	-18,52%	-71,77%	-96,16%	-99,52%
Timoshenko ($\kappa = \gamma_{zy} \text{ int.}$)	-3,70%	-1,61%	2,73%	26,44%
Allen modellje	0,00%	-1,29%	-1,79%	-0,54%



12. ábra. Középső keresztmetszet ($\alpha = 0$ -hoz tartozó) szélső szálban keletkező normálfeszültségek változása a rugalmassági modulusok arányának függvényében

ÉRTÉKEKELÉS

Eredményeink azt mutatják (1. és 2. táblázat), hogy rövid, izotrop anyagú gerendák esetén a különböző gerendamodellekkel kapott lehajlások olykor jelentősen eltérhetnek egymástól, és ezen eltérések mértéke nagyban függ a gerenda h/L arányától, valamint a keresztmetszet alakjától (elsősorban az inercia és keresztmetszeti terület arányától).

A klasszikus gerendamodellek szolgáltatott lehajlások rövid gerendáknál az összes keresztmetszet esetén számottevő eltérést mutatnak a pontos eredményekhez képest. Ez az eltérés $h/L \approx 0,5$ esetén tömör – téglalap és kör – keresztmetszeteknél körülbelül 15–20%, míg $h/L \approx 0,333$ -nál már 5%-nál kisebb hibáról beszélhetünk (1. táblázat). Vékonyfalú I és négyzet alakú zárt keresztmetszetek esetén a hiba az előbbieknél több mint kétszerese, 46–51% volt ($h/L \approx 0,6$ esetén), vagyis, a Bernoulli–Navier-modell eredményei rövid gerenda esetén olykor még a felét sem éri el a tényleges lehajlásoknak, és még $h/L \approx 0,2$ -nél is éppenhogy csak 10%-on belüli a hiba (2. táblázat).

A Timoshenko-modell eredményei nagyon megbízhatónak tűnnek, ugyanis minden esetben 5% körüli, vagy annál kisebb hibáról beszélhetünk. Ez abból adódik,

hogy a *nyírási korrekciós tényező* alkalmazásával a modell esetleges elméleti hiányosságait kompenzáljuk.

A *Reddy–Bickford-féle harmadfokú nyírási modell* eredményei nem igazán meggyőzőek. Rendszerint csak viszonylag kis mértékben térnek el a *klasszikus modell* eredményeitől, ami felveti a kérdést, hogy vajon megéri-e a jóval hosszadalmasabb és bonyolultabb számítást elvégezni. Amennyiben olyan keresztmetszettel dolgozunk, amelyre könnyen meghatározható a *nyírási korrekciós tényező* megfelelő értéke, a *Timoshenko-modell* egyszerűbb és pontosabb megoldást szolgáltat (1. és 2. táblázat).

A *hiperbolikus modellel* kapott eredmények vegyes érzésekre adhatnak okot. Tömör keresztmetszetek esetén igen jó eredményeket kaptunk, a hiba ilyenkor minden esetben 5%-on belül alakult (1. táblázat). Ezzel ellentétben a vékonyfalú szelvények esetén jelentős, olykor 20–25%-os relatív hibát tapasztaltunk a *hiperbolikus modell* és a 3D végeselemes eredmények között (2. táblázat), vagyis numerikus eredményeink azt sugallják, hogy a *hiperbolikus modell* megbízhatósága erősen függ a keresztmetszet alakjától. A *hiperbolikus modell* olyan szempontból is érdekes, hogy az analitikus levezetésekénél látott $\phi(z)$ függvényen keresztül a modell a befogás környezetében nemlineáris, megnövekedett normálfeszültség eloszlással dolgozik (ez már a *Reddy–Bickford-modellre* is igaz volt), és így „kísérletet tesz” a lokális hatások miatti feszültségcsúcsok leírására (9. ábra).

Megjegyezzük, hogy a gerendamodellek lehajlásokra kapott hibájának egy része nem a nyírási alakváltozások hatására, hanem a támasznál keletkező lokális hatásokra vezethető vissza. Tekintve, hogy mindkét hiba jellemző a gerendamodellekre, annak vizsgálatára nem térünk ki, hogy a kapott hibák mekkora része származik az egyik, illetve másik hatásból.

Eredményeink, miszerint a *Timoshenko lineáris nyírási modellje* jobban teljesít az általunk vizsgált *magasabb fokú modelleknél*, esetleg némi meglepődésre adhat okot. Elmondható azonban, hogy a *magasabb fokú modellek* éppúgy két ismeretlen, egymástól független függvényt alkalmaztak a gerenda deformációinak a leírására, mint a *Timoshenko-modell*, aminél ráadásul a *korrekciós tényező* alkalmazásával a gerenda viselkedését a 3D szerkezet viselkedéséhez próbáltuk „illeszteni”.

Az izotrop anyagú gerendák feszültségeinek vizsgálatakor azt tapasztaltuk, hogy a statikailag határozott esetben az egyes modellek – a lokális hatásoktól eltekintve – jól közelítették a végeselemes szimulációk eredményét (9. ábra).

Általánosságban elmondható, hogy a *szendvics keresztmetszetű gerendák* eredményeiben nagyobb bizonytalanságokat figyelhattunk meg, mint a homogén, izotrop gerendáknál. Ennek egyik fő oka, hogy a nyírási alakváltozások általában jelentőssé válnak, és ezeket az alakváltozásokat az egyes modellek igen eltérően kezelik. A nyírási alakváltozások jelentősége oda vezet, hogy a *mérnöki elmélet* általában már nem ad reális eredményeket, sok esetben több nagyságrendnyi hibáról is beszélhettünk (3. és 4. táblázat). A nyírási alakváltozások hatásán túl megfigyelhattunk egy másik fontos jelenséget, nevezetesen, hogy a keresztmetszet merevségi viszonyainak megváltozásával a kéregrétegek együttdolgozásának mértéke is megváltozhat

(3. ábra). Ez azt eredményezi, hogy a lehajlások és feszültségek meghatározásakor sok esetben az együttdolgozó („összetett») keresztmetszetre jellemző értékekhez képest egy „csökkentett” inerciával és hajlítási merevséggel kellene számolni. Azzal, hogy a vizsgált modellek többsége minden esetben teljesen együttdolgozónak tekintti a keresztmetszetet, ezek a modellek a feszültségeket jelentősen alábecsülhetik (12. ábra).

Eredményeink összességében azt mutatják, hogy a *nyírási alakváltozásoknak* az eredmények pontosságára gyakorolt *hatása* nagyban függ a keresztmetszet *geometriai és merevségi viszonyaitól* (3. és 4. táblázat). Azok a *nyírási-modellek*, melyek a *nyírási korrekciós tényező* számításakor a fenti viszonyok közül csak az egyiket (vagy egyiket sem) veszik figyelembe, komoly hiányosságokkal bírnak. Ez oda vezet, hogy ezen modellek eredményei olykor nagyságrendekkel eltérnek a „pontos” értékektől.

Ezzel ellentétben azok a modellek, melyek a fent említett viszonyok mindegyikét figyelembe veszik, az esetek többségében „viszonylag pontos” eredményre vezetnek. Azonban fontos hangsúlyozni, hogy még ezeknek a viszonylag pontosabb nyírási modelleknek az eredményeit is bizonyos fenntartással kell kezelni, ugyanis ezeknek a modelleknek is megvan a maguk alkalmazhatósági korlátja. Ez abból adódik, hogy bizonyos merevségi viszonyok esetén (amikor a belső magréteg a kéregréteghez képest több nagyságrenddel kisebb merevségű anyagból készül) a *nyírási korrekciós értéke* túlzottan lecsökken. Ez a *nyírási alakváltozások* hatásának túlbecslésével jár, ami miatt a számított lehajlások számottevően meghaladják a „pontos” értékeket (10. ábra és 3. táblázat).

A feszültségek és a lehajlások eredményeinek összehasonlító elemzése arra a megállapításra vezetett, hogy a vizsgált szendvicsmodellek közül *Allen modellje* tekinthető a leginkább megbízhatónak. Ez a modell – azon túl, hogy a lehajlások vizsgálatakor is igen pontos eredményre vezetett – a feszültségek vizsgálatakor is megbízhatónak bizonyult, mely annak köszönhető, hogy – a többi modellel ellentétben – itt figyelembe vehető a keresztmetszet együttdolgozásának mértéke. Ezen felül ennél a modellnél nem tapasztaltunk olyan éles alkalmazhatósági korlátot, mint ami a vizsgált *Timoshenko-modellek* némelyikét (például a *Reuss-módszer*t) jellemzi (3. és 4. táblázat).

ÖSSZEFOGLALÁS

Cikkünkben *izotrop anyagú*, valamint *szendvics keresztmetszetű gerendák* mechanikai vizsgálatával foglalkoztunk. Koncentrált erővel terhelt konzolokra vonatkozóan különböző *gerendamodellekkel* meghatároztuk a *lehajlásokat* és a *feszültségeket*, majd ezeket *3D végeselemes szimulációk* eredményeivel hasonlítottuk össze.

Az *izotrop anyagú gerendák* vizsgálata során megállapítottuk, hogy tömör keresztmetszetek esetén az alkalmazott modelljeink megbízhatóak, ugyanis a nagyon zömök gerendák esetét leszámítva ($h/L < 0,4$) a lehajlások vizsgálatakor minden

esetben néhány százaléknál kisebb eltérést tapasztaltunk. A vékonyfalú keresztmetszetű gerendák vizsgálatakor azonban már nagyobb eltérésekről beszélhetünk. Némelyik modellnél még viszonylag karcsú gerenda esetén is ($h/L \approx 0,2$) közel 10%-os eltérést láthatunk a pontos eredményekhez képest. Egyúttal azt is láttuk, hogy kifejezetten rövid gerendák esetén $h/L \approx 0,6$ a klasszikus modell relatív hibája még az 50%-ot is meghaladta. Ezeknek a viszonylag nagy hibáknak az az oka, hogy vékonyfalú keresztmetszeteknél a hajlítási és nyírási merevség aránya megnövekszik, amitől a nyírási alakváltozások hatása jelentősebbé válik. Az egyes modellek összehasonlításakor a *Timoshenko-modell* eredményei bizonyultak a leginkább megbízhatóknak. Ennek legfőbb oka az, hogy ez a modell az ún. *nyírási korrekciós tényező* alkalmazásán keresztül kompenzálja a szerkezet viselkedésének leírásakor tett egyszerűsítéseket. Tömör keresztmetszetek esetén a hiperbolikus modell is viszonylag pontosnak bizonyult, azonban ennek a modellnek a megbízhatósága erősen függ a keresztmetszet alakjától.

A szendvics keresztmetszetű gerendáknál általában igen jelentős nyírási alakváltozásokról beszélhetünk, valamint arról, hogy a kéregrétegek együttdolgozása nem minden esetben biztosított. A lehajlások vizsgálata rámutatott arra, hogy a nagy nyírási alakváltozások következtében a modellek eredményei olykor számottevően (akár nagyságrendekkel) eltérnek a pontos megoldástól. Ebből adódóan a mérnöki modell az esetek többségében nem alkalmazható, de még az egyes *Timoshenko-modellek* alkalmazhatósága is sokszor megkérdőjelezhető. Sokféle *Timoshenko-modell* fellelhető a szakirodalomban, melyek a *nyírási korrekciós tényező* meghatározásának módjában különböznek egymástól. Számításaink azt mutatják, hogy azok a módszerek, melyek a korrekciós tényező meghatározása során nem veszik figyelembe a *keresztmetszet geometriai és merevségi viszonyait*, a legtöbb esetben nem javasolhatók. Azok a módszerek, melyek a fenti körülményeket figyelembe veszik, sok esetben viszonylag pontos eredményre vezetnek, azonban ezeknél is egy komoly *alkalmazhatósági korlát* figyelhető meg. Az imént említett modellek minden esetben teljes mértékben együttdolgozó keresztmetszettel számolnak, azonban a feszültségek vizsgálata rámutatott arra, hogy ez komoly hibákat okozhat. A vizsgált modellek közül *Allen modelljét* találtuk a leginkább megbízhatónak, ugyanis ez a modell az összes fent említett hatást figyelembe veszi, így mind a lehajlások, mind pedig a feszültségek vizsgálatánál igen pontos eredményre vezetett.

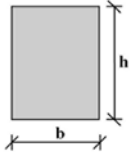
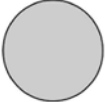
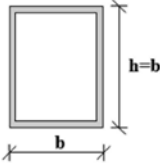
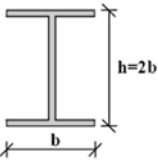
IRODALOM

- Allen, H. G.: *Analysis and Design of Structural Sandwich Panels*. Pergamon Press, Oxford, UK 1969.
- Bhat, S. U. – de Oliveira, J.G.: A Formulation for the Shear Coefficient of Thin-Walled Prismatic Beams. *Journal of Ship Research* 29 (1985) 1. 51–58.
- Bickford, W. B.: A Consistent Higher Order Beam Theory. *Developments in Theoretical and Applied Mechanics* (1982) 11. 137–150.
- Birman, V. – Bert, C. W.: On the Choice of Shear Correction Factor in Sandwich Structures. *Journal of Sandwich Structures and Materials* 4 (2002) 1. 83–95.

- Carrera, E. – Giunta, G – Petrolo, M.: *Beam Structures. Classical and Advanced Theories*. John Wiley and Sons, Chichester, West Sussex, UK 2011.
- Cowper, G. R.: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. *ASME Journal of Applied Mechanics* (1966) 33. 335–340.
- Ghugal, Y. M. – Sharma, R.: A refined shear deformation theory for flexure of thick beams. *Latin American Journal of Solids and Structures* (2011) 8. 183–195.
- Hazay, M.: Izotrop és anizotrop anyagú gerendák modelljeinek összehasonlítása 3D numerikus szimulációk eredményeivel. *TDK dolgozat, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Építőmérnöki kar*, Budapest 2015. <http://tdk.bme.hu/EMK/DownloadPaper/Izotrop-es-anizotrop-anyagu-gerendak> (2016.08.11).
- Heyliger, P. R. – Reddy, J. N.: A higher-order beam finite element for bending and vibration problems. *J. Sound and Vibration* 126 (1988) 2. 309–326.
- Kaneko, T.: On Timoshenko's correction for shear in vibrating beams. *Journal of Physics D: Applied Physics* 8 (1975) 16. 1927–1936.
- Nayfeh, A. H – Pai, P. F.: *Linear and Nonlinear Structural Mechanics*. John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, US 2004.
- Rikards, R.: Analysis of Laminated Structures. Course of Lectures. *Riga Technical University*, Riga 1999.
- Shi, G. – Voyiadjis, G. Z.: A Sixth-Order Theory of Shear Deformable Beams with Variational Consistent Boundary Conditions. *Journal of Applied Mechanics* 78 (2011) 2. 1019–1030.
- Stephen, N. G.: Timoshenko's Shear Coefficient from a Beam Subjected to Gravity Loading. *ASME Journal of Applied Mechanics* (1980) 47. 121–127.
- Timoshenko, S. P.: On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine* 6 (1921) 41. 742–746.
- Timoshenko, S. P.: On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. *Philosophical Magazine* 6 (1922) 43. 125–131.
- Wang, C. M. – Reddy, J. N. – Lee, K. H.: *Shear Deformable Beams and Plates. Relationships with Classical Solutions*. Elsevier Science, Kidlington, Oxford, UK 2000.

FÜGGELÉK

FI. táblázat. Nyírási korrekciós tényező lehetséges értékei az általunk vizsgált keresztmetszetek esetén (a számításainknál használt értékek félkövéren szerepelnek). A különböző módszerek összehasonlító elemzésével jelen cikkben nem foglalkozunk. Megjegyezzük, hogy a vizsgált keresztmetszeteknél az eltérő számítási módszerek közel azonos eredményre vezetnek.

Keresztmetszet	κ	Keresztmetszet	κ
	5/6		$\frac{6 + 12\nu + 6\nu^2}{7 + 12\nu + 4\nu^2}$
	$\frac{10(1 + \nu)}{24 + 17\nu}$; 0,4355 ; $\frac{A_{gerinc}}{A}$		0,4771 ; $\frac{A_{gerinc}}{A}$

Reddy–Bickford-modellnél alkalmazott jelölések:

$$(A_x, D_x, F_x, H_x) = \int_A (1, y^2, y^4, y^6) E \, dA; (A_y, D_y, F_y) = \int_A (1, y^2, y^4) G \, dA,$$

$$\widehat{D}_x = D_x - \frac{4}{3h^2} F_x; \widehat{F}_x = F_x - \frac{4}{3h^2} H_x; \widehat{A}_y = A_y - \frac{4}{h^2} D_y; \widehat{D}_y = D_y - \frac{4}{h^2} F_y,$$

$$\bar{A}_y = \widehat{A}_y - \frac{4}{h^2} \widehat{D}_y; \bar{D}_x = \widehat{D}_x - \frac{4}{3h^2} \widehat{F}_x,$$

$$\lambda^2 = \frac{3h^2}{4} \frac{\bar{A}_y D_x}{(F_x \widehat{D}_x - \widehat{F}_x D_x)}; \mu = \frac{3h^2}{4} \frac{\widehat{A}_y \widehat{D}_x}{(F_x \widehat{D}_x - \widehat{F}_x D_x)}.$$

Hiperbolikus modellnél alkalmazott jelölések:

$$\alpha = \frac{B_0}{A_0} - A_0, \beta = \frac{GAC_0}{EI_x A_0}, \lambda^2 = \frac{\beta}{\alpha},$$

$$A_0 = \cosh\left(\frac{1}{2}\right) - 12 \left[\cosh\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \sinh\left(\frac{1}{2}\right) \right],$$

$$B_0 = \cosh^2\left(\frac{1}{2}\right) + 6 [\sinh(1) - 1] - 24 \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \left[\cosh\left(\frac{1}{2}\right) - 2 \sinh\left(\frac{1}{2}\right) \right],$$

$$C_0 = \cosh^2\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) [\sinh(1) + 1] - 4 \cosh\left(\frac{1}{2}\right) \sinh\left(\frac{1}{2}\right).$$

COMPARISON OF BEAM MODELS

Summary

Analysis of the mechanical behaviour of beams has lasted for centuries, which has led to the evolution of many different beam theories. Each model contains certain assumptions and negligence compared to the classical continuum mechanical approach, which leads to their results being different from the exact solution. Considering that these differences in most cases are relatively small, beam theories are widely used among engineers, however, their reliable application requires the knowledge of their applicability limits and the magnitude of their errors. In this paper a comparison of several models of planar beams made of homogeneous and isotropic material or having sandwich cross section can be found. Deflections and stresses of beams are determined via different models for cantilevers and these results are compared to results obtained by 3D finite element simulation. The main goal of this study was to determine the magnitude of the error of beam theories and to make a recommendation about the applicability of these models. Results show that in case of beam made of isotropic material and compact cross section, beam theories are quite reliable, however, in case of beams having thin-walled or sandwich cross sections their results may differ significantly from the exact solution. In case of sandwich beams the reliability of the models is highly dependent on the geometrical and the stiffness characteristics of the cross section, therefore sometimes strict applicability limits should be assigned.

Keywords: classical beam theory, Timoshenko beam theory, effect of shear deformations, higher-order beam theories, sandwich beams, finite element simulations