14th

„Building Services, Mechanical and Building Industry days"

International Conference
30-31 October 2008

DEBRECEN, HUNGARY

14th „Building Services, Mechanical and Building Industry days"
International Conference, 30-31 October 2008, Debrecen, Hungary

DETERMINISZTIKUS MATEMATIKAI MODELL PARAMETRIKUS BIZONYTALANSÁGÁNAK ELEMZÉSE

POKORÁDI László, Prof. Dr.
Debreceni Egyetem, Műszaki Kar;
pokoradi@mfk.unideb.hu

Kulcsszavak: *diagnosztika, modellezés, modell bizonytalanság.*

Abstract:
Mathematical models have any types and measures of uncertainties. They occur from not correct information about system and not correct system parameters. The aim of this paper is to show the methodology of the linearized mathematical model's usage to investigate effects of parametrical model uncertainties.

1. Bevezetés

Egy matematikai modell felállításakor, illetve a kapott eredmények elemzésekor mindig számolnunk kell valamilyen fajtájú, és mértékű bizonytalansággal. Ennek oka részben az, hogy ismereteink sosem teljesek a modellezett rendszerrel kapcsolatban, illetve a rendelkezésre álló adataink is némi pontatlansággal bírnak. Integrált rendszerek tervezésekor nagy fontosságú kérdés a berendezések vagy az alkatrészek megengedhető paraméter-eltéréseinek, gyártási tűrésinek meghatározása.

A matematikai modellek parametrikus bizonytalanságával, illetve azok elemzési, leírási módszereivel Ferson és Tucker (Ferson, Tucker, 2006), illetve Möller és Beer, (Möller, Beer, 2007) foglalkozott. Hazánkban az integrált repülőgép rendszerek anomáliáinak kutatása Rohács vezetésével folyt (Rohács, Pokorádi, Óvári, Kavas, 2000). A repülőgéptörzs elasztikus mozgásának matematikai leírásával Szabolcsi foglalkozott. Tanulmányában igazolta, hogy az aeroelasztikus hajlító lengések irányítástechnikai jellemzői, az erősítési tényező, a sajátlengések frekvenciája, valamint a csillapítási tényező, a merev repülőgép repülésdinamikai jellemzőihez képest paraméterbizonytalanságként értelmezhetőek, melyek matematikai modellezésére az additív sémát javasolta (Szabolcsi, 1996). A Szerző témakörrel kapcsolatos korábbi eredményeit a (Pokorádi, 2002) és (Pokorádi, 2008) irodalmakban foglalta össze.

A cikk — a fent bemutatott publikációkra támaszkodva — a matematikai diagnosztikai modellek parametrikus bizonytalanságának intervallum elemzését mutatja be. A tanulmány az alábbifejezetekből áll: A 2. fejezet a modellbizonytalanság értelmezését írja le. A 3. fejezet a parametrikus bizonytalanság egy — a Szerző által kidolgozott — intervallumelemzési eljárást mutat be. A 4. fejezetben az intervallumelemzés inverz feladatának megoldása olvasható.

2. A bizonytalanság értelmezése

A mérnöki gyakorlatban a rendelkezésre álló információ gyakran nem kellően megbízható vagy pontos — inkább pontatlan, diffúz, fluktuáló, nem teljes, töredékes, megbízhatatlan, félreérthető, és főleg a nyelvi változók jelentős szubjektivitással bírnak. Ezeket az információkat főleg tervek, tervrajzok, mérések, megfigyelések, tapasztalatok, szakértői ismeretek, és előírások alapján nyerhetjük. Ráadásul, ezeket az adatokat a gyártás, üzemeltetés során bekövetkező emberi tévedések, hibák, illetve a környezet paramétereinek sztochasztikus változásai is befolyásolják. A fenti jelenségeket egy általános kifejezéssel tudjuk összegezni, ez a bizonytalanság. A bizonytalanság elválaszthatatlan egy modelltől, a gerjesztésektől és a modellparaméterektől. A bizonytalanság elemzés információt ad a kapott válaszok hibahatárairól, a modell eredményeinek elfogadási szintjéről.

A bizonytalanság — annak forrása alapján történő — osztályozása megkülönböztet parametrikus („aleatory uncertainty", illetve „parameter uncertainty") és ismereti (epistemic) bizonytalanságot.

Az ismereti bizonytalanság szubjektív bizonytalanságként szemlélhető, ami mint a valószínűségi modellezéssel szembenálló okok sorozataként vezethető be. Ezek az okok magukba foglalhatják például az információk hiányát, mely megakadályozhatja a helyes modell és a véletlen természet általános megfigyelési rendszereinek meghatározását.

A parametrikus bizonytalanság elsődlegesen az objektivitáshoz kapcsolható, szemben az ismereti bizonytalansággal, mely az objektivitáshoz és szubjektivitáshoz egyaránt köthető, esetileg külön-külön, illetve egyszerre. Következésképpen, a parametrikus bizonytalanság megfelelő módszerekkel modellezhető és dolgozható fel.

A parametrikus bizonytalanság tudományos szintű elemzése alapvetően két eltérő módon oldható meg.

Az első mód a gerjesztések bizonytalansága következtében fellépő lehetséges rendszerválaszok meghatározása intervallum értékekkel. Ezen eljárási mód annak figyelembevétele, hogy néhány vagy az összes paraméter nem egy adott értékkel rendelkezik, hanem bizonyos intervallumon belül található. Általános megfogalmazásuk esetén az intervallumokhoz nem kapcsolunk valószínűségi eloszlásokat, csak a lényegi eredmények lehetséges jövőbeli értékeit határozzuk meg.

A másik alapvető módszer a környezet gerjesztéseinek minden lehetséges eleméhez való valamilyen valószínűségi eloszlás rendelése. A lehetséges rendszerválaszokhoz történő valószínűségek rendelése egy általánosan alkalmazott gyakorlat, noha ilyenkor az sem ritka, hogy az úgynevezett szubjektív valószínűségekkel találkozunk, ami a szakértők (vagy bizonyos esetekben a laikusok) által becsült valószínűségi értéket jelent. Néhány esetben eme szubjektív valószínűségeket, mint intervallumokat adják meg, ilyenkor úgynevezett másodrendű bizonytalansági modellekről beszélünk.

3. Intervallum bizonytalanságelemzés

A részegységek gyártási tűréseinek, illetve az üzemeltetés során megengedett paraméter-eltéréseinek helytelen meghatározása több problémát is okozhat, akár a teljes rendszer működésében. Lehetséges, hogy a teljes rendszer nem teljesíti az előírt működési paramétereket, miközben az összes berendezés, alkatrész kielégíti a velük szemben támasztott gyártási követelményeket.

A fenti műszaki kérdés vizsgálható az adott rendszer lineáris matematikai diagnosztikai modelljének felhasználásával.

Egy rendszer matematikai modelljének felállítását a rendszer funkcionális — a modellezett üzemmód szempontjából fontos — részegységeinek (aggregátjainak) meghatározásával kell kezdeni. Ezt követően a kiválasztott részegségek be- és kimenő jellemzőit kell megvizsgálnunk és a köztük lévő fizikai kapcsolatot felírnunk, általános esetben az alábbi vektor–vektor függvény alakban:

$$f(\mathbf{y}) = g(\mathbf{x}) \quad . \tag{1}$$

ahol:

y — független paraméterek vektora:

x — függő paraméterek vektora:

Egy rendszer (lineáris) diagnosztikai modelljének felállításához az eredeti — általában nem lineáris — modellt, azaz egyenletrendszert valamilyen módon linearizálni kell. Ekkor egy olyan lineáris egyenletrendszert kapunk, amely a vizsgált rendszer paramétereinek relatív változásai közti kapcsolatot írja le:

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{y} = \mathbf{B}\delta\mathbf{x} \quad , \tag{2}$$

ahol:

A — a rendszer függő paramétereinek együttható mátrixa

B — a rendszer független paramétereinek együttható mátrixa.

Bevezetve a

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \tag{3}$$

diagnosztikai mátrixot, a (2) egyenlet a

$$\delta\mathbf{y} = \mathbf{D}\delta\mathbf{x} \tag{4}$$

alakúra módosul.

A belső jellemzők parametrikus bizonytalanságainak intervallumelemzése esetén első lépésként meg kell határoznunk azok relatív maximális-, és minimális értékeinek vektorait, melyek a névleges értékeitől való, ahhoz viszonyított eltéréseit fejezik ki

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x}_{\mathbf{max}} &= \mathbf{X}_{\mathbf{nom}}^{-1}\left(\mathbf{x}_{\mathbf{max}} - \mathbf{x}_{\mathbf{nom}}\right) \\ \delta\mathbf{x}_{\mathbf{min}} &= \mathbf{X}_{\mathbf{nom}}^{-1}\left(\mathbf{x}_{\mathbf{min}} - \mathbf{x}_{\mathbf{nom}}\right) \end{aligned} \quad , \tag{5}$$

ahol:

$\mathbf{x}_{\mathbf{max}}$ — a belső jellemzők maximális értékeinek vektora;

$\mathbf{x}_{\mathbf{min}}$ — a belső jellemzők maximális értékeinek vektora;

$\mathbf{X}_{\mathbf{nom}}$ — a belső jellemzők névleges érték mátrixa:

$$\mathbf{X_{nom}} = \begin{bmatrix} x_{1nom} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{2nom} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & x_{nnom} \end{bmatrix} \quad . \tag{6}$$

A további vizsgálatokhoz a korábban felállított diagnosztikai mátrixot felhasználva kell meghatároznunk az úgynevezett pozitív és negatív diagnosztikai mátrixok elemeit az alábbi egyenletek alapján:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_+ &= \left[d_{ij+} = \begin{cases} d_{ij} & ha \quad d_{ij} \geq 0 \\ 0 & ha \quad d_{ij} < 0 \end{cases} \right] \\ \mathbf{D}_- &= \left[d_{ij-} = \begin{cases} d_{ij} & ha \quad d_{ij} \leq 0 \\ 0 & ha \quad d_{ij} > 0 \end{cases} \right] \end{aligned} \quad . \tag{7}$$

A fentiek alapján a külső jellemző relatív maximum, illetve minimum értékeinek vektorai a

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{y_{max}} &= \mathbf{D}_+\delta\mathbf{x_{max}} + \mathbf{D}_-\delta\mathbf{x_{min}} \\ \delta\mathbf{y_{min}} &= \mathbf{D}_+\delta\mathbf{x_{min}} + \mathbf{D}_-\delta\mathbf{x_{max}} \end{aligned} \tag{8}$$

egyenletekkel határozhatók meg, melyek — az inverz feladat későbbi megoldása érdekében — az alábbi hipermátrix egyenletbe rendezhetők:

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{y_{max}} \\ \delta\mathbf{y_{min}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_+ & \mathbf{D}_- \\ \mathbf{D}_- & \mathbf{D}_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x_{max}} \\ \delta\mathbf{x_{min}} \end{bmatrix} \quad . \tag{9}$$

Ismerve a külső jellemzők relatív maximum és minimum értékeit, a külső jellemzők szórási tartományainak határai az

$$\begin{aligned} \mathbf{y_{max}} &= \mathbf{y_{nom}} + \left(\mathbf{Y_{nom}}\delta\mathbf{y_{max}}\right) \\ \mathbf{y_{min}} &= \mathbf{y_{nom}} + \left(\mathbf{Y_{nom}}\delta\mathbf{y_{min}}\right) \end{aligned} \quad , \tag{10}$$

egyenletek alkalmazásával kapjuk meg, ahol:

$\mathbf{y_{nom}}$ — a belső jellemzők névleges érték vektora;

$\mathbf{Y_{nom}}$ — a belső jellemzők névleges érték mátrixa:

$$\mathbf{Y_{nom}} = \begin{bmatrix} y_{1nom} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_{2nom} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & y_{mnom} \end{bmatrix} \quad . \tag{11}$$

4. Az intervallum elemzés inverz feladata

Az inverz feladat megoldásakor az egyes részegységek megengedhető paraméter eltéréseit keressük a teljes rendszer számára előírt vagy legkedvezőbb technikai követelmények (megengedhető kimenő paraméter-eltéréseinek) biztosítása érdekében. Ilyen eset lehet, amikor a rendszer feladata szigorú követelményeket támaszt a kimenő jellemzők eltéréseivel szemben, vagy ha a külső jellemzők fentiekben meghatározott tűrései nem megfelelőek.

Az inverz feladat megoldásához meg kell határozni a külső jellemzők megengedett relatív maximum és minimum értékeinek vektorát, az alábbi egyenletek felhasználásával:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{y}_{\mathbf{max}} &= \mathbf{Y}_{\mathbf{nom}}^{-1}(\mathbf{y}_{\mathbf{max}} - \mathbf{y}_{\mathbf{nom}}) \\ \delta\mathbf{y}_{\mathbf{min}} &= \mathbf{Y}_{\mathbf{nom}}^{-1}(\mathbf{y}_{\mathbf{min}} - \mathbf{y}_{\mathbf{nom}})\end{aligned} \quad . \tag{12}$$

A külső jellemzők megengedett eltéréseinek ismeretében a belső jellemzők szükséges szórásait úgy tudjuk meghatározni, hogy — a (IX.4.22) egyenlet alapján —keressük a belső paraméterek azon relatív maximum és minimum érték vektorait, melyek megfelelő pontossággal kielégítik a

$$\left(\begin{bmatrix}\delta\mathbf{y}_{\mathbf{max}} \\ \delta\mathbf{y}_{\mathbf{min}}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\mathbf{D}_{+} & \mathbf{D}_{-} \\ \mathbf{D}_{-} & \mathbf{D}_{+}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\mathbf{x}_{\mathbf{max}} \\ \delta\mathbf{x}_{\mathbf{min}}\end{bmatrix}\right)^2 = 0 \tag{13}$$

mátrix egyenletet. A belső jellemzők relatív megengedhető mért maximum és minimum érték vektorai ismeretében azok abszolút megengedhető értékei az alábbi egyenletekkel határozhatók meg:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{\mathbf{max}} &= \mathbf{x}_{\mathbf{nom}} + \left(\mathbf{X}_{\mathbf{nom}}\delta\mathbf{x}_{\mathbf{max}}\right) \\ \mathbf{x}_{\mathbf{min}} &= \mathbf{x}_{\mathbf{nom}} + \left(\mathbf{X}_{\mathbf{nom}}\delta\mathbf{x}_{\mathbf{min}}\right)\end{aligned} \quad . \tag{14}$$

Fontos azonban megjegyeznünk, hogy az inverz feladat megoldása nem egyértelmű és nem egyedüli eljárás a feltett kérdésre adandó válasz kimondására. Nem egyértelmű, mert a megoldás során optimum-kereső, becslő módszereket kell alkalmaznunk. Nem egyedüli, mert a végleges döntéshez, a tűrések meghatározáshoz mindenképpen szükséges megvizsgálni a gyártó technológiai lehetőségeit is. Ez a módszer „csak” hatásos segítséget nyújt a probléma megoldásához.

5. Összefoglalás

A tanulmány röviden bemutatta a matematikai modellek parametrikus bizonytalanságának forrását, elemzési eljárásait. A hivatkozott irodalmak alapján fontos megállapítások fogalmazhatók meg: A matematikai modelltől elválaszthatatlan annak valamilyen formájú és mértékű bizonytalansága. A modell bizonytalanságát — az alkalmazhatóságának értékelése érdekében — elemezni kell.

Ezt követően a parametrikus modellbizonytalanság egy intervallumelemzési eljárás és annak inverz feladat megoldása került bemutatásra, melyet Szerző dolgozott ki. A fenti leírt parametrikus modellbizonytalanság vizsgálat, illetve az inverz feladat megoldásának eredményeit a vizsgált rendszer fontos szakmai szempontjai szerint kell a szakértőknek elvégezni.

A Szerző témakörrel kapcsolatosan jövőbeni tudományos tevékenységét az alábbiakban fogalmazza meg:

- parametrikus bizonytalanság valószínűségi elemzési módszerének kidolgozása, ha a gerjesztések (bemenő adatok) nem függetlenek egymástól;
- parametrikus bizonytalanság fuzzy logikára épülő elemzési módszereinek további vizsgálata;
- a modellek ismereti bizonytalanságának fuzzy halmazelméletre épülő elemzése.

Felhasznált szakirodalom

Ferson S., Tucker W. T. (2006), Sensitivity analysis using probability bounding, Reliability Engineering and System Safety 91., p. 1435–1442

Möller, B.. Beer, M. (2007), Engineering computation under uncertainty – Capabilities of non-traditional models, Comput Struct., doi:10.1016/j.compstruc.2007.05.041

Pokorádi L. (2002), Linearized model-based investigation of manufacturing anomalies, Проблемы машиностроения и автоматизации, № 3, Москва, p. 44–49.

Pokorádi, L. (2008), Rendszerek és folyamatok modellezése, Campus Kiadó, Debrecen, pp. 242.

Rohács, J., Pokorádi L., Óvári, Gy., Kavas, L. (2000), Anomalies in Integrated Aircraft Systems, Proceedings of the 20th Symposium Aircraft Integrated Systems, Garmisch-Partenkirchen, p. 275–287.

Szabolcsi, R. (1996), Design of the Pitch Attitude Control System for the Aeroelastic Fighter Aircraft, Bulletines for Applied Mathematics, BAM-1240/96 (LXXX), pp 29-40, ISSN 0133-3526, Technical University of Budapest,