

## 2005. ÉVI SZAKMAI ZÁRÓJELENTÉS

**Témavezető:** Dr. Vajda József, főiskolai tanár  
Pécsi Tudományegyetem, Pollack Mihály Műszaki Kar

### **A hőátzármaztatás kétdimenziós matematikai modelljének és a változó peremfeltételeknek kitett épületszerkezetek hőátbocsátási modelljének kidolgozása**

#### **A feladat leírása**

A hőátzármaztatási feladat megoldásának fő célja, hogy megállapítsuk az anyag belsejében kialakuló hőmérsékletmezőt, vagyis azt, hogyan változik az adott anyag belsejében a hőmérséklet a hely függvényében.

Tételezzünk fel homogén közeget, ahol a hőmérséklet eloszlást derékszögű koordináta rendszerben akarjuk meghatározni, vagyis tekintsük a  $T(x,y,z)$  függvényt. Tekintünk egy kis elemi  $dx dy dz$  térfogatelemet. A hőáramsűrűség vektora felbontható merőleges összetevőkre. Legyenek ezek  $q_x, q_y, q_z$ . Az ellenoldali hőáramsűrűség:

$$\begin{aligned}q_{x+dx} &= q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \\q_{y+dy} &= q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \\q_{z+dz} &= q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz\end{aligned} \quad (1)$$

Az energiamegmaradás törvénye szerint a kimenő és bejövő hőáramsűrűségek előjeles összege 0, ha feltételezzük, hogy nincs belső hőforrás, és stacioner esetet vizsgálunk.

$$q_x + q_y + q_z - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} = 0 \quad (2)$$

A (2) egyenletbe (1)-et behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz = 0 \quad (3)$$

A Fourier törvény szerint :

$$q_x = -\lambda dy dz \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -\lambda dx dz \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -\lambda dx dy \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4)$$

ahol  $\lambda$  a hővezetési tényező.  $[\lambda] = \frac{W}{mK}$

Tehát (3) egyenlet a következő alakúvá válik:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (5)$$

Ezen másodrendű differenciálegyenlet megoldása szolgáltatja a keresett hőmérséklet eloszlást. A megoldáshoz a peremfeltételek ismerete szükséges.

### A peremfeltételek fajtái

Háromféle peremfeltétel adható meg egydimenziós esetre, az  $x=0$  felületre:

1; Elsőfajú peremfeltétel:

A felület hőmérséklete állandó  $T(0)=T_0$

2; Másodfajú peremfeltétel:

a; A felületre érkező hőáramsűrűség állandó

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = q''_0 \quad \text{ahol } q'' \text{ a felületegységre eső hőáramsűrűség}$$

b; Adiabatus vagy szigetelt felület:

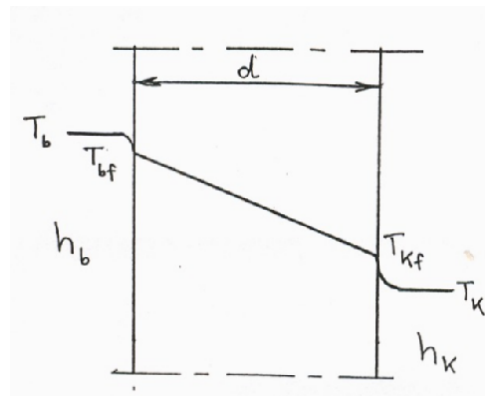
$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

3; Harmadfajú peremfeltétel:

A felület mentén áramlás alakul ki:

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \alpha(T_\infty - T_{fal}) \quad \text{ahol } \alpha \text{ a konvekciós hőátadási tényező } [\alpha] = \frac{W}{m^2 K}$$

### A hőátzármatatási feladat megoldása egydimenziós esetre, sík fal esetén



1. ábra

Hőmérséklet-eloszlás a sík falban

Tekintsünk egy  $d$  szélességű,  $\lambda$  hővezetési tényezőjű falat. Legyen a külső hőmérséklet  $T_k$ , a külső konvekciós hőátadási tényező  $\alpha_k$ , a belső hőmérséklet  $T_b$ , a belső tér hőátadási tényezője  $\alpha_b$ . Adjuk meg a a falban a külső és belső falhőmérsékleteket, illetve a falban a felületre merőleges irányban a hőmérséklet eloszlását. (1 ábra).

A megoldandó differenciálegyenlet:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

egy közönséges, másodrendű differenciálegyenlet. Ennek megoldása, ha a külső fal hőmérséklete  $T_{kf}$ , a belső fal hőmérséklete  $T_{bf}$ :

$$T(x) = (T_{bf} - T_{kf}) \frac{x}{d} + T_{kf}$$

A külső és belső falhőmérsékletek meghatározása a következő egyenletrendszer megoldásával történik:

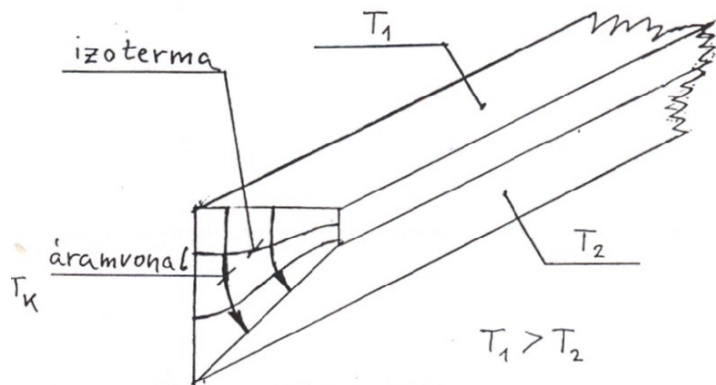
$$\frac{(T_{kf} - T_k) hk}{k} = \frac{T_{bf} - T_k}{d + \frac{k}{hk}}$$
$$\frac{T_b - T_{kf}}{d + \frac{k}{hb}} = \frac{(T_b - T_{bf}) hb}{k}$$

(MEGJEGYZÉS: A MAPLE számítógép-algebrai rendszerből átvett egyenletekben szereplő jelölések jelentése a következő:

$T_{kf}$	külső falsík felületi hőmérséklete,
$T_k$	külső léghőmérséklet,
$T_{bf}$	belső falsík felületi hőmérséklete,
$T_b$	belső léghőmérséklet,
$hk$ és $hb$	a külső és belső konvektív hőátadási tényező,
$k$	a hővezetési tényező,
$d$	a falvastagság.)

### **Kétdimenziós, stacionárius hővezetés**

A következőkben feltételezzük, hogy a hőáramlás gradiense csak egy irányú. A kétdimenziós eset különösen éleknél jelentős, ahol görbült izotermák és hőáramvonalak alakulnak ki (2. ábra).



2. ábra  
Kétdimenziós hővezetés

A feladat ebben az esetben a

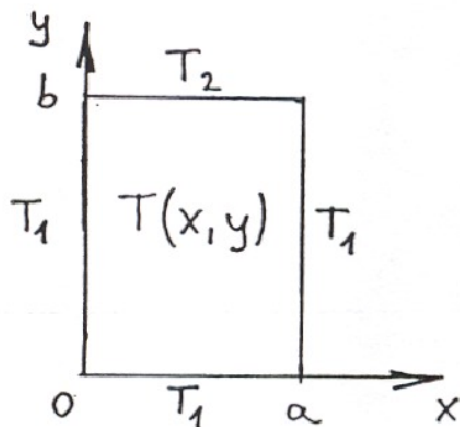
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

Laplace típusú másodrendű parciális differenciálegyenlet megoldása, ami a  $T(x,y)$  függvény meghatározását jelenti.

### I. Analitikus megoldás

Ez csak nagyon speciális alakzatoknál és speciális peremfeltételek esetén alkalmazható. A megoldás függvénytörök segítségével adható meg.

**Példa:** Laplace típusú differenciálegyenlet megoldása  $a, b$  oldalú téglalap tartományra.



3. ábra  
Példa téglalap tartományra

A téglalap 3 oldalán legyen a hőmérséklet  $T_1$ , a negyedik oldalon  $T_2$ . (3. ábra)

Legyen

$$u = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

Az elsőfajú peremfeltételek ekkor:

$$0 < x < a, \quad 0 < y < b \quad u(x,0) = f_1(x) = 0, \quad u(x,b) = f_2(x) = 1, \\ u(0,y) = g_1(y) = 0, \quad u(a,y) = g_2(y) = 0$$

A keresett  $u(x,y)$  függvényt szeparációs módszerrel illetve Fourier sorfejtés segítségével határozhatjuk meg.

A feladat megoldása a MAPLE számítógép-algebrai rendszer segítségével a következők szerint történt:

$$pde := \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) \right) = 0$$

Itt lehetőség van a parciális differenciálegyenlet megoldásának struktúráját meghatározni:

$$struc := (u(x, y) = f(x) g(y)) \&where \left[ \left\{ \frac{d^2}{dx^2} f(x) = -c_1 f(x), \frac{d^2}{dy^2} g(y) = -c_1 g(y) \right\} \right]$$

$$megold := u(x, y) = -C3 \sin(\sqrt{-c_1} y) - C1 e^{(\sqrt{-c_1} x)} + \frac{-C3 \sin(\sqrt{-c_1} y) - C2}{e^{(\sqrt{-c_1} x)}} \\ + -C4 \cos(\sqrt{-c_1} y) - C1 e^{(\sqrt{-c_1} x)} + \frac{-C4 \cos(\sqrt{-c_1} y) - C2}{e^{(\sqrt{-c_1} x)}}$$

A következő feladat a peremfeltételeknek megfelelő megoldások meghatározása:

A partikuláris megoldást téglalap alakú tartományra keressük, ahol a peremfeltételek:

$$f1(x) := 0 \quad f2(x) := 1 \quad g1(y) := 0 \quad g2(y) := 0 \quad a := 10 \quad b := 10$$

A hosszúságok cm-ben értendők.

A megadott peremfeltételeknek megfelelő partikuláris megoldást a Fourier sorfejtés segítségével keressük. A Fourier sor első tíz tagja:

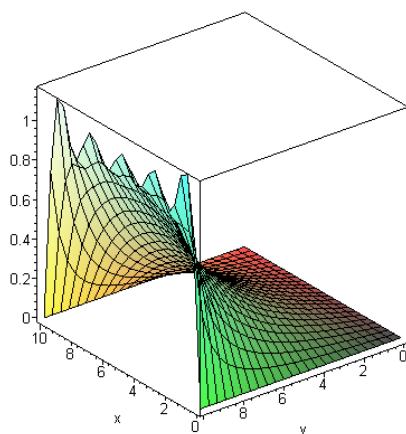
$$B_1 := \frac{4}{\pi \sinh(\pi)} \quad B_2 := 0 \quad B_3 := \frac{4}{3} \frac{1}{\pi \sinh(3\pi)} \quad B_4 := 0 \quad B_5 := \frac{4}{5} \frac{1}{\pi \sinh(5\pi)} \quad B_6 := 0$$

$$B_7 := \frac{4}{7} \frac{1}{\pi \sinh(7\pi)} \quad B_8 := 0 \quad B_9 := \frac{4}{9} \frac{1}{\pi \sinh(9\pi)} \quad B_{10} := 0$$

Most írjuk fel a Fourier összeget, a sor első 10 tagjára:

$$u_{10} := \frac{4 \sinh\left(\frac{\pi y}{10}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right)}{\pi \sinh(\pi)} + \frac{4 \sinh\left(\frac{3\pi y}{10}\right) \sin\left(\frac{3\pi x}{10}\right)}{3 \pi \sinh(3\pi)} + \frac{4 \sinh\left(\frac{\pi y}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{5}\right)}{5 \pi \sinh(5\pi)} \\ + \frac{4 \sinh\left(\frac{7\pi y}{10}\right) \sin\left(\frac{7\pi x}{10}\right)}{7 \pi \sinh(7\pi)} + \frac{4 \sinh\left(\frac{9\pi y}{10}\right) \sin\left(\frac{9\pi x}{10}\right)}{9 \pi \sinh(9\pi)}$$

Ábrázoljuk a kapott kétváltozós függvényt, az adott téglalap tartományban (4. ábra)

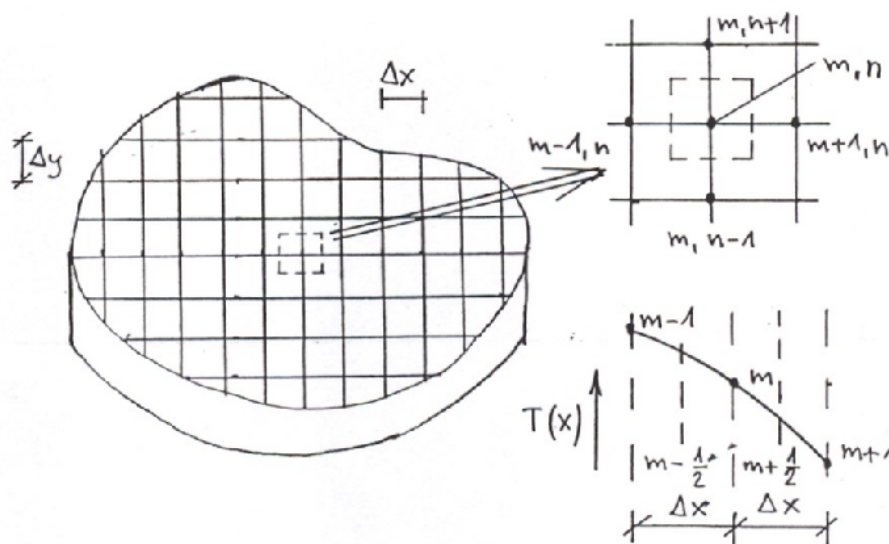


4. ábra  
A Laplace egyenlet megoldása téglalap tartományra

## II. A Laplace egyenlet megoldása a véges differenciák módszerével

Az analitikus megoldással ellentétben, ahol a közeg tetszőleges pontjában meghatározható a hőmérséklet, a numerikus megoldások esetén a hőmérséklet értékek csak diszkrét pontokban adhatók meg.

Az első lépés ezen pontok megválasztása. A 5. ábrának megfelelően ez úgy történik, hogy a testet egyenlő kis részekre osztjuk, mely részek középpontját tekintjük referencia pontoknak. Ezeket csomópontoknak, összességüket csomóponti hálózatnak nevezzük. A csomópontok megjelölése rendezett számpárral történik, a két dimenzióknak megfelelően. (F. P. Incropera, D. P. DeWitt: Fundamentals of Heat Transfer, John Wiley & Sons, 1981.)



5. ábra  
Csomóponti háló

Az  $x$  irányú változást  $m$ , az  $y$  irányút az  $n$  értéke mutatja.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m-\frac{1}{2},n} = \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m+\frac{1}{2},n} = \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (8)$$

Egy csomópont hőmérséklete az adott tartomány átlaghőmérsékletét reprezentálja. A fenti összefüggés segítségével minden pontra felírható a hővezetési egyenlet.

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{m,n} \approx \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m+1/2,n} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m-1/2,n}}{\Delta x} \quad (9)$$

A hőmérséklet gradienseit ebbe az egyenletbe beírva:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{m,n} \approx \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 2T_{m,n}}{(\Delta x)^2} \quad (10)$$

illetve

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{m,n} \approx \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 2T_{m,n}}{(\Delta y)^2}$$

Olyan hálózatot használva, ahol  $\Delta x = \Delta y$  az előző egyenleteket a Laplace egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n} - 4T_{m,n} = 0 \quad (11)$$

Tehát az egzakt differenciálegyenletet közelítő lineáris egyenletrendszerrel helyettesíthetjük. Ez az egyenlet minden belső pontra alkalmazható, ami a környező pontoktól egyenlő távolságra van.

A (11) egyenlet helyességéről a belső pontokra felírt energia egyensúlyi egyenlettel is meggyőződhetünk. Tételezzük fel, hogy csak hővezetéssel történik energia átadás az egyes pontok között. Az  $m,n$  koordinátájú pont 4 szomszédos elemétől kapott összes energia:

$$\sum_{i=1}^4 q_{i \rightarrow (m,n)} = 0 \quad (12)$$

ahol  $q_{i \rightarrow (m,n)}$  az  $i$ -edik pont által átadott energiát jelenti. Ez azt jelenti, hogy a ki és beáramló összes energia előjeles összege 0.

Tételezzük fel, hogy az energia  $x$  és  $y$  irányban egyenes vonalban terjed. Ekkor a Fourier törvény egyszerű formában alkalmazható:

$$q_{(m-1,n) \rightarrow (m,n)} = \lambda(\Delta y) \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (13)$$

ahol feltételezzük, hogy a közeg egységnyi vastagságú. Hasonlóan

$$q_{(m+1,n) \rightarrow (m,n)} = \lambda(\Delta y) \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (14)$$

$$q_{(m,n+1) \rightarrow (m,n)} = \lambda(\Delta x) \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad (15)$$

$$q_{(m,n-1) \rightarrow (m,n)} = \lambda(\Delta x) \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad (16)$$

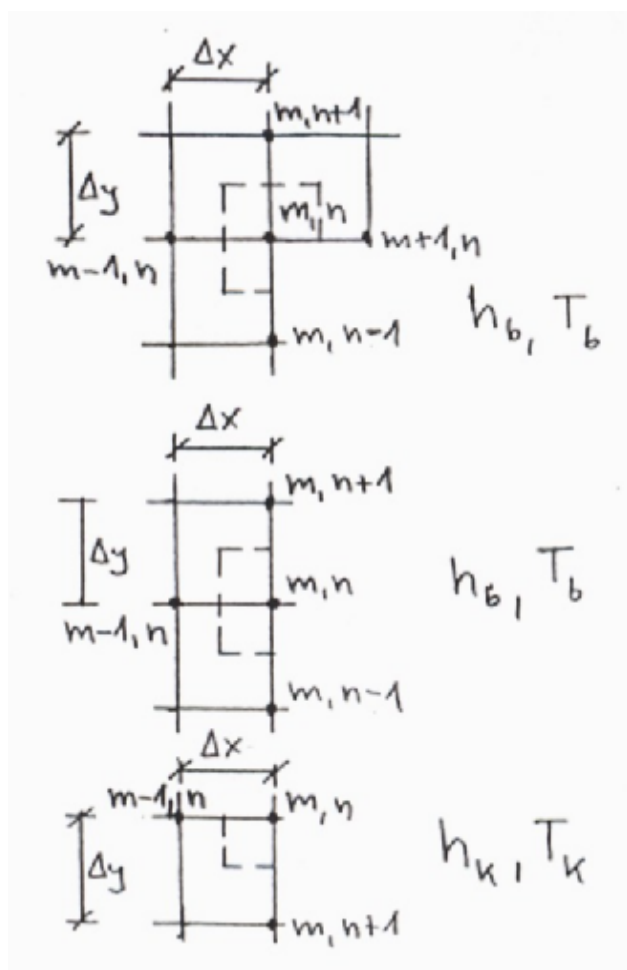
A (13)-(16) egyenleteket összeadva a (11) egyenletet kapjuk.

Ha a közeg belsejében energiaforrás van, mely energiaforrás által termelt energia  $q(\Delta x \Delta y)$ , ennek hatására a (11) egyenlet :

$$T_{m,n+1} + T_{m,n-1} + T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + \frac{q(\Delta x \Delta y)}{\lambda} - 4T_{m,n} = 0 \quad (17)$$

A (17)-es egyenletet minden belső elemre fel kell írni. Ezeket az egyenletek az előző formában nem lehet felírni, ha szigetelt felületi pontról, vagy olyan felületi pontról van szó, ami konvekciónak van kitéve. Ekkor ismét az energia egyensúlyi egyenleteket kell felírni.

Tekintsünk egy belső sarokpontot, amely a közeg belsejéből hővezetésnek, a külső térből pedig konvekciónak van kitéve, ahol a külső tér hőmérséklete  $T_k$ .



A hővezetési egyenletek:

$$q_{(m-1,n) \rightarrow (m,n)} = \lambda(\Delta y) \frac{T_{m-1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (18)$$

$$q_{(m+1,n) \rightarrow (m,n)} = \lambda\left(\frac{\Delta y}{2}\right) \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (19)$$

$$q_{(m,n+1) \rightarrow (m,n)} = \lambda(\Delta x) \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad (20)$$

$$q_{(m,n-1) \rightarrow (m,n)} = \lambda\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \frac{T_{m,n-1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad (21)$$

6. ábra  
Belső sarokpont, oldalsó pont  
és külső sarokpont



Az (m-1,n) illetve az (m,n+1) pontokból származó hővezetés arányos  $\Delta y$  és  $\Delta x$  értékekkel, míg (m+1,n) és (m,n-1) pontokból származó hővezetés a távolságok felével,  $\frac{\Delta y}{2}$  és  $\frac{\Delta x}{2}$  értékekkel. A m,n koordinátájú sarokpontban a konvekciós áramok is a félszélességekkel arányosak:

$$q_{\text{külső} \rightarrow (m,n)} = \alpha_k \left(\frac{\Delta x}{2}\right)(T_{\text{külső}} - T_{m,n}) + \alpha_k \left(\frac{\Delta y}{2}\right)(T_{\text{külső}} - T_{m,n}) \quad (22)$$

A (18)-(22)-es egyenletek összegének 0-nak kell lennie, feltéve, hogy nincs energiaforrás a testben.

$$(T_{m+1,n} + T_{m,n-1}) + 2(T_{m-1,n} + T_{m,n+1}) + 2\frac{\alpha_k \Delta x}{\lambda} T_k - 2\left(3 + \frac{\alpha_k \Delta x}{\lambda}\right) T_{m,n} = 0$$

ahol feltételeztük, hogy  $\Delta x = \Delta y$ .

Hasonló megfontolásokkal vezethető le, hogy egy, a test oldalán lévő pontra:

$$(T_{m,n-1} + 2T_{m-1,n} + T_{m,n+1}) + 2\frac{\alpha_k \Delta x}{\lambda} T_k - 2\left(2 + \frac{\alpha_k \Delta x}{\lambda}\right) T_{m,n} = 0 \quad (23)$$

Egy külső sarokpontra pedig:

$$(T_{m,n-1} + T_{m-1,n}) + 2\frac{\alpha_k \Delta x}{\lambda} T_k - 2\left(1 + \frac{\alpha_k \Delta x}{\lambda}\right) T_{m,n} = 0 \quad (24)$$

## Meteorológiai adatok

Az épületszerkezetek hőveszteségének számításához az alapul szolgáló matematikai modell, és az épületszerkezeti, valamint hőátadási jellemzők mellett szükség van hosszú időtartamot felölelő és megalapozott meteorológiai adatokra is.

Ennek érdekében az 1960-1980-as években Major György és munkatársai által végzett meteorológiai mérések alapján az épületek változó peremfeltételek melletti hőveszteségének meghatározásához a következő adatbázisokat gyűjtöttük, illetve állítottuk össze:

- a napfénytartam Magyarország különböző területein havi bontásban és a napfénytartam évi összegei,
- a vízszintes felületet érő globálsugárzás napi összegeinek gyakorisági eloszlása, továbbá az izoplétás ábrák a globál, a diffúz és a direkt sugárzás átlagára, minimumára és maximumára vonatkozóan havi bontásban,
- a különböző tájolású függőleges felületekre jutó globálsugárzás napi átlaga és szórása havi bontásban, továbbá a kapcsolódó izoplétás ábrák,
- a szélsőséges sugárzási értékeket adó időjárási helyzetek adatbázisa havi bontásban,

- adatbázis a hőveszteség-számítás szempontjából releváns meteorológiai jellemzők, úgymint a napsugárzás, a hőmérséklet és a szél komplex jellemzésére havi bontásban, 0 – 1,9 m/s, 2,0 – 3,9 m/s, 4,0 – 7,9 m/s, 8,0 – 15,9 m/s szélsőségek, mint vezérparaméterek mellett.

Az erre vonatkozó kutatásaink szerint az egyre jobb hőszigeteléssel és nagyméretű, déli tájolású üvegfelületekkel ellátott épületek (ezek jellemzően ún. alacsony energiafelhasználású épületek, illetve passzívházak) mértékadó hővesztesége már nem határozható meg a korábban, illetve jelenleg is alkalmazott eljárás szerint, amikor is mindössze a külső hőmérséklet szélsőséges értékét vesszük alapul, Magyarország esetén -11, -13, vagy -15 °C –t. Az ilyen épületek hőveszteségének számítását két különböző esetre kell elvégezni, az első esetben szélsőséges külső hőmérséklet és a hozzátartozó jelentős napsugárzási intenzitás feltételezésével, a második esetben pedig mérsékelt hideg időjárás és a hozzátartozó kisebb napsugárzási intenzitás feltételezésével. A kétféle számítás eredménye közül a nagyobbat kell csúcs-hőveszteségnek tekinteni.

A rendelkezésünkre álló meteorológiai adatok és azok összefüggéseinek tanulmányozása során megállapítottuk, hogy Magyarország vonatkozásában az első eset a januári időjárásra, a második eset pedig a novemberi időjárásra jellemző. Ugyanis hazánk éghajlati körülményei között január a leghidegebb hónap, amikor a gyakran derült időben a szélsőséges külső hőmérséklethez jelentős sugárzás intenzitás társul, novemberben pedig a téli hónapok közül a legnagyobb a párányomás értéke (Budapesten pl. 706,6 Pa), ami azt jelenti, hogy a novemberben uralkodó mérsékelt hideghez a fedett égbolt miatt alacsony sugárzás-intenzitás társul.

Az előbbi két hónapra a külső hőmérséklet és a szélsőségek vonatkozásában Budapest területére a következő értékek jellemzők:

	november	január
a külső hőmérsékletek abszolút minimumainak 50 évi átlaga (°C)	- 3,7	- 10,7
a szélsőségek középértékeinek 10 évi átlaga (m/s)	1,6	1,8

November, illetve január hónapokra az előbbi két időjárási paraméterhez rendelt napfénytartam és globálsugárzás adatokat, valamint a sugárzás-intenzitás értékeit a következő két táblázatban tüntetjük fel:

#### **November** (1967- 1980 közti mérési adatok)

Szélsőségek 0,0 – 1,9 m/s, külső hőmérséklet: -5,0 - -0,1 °C

órákzök	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17
napfénytartam (óra)	-	-	-	1	3	3	3	2	1	-
globálsugárzás (J/cm <sup>2</sup> )	2	18	36	48	51	51	42	28	12	3
sug.-intenzitás (W/m <sup>2</sup> )	5,5	50,0	100,0	133,3	141,7	141,7	116,7	77,8	33,3	8,3

## Január (1967- 1980 közti mérési adatok)

Szélsebesség 0,0 – 1,9 m/s, külső hőmérséklet: -15,0 - -10,1 °C

órákzök	7-8	8-9	9-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17
napfénytartam (óra)	-	-	-	3	5	3	1	4	1	-
globálsugárzás ( $J/cm^2$ )	1	16	46	77	93	93	69	43	18	1
sug.-intenzitás ( $W/m^2$ )	2,8	44,4	127,8	213,9	258,3	258,3	191,7	119,4	50,0	2.8

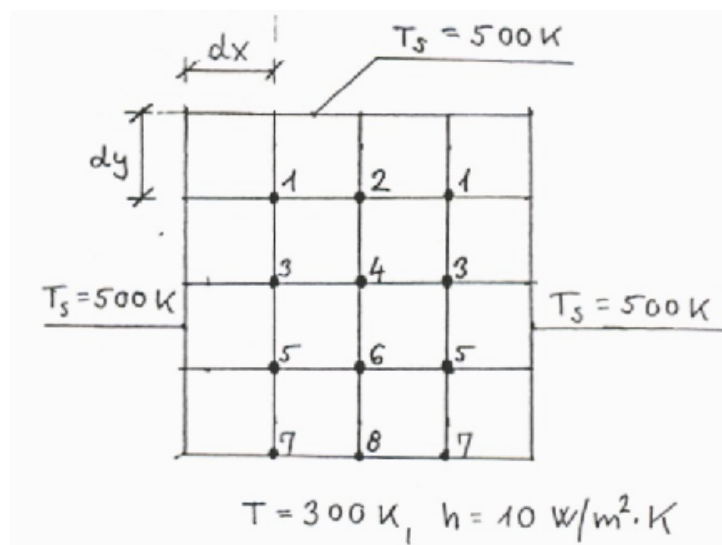
A napsugárzásnak kitett falszerkezetekre vonatkozó, későbbiekben ismertetett számításoknál a sugárzás-intenzitást 0 és  $300 W/m^2$  közti értékekre vettük fel (lásd 11. ábra), amely tartomány lefedi az előbbi két táblázatban közölt sugárzás-intenzitás értékeket, amelyek előfordulása novemberben és januárban tipikusnak mondható.

### Kétdimenziós hőátzármaztatási feladatok megoldása különböző esetekben

A következő 1.-5. pontokban a kétdimenziós hőátzármaztatás számítására vonatkozó egyszerű alapesetet, és a gyakorlat számára érdekes további eseteket (egy- és kétrétegű falszerkezet, a napsugárzás hatásának figyelembe vételével és anélkül) mutatunk be, amelyek közül a 2. pontban a számított eredmények validitását mérésekkel is ellenőriztük.

#### 1. A kétdimenziós hőátzármaztatás alapesete hővezetéssel és egyoldali konvekcióval

Tekintsünk egy  $1 \times 1$  m -es négyzet alapú téglát, melynek 3 oldalát  $500$  K-en tartjuk, a negyedik oldal szabadon érintkezik a  $300$  K-es külső térrel. Legyen  $\alpha=10 W/m^2K$ . Legyen  $dx=dy=0,25$  m,  $\lambda=1W/mK$ . Határozzuk meg az osztáspontokban a hőmérsékleteket! Szimmetria-okok miatt 8 pontban kell a hőmérsékleteket meghatározni. (7 ábra)



7. ábra  
Négyzet alakú test pontjai

Az 1, 3 és 5 belső pontokra felírva a (11) egyenletet:

$$e1 := -4 T1 + T2 + T3 + 1000 = 0$$

$$e3 := T1 - 4 T3 + T4 + T5 + 500 = 0$$

$$e5 := T3 - 4 T5 + T6 + T7 + 500 = 0$$

A 2,4 és 6 pontok szimmetria vonalon fekszenek, ezekre az előbb tárgyalt egyenletek:

$$e2 := 2 T1 - 4 T2 + T4 + 500 = 0$$

$$e4 := T2 + 2 T3 - 4 T4 + T6 = 0$$

$$e6 := T4 + 2 T5 - 4 T6 + T8 = 0$$

7 és 8 pontok külső felületi pontok, ezekre:

$$e7 := 2 T5 - 9 T7 + T8 + 2000 = 0$$

$$e8 := 2 T6 + 2 T7 - 9 T8 + 1500 = 0$$

Így a keresett hőmérséklet-értékek Kelvinben kifejezve:

$$T1 := 489.3047233$$

$$T2 := 485.1538178$$

$$T3 := 472.0650755$$

$$T4 := 462.0058247$$

$$T5 := 436.9497540$$

$$T6 := 418.7393298$$

$$T7 := 356.9946105$$

$$T8 := 339.0519867$$

Képezzük a test pontjaihoz tartozó hőmérsékleti mátrixot:

```
> A:=matrix(4,3,[T1,T2,T1,T3,T4,T3,T5,T6,T5,T7,T8,T7]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 489.3047233 & 485.1538178 & 489.3047233 \\ 472.0650755 & 462.0058247 & 472.0650755 \\ 436.9497540 & 418.7393298 & 436.9497540 \\ 356.9946105 & 339.0519867 & 356.9946105 \end{bmatrix}$$

## 2. Kétdimenziós hőátzármatatás egyrétegű fal esetén napsugárzás nélkül

Tekintsünk egy sarokelemet, melynek külső oldala 1,54 m, falvastagsága 0,42 m. Adottak a külső és belső hőmérsékletek, a hőátadási tényezők, a hővezetési tényező. Adjuk meg a hőmérséklet eloszlást a külső és belső falsík mentén, illetve a falon belül két rétegben.

T28	T29	T30	T31	T32	T33	T34	T35	T36	T37	T38	Tk
T29	T18	T19	T20	T21	T22	T23	T24	T25	T27	T28	TI
T30	T19	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16	T17	III
T31	T20	T10	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	Tbf
T32	T21	T11	T2								
T33	T22	T12	T3								
T34	T23	T13	T4								
T35	T24	T14	T5								
T35	T25	T15	T6								
T36	T26	T16	T7								
T37	T27	T17	T8								
T38	T28	T18	T9								
Tkf	TI	III	Tbf								

8. ábra A sarokelem csomópontjai

A számításokat a következő adatokkal végeztük:

A külső hőmérséklet 280,4 K, a belső hőmérséklet 290,5K.

A külső hőátadási tényező  $\alpha_k = 24 \frac{W}{m^2 K}$ , a belső hőátadási tényező  $\alpha_b = 8 \frac{W}{m^2 K}$ , a

hővezetési tényező  $\lambda = 0,2056 \frac{W}{mK}$ , a falvastagság  $d = 0,42$  m a csomópontok távolsága

$d = 0,14$  m. A  $Tkf$  külső falhőmérséklet és  $Tbf$  belső falhőmérséklet meghatározása egydimenziós esetre:

$$\begin{aligned} egy := \{ & 116.73152 T_{kf} - 32731.518 = 2.3333592 T_{bf} - 654.27392, \\ & 651.78372 - 2.2436617 T_{kf} = 11303.502 - 38.910506 T_{bf} \} \end{aligned} \quad (25)$$

$$T_{bf} := 289.92860 \quad T_{kf} := 280.59047$$

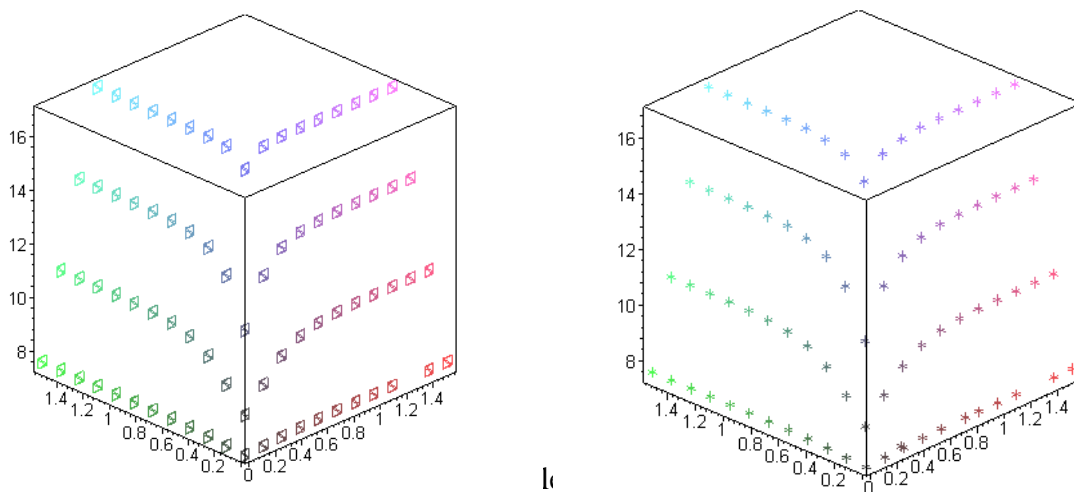
Felhasználva a (11), (22), (23), (24) egyenleteket, felírtuk a felületi és a belső pontok hőmérsékletének meghatározására szolgáló egyenletrendszert.

Az egyenletrendszer megoldásaként kapott hőmérséklet értékek °C-ban:

$$\begin{aligned} T1 &:= 16.25821 & T2 &:= 16.81857 & T3 &:= 16.89608 & T4 &:= 16.91648 \\ T5 &:= 16.92386 & T6 &:= 16.92672 & T7 &:= 16.92784 & T8 &:= 16.92834 \\ T9 &:= 10.86960 & T10 &:= 12.59561 & T11 &:= 13.34807 & T12 &:= 13.63464 \\ T13 &:= 13.74454 & T14 &:= 13.78752 & T15 &:= 13.80458 & T16 &:= 13.81144 \\ T17 &:= 13.81434 & T18 &:= 8.29767 & T19 &:= 9.14358 & T20 &:= 9.90663 \\ T21 &:= 10.34346 & T22 &:= 10.54975 & T23 &:= 10.63954 & T24 &:= 10.67718 \\ T25 &:= 10.69264 & T26 &:= 10.69901 & T27 &:= 10.70173 & T28 &:= 7.40298 \\ T29 &:= 7.45176 & T30 &:= 7.50039 & T31 &:= 7.54401 & T32 &:= 7.56934 \end{aligned}$$

$T33 := 7.58143$   $T34 := 7.58671$   $T35 := 7.58894$   $T36 := 7.58985$   
 $T37 := 7.59022$   $T38 := 7.59038$

A kapott hőmérséklet-eloszlást a 9a ábra szemlélteti.



9. ábra

A számított hőmérséklet-eloszlás értékek a;  $\alpha =$  állandó, b;  $\alpha =$  korrigált

A belső falsík hőmérséklet értékeit az 1.a. táblázat mutatja.

Ha figyelembe vesszük, hogy a sarokelemhez közel a hőátadási tényező csökken, a módosított egyenletrendszert megoldva, a sarokpont közelében a hőmérséklet értékek csökkennek.

A kapott számeredményekből egyértelműen látszik, hogy a sarokpontban, és azok közelében alacsonyabb felületi hőmérséklet értékek adódnak (lásd 9 a. és 9 b. ábra). Ez a jelenség egyébként nyilvánvalóan és jól megfigyelhető a gyakorlatban, amikor is a falsíkok találkozásánál a vízgőz-harmatpontnál alacsonyabb felületi hőmérsékletek esetén a levegő vízgőz-tartalma ezeken a helyeken lekondenzálódik, és ennek következtében a falfelületen penészgombák telepedhetnek meg.

Hőmérsékletek alapesetben	Hőmérsékletek korrigált esetben
$T1 := 16.25821$	$T1 := 15.86772$
$T2 := 16.81857$	$T2 := 16.55843$
$T3 := 16.89608$	$T3 := 16.78854$
$T4 := 16.91648$	$T4 := 16.90474$
$T5 := 16.92386$	$T5 := 16.92134$
$T6 := 16.92672$	$T6 := 16.92591$
$T7 := 16.92784$	$T7 := 16.92748$
$T8 := 16.92834$	$T8 := 16.92823$

1.a. táblázat

A belső falsík számított hőmérsékletei,  
 ha a belső hőátadási tényező értéke állandó illetve korrigált

(Alapesetben  $8,0 \text{ W/m}^2\text{K}$ , korrigált esetben pedig a falsíkok találkozásánál  $0 \text{ W/m}^2\text{K}$ , attól egy falvastagságnyi távolságra  $8,0 \text{ W/m}^2\text{K}$  konvektív hőátadási tényezőt vettünk fel, a két utóbbi között pedig lineáris interpolációt alkalmaztunk.)

Az eddigi gyakorlati tapasztalatok és az ezirányú elméleti kutatások szerint a belső falfelületre a szabvány által előírt  $8,0 \text{ W/m}^2\text{K}$  hőátadási tényező túl magas. E. Mayernek a stuttgarti Fraunhofer Institut-ban végzett kutatásai azt eredményezték, hogy az emberi testfelület mentén zárt térben kiadódó saját konvekció értéke  $2,9 \text{ W/m}^2\text{K}$ . Ezekkel az eredményekkel gyakorlatilag megegyezően jutott H. Bach a Grashoff-Nusselt féle hatványfüggvény elméleti levezetésével arra a következtetésre, hogy a saját konvekció értéke nem haladhatja meg a  $3,0 \text{ W/m}^2\text{K}$  értéket. Ennek megfelelően módosított adatokkal újabb számításokat végeztünk, amelyeknél a falsarokban a hőátadási tényezőt  $0 \text{ W/m}^2\text{K}$ -re, a saroktól  $42 \text{ cm}$  távolságra  $3 \text{ W/m}^2\text{K}$ -re, a kettő között pedig lineáris interpolációval vettük fel. A módosított számítások eredményeit az 1. b. táblázatban foglaltuk össze.

Hőmérsékletek alapesetben	Hőmérsékletek módosított esetben
$T1 := 14.94901$	$T1 := 11.38121$
$T2 := 15.81040$	$T2 := 13.64629$
$T3 := 16.00685$	$T3 := 15.14326$
$T4 := 16.06827$	$T4 := 15.87857$
$T5 := 16.09135$	$T5 := 16.03371$
$T6 := 16.10077$	$T6 := 16.07946$
$T7 := 16.10474$	$T7 := 16.09636$
$T8 := 16.10654$	$T8 := 16.10356$

1.b. táblázat

A belső falsík számított hőmérsékletei,  
 ha a belső hőátadási tényező értéke állandó illetve módosított  
 (Alapesetben  $3,0 \text{ W/m}^2\text{K}$ , módosított esetben pedig a falsíkok találkozásánál  $0 \text{ W/m}^2\text{K}$ , attól egy falvastagságnyi távolságra  $3,0 \text{ W/m}^2\text{K}$  konvektív hőátadási tényezőt vettünk fel, a két utóbbi között pedig lineáris interpolációt alkalmaztunk.)

A számított eredmények validitásának vizsgálatára  $42 \text{ cm}$  vastag, kétoldalon vakolt téglafalazaton felületi hőmérséklet-méréseket végeztünk. A mérés körülményeit, és eredményeit az alábbiakban rögzítjük.

A mérés időpontja 2003. II. 15. 14<sup>15</sup>

A mérésnél felhasznált mérőműszer: TESTO 824-2 típusú infrahőmérő  
 időjárás: fedett égbolt, gyenge napsugárzás felhőtakarón keresztül

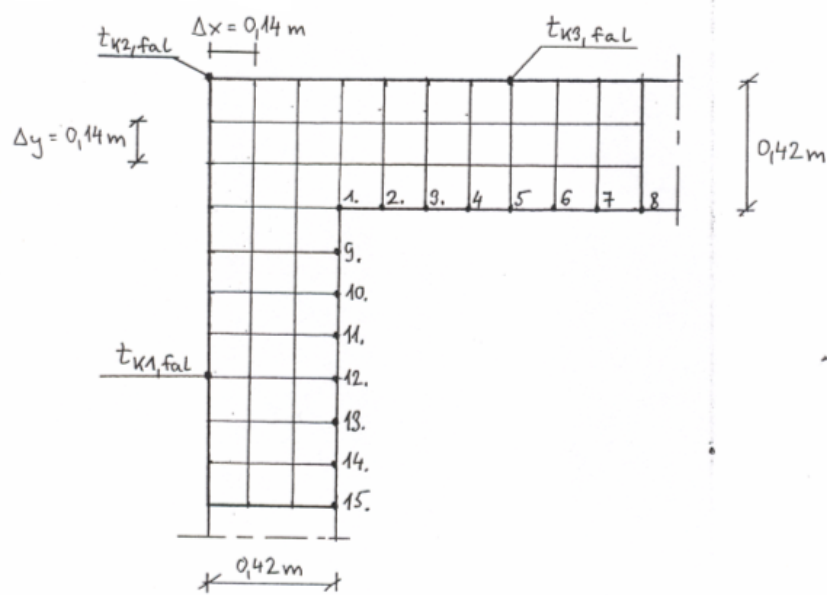
$\varphi_{k, \text{levegő}} = 41,0 \%$ ,  $t_{k, \text{levegő}} = 7,4 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $\varphi_{b, \text{levegő}} = 44,2 \%$ ,  $t_{b, \text{levegő}} = 17,5 \text{ }^\circ\text{C}$

$t_{k1, \text{fal}} = 3,2 \text{ }^\circ\text{C}$

$t_{k2, \text{fal}} = 2,9 \text{ }^\circ\text{C}$

$t_{k3, \text{fal}} = 3,4 \text{ }^\circ\text{C}$

A mérési pontok a padlószinttől számított 1,0 m magasságban az a 10. ábrának megfelelően kerültek felvételre:



10. ábra  
Mérési pontok

Az egyes mérési pontokban mért felületi hőmérséklet értékeit a 2. táblázat tartalmazza.

m.p.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
$t_{b, fal}$ (°C)	10,2	13,6	14,5	15,2	15,5	15,8	15,2	15,8

m.p.	1.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
$t_{b, fal}$ (°C)	10,2	14,1	14,8	15,2	15,2	15,2	15,8	15,8

2. táblázat  
A mért belsőoldali felületi hőmérséklet

A számított és a mért értékek összehasonlítása azt mutatja, hogy a fal külső oldalán mért felületi hőmérséklet ( $t_{k1, fal}$ ,  $t_{k2, fal}$ ,  $t_{k3, fal}$ ) néhány °C-szal kisebbek a számított értékektől (vesd össze a 8. ábra hálózati csomópontjaira számolt értékekkel). Ennek oka a külsőoldali hőátadási tényező értékének bizonytalanságában, és a falfelület és az égbolt között kialakuló sugárzásos hőcserében keresendő.

A belső falfelületen mért értékek viszont jó egyezést mutatnak a kisebb hőátadási tényezővel elvégzett számításokkal, illetve ezen belül azokkal, amelyeknél a falsarokban a hőátadási tényezőt  $0 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ -re, a saroktól 42 cm távolságra  $3 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ -re, a kettő között pedig lineáris interpolációval vettük fel (lásd az 1.b. táblázat második oszlopát). Ebben az esetben a sarokponti hőmérséklet eltérése  $1,2 \text{ }^\circ\text{C}$ , amely különbség a 8., illetve a 15. pont irányában haladva  $0,3 \text{ }^\circ\text{C}$ -ra csökken. Úgy a számítások, mint a mérések közös jellemzője, hogy a sarokponttól távolodva egyre kisebb lesz az azonos távolságokra vonatkozó hőmérséklet-



növekedés, eltekintve attól az anomáliától, amely az 5., 6. és 7. mérési pontokban figyelhető meg, és amely nyilván a mért falszerkezet minőségi, kivitelezési eltéréseivel, hiányosságával függ össze. Megállapítható továbbá, hogy ebben a konkrét esetben a falsaroktól számított kétszeres falvastagságnyi távolságon túl a belsőoldali felületi hőmérséklet már alig változik, tehát ezen a tartományon túl az egydimenziós hővezetésre alapozott számítás elegendő pontosságú eredményt nyújt.

Összefoglalásként megállapítható, hogy a felállított és megoldott matematikai modell a módosított belsőoldali hőátadási tényezőkkel a mért adatokkal jól egyező eredményeket szolgáltat. A hőátadási tényezőkben rejlő bizonytalanság mindenesetre további alap kutatások végzését indokolja ezen a területen.

Fentiekén túlmenően a 2003. évben megvásárolt „Energieberater 5.08” című szoftver felhasználásával összehasonlító számításokat végeztünk egy családi házra vonatkozóan, annak transzmissziós hővesztesége, a hőhidak által okozott hővesztesége, és az éves fűtési hőigénye tekintetében, két különböző variáció felvételével. Az 1. variáció esetén a szokásos építészeti kialakítást, a 2. variáció esetében pedig gyakorlatilag hőhidmentes kialakítást vettünk figyelembe. Az összehasonlító számítások végeredményeit a 3. táblázatban tüntetjük fel.

	1. variáció	2. variáció
éves transzmissziós hőveszteség kWh-ban	14345,82	14.345,82
a hőhidak által okozott éves hőveszteség kWh-ban	3301,58	0,87
összesen (kWh-ban)	17.647,4	14.346,7
éves fűtési hőigény kWh-ban	14890	12210

3. táblázat

A példaként vett családi ház éves transzmissziós hővesztesége és a hőhidak által okozott hőveszteség a szokásos építészeti kialakításnál és gyakorlatilag hőhidmentes kialakítás esetén

A számított eredmények összehasonlításából jól látható, hogy az épület fűtési hőigényének alakulásában a hőhidak igen jelentős szerepet játszanak. Úgy az előbbi táblázat 3., mint 4. sorának eredményei mintegy 23 %-os eltérést mutatnak, vagyis a hagyományos kialakítású épületek hőfelhasználása ennyivel nagyobb az ideális, hőhidmentes épület hőfelhasználásánál. A hőhidaknak a hőfelhasználáson belüli kiemelkedő szerepe ismételtén aláhúzza jelen kutatási munka jelentőségét, amelynek gyakorlati hasznaként éppen ezen hőhidak által okozott hőveszteség lesz pontosan számítható a kétdimenziós matematikai modell alapján.

### 3. Kétdimenziós hőátaszármaztatás egyrétegű fal esetén napsugárzással

A kitűzött kutatási feladathoz kapcsolódóan szükségesnek tartottuk a falszerkezetek belső és külső oldalán kialakuló hőátadási tényezők nagyságának felülvizsgálatát is. Az ezzel kapcsolatos eredményeinket az Oldenbourg Verlag által kiadott Gesundheitsingenieur című folyóirat 127. évfolyama 2006/1. számában „Ein Beitrag zur Bestimmung der inneren und aeußeren Waermeübergangskoeffizienten von Aussenwaenden” cím alatt publikáltuk (10. - 14. oldal) Ezen kutatás során mindkét oldali hőátadási tényezőt egy konvektív és egy sugárzási tag összegeként állítottuk elő. A belső oldali hőátadási tényező értéke függ a helyiségben alkalmazott fűtéstől is (radiátoros fűtés, falfűtés, vagy padlófűtés), és számértéke a legjellemzőbb elrendezések esetén 6,99 és 7,12 W/(m<sup>2</sup>·K)-re adódott ki, amelyek átlagértékét használtuk fel a további, a kétdimenziós hővezetéssel kapcsolatos

számításainknál. A külső oldali hőátadási tényező értéke pedig az ennek meghatározására kidolgozott matematikai modell alapján  $14,06 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$  értékűre adódott ki. Megállapítható, hogy a hőátadási tényezők értékei mindkét esetben kisebbek a szokásosan alkalmazott értékeknél ( $\alpha_b = 8 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ , és ( $\alpha_k = 25 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ ).

A napsugárzásnak kitett falszerkezet esetén ha a külső fal a külső hőszigetelésből  $q \text{ W}/\text{m}^2$ -t elnyel, akkor a falhőmérsékletek meghatározásához ezt is figyelembe kell venni. A külső hőszigetelés csökkenti a külső konvekció okozta hővesztést, ezért ezt egy negatív  $hr$  hőátadási tényezővel vesszük figyelembe. Így a (25) egyenletrendszer a következő alakúvá válik:

$$\text{egy} := \left\{ (T_{kf} - T_k) (hk - hr) = \frac{k (T_{bf} - T_{kf})}{d}, \frac{k (T_{bf} - T_{kf})}{d} = (T_b - T_{bf}) hb, \right. \quad (25^*)$$

$$\left. q = hr (T_{kf} - T_k) \right\}$$

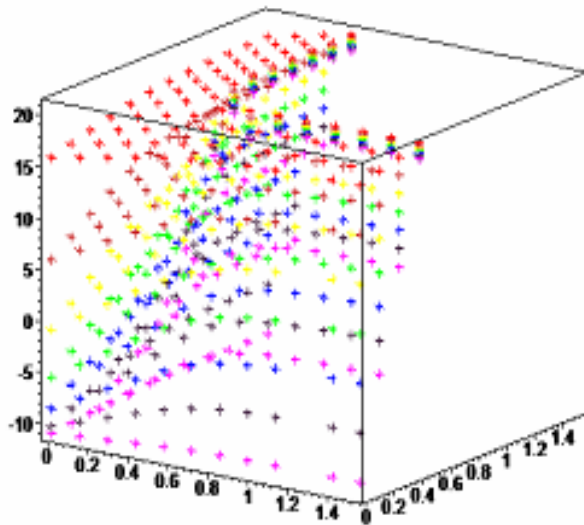
Megvizsgáltuk, hogyan változnak a falhőmérsékletek egydimenziós esetre, különböző hőszigetelés esetén:

$q$	$T_{bf}$	$T_{kf}$
0	292.3366804	263.1734720
50	292.5965741	267.9901170
100	292.8564678	272.8067620
150	293.1163615	277.6234070
200	293.3762552	282.4400520
250	293.6361488	287.2566970
300	293.8960425	292.0733420

4. táblázat

Belső és külső falhőmérsékletek különböző hőszigetelés esetén.

A különböző elnyelt hőáramokhoz tartozó hőmérséklet-eloszlást a módosított külső és belső falhőmérsékletekkel is megoldottuk. A kapott hőmérséklet-eloszlásokat a 11. ábra szemlélteti. Együtt ábrázolva az  $1 \text{ m}^2$ -re jutó 0, 100, 200, és 300 W elnyelt hőáramokhoz tartozó hőmérséklet-eloszlást, megfigyelhető, hogy a külső és belső falhőmérsékletek közötti különbség csökkenésével a sarkokban megfigyelt hőmérséklet csökkenés is kisebb lesz.



Piros	$q=300 \text{ W/ m}^2$
Narancssárga	$q=250 \text{ W/ m}^2$
Sárga	$q=200 \text{ W/ m}^2$
Zöld	$q=150 \text{ W/ m}^2$
Kék	$q=100 \text{ W/ m}^2$
Lila	$q= 50 \text{ W/ m}^2$
Magenta	$q= 0 \text{ W/ m}^2$

11. ábra  
Hőmérséklet-eloszlás különböző külső besugárzás esetén

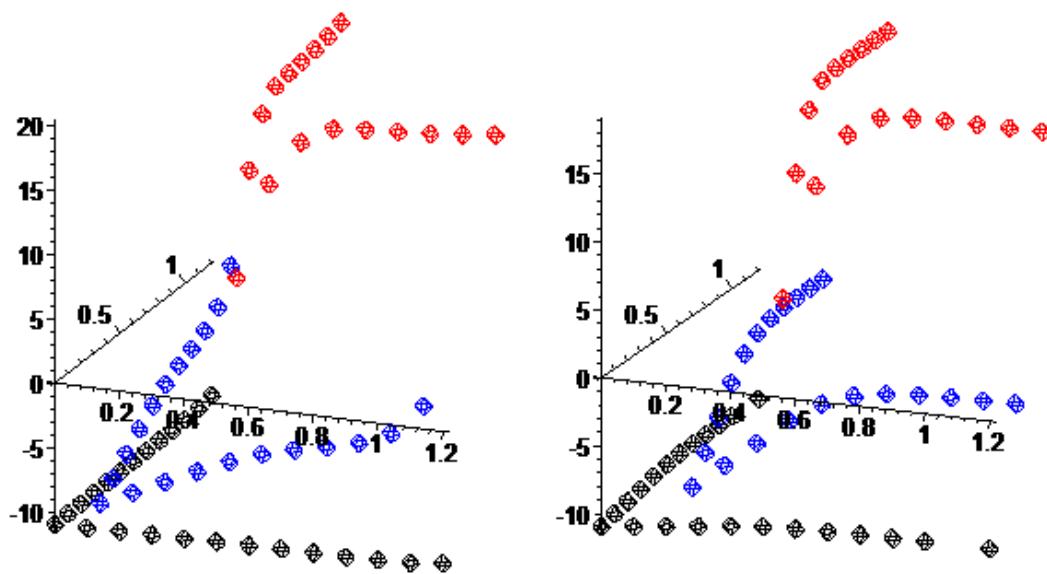
A kapott eredmények egyértelműen mutatják, hogy a sugárzás-intenzitás növekedésével csökken a hőmérséklet-eloszlás egyenlőtlensége úgy a belső, mint a külső falsíkon is.

A legkisebb hőmérsékletű külső sarokpont vonatkozásában megállapítható, hogy alacsony sugárzás-intenzitás ( $0-100 \text{ W/m}^2$ ) esetén  $50 \text{ W/m}^2$  intenzitás-növekedés mindössze 1-2 Celsius fok hőmérséklet-növekedést eredményez. Nagyobb sugárzás-intenzitás ( $150 - 300 \text{ W/m}^2$ ) esetén  $50 \text{ W/m}^2$  intenzitás-növekedés 5-10 Celsius fok hőmérséklet-növekedést eredményez.

#### 4. Kétdimenziós hőátvezetés kétregű fal esetén napsugárzás nélkül

A továbbiakban egy kétregű fal hővezetésének kétdimenziós esetben való meghatározásával foglalkoztunk, amelynél az egyes pontokban kialakuló hőmérséklet-értékeket szintén a véges differenciák módszerének alkalmazásával határoztuk meg. A kutatás során meghatároztuk a belső és külső falsíkon továbbá a falszerkezeten (  $30 \text{ cm}$  téglafal +  $10 \text{ cm}$  hőszigetelés) belül, a falsíktól mért 3 különböző mélységben kialakuló hőmérsékleteket, mégpedig a belső sarokponttól számított  $10 \text{ cm}$ -es lépésként, egészen  $0,8 \text{ m}$  távolságig. Az eredményeket grafikusán is ábráztuk. Az így kapott axonometrikus ábrák igen szemléletes képet adnak a falsarkok közelében kialakuló hőmérsékletértékekről. (12. ábra)

A számításokat 4 különböző esetre ( $0,30$  és  $0,40 \text{ m}$  téglavastagság, mindkét esetben  $0,1 \text{ m}$  hőszigeteléssel és anélkül) végeztük el. Mivel a hőérzeti vonatkozások miatt a belső falsíkon kialakuló hőmérsékleteknek kitüntetett szerepe van, ezért ezek számított értékeit a 4 esetre vonatkozóan itt külön össze is foglaltuk (lásd 5. táblázat)



12. ábra

Hőmérsékletek a külső és belső falsíkon 10 cm –es hőszigeteléssel és hőszigetelés nélkül

Saroktól mért távolság (cm):	Hőszigetelés nélkül		Hőszigeteléssel	
	téglavastagság: (m)	téglavastagság: (m)	téglavastagság: (m)	téglavastagság: (m)
0	4,36416	5,07712	6,42716	6,41972
10	13,01461	14,33794	14,10380	14,09854
20	16,97225	17,88052	17,61247	17,60712
30	18,44648	19,05803	18,92259	18,91525
40	18,66226	19,20396	19,16979	19,15582
50	18,71796	19,24004	19,30517	19,27865
60	18,73805	19,25300	19,46173	19,41455
70	18,74653	19,25836	19,68903	19,62604
80	18,75109	19,26122	19,99582	20,11213

5. táblázat

A belső falsík hőmérséklete Celsius fokban a belső sarokponttól mért távolság függvényében különböző esetekben

A számítások eredményeiből az alábbi következtetések vonhatók le:

1. A sarokpont és a saroktól távoli zavartalan falfelület közti hőmérsékletkülönbség a legkisebb a külső falsíkon, és a legnagyobb értékű hőszigetelés nélküli esetben a belső falsíkon, illetve hőszigeteléssel kialakított falszerkezet esetén a legnagyobb hőmérsékletkülönbség a hőszigetelés alatti téglarétegben alakul ki.

2. A belső falsíkokon számított hőmérsékletkülönbség értékek hőszigetelés nélküli esetben nagyobbak, mint hőszigetelt falszerkezetek esetén.

3. Hőszigetelés nélküli esetben a sarokponttól mért két téglavastagságnyi távolságban a belső falsík hőmérséklete a zavartalan falfelület hőmérsékletétől már csak a negyedik értékes jegyben tér el, hőszigetelt falszerkezet esetén ugyanekkora távolságban az eltérés jelentősebb.

4. Érdekes jelenség, hogy 40 cm-es téglafal esetén a belső falsíkon kialakuló hőmérsékletek a sarokponthoz közeli tartományban nagyobbak szigetelés nélküli falszerkezet esetén, mint szigetelt falszerkezetnél. Ennek oka nyilvánvalóan a falszerkezet síkjában, és az arra merőlegesen kialakuló hővezetés eltérő arányában keresendő.

5. Az elvégzett kutatás eredményei különösen felhívják a figyelmet arra, hogy az épületszerkezeti károsodások (páralecsapódás) és a hőérzeti panaszok elkerülése érdekében a az épületszerkezetek merőleges találkozási élének tartományában a falszerkezeten belüli és különösen a belső falsíkon kialakuló hőmérsékletek számításának nagyobb figyelmet kell szentelnünk, amelynek matematikai alapját a hővezetés ismertett kétdimenziós számításmódja teremti meg.

## 5. Kétdimenziós hőátzármaztatás kétrétegű fal esetén napsugárázással

A kutatás befejező fázisában azt az esetet vizsgáltuk, amikor külső hőszigetelés mellett a falon 10-cm-es hőszigetelőréteg van.

Saroktól mért távolság	Hőszigetelés és hőszigetelés nélküli:	Hőszigetelés-sel	Hőszigeteléssel és $q=100 \text{ W/m}^2$ hőáramsűrűséggel	Hőszigeteléssel és $q=300 \text{ W/m}^2$ hőáramsűrűséggel
0	4,2308	6,30199	6,31858	6,35171
10	12,79348	13,90841	13,92040	13,94438
20	16,81222	17,47493	17,48716	17,51160
30	18,33547	18,83044	18,84736	18,88127
40	18,56384	19,09128	19,112366	19,18839
50	18,62318	19,23374	19,29600	19,42059
60	18,64462	19,39732	19,51357	19,74612
70	18,65361	19,63392	19,83883	20,24858
80	18,65854	19,95268	20,27997	20,93454

6.táblázat

Belső falhőmérsékletek hőszigeteléssel és napsugárázással, illetve azok nélkül

## Összefoglaló megjegyzések a hőátzármaztatás kétdimenziós matematikai modelljének a MAPLE számítógép-algebrai rendszerrel történő számításához

A hőátzármaztatásnak a MAPLE számítógép-algebrai rendszerhez közvetlenül alkalmazható általános kétdimenziós matematikai modelljét a (25\*) egyenletrendszer adja. Az egyenletrendszerben  $q \text{ (W/ m}^2\text{)}$  a külső falsíkot érő napsugárázás intenzitását fejezi ki. Ez a

hősugárzás csökkenti a külső konvekció okozta hőveszteséget, és azt egy negatív  $hr$  hőátadási tényezővel vesszük figyelembe.

A MAPLE számítógép-algebrai rendszer lehetővé teszi a többretegű falszerkezetek kezelését, amelynél a program indítása során egyszer kell megadni a geometriai és hőtechnikai jellemzőket ( $d_1, d_2, d_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \text{stb.}$ ). Lehetőség van az építési gyakorlat igényeinek megfelelően akár 5 rétegű falszerkezetek kezelésére is. Ezt a számítógép kapacitása nem korlátozza, azonban ilyenkor a felírandó egyenletek száma a sokszorosára nő.

### A passzívházak tisztán légfűtéssel történő ellátásának peremfeltétele

A kutatás munkatervének 4. pontjához kapcsolódóan az úgynevezett passzívházak tisztán légfűtéssel történő ellátása peremfeltételeinek megadásához a következőképpen jutottunk el:

A higiéniailag szükséges friss levegő mennyisége lakóépületek esetén a lakás hasznos alapterületének  $1 \text{ m}^2$ -ére vonatkoztatva:  $1 \text{ m}^3/(\text{h} \cdot \text{m}^2)$ .

A szellőző levegő a porpörkölődés veszélye miatt max.  $50 \text{ }^\circ\text{C}$ -ra melegíthető fel, így a szellőző levegő hőmérséklete és a helyiség-hőmérséklet közti különbség max.  $30 \text{ }^\circ\text{C}$ -ra adódik ki.

Ezen adatok felhasználásával a maximális, fajlagos ( $1 \text{ m}^2$  hasznos alapterületre vonatkoztatott) fűtőteljesítmény:

$$\dot{Q} = \dot{V} \cdot c \cdot \Delta t = 1 \text{ m}^3/(\text{h} \cdot \text{m}^2) \cdot 0,33 \text{ Wh/K} \cdot \text{m}^3 \cdot 30 \text{ K} = 10 \text{ W/m}^2$$

Vagyis a passzívházak (radiátoros fűtés nélküli) tisztán légfűtéssel való ellátásának az a feltétele, hogy az épület fajlagos hővesztesége ne haladja meg a  $10 \text{ W/m}^2$ -t.

A továbbiakban a darmstadti Passivhaus Institut által kifejlesztett PHPP (Passivhaus Projektierungspaket) számítógépes programcsomag felhasználásával egy mintaépület vonatkozásában megvizsgáltuk azt, hogy egy max.  $10 \text{ W/m}^2$  fajlagos hőveszteséggel rendelkező épület esetén teljesül-e a passzívházakra előírt követelmény, amely szerint az épület  $1 \text{ m}^2$ -ének éves fajlagos fűtési energiaigénye nem haladhatja meg a  $15 \text{ kWh}/(\text{m}^2 \cdot \text{év})$  értéket.

A számítás során a következő alapadatokat vettük fel:

Klímatikus adatok: Németország standard klímája

Külső falak összesen:  $178,5 \text{ m}^2$ ,  $k = 0,138 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ,

Ablakok.:  $43,5 \text{ m}^2$ ,  $k = 0,781 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ,

Tetőfödém:  $79,1 \text{ m}^2$ ,  $k = 0,108 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ,

Pincefödém:  $76,7 \text{ m}^2$ ,  $k = 0,131 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$ ,

Légcserezszám:  $0,31 \text{ 1/h}$ ,  $\eta_{\text{eff}} = 80 \%$  hatásfokú hővisszanyerő hőcserélővel,

Az épület energetikai vonatkoztatási alapterülete:  $156,0 \text{ m}^2$

Fenti adatokkal az épület fajlagos hővesztesége az energetikai vonatkoztatási alapterület  $1 \text{ m}^2$ -ére vonatkoztatva  $9,9 \text{ W/m}^2$ -re adódott ki.

A számított éves hőenergia mennyiségek pedig a következők.

A transzmissziós hőveszteség:	$37,2 \text{ kWh}/(\text{m}^2 \cdot \text{év})$ ,
A szellőzési hőveszteség:	$4,1 \text{ kWh}/(\text{m}^2 \cdot \text{év})$ ,
Az összes hőveszteség:	$41,3 \text{ kWh}/(\text{m}^2 \cdot \text{év})$ ,
A szoláris nyereség:	$19,2 \text{ kWh}/(\text{m}^2 \cdot \text{év})$ ,
A belső hőnyereség:	$11,3 \text{ kWh}/(\text{m}^2 \cdot \text{év})$ ,

Előbbiekből fűtésre hasznosítható  $\eta = 93\%$   
hőhasznosítási határfok figyelembevételével:  
A maradék fűtési hőigény:

28,5 kWh/(m<sup>2</sup>·év),  
12,8 kWh/(m<sup>2</sup>·év).

A számított eredmények alapján belátható, hogy a passzívházak maradék fűtési hőigényére előírt határérték (max. 15 kWh/(m<sup>2</sup>·év)) betartásának feltétele, hogy az épület fajlagos hővesztesége kisebb legyen, mint 10 W/ m<sup>2</sup>.