Csíkos Csaba

SZTE, BTK, Neveléstudományi Intézet

Problémaalapú tanulás és matematikai nevelés

A Rocard-jelentés (lásd a jelen lapszámban) tisztázni igyekszik a kutatásalapú természettudományos nevelés ('inquiry-based science education', IBSE) és a problémaalapú tanulás ('problem-based learning', PBL) viszonyát. Eszerint a problémaalapú tanulás elsősorban a matematikai nevelés szakirodalmában használatos. A Rocard-jelentés szerint a problémaalapú tanulás speciális esete lenne a kutatásalapú tanulás, amikor a kitűzött probléma megoldásához kísérletezésre, természettudományos szemléletű vizsgálódásra is szükség van.

A problémaalapú tanulás mint esernyőfogalom

Tekintettel arra, hogy másfél évtizedes törekvés figyelhető meg a szakirodalomban a fogalmi tisztázásra mindkét fogalom esetében, egy oktatáspolitikai céllal készült dokumentum szükségképpen egyszerűsítésre kényszerül. A jelenleg is zajló terminológiai vitákban már az is komoly feladatot jelent, hogy egységes magyar fordítást találjunk a szóban forgó fogalmakhoz.

Az alábbiakban Molnár Gyöngyvér (2004) áttekintésére alapozva egyrészt a problémaalapú tanulás jellemzőinek egy rendszerét vázolhatjuk föl, másrészt a PBL-ben főszerepet játszó „probléma" sajátosságait. Megjegyzendő, hogy meglehetősen heterogén tulajdonság-listák állnak így elő: a problémaalapú tanulás egyes jellemzői a tanítási módszerről szólnak (például csoportmunka, a munka fázisai, a „tutor"[1] feladatai), míg más jellemzők inkább átfogó kívánalmakról, tanári hozzáállásról szólnak (például tanulóközpontúság, önszabályozó tanulás). A PBL-megközelítésmódhoz alkalmas problémák jellemzői között a következők szerepelhetnek: autentikus, intranszparens, csoportmunkában feldolgozható, magasabb rendű értelmi műveleteket mozgósító.

A problémaalapú tanulás fogalma fejlődésének illusztrálására olyan megfontolásokat ajánlunk, amelyek különböző nézőpontból született kutatási eredmények fogalomhasználatának explikálását jelentik. Az egyik meghatározó nézőpont a problémaalapú tanulás és a konstruktivista tanulásszemlélet kapcsolatát feltételezi. A neveléslélektan egyik nagy enciklopédiája sommásan azt állítja (*Prawat*, 2008, 183. o.), hogy „a problémaalapú, a projektalapú és a kutatásalapú pedagógiák azok, amelyek ehhez a tanulási megközelítésmódhoz [a konstruktivista szemlélethez] legjobban illeszkednek". Ebben az esetben burkoltan a konstruktivista felfogás követői által gyakran alkalmazott dichotóm szemlélet jelenik meg: hagyományos és újszerű pedagógiákról beszélve az utóbbiak egy klasztert alkotnak, hiszen nem az „újszerű" pedagógiák distinkciójának igényével lép föl, hanem a tradicionálishoz képest újszerűre törekvés igényével. Tynjälä (1999) a problémaalapú tanulást ígéretes megközelítésmódnak nevezi, amely egyszerre képes különböző tudásformák fejlesztésére. Szerinte a problémaalapú tanulás jól tudja támogatni az aktív tanulási folyamatokat, amelyek viszont a konstruktivista pedagógia fő alapelvének megvalósulását támogatják. Tanulmányában a problémaalapú tanulást a tudományterületi vagy tantárgyi tartalmakhoz kötött felépítés ellensúlyaként mutatja be.

A probléma alapú tanulás területén eddig elvégzett számos kísérlet lehetővé tette a terület meta-analízisét. A meta-analízis egy adott területen elvégzett vizsgálatok publikációiban fellelhető adatok másodelemzését jelenti (*Csapó*, 2002). Az ilyen vizsgálatok, a sokféle felhasznált kísérleti módszer és mérőeszköz miatt, mindig szükségképpen túláltalánosítják a vizsgált fogalmat, mintegy fogalmi esernyő alá gyűjtve különböző fogalmi keretekben született kutatásokat. A problémaalapú tanulás meta-analízisének egyik példája Dochy és munkatársai (2003) tanulmánya, amelyből megtudhatjuk, hogy a fogalom az orvosképzés gyakorlatával szembeni elégedetlenség talaján született az '50-es években. A problémaalapú tanulás számos alapvető jellemzőjének összegyűjtése nyomán világossá vált, hogy a meghatározás nem kellően egyértelmű.

A problémaalapú tanulás megközelítésmódjának jellemzése mögött gyakran az a törekvés áll, hogy megkülönböztessék azt az ehhez képest kevésbé preferált, gyakran „hagyományos"-nak nevezett pedagógiai megközelítésmódtól. A kétféle megközelítésmód különbségeinek és hatásainak vizsgálatában Dochy és munkatársai meta-analízisének eredményeként, amely 43 kutatás eredményeit szintetizálta, a tanulók készségeinek és képességeinek területén meggyőző pozitív hatást mutatnak az eddigi vizsgálatok, míg az ismeretek terén negatív hatást találtak. Ezt a vegyesnek mondható képet erősíti meg Hattie (2005) tanulmánya, amelyben 41 kutatás összesített hatásméreteként 0,06-os érték adódott. Önmagában ez nem feltétlenül alacsony, ám összehasonlítva más tényezőkkel (például a Hattie tanulmányának központi kérdését jelentő osztályméret-hatással) viszonylag alacsonynak nevezhető. A két említett meta-analízis eredménye egyrészt azt jelzi, hogy a tanulói teljesítmény növelésének lehetnek ugyan hatékonyabb útjai (negatív konklúzió), másrészt viszont a tradicionálisnak nevezett pedagógiai szemlélet megújítása ezek szerint nem jár azzal a kockázattal, hogy jelentősen lecsökkenne a tanulói teljesítmény (pozitív konklúzió), sőt, a tanulás iránti pozitív attitűd és a személyiség más, nem kognitív szférához tartozó jellemzőiben bekövetkezett változás is a problémaalapú tanulás eszméjének felkarolására buzdít.

> *Az önszabályozó tanulás folyamataiban alapvető, hogy a tanuló tisztában legyenek saját szerepükkel, amit mint aktív cselekvők a tanulás folyamatában betöltenek. A matematika területén a problémaalapú tanulás azt jelenti, hogy a tanulóknak matematikai problémahelyzeteket kell elemezniük, saját és társaik gondolatmentéhez kritikusan kell viszonyulniuk, és meg kell tanulniuk elmagyarázni és igazolni gondolatmenetüket.*

A speciálisan a matematika területén végzett fejlesztő vizsgálatok közül kiemeljük Pape, Bell és Yetkin (2003) kutatását, amelyben a problémaalapú tanulás eszméje az önszabályozó tanulás eszközeként nyer tartalmat. Az önszabályozó tanulás folyamataiban alapvető, hogy a tanuló tisztában legyenek saját szerepükkel, amit mint aktív cselekvők a tanulás folyamatában betöltenek (*D. Molnár*, 2010). A matematika területén a problémaalapú tanulás azt jelenti, hogy a tanulóknak matematikai problémahelyzeteket kell elemezniük, saját és társaik gondolatmentéhez kritikusan kell viszonyulniuk, és meg kell tanulniuk elmagyarázni és igazolni gondolatmenetüket. Ebben a kutatásban a problémaalapú tanulás fogalma elsősorban önszabályozó tanulói folyamatokként szerepelt, ilyen módon a korábbi metakognícióra alapozott fejlesztő kísérleteink tanulságai (*Csíkos*, 2007) is tárgyalhatók a problémaalapú tanulás átfogó fogalmi keretében.

A problémaalapú tanulással kapcsolatos vizsgálatok egy része az újszerű pedagógiai szemléletmód fogadtatását vagy éppen az elfogadtatás nehézségeit tárgyalta. A tanulók körében már több kutatás igazolta a kognitív szférán túlra kiterjedő pozitív hatást (*Azer*, 2009). A tanulók pozitív hozzáállása „érthető", hiszen olyan pozitív tapasztalatokról számoltak be a problémaalapú tanulással kapcsolatban, amelyek közös jellemzője a tanulásba bevontság érzésének biztosítása: eszközök használata, kísérletezés, internethasználat, csoportmunka. A pedagógusok hozzáállásával kapcsolatban ugyanakkor Niessen és munkatársai (2008) kifejezetten azt vizsgálták, milyen okai vannak az ellenállásnak a problémaalapú tanulás módszertanával szemben. Esettanulmányukban a problémaalapú tanulás fogadtatásának nehézségei között említik, hogy a tanártovábbképzések során túl sok minden újat igyekszik a tréner átadni, és ehhez képest kevés konkrét konklúzió hangzik el. Ebben a vizsgálatban a problémaalapú tanulásnak azt az aspektusát emelték ki és tették a kísérlet lényeges változójává, amely szerint a közvetlen tanítás helyett a tanulók és a tanulócsoportok úgy sajátítanak el ismereteket és képességeket, hogy életszerű problémákon dolgoznak.

Az egységes, magyar nyelvű fogalomhasználatra tett javaslatainkat implicite tartalmazza a Rocard-jelentés fordítása. Ezen túl Nagy Lászlóné írása (lásd a jelen lapszámban) bepillantást enged azokba a dilemmákba, amelyeket az általunk jelenleg használt magyar nyelvű terminológia megszületésénél fontolóra vettünk.

A matematikai nevelés sajátosságai a problémaalapú tanulás szemszögéből

A matematika tanulásában is megfigyelhető az a kettősség, amelyet a természettudományos nevelés esetén – egyszerűsített megfogalmazással – az induktív és deduktív tanulási módok dichotómiájaként fejtenek ki. Nyilvánvaló ugyanakkor, hogy a vagylagos választás helyett egymással párhuzamosan alkalmazott megközelítésmódokként vannak jelen induktív és deduktív gondolkodási folyamatok, és ez a kettősség mind a matematika tudományában, mind az iskolai matematika tantárgy keretében tetten érhető.

A matematika erősen formalizált, deduktív felépítésű tudomány. A emberiség matematikai tudása évezredek óta hasonló formában: definíciók, tételek, bizonyítások együtteseként gyarapszik. Azonban a matematikai gondolkodás természete nem ilyen felépítést követ. A geometriával kapcsolatban Descartes (1992) vette észre, hogy a régi görög geométerek írásaikban nem azt a módszert használták, ahogyan az eredményeikhez jutottak. Szerinte azért, hogy azt a másik módszert (amit Descartes analitikusnak nevez) „mint valami titkot" (81. o.) megtartsák maguknak. A komplex számok algebrai bevezetésével kapcsolatban Fried (1991) fogalmazta meg, hogy bár első lépésként elképzeljük a létrehozandó konstruktumot, megállapítjuk, hogy milyen tulajdonságúak lesznek az új elemek, azonban a szóbeli vagy írásbeli közlésnél ez a lépés elmaradhat. Mégis „ez a matematikai gondolkodás leglényegesebb része" (25. o.). Folytatva a gondolatmenetet (26. o.): „Az első rész bizonyos fokig könnyebb, mert nem köt bennünket az a korlátozás, hogy a felírt műveleteknek értelme legyen. Ebben a részben 'csak' megértenivalóink vannak, nem 'precíz tudnivalók'." Fried írásában a pedagógiai kutató erős támogatásra lel a matematikai megértést elősegítő módszerek után kutatva, hiszen a deduktív következtetések kötöttségétől megszabadult, kreatív, intuitív és induktív – mégis matematikainak nevezhető – gondolatmenetek létjogosultsága és szükségszerűsége elénk tárul.

Rickart (1998) szerint a kreativitás alapvető a matematikai felfedezésekben. Neves matematikusok önreflektív gondolatainak elemzéseiből jutott erre a következtetésre, hozzátéve, hogy a matematika művelésében a kemény munka és a kreatív tapasztalatok együtt hozzák meg gyümölcsüket. Maguk a matematikusok is két táborra oszthatók Guy (1981) szerint: vannak elméleti matematikusok és vannak problémamegoldó matematikusok. Hersh (2000) a matematikatanárok körében azonosított olyan csoportokat, amelyek a matematikáról alkotott, filozófiai mélységű meggyőződésekre vezethetők vissza. Vannak például platonisták, akik az örök matematikai igazságban és a tökéletes definíciókban hisznek. A formalisták igyekeznek kizárni az intuíciót a matematikai tevékenységükből, noha kénytelenek elismerni, hogy a nagy matematikusok gyakran induktív úton jutottak el a tételek bizonyításához. Végül a konstruktivista fölfogású tanárok az intuíciót és az induktív gondolkodást szükségszerűnek tartják a matematika műveléséhez.

A matematikusok és a matematikatanárok gondolkodásában azonosított sokszínűséget látva meglepő lehet, hogy az iskolai matematikaoktatás elsősorban deduktív, formalista utat követ, amely kizárja (vagy legalábbis nem díjazza) a hibázást, és nem tartja szükségesnek a saját gondolkodási folyamatokról szóló beszámolót. A matematikadidaktikában az induktív és deduktív megközelítésmódok szembeállításának illusztrálására születtek a DTP és PTD rövidítések. A matematikai bizonyítások tanulásának és tanításának két, alapvetően különböző útját jelzik ezek a betűsorozatok: DTP jelenti a formalista sorrendet: definíció – tétel – bizonyítás, definition – theorem – proof. Ezt a sorrendet találjuk évezredek óta a matematikai eredmények publikálásában, és ez a sorrend köthető a deduktívnak vagy tradicionálisnak nevezett matematikaoktatási felfogáshoz. Ezzel szemben a PTD egyfajta induktív, felfedeztető utat jelent: bizonyítás – tétel – definíció (lásd: *Csíkos*, 1999).

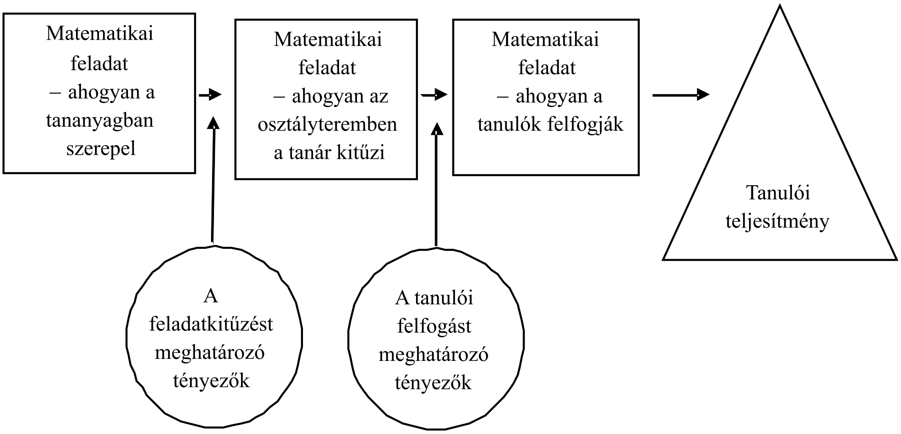
Az induktív és a deduktív jelzők szembeállítása túlzónak tűnhet az iménti gondolatmenetben. A szembeállításnak ugyanakkor legalább három rendszerszintjét tartjuk elképzelhetőnek: a logikai következtetések szintje, az oktatási módszerek szintje és a pedagógiai megközelítésmódok szintje.

Az induktív és a deduktív gondolkodás és következtetés egyaránt fontos és jelentős mind a matematikai, mind más területeken. Noha a „szegedi műhely" méréseiben általában az induktív gondolkodás tesztjén nyújtott teljesítmény szorosabban összefügg a tanulmányi eredményességgel (lásd például: *Csapó*, 1998), ennek részben oka lehet az is, amire Rips (1994) hívja fel a figyelmet a pszichometriai módszert érintő kritikájában: amennyiben a deduktív gondolkodás legalapvetőbb következtetési sémái nagyjából hasonló szinten fejlettek minden emberben, úgy nem várhatók szoros összefüggések az emberek közötti különbségek statisztikai elemzésére épülő módszerekkel. Egy következő rendszerszint a tananyag-feldolgozás útjainak említett különbsége lehet: DTP vagy PTD. Ezen a szinten az oktatási módszerek szerveződése és a tananyag felépítése definiál kétféle oktatási stratégiát. A leglényegesebb azonban egy harmadik szintű dichotómia: a tanári gondolkodás és az abból következő módszerek, célkitűzések és osztálytermi légkör kettőssége. Túl a logikai következtetések szintjén, és túl az oktatási stratégiák világán, a legpontosabban a pedagógiai megközelítésmódok vagy a szemlélet szintjének nevezhetjük ezt a harmadik rendszerszintet. Meggyőződésünk szerint a problémaalapú tanítás lényegét elsősorban ez utóbbi pedagógiai rendszerszinten tudjuk megragadni.

Feladatok, módszerek és célok kölcsönhatásai a problémaalapú tanulás területén

A Rocard-jelentésben közölt leírás és példák alapján nyilvánvaló, hogy a kutatásalapú tanulást elősegítő osztálytermi (és osztálytermen kívüli) környezetben számos tényező kölcsönhatása valósul meg. Ezeket a tényezőket Henningsen és Stein (1997) tanulmánya alapján, az 1. ábrán látható kölcsönhatások rendszerében tekintjük át. A problémaalapú tanulás – a definíciók közös magját alapul véve – egyik jellemzője, hogy a kitűzött feladat áll a középpontban. A további jellemzők már módszertani megfontolásokat tartalmaznak az alkalmazott osztálytermi munkaformákról vagy a tanár szerepéről.

Az ábra meglehetősen komplex – az eredeti ábrát lényegesen leegyszerűsítve is –, így a rajta szereplő dolgok kapcsolatrendszerének egy szeletét tekintjük át: célunk a matematikai nevelésben megvalósítható problémaalapú tanulási megközelítésmód legfontosabb jellemzőinek feltárása. Az előző pontban vázolt három rendszerszinten különböző kérdések tehetők föl: Milyen feladatok segíthetik elő a PBL alkalmazását, és azok megoldása



1. ábra. A matematikai feladatok jellemzői és a tanulói teljesítmény közötti kapcsolatok rendszere (Forrás: Henningsen és Stein, 1997, 528. o.)

során mekkora teret adjunk az induktív következtetéseknek? Milyen oktatási módszereket és stratégiákat alkalmazzunk? Milyen tanári attitűd, milyen értékelési módszer és milyen osztálytermi légkör kívánatos?

Az 1. ábra elemzéséből nyilvánvaló, hogy bármely feladat (bármilyen jó feladat) két ponton is elveszítheti eredeti, gondolkodást fejlesztő hatását. Elsőként azon a ponton, ahogyan az a tanári meggyőződéseknek és céloknak megfelelően a tanulók elé kerül. Másodszor azon a ponton, ahogyan a tanulók fölfogják az adott feladatot. Itt nem szövegértési vagy más kognitív akadályokra gondolunk, hanem az osztály szocio-matematikai normáira (lásd: *Yackel* és *Cobb*, 1996) és a tanulói célokra és meggyőződésekre.

A 1. ábra alapján az is nyilvánvaló, hogy az oktatási módszereknek, amelyek megválasztásában a tanári meggyőződések és célkitűzések döntő jelentőségűek, szerepük van abban, ahogyan egy feladat (bármely feladat vagy bármilyen jó feladat) végül a tanuló elé kerül, majd a tanulói teljesítményhez hozzájárul.

Egy példát mutatunk annak illusztrálására, hogy adott matematikai szöveges feladat hányféleképpen alakulhat át az ábrán jelzett lépésekben, míg végül a tanulói teljesítményben megjelenve a tanítás-tanulás eredményességét jelzi az oktatási rendszer szereplői számára.

Hasonló feladatot az egyik hazai tankönyvkiadó, azóta már jelentősen átdolgozott tankönyvében találtunk:

> „Egy átlagos elefánt tömege 60–70-szer nagyobb, mint egy átlagos felnőtt tömege. Egy átlagos kékbálna viszont 15–20-szor nehezebb egy elefántnál. Ha egy átlagos felnőtt tömege 75 kg, milyen nehéz lehet egy átlagos kékbálna?”[2]

Az egyszerűség kedvéért addig a pontig, amíg a tanuló eljut a feladat megoldásához, mindössze kétféle tanári és tanulói felfogást feltételezünk. Az első tanári hozzáállás alapján a feladat a számolási készség gyakoroltatása mellett az egyenlőtlenségek felírásának tanulására alkalmas. Ebben az esetben az alkalmazott tanári módszerek között feltehetőleg a frontális és az egyéni munkára építő módszerek jelennek meg. Ezen túl – akár kimondatlanul is – a tanulókat gyors és pontos munkavégzésre ösztönzi, hiszen – akár kimondva is – ez csupán egy gyakorlófeladat. Egy második lehetséges tanári hozzáállás esetében a feladat első két mondatának ismertetése után a tanulók első feladat az lesz, hogy meghatározzák, milyen kérdésre lehet választ kapni az eddigi adatokból, és milyen további adatokat szeretnének megtudni.[3] Az alkalmazott módszerek ebben az esetben elmozdulhatnak a vita és a csoportmunka irányába. Annak jelentőségére és fejlesztési lehetőségeire, hogy adott problématérben a tanulók képessé váljanak feladatok, majd részfeladatok megfogalmazására, meggyőzően mutatott rá a Vanderbilt Egyetem kutatócsoportja (*Bransford* és *mtsai*, 1998).

A tanulói feladatfelfogás ('implementation' az eredeti szövegben) alakulása többek között attól függ, hogy milyen osztálytermi normák alakultak ki, és a tanuló milyen matematikai tanulmányi énképpel rendelkezik. Előfordulhat, hogy a feladatot olyan versenyhelyzetként éli meg, amelyben eleve vesztesként látja magát. Másik esetben az elvárt megoldás jellege vezet oda, hogy a feladat tényleges tartalmát figyelmen kívül hagyva keresi azt a – lehetőség szerint egy-két – matematikai alapműveletet, amelyek elvégzésével adódik a kétszer aláhúzandó válasz.

Gondolatkísérletünkből nyilvánvaló, hogy a problémaalapú tanulás alkalmazásában az alkalmazott feladatok és oktatási módszerek kölcsönhatásain túl a pedagógus személyes meggyőződésein van a hangsúly.

A feladat igazából ott kezdődik, hogy a tanulók kitalálják, milyen adatok lennének szükségesek ahhoz, hogy a feladatnak egyértelmű, számszerűsíthető megoldása legyen. Ha ilyen módon alkalmazzuk a feladatot, akkor jelentős lépést tettünk a problémaalapú matematikatanulás felé. Hiszen nem a matematikatudomány valamely fejezetében haladtunk előre, nem számkört bővítettünk a készségfejlesztés során, hanem egy adott matematikai probléma körül – aktív tanulási helyzetben – előkerültek matematikai műveletek, sőt mit több, önszabályozó matematikai tanulási formák.

Néhány feladat és módszer a problémaalapú matematikatanulás elősegítésére

Az előző pontokban igyekeztünk illusztrálni azt a kérdést, amelyet most a következő formában ismétlünk meg: Milyen mértékben határozzák meg a problémaalapú tanulás sikerét a megfelelően megválasztott osztálytermi feladatok? Lehetséges-e, hogy egy adott feladat egyaránt megfelel a tradicionálisnak nevezett és a problémaalapúnak tekinthető pedagógiai megközelítésmódnak? Mielőtt néhány feladat esetében részletesebb elemzésbe kezdenénk, vizsgáljuk meg a kérdésekre adott válaszok elvileg lehetséges kimenetelét és következményeit!

Amennyiben elemzésünk eredménye arra mutat rá, hogy bizonyos feladatok sokkal inkább alkalmasak a problémaalapú tanulás elősegítésére, mint más feladatok, akkor megnő a bemeneti oldal jelentősége a tanítás-tanulás folyamatában. Ez azt jelenti, hogy a feladatgyűjtemények piacán, vagy akár az interneten megosztott feladatok sokaságában új kritériumként jelenik meg a feladatok alkalmassága a problémaalapú tanulás szemszögéből. Egy ilyen helyzetben ugyanakkor az oktatási módszerek kiválasztásának felelősségét és terhét részben levesszük a pedagógusok válláról, hiszen ha egy feladat a szakértők szerint alkalmas a problémaalapú tanulás segítésére, akkor azt már „nem nagyon lehet elrontani". Amennyiben viszont elemzésünk arra mutatna rá, hogy szinte bármely feladat alkalmas lehet a problémaalapú tanulás elősegítésére, akkor megnő a módszertani kultúra jelentősége, és sokkal inkább a módszertani repertoár fejlesztésére, és kevéssé feladatfejlesztésre van szükség. Ebben az esetben a bemeneti oldallal szemben a tanítás-tanulás folyamati tényezői jutnak főszerephez. A következő feladatok elemzésével azt szeretnénk illusztrálni, hogy miként a Rocard-jelentésben illusztrációként használt homokóra-feladat a természettudományos nevelés terén, hasonlóan a matematikai problémák is az alkalmazott módszer függvényében válhatnak a problémaalapú tanulás segítőivé. Olyan feladatokat választottunk elemzésünk tárgyául, amelyek a nemzetközi szakirodalomban jól ismertek, és amelyek vizsgálatát új perspektívával gazdagítja a problémaalapú tanulás szempontja.

Cooper (1994) nevezetes feladata lift-problémaként vált ismertté.

„Egy irodaházban ez a felirat található a liftben:

A lift 14 embert szállíthat.

A reggeli csúcsforgalomban 269 ember akar felmenni a lifttel. Hány csoportban férnek be a liftbe ezek az emberek?”

Elsőként a Rocard-jelentésben A)-tól D)-ig jelölt négy megközelítésmódot alkalmazzuk a fenti feladatra. Az egyes megközelítésmódokat a nagybetűk helyett rövid kulcskifejezésekkel fogjuk azonosítani.

A. A tanár frontális módszerrel bemutatja a megoldást – a gyerekek (szerencsés esetben) figyelnek, és nagy részük követni képes a tanári bemutatást és magyarázatot.

B. A tanulók megpróbálják önállóan megoldani a feladatot, miközben a tanár kérdésekkel segíteni próbál.

C. A szokásos, gyakran sablonosnak tekinthető megoldás mellett a tanár kérdésekkel igyekszik rávezetni a tanulókat arra, hogy a feladat feltételeinek megváltoztatásával, a sablonos megoldásmenet helyett javasolt új megközelítésmóddal többféle gondolatmenetnek és megoldásnak van létjogosultsága. A tanulók önálló kérdésfeltevésre és aktivitásra ösztönzése a problémaalapú tanulás irányába tett jelentős lépésként értékelhető.

D. A tanár néhány adatot, esetleg fényképet, videofilmet mutat be, amelyekben megjelennek a feladatban szereplő fogalmak és mennyiségek. A tanulók feladata ezek után kérdéseket megfogalmazni az adott problématérben, majd a saját maguknak feltett kérdéseket szisztematikusan elemezni, a megoldást pedig ellenőrizni.

A négyféle pedagógiai megközelítésmódhoz tartozó rövid kulcskifejezésekként a következőket javasoljuk: A) tradicionális feladatkitűzés, B) segítő feladatmegoldás, C) irányított, problémaalapú tanulás, D) önszabályozó, problémaalapú tanulás.

Érdemes megfigyelni, hogy a feladat szövegét teljesen érintetlenül hagyhatjuk az első három megközelítésmód esetén, ami azt igazolja, hogy a tradicionális, a segítő és az irányított, problémaalapú feladatkitűzés esetén a konkrét feladatnál lényegesebb lehet az alkalmazott oktatási módszerek együttese; patetikusan fogalmazva: a pedagógiai kultúra. Ugyanakkor a negyedik – önszabályozó, problémaalapú tanulásnak nevezett – megközelítésmód érvényre juttatásához a feladatot abban az értelemben is nyílt végűvé kell alakítanunk, hogy maguknak a tanulóknak legyen lehetőségük a kérdések megfogalmazására a feladatszöveghez kapcsolódóan. Az önszabályozó feladatmegoldás során működésbe lépő metakognitív stratégiák (tervezés, nyomon követés, értékelés) fejlesztését jobban segítik az olyan feladatok, amelyek inkább egy problématér felvázolását valósítják meg, és kevéssé adnak iránymutatást arra vonatkozóan, hogy milyen jellegű megoldási folyamat és végeredmény az elvárás.

Következő feladatunk a 13. századba röpít vissza. A kínai Shu-shu Chiu-chang kéziratban található az alábbi feladat (lásd: *Greer*, *Verschaffel* és *De Corte*, 2000):

„Hét ember 8 íjat készít el 9 nap alatt. Hány napig tart 225 embernek elkészítenie 10 000 íjat?”

A lehetséges megközelítésmódokra vonatkozó elemzésünk eredményeként itt is az adódik, hogy a feladat szövegének megváltoztatása nélkül lehetséges többféle osztálytermi kultúra mellett fölhasználni a feladatot. Valódi, önszabályozó, problémaalapú megközelítésmód érvényre juttatásához azonban a feladat átalakítása szükséges. Például:

„A régi Kínában hét fegyverkészítő kilenc nap alatt készített el nyolc íjat. A hadseregnek tízezer íjra volt szüksége. Hogyan gondolkodhatott a császár: miképpen lehet tízezer íjat gyorsan előállítani?”

Amennyiben a szövegben megadjuk például azt, hogy legfeljebb 225 fegyverkészítő dolgozott az íjakon, a feladat már kevésbé lesz alkalmas az önszabályozó tanulás fejlesztésére.

Végül egy egészen egyszerű feladatot nézünk Illinois állam matematikatesztjéből (*De Lange*, 1993):

„Kathy 40 cent értékben vásárolt földimogyorót. June 8 uncia földimogyorót vett. Melyik lány vett több földimogyorót?”

A feladat eredetileg zárt formájú volt, és természetesen a helyes válasz az volt, hogy „nem lehet eldönteni”. De Lange szerint már önmagában dicséretes, hogy egy téttel bíró értékelési helyzetben megjelent olyan feladat, amelynek helyes megoldásához azt kellett kimondani, hogy nincs – szokványos értelemben vett – megoldása. A feladat igazából ott kezdődik, hogy a tanulók kitalálják, milyen adatok lennének szükségesek ahhoz, hogy a feladatnak egyértelmű, számszerűsíthető megoldása legyen. Ha ilyen módon alkalmazzuk a feladatot, akkor jelentős lépést tettünk a problémaalapú matematikatanulás felé. Hiszen nem a matematikatudomány valamely fejezetében haladtunk előre, nem számkört bővítettünk a készségfejlesztés során, hanem egy adott matematikai probléma körül – aktív tanulási helyzetben – előkerültek matematikai műveletek, sőt mit több, önszabályozó matematikai tanulási formák.

Jegyzet

(1) A „tutor” kifejezés azt a szerepkört jelenti, amely a problémaalapú tanulás csoportmunkájának folyamatában a facilitálással, a moderálással, esetlegesen a tartalmi jellegű segítségnyújtással írható le. Hazai implementációs törekvések esetén az osztályban tanító szaktanárra, vagy akár az epochális rendszerben megvalósuló oktatás tanári teamjének tagjaira gondolhatunk.

(2) A feladat „tradicionális” megközelítésben a $900 < x < 1400$ egyenlőtlenséghez vezet. Megjegyezzük, hogy ez a megoldás (mivel átlagokról volt szó a szövegben, de nem ismerjük a megadott tulajdonságok eloszlását) matematikai szempontból erősen leegyszerűsített, akár még inkorrektnek is tarthatjuk. Viszont aki követi az osztálytermi normákat, eléggé gyorsan kitalálhatja ezt az egyenlőtlenséget.

(3) A problémaalapú megközelítés ellenzői tiltakozhatnak amiatt, hogy ezek szerint nem is fontos matematikai műveleteket végezni a megoldáshoz. Ennek a felvetésnek a boncolgatása elég messzire vezet, így csak két, nyitva hagyott kérdést ajánlunk megfontolásra: Valóban mindenféle típusú szöveges feladatot ki kell-e használni a számolási készség fejlesztése szempontjából? Vajon a matematikai gondolkodásnak azok az összetevői, amelyek lehetővé teszik, hogy egy nyitott problématérben a tanuló feladatokat alkosson, fejleszthetők és fejlesztendők-e akkor is, amikor a számolási készség fejlettségi szintje még nem optimális?

Irodalom

Azer, S. A. (2009): Problem-based learning in the fifth, sixth, and seventh grades: Assessment of students’ perceptions. *Teaching and Teacher Education*, **25.** 1033–1042.

Bransford, J. D. és mtsai (1998): Középiskolai tanulók matematikai gondolkodásának fejlesztése: kutatási tapasztalatok. In Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete.* Vince Kiadó, Budapest. 201–246.

Clarke, D., Goos, M. és Morony, W. (2007): Problem solving and working mathematically: an Australian perspective. *ZDM Mathematics Education*, **39.** 475–490.

Cooper, B. (1994). Authentic testing in mathematics? The boundary between everyday and mathematical knowledge in National Curriculum testing in English Schools. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 1. 143–166.

Csapó Benő (2002): A képességek fejlődési ütemének egységes kifejezése: a gamma-koefficiens. *Magyar Pedagógia*, **102**. 391–410.

Csíkos Csaba (1999): Iskolai matematikai bizonyítások és a bizonyítási képesség. *Magyar Pedagógia*, **99.** 3–21.

Csíkos Csaba (2007): *Metakogníció. A tudásra vonatkozó tudás pedagógiája*. Műszaki Kiadó, Budapest.

D. Molnár Éva (2010): A tanulás értelmezése a 21. században. *Iskolakultúra*, **20**. 11. 3–16.

De Lange, J. (1993). Between end and beginning: Mathematics education for 12–16 year olds: 1987–2002. *Educational Studies in Mathematics*, **25**. 137–160.

Descartes, R. (1992): *Értekezés a módszerrõl*. IKON Kiadó.

Dochy, F., Segers, M., Van den Bossche, P. és Gijbels, D. (2003): Effects of problem-based learning: a meta-analysis. *Learning and Instruction*, **13.** 533–568.

Fried Ervin (1977/1991): *Klasszikus és lineáris algebra*. 4. kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest.

Guy, R. K. (1981). *Unsolved problems in number theory*. Springer-Verlag, New York – Heidelberg – Berlin.

Hattie, J. (2005): The paradox of reducing class size and improving learning outcomes. *International Journal of Educational Research*, **43.** 387–425.

Hersh, R. (2000). *A matematika természete*. Typotex Kiadó, Budapest.

Molnár Gyöngyvér (2004): Problémamegoldás és probléma-alapú tanítás. *Iskolakultúra*, **14**. 2. sz. 12–19.

Niessen, T., Abma, T., Widdershoven, G., van der Vleuten, C. és Akkerman, S. (2008): Contemporary epistemological research in education: Reconciliation and reconceptualization of the field. *Theory and Psychology*, 18. sz. 27–45.

Pape, S. J., Bell, C. V. és Yetkin, I. E. (2003): Developing mathematical thinking and self-regulated learning: A teaching experiment in a seventh-grade mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, **53.** 179–202.

Prawat, R. S. (2008): Constructivism. In Salkind, N. J. (szerk.): *Encyclopedia of educational psychology*. SAGE Publications, Los Angeles – London – New Delhi – Singapore. 182–182.

Rickart, C. (1998). Strukturalizmus és matematikai gondolkodás. In Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): *A matematikai gondolkodás természete*. Vince Kiadó, Budapest. 279–292.

Rips, L. J.(1994): *The Psychology of Proof.* Deductive Reasonig in Human Thinking. The MIT Press, Cambridge, MA – London.

Tynjälä, P. (1999): Towards expert knowledge? A comparison between a constructivist and a traditional learning environment in the university. *International Journal of Educational Research*, **31.** 357–442.

Verschaffel, L., Greer, B. és De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Swets & Zeitlinger, Lisse.

Yackel, E. és Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, **27.** 458–477.

A tanulmány létrejöttét a PRIMAS (Promoting inquiry in matheamtics and science education across Europe), FP7, GA 244 380 sz. projekt, és TÁMOP-3.1.9-08/01-2009-0001 sz., Diagnosztikus mérések fejlesztése című projekt támogatta.