

## Az OTKA 38396 pályázat zárójelentése Témavezető: Ruzsa Imre

Az OTKA 38396 pályázat kutatási terveiben több már korábban elindított és több új kutatási területet jelöltünk meg. Természetesen mint egy ilyen sokrétű kutatás során lenni szokott előre nehéz megadni azt, hogy milyen eredmények születnek, merre fog előrehaladni a kutatás; ennek megfelelően néha olyan területeket is érintettünk, ami konkrétan nem szerepel a kutatási tervben, de az eddigi vizsgálódásaink természetes továbbvitelének tekinthető. Összesen 39 cikk született a projekt keretében. Elmondhatjuk, hogy eredményeink nem csak a szűk szakmai közönség érdeklődését keltette fel, hanem a tudomány iránt érdeklődő hazai és nemzetközi közvélemény is értesült egy-két átütő eredménnyről. A zárójelentésben a megjelent és közlésre elfogadott cikkek alapján ismertetjük, hogy milyen eredmények születtek. A kutatási tervben 7 nagyobb egységet foglalmaztunk meg, ebből 5-öt sikerült alaposan megvizsgálnunk, 2-ben még csak a kutatás elején tartunk, később várhatók publikációk belőle, de így is elmondhatjuk, hogy a megfogalmazott területeken eredményes kutatások folytak, több területen a remélnél is lényegesen jobb, élesebb eredményeket értek el a pályázatban résztvevők.

Az 1. pontban prímszámokkal kapcsolatos kérdéseket foglalmaztunk meg.

Mint azt minden matematikában jártas ember tudja, Goldbach 1742-ben egy Eulerhez írott levelében azt állította, hogy minden ötnél nagyobb szám előállítható három prímszám összegeként. Válaszlevelében Euler megjegyezte, hogy elég lenne azt belátni, hogy minden 2-nél nagyobb pozitív páros szám felírható két prímszám összegeként. A 20. századi matematika több fontos eredményt ért ezen a területen. A legkiemelkedőbb ezek közül Vinogradov a 30-as években elért eredménye, aki a prímszámok eloszlására vonatkozó tételeket felhasználva a körmódszerrel bebizonyította, hogy legfeljebb véges sok kivételtől eltekintve a hármas Goldbach-sejtés igaz. A módszer azonban nem bizonyult hatékonynak a páros Goldbach-sejtés elintézéséhez. Érdekes módon azonban Montgomery és Vaughan-nak sikerült bebizonyítani azt, hogy majdnem minden páros szám esetén igaz a páros Goldbach-sejtés. Ebben az irányban kutatásaink előtt a legjobb eredményt Hongze Li érte el 1999-ben, bebizonyítva, hogy  $X$ -ig legfeljebb  $O(X^{0.92})$  olyan páros szám van, amire nem teljesül, hogy felírható két prímszám összegeként. Ezt az eredményt sikerült Pintz Jánosnak az analitikus számelmélet széles tárházát és számos kiváló új gondolatot használva lényegesen megjavítania, megmutatva, hogy a kivételek száma  $X$ -ig legfeljebb  $O(X^{2/3})$ . Eredményéből született Pintz János [19] cikke.

A páros Goldbach-sejtés irányában Linnik bizonyította be (Trudy Mat. Inst. Steklov, **38**, 1951. és Mat. Sb. (N. S) **32**, 1953) az 50-es években, hogy van olyan  $K$  korlát, hogy bármely elég nagy páros szám előáll két prímszám és legfeljebb  $K$  darab 2-hatvány összegeként. A Linnik által konkrétan nem meghatározott  $K$  értékre az utóbbi évtizedben kínai matematikusok adtak explicit becsléseket. Közülük a kutatásaink előtt a legjobb  $K=2250$  Wang Tianze (Science in China, Series A, **42**, 1999.) nevéhez fűződik. A Riemann-sejtés föltételezésével lényegesen sikerült már korábban javítani a becslést, ekkor már  $K=200$  is ismert volt. Ezen a területen Pintz János és Ruzsa Imre kutatásai eredményeként drasztikusan

sikerült csökkenteni a  $K$ -ra a felső korlátot. Az általános Riemann-sejtés mellett belátták, hogy  $K=7$  megfelel [9] valamint a cikk előkészületben lévő második részében a  $K=8$ -at bizonyítják semmilyen sejtést sem használva. Pintz János és Khalfallah [18] cikke egy fontos segédtevényt tartalmaz a problémával kapcsolatban.

Az előző bekezdésben említett problémakör egyik eredménye Romanov 30-as évekből származó azon tétele, amely szerint azon számok sűrűsége pozitív, amelyek előállnak mint egy prímszám és egy 2-hatvány összege. Az ellenkező irányban Erdős Pálnak sikerült olyan végtelen számtani sorozatot konstruálnia, amelynek a tagjai nem állnak elő mint egy prímszám és egy 2-hatvány összege. Ebből következik, hogy a fenti tulajdonságú számok alsó sűrűsége 1-nél kisebb. Ezzel a kérdésekkel foglalkozik Pintz [33], amelyben az eddig ismert legjobb alsó becslést javítja.

Balog Antal kutatási területe olyan diofantikus egyenletek vizsgálata, ahol az ismeretlenek értéke prímekre szorítkozik. Balog és Ono [4] elliptikus görbékhez hozzárendelt algebrai objektumok, éspedig az ideálosztályok csoportja és a Safarevics-Tate csoport szerkezetével foglalkoztak. Olyan „quadratic twist”-et konstruálnak, hogy a fenti csoportoknak lesz előírt rendű eleme. Ez a  $2m^k = p_1 + p_2$  egyenlet megoldhatóságára vezet, ahol  $p_1$  és  $p_2$  prímek.

A kutatási terv 2. pontja olyan jellegű problémák tárgyalását ígerte, amelyben olyan sorozatokat tekintünk, amelyek bizonyos multiplikatív tulajdonságoknak tesznek eleget. Ezek közül a legegyszerűbben megfogalmazható probléma a prímszámok eloszlásának kérdése. A kutatásunk legfontosabb és leglátványosabb eredménye ehhez a témakörhöz kapcsolódik.

Mint az közismert nincs olyan egyszerű, használható formula, amelynek segítségével az  $n$ -edik prímszám könnyen kiszámolható. Ha a prímszámok sorozatát tekintjük, akkor egy átlagosan egyre ritkuló sorozatot látunk, amelyben azonban a ritkulás nem egyenletes, néha összesűrűsödnek a prímek. Talán még a régi görögök fogalmazták meg azt a sejtést, hogy végtelen sokszor fordul elő az, hogy a szomszédos prímek közötti távolság legfeljebb 2, amit úgy is kifejezhetünk, hogy az ikerprímek száma végtelen. A problémát úgy is megfogalmazhatjuk, hogy  $d_k$  -val jelölve a  $(k+1)$ -edik és a  $k$ -ik prímszám között differenciáját,  $d_k=2$  végtelen sokszor. A prímszámtétel ekvivalens azzal, hogy  $(d_1 + \dots + d_N)/N \sim \ln N$ , amiből következik, hogy végtelen sok  $k$ -ra  $d_k < (1+c) \log k$  bármely tetszőleges pozitív  $c$  esetén. Ezt az eredményt szitamódszerekkel javították bebizonyítva, hogy létezik olyan  $h < 1$ , hogy  $d_k < h \log k$  log  $k$  végtelen sok  $k$  esetén. Itt több szerzőnek sikerült csökkentenie  $h$  értékét. A korábban ismert legjobb becslés Maier 1988-as eredménye, amely szerint  $h=0.2484$  is elérhető. Itt sokáig az tűnt a legfontosabb megközelíthető feladatnak, hogy  $h$ -t csökkentsék, elérjék a tetszőleges kicsi  $h$ -t, ami még mindig óriási távolságra van az áhított ikerprím-sejtéstől. Pár évvel ezelőtt a számelmélettel foglalkozó kutatókat az a hír tartotta izgalomban, hogy Goldston és Yıldırım megmutatták, hogy tetszőleges kicsi  $h$  esetén is  $d_k < h \log k$  végtelen sok  $k$ -ra teljesül, sőt ezt drasztikusan javítva a  $d_k < (\log k)^c$  is elérhető egy alkalmas  $c < 1$  számmal. Sajnos, mint kiderült a bizonyításuk tartalmazott egy hibát, ami miatt még a tetszőlegesen kicsi  $h$ -ra sem működött a bizonyítás. Bár a bizonyítás alapgondolata világos volt, nem látszott, hogyan menthető meg a bizonyítás. A reménytelennek látszó helyzetből Pintz Jánosnak sikerült kiutat találni, aki a szitamódszereket továbbfejlesztve, bebizonyította, hogy  $d_k$  végtelen sok  $k$  esetén legfeljebb  $(\log k)^{1/2} (\log \log k)^2$  nagyságrendű. A  $d_k < h \log k$  (tetszőleges  $h > 0$ ) esetre vonatkozó gyengébb eredmény bizonyítása a Goldston, Pintz János, Yıldırım által írt [24], [31] cikkekben található. Az élesebb eredmény leírása folyamatban van. Az ikerprím-sejtés irányában megmutatták, hogy a Bombieri-Vinogradov tétel élesítése esetén (az  $1/2$  kitevőt kéne egy

nagyobb számmal helyettesíteni), már korlátos differencia is garantálható. Megmutatták, hogy ha a kitevőben a 0,96 is elérhető, akkor már a legfeljebb 16 differencia is végtelen sokszor fordul elő. Az eredményekről Goldston, Pintz János, Yıldırım [25] ad áttekintést. A szomszédos prímek közti hézagok helyett a  $p_{n+\nu} - p_n$  vizsgálatát végzik el Pintz Jánosék [30]-ben. A fenti eredmény széleskörű publicitást kapott, pl. a brit Guardian napilap és Science nemzetközi tudományos folyóirat is beszámolt az eredményekről. Az American Institute of Mathematics (Palo Alto, CA, USA) konferenciacentrum 2005-ben szervezett konferenciát az eredményekből vezető számelmélesek részvételével, de a Bourbaki szemináriumon is előadás ismertette az eredményeket és még lehetne folytatni a sort.

Megvizsgálták azt a kérdést is, hogy mekkora hézagok vannak a pontosan két prím szorzataként előálló számok sorozatában. Itt azt kapták, hogy a differencia végtelen sokszor legfeljebb 6, ami azon korábbi eredménynek egy lényeges javítása, amely szerint a legfeljebb két prímszám szorzataként előálló számok sorozata végtelen sok korlátos nagyságú differenciát tartalmaz. Az eredmény Goldston, S. W. Graham, Pintz, Yıldırım kéziratban lévő cikkében van bizonyítva.

A sokszerzős [6] cikk azzal foglalkozik, hogy mely diszkrét sztochasztikus folyamatok maradnak átlagolás után magukhoz hasonlóak. Ez egy szabályos multiplikatív függvények leírására vonatkozó kérdésre vezet.

A kutatási terv 5. pontjában néhány összeghalmazokkal és Hilbert-kockákkal kapcsolatos kérdést terveztünk.

Ruzsa és Green [16] bebizonyították, hogy a modulo  $p$  maradékosztályok halmazai közül az összegmentesek és az összeghalmazok száma egyaránt  $2^{(1/3+o(1))p}$ . Előkészületben van a folytatása a kutatásnak, amelyben eredményüket kiterjesztik minden kommutatív csoportra. A bizonyítás fő gondolata, hogy sűrű halmaz jól közelíthető egy „szemcsés” halmazzal, amely hosszú számtani sorozatok uniója, és az összeghalmaz, pontosabban a sokféleképpen előálló összegek halmaza, közel azonos.

Az összeghalmazokat használva Ruzsa [20] bebizonyította, hogy tetszőleges  $f(x) = \sum_{i=1}^n \cos a_i x$  alakú függvényhez, ahol  $a_j - a_k$  különböző természetes számok van olyan  $x$ , hogy  $f(x) < \exp\{-c(\log n)^{1/2}\}$ . Ez Bourgain tételét javítja (ott  $(\log n)^c$  volt, konkrétan ki nem számolt kicsiny  $c$  értékkel). Ez azon múlik, hogy ha a  $\{A_i\}$  halmaz tartalmaz nagy összeghalmazt, akkor  $f$  mindenképpen felvesz  $n$  akármilyen nagy negatív értéket.

Hegyvári [7] Sárközy egy sejtéséhez kapcsolódva azt vizsgálta, hogy egy polinomiális sorozat összeghalmaza metszi-e az  $[n^\alpha]$  sorozatokat.

Több szerző által korábban vizsgált kérdés a következő: Legyen  $A$  egy  $n$  elemű halmaz. Keressünk minél nagyobb olyan  $B$  részhalmazát  $A$ -nak, hogy  $b, b' \in B$  esetén  $b+b' \notin A$ . Alsó becslésnek  $\log n / \log 2$ , felsőnek  $n^{2/5}$  volt ismert. Ruzsa [27] az alsóban megjavítja a konstanst, a felsőt pedig  $\exp\{c(\log n)^{1/2}\}$ -re szorítja le.

Hegyvári Norbert F. Hennecart és A. Plagne-nyal írt [36] cikkében a szigorú összeadásra vonatkozó Burrtól és Erdőstől származó kérdéseket vizsgálnak és általánosítanak.

Hegyvári Norbert F. Hennecart-tal közösen írt [37] cikkükben Sárközy egy kérdését vizsgálják: egy additív bázis elemeit  $k$ -színezve a természetes számok monokromatikus előállításához legalább hány elemre van szükség  $k$  függvényében. A kérdést a cikkben a négyzetszámok és a prímszámok sorozatára vizsgálják, továbbá általános, „jól eloszló” sorozatokra is adnak becslést.

Ruzsa Imre E. Croot és T. Schoen-nel írt [29] cikkben belátják, hogy ha  $|A|=n$  és  $|A+A|<cn$ , akkor  $A+A$  és  $A-A$  tartalmaznak  $\gg(\log n)/\log c$  hosszú számtani sorozatot. Továbbá, ha  $A \subset [1, N]$  és  $|A| \gg N^{1-1/k}$ , akkor  $A+A$ -ban van  $k$  hosszú számtani sorozat.

Ruzsa Imre [21] cikkében konstruál  $n$  darab diszjunkt  $k$  elemű halmazt úgy, hogy az összeghalmazok uniója (azonos számok összeadása nélkül)  $< cn^{\frac{k-2}{2k-2}}$  elemű. Ennek jelentősége abban áll, hogy az ehhez tartozó alsó becslést használják a síkbeli halmazok által meghatározott különböző távolságok becslésére (ez egy Erdős-kérdés).

Ruzsa és Cilleruelo [13] a Sidon-sorozatok valós és  $p$ -adikus analogonját vizsgálják. Itt a Sidon-feltétel szó szerinti átvétele, vagyis, hogy a kéttagú összegek különböznek, semmitmondó; ehelyett azt követeljük meg, hogy eléggé különbözzenek (abszolút értékben illetve  $p$ -adikus normában). Ennek jellemzője a  $\delta_n = \min_{i,j,k,l \leq n} |a_i + a_j - a_k - a_l|$  szám, ahol a triviálisan eltűnő négyesek ki vannak zárva. Ha véges,  $N$  tagú sorozatot nézünk, ennek legnagyobb értéke  $1/N^2$  körül van. A végtelen esetre konstruálunk olyan sorozatot, amelyre mindig  $\delta_n \gg 1/(\log n)^2$ . Ugyanez a helyzet akkor, ha az  $a_i$  számok  $p$ -adikus egészek, abszolút érték helyett a  $p$ -adikus normát véve. A véges és végtelen eset tehát jóval közelebb van egymáshoz, mint az egész számok esetén.

Sándor Csaba [23] cikkében Sárközy egy problémája kapcsán generátorfüggvényeket használva meghatározza a természetes számok azon részalmazait, hogy a halmazhoz és annak komplementeréhez tartozó reprezentációfüggvények (itt a lényeges különbözőkre és az azonosakat nem megengedő reprezentációfüggvényekről van szó) valahonnan kezdve megegyeznek.

Sándor Csaba [30] cikkében Sárközy egy kérdése kapcsán bebizonyítja, hogy ha egy sorozat alsó sűrűsége  $\alpha$ , akkor a sorozatból képzett szorzathalmaznak végtelen sok olyan tagja van, ahol a különbség  $< c/(\alpha)^3$ . Ez korábban 4 kitevővel volt ismert és a közölt bizonyítás is lényegesen egyszerűbb. A szerző a többszörös szorzatokat is vizsgálta cikkében.

Az  $\{a_0 + \sum_{i=1}^n \epsilon_i a_i : \epsilon_i \in \{0,1\}\}$  halmazokat  $n$ -dimenziás Hilbert-kockának nevezzük. „Sűrű” sorozatokban előforduló úgynevezett Hilbert vagy másként kombinatorikus kockák létezése fontos lépés volt Roth számtani sorozatokra vonatkozó kombinatorikus bizonyításában. Vizsgálni lehet elfajuló (ahol a kifeszített pontokon lehet egybeesés) és nem elfajuló Hilbert kockák létezését. A nem elfajuló eset vizsgálata a nehezebb. Hegyvári Norbert foglalkozott [17] cikkben a pozitív sűrűségnél egy cseppet ritkább sorozatokkal, megadva az előforduló legkisebb dimenzió pontos nagyságrendjét.

Hegyvári Norbert [34] cikkében Bergelson és Ruzsa egy Hilbert-kockákra vonatkozó eredményét általánosítja.

Hegyvári Norbert [35] cikkben azt vizsgálja, hogy egy hézagos sorozatból alkotott multiplikatív Hilbert-kockát milyen sűrű additív kocka kerülhet el. A fenti eredmény Nathanson egy 1980-as eredményének általánosítását adja.

Ugyancsak Hegyvári Norbert [26] adott Raimi egy tételére általánosítást és új bizonyítást megmutatva, hogy van az egészeknek olyan előre megszabott sűrűségű halmazokból álló partíciója  $k$  osztályra, hogy bárhogyan színezve  $t$  színnel a számokat mindig van olyan szín és végtelen Hilbert-kocka, hogy a halmazt eltolva  $e$  kocka elemeivel mindig a partíció mindegyik osztályát végtelen sok elemben metsző halmazt nyerünk.

Sándor Csaba [38] cikkben bebizonyítja, hogy az első  $n$  pozitív egész közül  $(1+\epsilon)n^{1-2^{1-k}}$  darabot kiválasztva lesz közöttük  $k$ -dimenziós Hilbert-kocka, ha  $n$  elég nagy  $\epsilon$  és  $k$  függvényében.

A Kutatási terv 6. pontjában Freiman tételének olyan irányú kiterjesztését tűztük ki célul, amikor a  $|A+A| < c|A|$  feltételt egy gyengébb feltétellel helyettesítjük.

Ebben a témakörben Elekes György és Ruzsa Imre foglalta össze többéves kutatómunkájuk eredményét [5]. A cél kiterjeszteni a kicsi összeghalmazok Freiman-féle elméletét arra az esetre, amikor nem az összes összeget képezzük, hanem egy adott gráfban összekötött szám-párokat adjuk össze. Ennek legfontosabb előzménye Balog és Szemerédi tétele, mely szerint, ha a gráf pozitív sűrűségű, akkor a halmaz legalábbis tartalmaz olyan részt, amelynek a teljes összeghalmaza kicsi. A legfontosabb eredmények: ha a gráf eléggé összefüggő, akkor az egész eredeti összeghalmaza kicsi; ha csak annyit teszünk föl, hogy  $n$  szám van és a gráfban minden foksám  $> cn$ , akkor a halmaz felbontható véges sok részre, hogy amelyek összeghalmaza kicsi.

A Kutatási terv 7. pontjában véletlen sorozatok kombinatorikus számelméleti tulajdonságainak vizsgálatát terveztük.

Sándor Csaba [38] cikkben a nem elfajuló  $k$ -dimenziós Hilbert kockák küszöbfüggvényét határozta meg illetve meghatározta, hogy ha olyan véletlen sorozatát vesszük az  $1, 2, \dots, n$  számoknak, ahol minden számot  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel választunk be, akkor mekkora dimenziós nem elfajuló Hilbert-kockára számíthatunk.

A fent említett eredményeken kívül még több cikk is született az OTKA támogatás segítségével, de mivel ezek nem kapcsolódnak szorosan a tervezett kutatásokhoz, emiatt ezek részletes ismertetésétől eltekintünk.

A kutatásokba a számelmélet nemzetközileg is magasan jegyzett kutatói közül többet sikerült bevonni. Eredményeinket számos konferencián ismertettük, a cikkek nagy része a tudományterület vezető folyóirataiban jelent meg.

A kutatás alap kutatás jelleggel folyt, alkalmazásokra a matematika keretein belül lehet számítani.