

Cím: Algebra és számítások

Tudományterület: Matematika, ezen belül algebra, számítástudomány

Témavezető: Rónyai Lajos, az MTA tagja Kutatóhely: BME Algebra Tanszék A kutatás idő tartama: 2003-2006.

A matematikai – ezen belül az algebrai – eredmények, eljárások komoly szerepet játszanak a számítógépes világban. A résztvevő kutatók eddigi munkásságában is fontos szerepet játszottak az algebra és a számítások közötti kapcsolatok.

Az elmúlt években a következő irányokban folytattunk kutatásokat:

1. Gröbner-bázisok alkalmazásai, polinomok véges ponthalmazokon; véges testek feletti egyenletek, algebrai geometria:

Legyen V az F test feletti n -dimenziós affin tér egy véges részhalmaza. A V halmaz több érdekes kombinatorikai és geometriai tulajdonsága tanulmányozható a polinomfüggvények V -re való megszorításának vizsgálatával. Itt pedig fontos szerep jut a V -n eltűnő polinomok $I = I(V)$ ideáljának, illetve a polinomgyűrű I szerinti faktorához tartozó Hilbert-függvénynek. E felismerés vezetett el bennünket az ilyen $I(V)$ alakú ideálok Gröbner-bázisainak, és az ezzel kapcsolatos jellemzőinek (kezdőideál, Hilbert-függvény, standard monomok) a tanulmányozásához.

Korábbi ilyen jellegű eredményeinkre építve a [Friedl-Rónyai, 2003DM] munkában általánosítottuk R. M. Wilson nevezetes tételét, ami a k -elemű halmazok és a t -elemű halmazok közötti illeszkedéseket ($t \leq k \leq n-t$) leíró mátrix Z feletti diagonális ekvivalensét jellemzi. Az általánosabb tételben a k (vagy a t) helyén többféle méret is megengedett. A tételből formulát kapunk a szóban forgó mátrixok modulo p rangjára (a p tetszőleges prímszám).

A [Hegedűs-Rónyai, 2003JAC] dolgozatban meghatároztuk az $V(n,k)$ ponthalmazon eltűnő polinomok ideáljának (redukált) Gröbner-bázisát, tetszőleges F alaptest felett. Itt $V(n, k)$ az F^n azon $0, 1$ -vektorainak a halmaza, amelyeknek a Hamming-súlya éppen k (a teljes k -uniform halmazrendszer karakterisztikus vektorainak halmaza). Az eredmény némiképpen meglepő vonása, hogy a kapott bázisok jelentős mértékben függetlenek a választott monomiális rendezéstől. Például ugyanaz a Gröbner-bázis adódik a lex és a deglex rendezések esetén, ha a változók sorrendje megegyezik.

Sikerült leírunk az $I(V(n,k))$ ideálhoz tartozó főtagok ideálját is. Alkalmazásként új bizonyítást adunk Wilson és Frankl nevezetes, illeszkedési mátrixokkal foglalkozó tételeire. A [Hegedűs-Rónyai 2003CEJM], a [Hegedűs-Rónyai, 2006AMH] és a [Friedl-Hegedűs-Rónyai, 2007PMD] munkákban kiterjesztettük a fenti eredmények egy részét általánosabb (ún. l -széles, illetve q -uniform) halmazcsaládokra és partíciókra is. A standard monomokra vonatkozó eredményekből ezekben az esetekben is kombinatorikai következmények vonhatók le. Például [Friedl-Hegedűs-Rónyai, 2007PMD]-ban Babai és Frankl egy sejtését sikerült igazolni.

Tegyük fel, hogy $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$ az F test különböző elemei. Legyen $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ az n pozitív egész egy partíciója, és jelölje V_λ azon $v = (v_1, \dots, v_n) \in F^n$ pontok (vektorok) halmazát, melyekre $0 \leq i \leq k-1$ esetén $|\{j \in [n]: v_j = \alpha_i\}| = \lambda_{i+1}$.

A [Friedl-Hegedűs-Rónyai, 2007PMD] cikkben leírtuk az $I(V_\lambda) \subset F[x_1, \dots, x_n]$ ideál standard monomjait abban az esetben, amikor az alapul vett monomiális rendezés a lex vagy a deglex. A bizonyításban lényeges szerepet kapnak az S_n szimmetrikus csoport reprezentációi. Egyebek között egy (ismereteink szerint) új leírását kapjuk az S^λ Specht-modulus $(S^\lambda)^\perp$ merőleges komplementerének az M^λ modulusban (a merőlegesség itt a James-skalárszorzatra

értendő). Következésképpen kombinatorikai leírást tudunk adni a V_λ Hilbert-függvényéről. Az eredmény permutációkra vonatkozó (vagyis amikor $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$) speciális esetét korábban a [Hegedűs-Nagy-Rónyai, 2004AUSB] dolgozatban bizonyítottuk.

A [Rónyai, 2003ASMSZ] dolgozatban egy Rédei Lászlótól származó régi sejtéssel foglalkoztunk. Legyen $f(x_1, \dots, x_n)$ az F_p prímtest feletti polinom, melynek a foka mindegyik változóban legfeljebb $p-1$, és f nem adható meg (homogén lineáris helyettesítéssel) n -nél kevesebb változó polinomjaként. Ekkor – Rédei sejtése szerint – az $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ egyenlet megoldható az F_p testben. A sejtésre általános ellenpéldát találtunk. Másfelől sikerült megmutatnunk, hogy teljesül néhány fontos speciális f polinomra.

A The lex game and some applications [Felszeghy-Ráth-Rónyai, 2006JSC] című dolgozatunkban véges ponthalmazok lexikografikus standard monomjainak a szerkezetével foglalkoztunk. A standard monomok, mivel gyakran áttekinthető bázisát alkotják a ponthalmazon értelmezett polinomfüggvények terének, egy sor probléma kapcsán hasznosak az elméleti alkalmazásoktól a konkrét interpolációs kérdésekig. A lexikografikus standard monomokat egy kombinatorikai játék, az ún. lex játék segítségével sikerült jellemeznünk. A jellemzésből egyfelől egy új algoritmust nyertünk a standard monomok számítására. A módszer gyorsabb, mint a korábban publikált eljárások. Több érdekes esetben lineáris idejű, tehát aszimptotikus értelemben optimális sebességű. Másfelől a játék segítségével néhány kombinatorikai szempontból érdekes halmazrendszer standard monomjaira sikerült áttekinthető leírást adni. A leírás rácspolygonok segítségével fogalmazható meg kényelmesen. Ez utóbbi eredményt, illetve megközelítést extrémális kombinatorikai problémákra szeretnénk alkalmazni.

Az On the solvability of some special equations over finite fields [Felszeghy, 2006PMD] című dolgozatunkban véges testek feletti egyenletek megoldhatóságával foglalkoztunk: Legyen p prím és F egy n változós d fokú polinom a p elemű F_p test felett. Tegyük fel, hogy homogén lineáris változócserevel F nem alakítható át n -nél kevesebb változós polinommá, továbbá hogy F foka minden változójában kisebb, mint p . Rédei sejtése szerint, amennyiben d legfeljebb n , akkor az egyenletnek van legalább egy megoldása F_p testben. A sejtés általános esetben nem igaz. Ebben a cikkben a $d = 5$ esetre mutattunk ellenpéldát a 11 elemű test felett. Másrészt igazoltuk, hogy a sejtés igaz harmadfokú szimmetrikus polinomokra. A Briançon-Skoda type theorem for graded systems of ideals [Küronya-Wolfe, 2007JA] című cikkben az ideálok egész lezárásáról szóló Briançon-Skoda tételt általánosítják bizonyos fokszámozott ideálsorozatokra. A [Pintér-Rónyai, 2005AUAMI] cikkben bizonyos szimmetrikus ponthalmazok standard monomjainak általánosított ballott sorozatokkal való szép kombinatorikus leírását adtuk meg. Hegedűs Gábor sikeresen megvédte PhD disszertációját, melynek címe Gröbner bases in Combinatorics [Hegedűs, 2005]. Az [Iványos-Rónyai, 2005EK] könyvfejezet elsősorban véges testek feletti, illetve racionális együtthatós polinomok felbontására használt módszerekbe ad betekintést.

A [Janovitz-F.-Rónyai-Szántó, 2006ACM] cikkben olyan többváltozós polinom egyenletrendszereket vizsgáltunk, amelyek perturbációi többszörös gyököket tartalmazó (nulladimenziós) rendszereknek. Ez a helyzet sokszor előfordul a gyakorlatban, amikor az igazi egyenletrendszernek csupán egy közelítését tudjuk kinyerni a mérési adatainkból. Azt vizsgáltuk elsősorban, hogy az eredeti rendszer milyen jellemzői kaphatók meg globális algoritmikus módszerekkel. Megmutattuk, hogy a rendszer ún. multiplikációs mátrixából standard numerikus lineáris algebrai módszerekkel sok fontos információt kaphatunk meg az eredeti egyenletrendszerrel.

Az Algebraic properties of modulo q complete l -wide families című [Felszeghy-Hegedűs-Rónyai, CPC] megjelenés alatt álló cikkben a [Friedl-Hegedűs-Rónyai, 2007PMD] dolgozat eredményeinek egy részét általánosítjuk arra az

esetre, amikor a részhalmazok elemszámára egyenlőség helyett modulo q kongruenciafeltételeink vannak (q egy p prímszám hatványa), és az alaptest p -karakterisztikájú test. Itt is adódnak érdekes kombinatorikai alkalmazások.

Az *On the lexicographic standard monomials of zero dimensional ideals* című dolgozatukban [Felszeghy-Rónyai, 2006 RWCA], valamint a [Felszeghy-Ráth-Rónyai, 2006JSC] című cikkben a (Krull-)nulladimenziós ideálok lexikografikus értelemben vett standard monomjainak (az ún. normális halmaznak) a jellemzésére adtunk egy új, kombinatorikus módszert. A lex-játék segítségével egy sor fontos véges ponthalmaz ideáljának tudtuk kiszámítani a normális halmazát. Néhány kombinatorikai szempontból fontos ponthalmaz esetében síkbeli rácspolygonokkal írható le a normális halmaz. Az standard monomok játékkal való jellemzését a radikál-ideálok esetéről ki tudtuk terjeszteni az ún. lokálisan monomiális ideálok esetére.

A [Pintér-Rónyai, 2006] *On the Hilbert function of complementary set families* című dolgozatban Harima egy szép tétele szerint erős kapcsolatot van a test feletti projektív térbeli X, Y diszjunkt, véges ponthalmazok Hilbert-függvénye között, ha a Z uniójuk teljes metszet. Ennek az eredménynek egy moduláris és kombinatorikus változatát bizonyítottuk. Itt X, Y nulla-egy vektorokból állnak, Z a teljes Boole-kocka, és test helyett általánosabban D -gyűrű felett érvényesek a formuláink.

A [Fernex-Küronya-Lazarsfeld, 2007MA] *Higher cohomology of divisors on a projective variety* című cikkben projektív sokaságok magasabb kohomológia csoportjainak növekedését vizsgáltuk.

A [Küronya, 2006AJM] cikkben aszimptotikus kohomologikus függvények viselkedését vizsgáltuk a Neron-Severi téren. Bebizonyítjuk, hogy ezek invariánsak a divizorok numerikus ekvivalenciájára, és folytonosak a Neron-Severi téren.

A [Hering-Küronya-Payne, 2006AM] *Asymptotic cohomological functions of toric divisors* című dolgozatban torikus divizorok aszimptotikus kohomologikus függvényeit vizsgáltuk. A Serre-féle eltűnési tétel aszimptotikus megfordítását bizonyítjuk be.

Felszeghy Bálint jegyzetet írt [Felszeghy, 2007BME] bevezetés a Gröbner-bázisok elméletébe címmel, amely elektronikusan elérhető.

2. Matematikai információk automatikus kezelése:

Megjelent a [Wettl-Mayer-Szabó, 2004PK] *LaTeX kézikönyv*. Wettl Ferenc LATEX konferenciát szervezett 2005. decemberében az ELTE-n. Egy online példatár kezelő programrendszert is kifejlesztett.

A [Friedl-Ivanyos-Sántha, 2005ACM] cikkben megmutattuk, hogy véges kommutatív csoportok szorzótáblája hatékonyan tesztelhető randomizált algoritmussal. A [Friedl-Ivanyos-Sántha, 2005LNCS] dolgozatban vizsgáltuk a háromszög triangulációinak színezésével kapcsolatos Sperner-lemma bonyolultságát. Olyan, algebrai topológiai eszközökkel több-dimenziós sokaságokra is általánosítható determinisztikus algoritmust adtunk, amely egy konstans faktor erejéig csak annyi lekérdezést végez, amennyi a korábbról ismert alsó korlát. Az [Ivanyos-Massar-Nagy, 2005PR] cikkben sikerült megmutatni, hogy egy bizonyos olyan kvantumszámítógép modell, amelynek gyakorlati megvalósíthatóságának irányába mutatnak biztató kísérleti eredmények, képes a hagyományos értelemben vett kvantumszámítógép hatékony szimulációjára.

Az [Ivanyos, 2007JA] cikkben bebizonyítjuk, hogy a kvantum kapuk univerzalitása algoritmikusan eldönthető.

3. Csoportokkal kapcsolatos számítások

A moduláris reprezentációelmélet egy fontos fogalma a blokk defektcsoportha. Számításokat végeztünk blokkok defektcsoporthaival, valamint defektosztályok megfeleltetéseivel kapcsolatban. A problémák számítógépes tanulmányozását GAP-programokkal végeztük.

T. Breuer, Héthelyi László és Horváth Erzsébet vizsgálta adott defektcsoportha konjugáltosztályok, defektosztályok és blokkok száma közötti kapcsolatot. Bebizonyították a Brauer-Nesbitt tétel egy általánosítását. A Robinson-leképezés segítségével jellemezték a defektosztályokat is. Ellenpéldát adtak Isaacs Character Theory c. könyvében szereplő egy defektosztályokkal kapcsolatos feladatra. Jellemezték azon konjugáltosztály összegeket, melyek Brauer-leképezésnél vett képe nem nilpotens.

A témában megjelent Defect groups, conjugacy classes and the Robinson map [Breuer-Héthelyi-Horváth, 2004JA] cikkünk. A [Héthelyi-Külshammer, 2005JAMS] cikkben Landau egy eredményét általánosítják. Landau eredménye arról szól, hogy véges sok olyan véges csoport van, amelyben a konjugált osztályok száma egy fix korlát alá esik. Az általánosított eredmény szerint, ha p rögzített prímszám, akkor véges sok olyan véges csoport van, amelynek a p -konjugáltosztályai száma rögzített korlát alatt marad. Héthelyi László, Horváth Erzsébet, Thomas Breuer, Burkhard Külshammer és John Murray társszerzőkkel két dolgozatot készített el. A [Héthelyi-Horváth-Külshammer-Murray, 2005JA] Central ideals and Cartan invariants of symmetric algebras című dolgozatban a két utóbbi társszerző korábbi cikkeinek eredményeit javították meg, valamint p karakterisztikájú algebrailag zárt test feletti szimmetrikus algebraikra általánosították az eredményeket. A cikkekben a szimmetrikus algebra centrumának bizonyos ideáljait vizsgálták (pld. Higman-ideál, Reynolds-ideál), valamint a p -hatványra emelés leképezést. $p = 2$ -re megmutatták, hogy ezen ideálok segítségével ki lehet mutatni a Cartan-mátrix páratlan diagonális elemeit. A [Breuer-Héthelyi-Horváth-Külshammer-Murray, 2006JA] Cartan invariants and central ideals of group algebras című dolgozatban az előző eredményeket csoportalgebraikra alkalmazva kaptuk, hogy a Cartan-mátrix pontosan akkor tartalmaz páratlan diagonális elemet, ha G -nek van nulla 2-defektű valós konjugáltosztálya. GAP komputeralgebrai programrendszer segítségével példákat konstruáltak arra, hogy az FG csoportalgebraiban a G csoport p -exponensű elemei összegének $Z(FG)$ -beli annullátorának p -adik hatványa nem feltétlenül nulla. Vizsgáltuk ennek általánosításait is, valamint megadtunk olyan csoportosztályokat, ahol ez a két állítás ekvivalens. A [Corrádi-Héthelyi-Horváth, 2006AM] On one-sided stabilizers of subsets of finite groups című dolgozatban részlegesen stabilizátorok segítségével elégséges feltételt adtak arra, hogy egy csoport superfeloldható legyen. Héthelyi L. és Horváth E. valós blokkok és konjugált osztályok tulajdonságait vizsgálta. Az eddigi eredményekről Horváth E. előadást tartott a Groups St. Andrews 2005 konferencián Inequalities concerning blocks and conjugacy classes, valamint Valós blokkok és konjugált osztályok címmel a Rényi Intézetben. Ezen eredmények továbbfejlesztéséről Héthelyi László és Horváth Erzsébet előadást tartott 2007 májusában a Corrádi Keresztély 75. születésnapjára rendezett konferencián a Rényi Intézetben

G. Ivanyos, Arjeh M. Cohennel közös cikkeiben absztrakt gyökcsoportha és gyök árnyékterekkel foglalkozik. [Ivanyos-Cohen, EJC], [Ivanyos-Cohen, 2006JA].

Héthelyi László Bacsó Gáborral csoportok majdnemfaktorizációit és ezek gráfokkal való kapcsolatát vizsgálta [Bacsó-Héthelyi-Sziklai].

4 A számításelmélet algebrai alapjai

Az egyes számítási modellek vizsgálata természetesen vezet algebrai struktúrákhoz (pl. automaták és hozzájuk kapcsolható félcsoportok). Ezek kutatása jelentősen gazdagította mind az algebrát, mind pedig a számítástudományt. Ilyen irányú kutatásaink az automaták algebrai elméletének három területével kapcsolatosak. Ezek az automata-leképezések, a szorzatok, valamint a karakterisztikus félcsoportok. Az automataelmélet szerepe nyilvánvaló a gépek leírásában, a félcsoportelmélet fontossága pedig abban mutatkozik meg, hogy minden félcsoport valamely automata karakterisztikus félcsoportjával izomorf. A témában végzett kutatásaink főleg automatáknak egyszerűbb szerkezetű automatákból való felépítésére, automataleképezésekre (szabad félcsoportnak szabad félcsoportba való hosszúság- és kezdőszelet tartó leképezésekre), formális nyelvekre (szabad monoid tetszőleges részhalmazaira), félcsoportok különböző típusú felbontására, valamint speciális félcsoport-osztályokban a nevezetes félcsoportok meghatározására irányultak.

Ezen témákban a következő új eredmények születtek:

A [Babcsányi-Nagy, 2005PMD] dolgozatukban algebraik homomorf direkt szorzatával ún. pullback-jével foglalkoznak. Egy szükséges és elégséges feltételt adnak arra, hogy egy algebra mikor állítható elő ugyanolyan típusú algebraik homomorf direkt szorzataként. Ezt az eredményt alkalmazva automatákra a szerzők megmutatták, hogy ha egy A automata egy B automatának egy C automatával való bővítése, akkor A a C -nek és B egy gyengén sűrű bővítésének homomorf direkt szorzata. Bebizonyították azt is, hogy automaták általános szorzata izomorfán reprezentálható bizonyos automaták ugyanannyi tényezőös homomorf direkt szorzatával.

A [Nagy, 2004AC] cikkben teljes leírását adtuk azoknak az állapotvéges, kimenő jel nélküli automatáknak, amelyekben minden részautomata retrakt.

A [Babcsányi, PM] Two problems of M. Satyamarayana concerning codes című dolgozatban szükséges és elégséges feltételt adtunk arra, hogy egy bizonyos feltételt teljesítő nyelv szemafor prefix kód illetve teljes uniform kód legyen. Ezzel megoldottuk M. Satyamarayana két problémáját.

Babcsányi István jegyzete elkészült [Babcsányi, 2007AT]. A jegyzet 8 részből áll: 1. Automaták (Fogalma, generátorrendszer, részautomata, homomorfizmus, izomorfizmus, kongruenciák, automata-bővítések, karakterisztikus félcsoport, kváziautomaták) 2. Automataleképezések (Fogalma, automaták ekvivalenciája, véges automaták minimalizálása, egyszerű automaták) 3. Automaták szorzatai (direkt szorzat, szubdirekt szorzat, homomorf direkt szorzat, kvázidirekt szorzat, szuperpozíció, általános szorzat, -szorzat) 4. Automaták teljes rendszerei (homomorfán teljes rendszerek, izomorfán teljes rendszerek, Krohn-Rhodes-tétel, homomorfán -teljes rendszerek, metrikusan teljes rendszerek) 5., 6., 7., (Formális nyelvek, Nyelvek és Automaták, Kódok). A jegyzet a Formális rendszerek témacsoport utolsó három félévét tartalmazza, de ezen bőven túlmutat.

A klasszikus ismert eredmények mellett a legújabb kutatási eredményeket is tartalmazza, ezért PhD-s hallgatók is haszonnal forgathatják.

A szakirodalomban megfigyelhető az a törekvés, hogy a kommutatív félcsoportokra érvényes eredményeket különféle általánosítási irányokba terjesztik ki. Ezek közé tartozik a Cherubini által 1981-ben bevezetett feltételes kommutativitás és a Trotter által 1972-ben bevezetett R-kommutativitás fogalma is. Kiderült, hogy a két feltétel együttes teljesülése esetén (RC-kommutativitás), számos, a kommutatív esetre érvényes eredmény igaz marad.

Ezt a fogalmat Nagy Attila még tovább általánosította és bevezette az RGCn-kommutativitás fogalmát, amelyhez kapcsolódóan több eredmény született más szerzőktől is. Nagy Attilának sikerült leírnia ezen osztályon belül a

regulárisakat [Nagy, 2005SI], a delta-félcsoportokat [Nagy-Jiang, 2003SF] valamint a szubdirekt irreducibiliseket [Nagy, 2003PUMA1], [Nagy, 2007SF].

A [Nagy, 2003PUMA1] cikkben megmutattuk, hogy egy félcsoport pontosan akkor globálisan idempotens szívű szubdirekt irreducibilis és erősen RGCn-kommutatív, ha izomorf G , G^0 , F , R és R^0 egyikével, ahol G egy kváziciklikus p -csoport valamely nemtriviális részcsoportha, F egy kételemű félháló R egy kételemű jobbzéró félcsoport.

A [Nagy, 2005SI] cikkben megmutattuk, hogy egy félcsoport pontosan akkor reguláris RGCn-kommutatív, ha egy kommutatív Clifford-féle félcsoportnak és egy jobbreguláris kötegnek a fonata.

A [Nagy-Jiang, 2003SF] cikkben egy korábbi, ugyanezen a címen publikált dolgozat eredményeit egészítjük ki.

A kommutativitás további általánosítási iránya a permutativitás. Ezen belül, bizonyos esetekben kitüntetett szerepe van a medialitásnak, amit 1969-ben Chrislock vezetett be.

A [Nagy-Jones, 2004SF] cikkben megmutattuk, hogy minden olyan permutatív félcsoport, melynek kongruenciái láncot alkotnak a tartalmazásra nézve, mediális. A szerzők jellemezték is az ezen tulajdonságú mediális félcsoportokat.

A [Nagy, 2005ASMSZ] cikkben továbbfejlesztettük a delta-félcsoportokról szóló korábbi cikkünk eredményeit, egyszerű jellemzést adtunk jobb kommutatív delta-félcsoportokra. Nagy Attila megmutatta, hogy minden olyan permutatív félcsoport, amelyben bármely két kongruencia felcserélhető, az vagy mediális vagy egy derékszögű kötegnek egy nemtriviális nilfélcsoporttal való bővítése. A cikkben megfogalmazott egy sejtést is, hogy az utóbbi esetben a derékszögű köteg triviális is.

Nagy Attila tanítványa, Deák Attila erre a sejtésre [Deák, 2006ASMSZ]-ben igenlő választ adott, így kettejük eredményeként bizonyítást nyert, hogy minden olyan kongruencia-felcserélhető félcsoport, amely eleget tesz egy nemtriviális permutációazonosságnak, az mediális is.

Nagy Attila jellemezte a mediális permutálható félcsoportok egy típusát. Ezt Medial permutable semigroups of first kind címmel nyújtotta be közlésre [Nagy, 2006SF].

A [Nagy, 2003PUMA2] cikkben konstrukciót adtunk tetszőleges félcsoport kommutatív monoid-kongruenciáira szeparátorok segítségével. A Semigroups in which separator of the subsets satisfy certain conditions című cikk [Nagy, 2007 preprint] jellemezte azokat a félcsoportokat, amelyeken a részalmazok szeparátora speciális feltételeket teljesít.

A [Nagy-Babcsányi, 2007AU] cikkben szükséges és elégséges feltételt adtunk félcsoportok végességére egyoldali kongruenciák hálójának segítségével.

A Formal methods in computing [Ferenczi-Pataricza-Rónyai, 2005AK) című kötet áttekintő tanulmányok formájában nyújt bevezetést néhány, a számítások világában használatos alkalmazott matematikai területről. A kötet első tanulmánya a jelen pályázat támogatásával (is) készült.

5. Adatbáziselmélet

A 90-es években egyre több területen merült fel az igény, hogy az adathalmazokból a hagyományosnál árnyaltabb szerkezetű információkat nyerjenek ki. A hagyományos adatbáziskezelő rendszerek – a közvetlen keresőkérdéseken kívül és az alapvető statisztikai funkciókon túl – komplexebb feladatokat egyáltalán nem tudtak megoldani, vagy az eredmény kiszámítása elfogadhatatlanul hosszú időbe telt. A szükség egy új tudományterületet keltett életre, az

adatbányászatot, amelynek célja: hasznos, látens információ kinyerése adatbázisokból. Az adatbányászati algoritmusokat immár arra tervezik, hogy óriási méretű adathalmazokkal is megbirkózzanak.

A gyakori termékhalmozok meghatározása az adatbányászat egyik legfontosabb algoritmikus problémája.

A kérdés először az asszociációs szabálykinyerés részfeladatákként merült fel, de az epizód kutatásnál és szekvenciális mintakinyerésnél is jelentkezik.

A feladat megoldására leggyakrabban a nevezetes APRIORI-algoritmust, vagy ennek valamelyik módosított változatát (DHP, DIC, Partíciós algoritmus, Toivonen algoritmus) alkalmazzák. Az eljárás legidőigényesebb részében – a jelölt halmazok előállításánál – a hashfa adatstruktúra használatos.

A [Bodon-Rónyai, 2003MCM] dolgozatban megmutatjuk, hogy a szófa adatstruktúra egyik módosított változata sok esetben alkalmasabb a feladat elvégzésére. A szófa használatának három előnye mutatkozik a hashfával szemben: alacsony támogatottsági küszöb mellett gyorsabb algoritmust eredményez, a jelöltgenerálást leegyszerűsíti, továbbá nincs szükség a struktúra finomhangolására. Ez utóbbi fontos tulajdonság, hiszen ezáltal nem terheljük a felhasználót az algoritmus adatstruktúráival, elég azt tudnia, hogy mire alkalmas a módszer.

A [Detrovics-Rónyai-Son, 2003MCM] dolgozatunkban a relációs adatmodell egy lehetséges kiterjesztését (GRDs) javasoltuk, különös figyelmet szentelve a benne fellépő adatfüggéseknek (ún. GFD-k). A modell a hagyományos első normálformájú relációkon túl alkalmas az olyan jelenségek leírására is, amikor az attribútumok többértékűek (attribútum értéke lehet egy elemi adatokból álló véges halmaz), vagy nullértékűek. Az általános függésekre is fennállnak a nevezetes Armstrong-axiómák, sőt a GFD-k leírhatók mint alkalmasan megszerkesztett kétértékű hagyományos relációk hagyományos funkcionális függései. A dolgozat tartalmazza a GFD-k egy logikai alapállású jellemzését is. A vizsgálatok egyik érdekes tanulsága, hogy egy sor függőségekkel kapcsolatos kérdés az adatbázis sémájától függetlenül is tanulmányozható.

A gyakori minták keresése az egyik legfontosabb adatbányászati alapeladat. Egy sor fontos algoritmust (APRIORI, FP-growth, Eclat és változataik) javasoltak a feladat megoldására. A módszerek viselkedéséről szóló tanulmányok általában csak aszimptotikus értelemben foglalkoznak az időigénnyel és a tárhasználással. Ez a megközelítés körülményessé teszi az eljárások gyakorlati értékének megítélését. A Surprising results of trie-based FIM-algorithms [Bodon, 2004CEUR] című dolgozatunkban ezen technikák gyakorlati viselkedését vettük górcső alá, különös tekintettel a bennük alkalmazott szófa adatszerkezet eredményességére. Az elméleti és kísérleti elemzés több meglepő, a korábbi heurisztikákkal ütköző ténytet tárt fel. Ehhez kapcsolódik [Bodon, 2005WOS], [Bodon, 2005ECP] valamint [Bodon, 2006BUT] is. Bodon Ferenc 2006-ban megvédte PhD disszertációját is.

Az adatbányászat egyes területei komoly motivációt adnak nagyméretű gráfokon futtatható algoritmusok tervezésére. Egy ilyen példa a webes keresés, mely bizonyos módszereiben a weblapok és hiperlinkek gráfját dogozza fel. E gráf több mint 10 milliárd csúccsal és akár 500 milliárd éllel is rendelkezhet. A. L. Buchsbaum, R. Giancarlo és B. Rác New results for finding common neighbourhoods in massive graphs című (preprint) dolgozatukban megjavítják Buchsbaum, Giancarlo és Westbrook 2003-as eredményét. Megvalósíthatatlansági eredményt bizonyítottak arra a feladatra, amely azt szeretné eldönteni, hogy van-e a bemeneti gráfban két olyan pont, amelynek legalább c szomszédja van.

6. Népszerű tudományos írás

A [Rónyai, 2003MT] írás algoritmusokkal kapcsolatos alapismereteket, érdekességeket tartalmaz olvasmányos, ismeretterjesztő formában.

7. Előadások

Felszeghy Bálint részt vett a Linzben rendezett Special Semester on Gröbner Bases, 2006 rendezvényen (2006 tavasz), ahol előadást tartott a fenti dolgozatának témájából.

Rónyai Lajos részt vett az ISSAC 2006-on (Genova, 2006, Július 9-12).

Rónyai Lajos meghívott előadó volt a Linzben rendezett Special Semester on Gröbner Bases, 2006 rendezvényen (2006 május), ahol a Gröbner-bázisok kombinatorikai alkalmazásairól tartott előadást.

Héthelyi László és Horváth Erzsébet előadást tartott 2007 májusában a Corrádi Keresztély 75. születésnapjára rendezett konferencián a Rényi Intézetben.

Horváth Erzsébet előadást tartott a Groups St Andrews konferencián 2005-ben, 2006-ban pedig az RWTH-Aachen egyetemen.

Héthelyi László előadást tartott Jénában a Friedrich Schiller Egyetemen.

Pintér Dömötör előadást tartott Nagyváradon.

Hegedüs Gábor előadást tartott 2007-ben Lisszabonban az Algebra and Combinatorics workshopon.

Megjelenés alatt lévő közlemények:

A. Nagy: Medial permutable semigroups of the first kind, Semigroup Forum (submitted) /2006/

A. Nagy: Subdirectly irreducible RGC-commutative right H-semigroups, Communications in Algebra (submitted) /2007/

A. Nagy Semigroups in which the separators of the subsets satisfy certain conditions, (preprint) /2007/

A. Nagy Semigroups with finite lattices of one-sided congruences, (with I. Babcsányi) Algebra Universalis (submitted) /2007/

A. L. Buchsbaum, R. Giancarlo, B. Rácz: New Results for Finding Common Neighborhoods in Massive Graphs in the Data Stream Model. Submitted.

G. Bacsó-L. Héthelyi-P. Sziklai: New near-factorizations of finite groups, (elfogadva).

B. Felszeghy, G. Hegedüs, L. Rónyai: Algebraic properties of modulo q complete l -wide families. Submitted to Combinatorics, Probability and Computing.

G. Ivanyos: Deciding universality of quantum gates, J. Algebra (2007), elfogadva.

Dömötör Pintér, Lajos Rónyai: On the Hilbert function of complementary set families, 2007.