Az itt felsorolt különféle modellek természetesen együtt járnak azzal is, hogy az óvodapedagógusokat, szociálpedagógusokat oktató nyelvtanároknak is alkalmazkodniuk kell az új kihívásokhoz. A nyelvtanároktól is elvárhatók az oktatáshoz szükséges számítógépes ismeretek, az audiovizuális eszközök kezelésének, a szakirodalomnak a naprakész ismerete, a módszertani sokrétűség, szükség esetén a szaknyelvi ismeretek és nem utolsósorban a nyelvoktatói kreativitás. Úgy tűnik, hogy a változásoknak nincsenek ellenzőik, de egy dologban mindenképpen konszenzust kell létrehozni, ez pedig az idegen nyelvek és az informatika elhelyezése óraszámban, súlyának megfelelően, a kreditrendszer folyamatában. Az a gyakorlat, hogy a nyelvi lektorátusokat szükségesnek, de egyben feleslegesnek is tekintjük a felsőoktatási intézményekben, a jövőt tekintve a továbbiakban nem tartható. Ahol ezt nem veszik figyelembe, nem szolgáltatnak informatikában és idegen nyelvben a megfelelő szinten, ott nem valószínű, hogy nőni fog a felvételiző hallgatók száma, főként ha van konkurens intézmény, mely jobban szolgáltat.

Irodalom

Marton Károly (2000): *Változóban a főiskolai hallgatók szakmai identitástudata.* Pedagógus képzés.

Orbán Józsefné (2000): *Tanítók és tanárok felkészítése a kooperatív tanulásra, tanulásszervezésre.* Pedagógus képzés.

Lajos Tamás (1996): *Informatika a nyitott és távoktatásban.* (előadás)

158/1994. (XI.17) Korm. rendelet a tanító, a konduktor-tanító és az óvodapedagógus alapképzésben a képesítési követelményekről.

71/1998. (IV.8.) Korm. Rendelet az idegen nyelv-tudást igazoló államilag elismert nyelvvizsgáztatás rendjéről és a nyelvvizsga-bizonyítványokról.

Tárnok Péter

Bizonyítástípusok fejlődési modellje

Írásunk középpontjában bizonyítástípusok fejlődési modelljének leírása áll. A Harel és Sowder (1998) modelljében leírt öt bizonyítástípus (tekintélyelvű, rituális, szimbolikus, empirikus és deduktív) megítélését kérdőívvel vizsgáltuk matematikatanárok körében. Az eredmények azt mutatják, hogy a szimbolikus bizonyítások relatíve magasabb, míg az empirikus bizonyítások relatíve alacsonyabb értékeket kaptak. Az eredmények alapján – összevetve azokat a tanulói bizonyítás-megítélés vizsgálata során kapott eredményekkel – lehetővé vált a bizonyítástípusokat fejlődési aspektusból értelmező modell felállítása és annak alapján a pedagógiai konzekvenciák megfogalmazása.

A matematikában a bizonyítások tanítása alapvető fontosságú, mivel a bizonyítások a matematikai megértés és problémamegoldás fejlesztésének eszközei. (*Hanna*, 1995) Előbb-utóbb a tanulók többsége képessé válik matematikai és nem-matematikai témák esetén is deduktív bizonyításokat adni. Nem kellően világos azonban, hogy milyen lépéseken keresztül jutunk el a gyermekkori tekintélyre alapozott érveléstől az axiómákra alapozott deduktív matematikai bizonyításokig. *Fuson* (1992) megjegyzi: „Egyes területeken kevésbé kidolgozottak a fejlődési szintek." [mármint az összeadással és kivonással kapcsolatos fejlődési modellekhez képest – Cs. Cs.] Milyen fejlődési szintek azonosíthatók a bizonyítások tanulása során? És vajon a bizonyítandó állítás tartalma hogyan befolyásolja az érvelés jellegét? A tanulmányban egy matematikai alapú bizonyítás-kategorizálási rendszer bizonyítás-típusait elemezzük a gondolkodás fejlődésének aspektusából. Eredményeink szerint más tartalmi terület esetén is hasonló tendenciák figyelhetők meg. (*Csíkos*, 2000)

E tanulmány az 1. Országos Neveléstudományi Konferencia matematikadidaktikai szimpóziumán elhangzott előadás nyomán született. A problémakör teljes feldolgozása (*Csíkos*, 2000) és egyes részterületek eredményeinek publikálása után (*Csíkos*, 1999a, 1999b, 2001; *Józsa és Csíkos*, 1999) most a legfőbb cél annak bemutatása, hogy a bizonyítástípusokra vonatkozó matematikatanári értékítélet hogyan befolyásolja a tanulók bizonyításokkal kapcsolatos gondolkodását. Először vázolom a bizonyítások értékelésével kapcsolatos elméleti problémákat, kiemelve a fejlődés szempontjából kulcsfontosságú empirikus és szimbolikus bizonyításokat, majd a tanulmány második részében az empirikus vizsgálatsorozat egy részterületét mutatom be.

Matematikai szempontú bizonyítás-kategóriák

Amikor a tanulók bizonyításait értékeljük, nehéz feladatot kell megoldanunk. Vajon hogyan értékeljük az olyan bizonyítást, amelyben minden szerepel, ami tanári mintabizonyításban előfordult („kilóra megvan"), ám nem lehet tudni, hogy a tanuló mit tekint axiómának, és mit következménynek? A matematikadidaktika kutatóinak javaslatai közül kettőt említünk: *Thompson* és *Senk* (1993) holisztikus pontozási módszerét (részletesebben lásd *Csíkos*, 1999a), valamint a hierarchikus bizonyítás-kategóriák használatát. Ez utóbbival kapcsolatos probléma, hogy a tételeknek több, egymástól jelentősen különböző bizonyítása lehet, amelyeket nem könnyű hierarchikus nehézségi sorrendbe helyezni. *Hoyles* (1997) egyenesen úgy fogalmaz, hogy bármiféle hierarchikus rendszer, amelyet a bizonyítási képesség értékelésére használunk, kutatásmódszertani műtermék lehet.

A hierarchikus bizonyítási kategóriarendszerre remek példa *Harel* és *Sowder* (1998) modellje, amely azzal a kiváló tulajdonsággal rendelkezik, hogy – szemben az említett Thompson és Senk-féle rendszerrel avagy *Wilder* (1944) klasszikus bizonyítás-típusaival – nem csupán deduktív bizonyításokat tartalmaz. Harel és Sowder modellje három hierarchikusan rendezett szintet foglal magába: externális (külső tekintélyre támaszkodó); empirikus; analitikus (deduktív) bizonyítások. Az externális szint három alszintre bontható: tekintélyelvű, rituális és szimbolikus bizonyításokra. Harel és Sowder modelljének legfőbb ereje, hogy nem a szaktudomány szerinti nehézség avagy értékesség a rendező szempontja, hanem „a kategóriák egy-egy kognitív szintet képviselnek ... a tanulók matematikai fejlődésében" (*Harel és Sowder*, 1998). Következésképpen az analitikus bizonyítások magasabb szintű képesség indikátorai, mint a többi bizonyítástípus. Az ötlet, hogy a matematikadidaktikának a bizonyítások egy olyan leírását kell megtalálnia, amelyben a matematikatudomány és a pszichológia szempontjai egyaránt érvényesülnek, *Balacheff* (1988) gondolataira vezethető vissza.

A fejlődési modell szerkesztésének alapelvei

A bizonyítástípusokat magába foglaló fejlődési modellünk nem azt fogja leírni, hogy egy adott tanuló esetében milyen sorrendben alakulnak ki egyes bizonyítási sémák. Harel és Sowder (1998) szerint „az emberek egyszerre többféle bizonyítási sémával rendelkeznek", vagyis egy konkrét személy bizonyítási képessége nem egyetlen szint megnevezésével jellemezhető. Ebből adódik, hogy a tanulók előrehaladása a bizonyítások tanulásában nem jellemezhető egymás után helyezett hierarchikus szintekkel. A bizonyítások tanulásának fejlődését evolúciós hasonlattal írhatjuk le. Ez azt jelenti, hogy a fejünkben az egymással párhuzamosan létező különböző sémák közül egyeseket egyre gyakrabban használunk, míg mások használaton kívülre kerülhetnek. Ez az evolúciós fölfogás összhangban van az evolúciós pszichológia fejlődéselméleteivel (*Piatelli-Palmarini*, 1989). Az értékesebbnek ítélt bizonyítások átveszik a terepet a kevésbé értékesnek tartott fajtáktól. A mi kultúrkörünkben a deduktív bizonyítások számítanak legértékesebbnek, míg például a tekintélyelvű bizonyítások – a *Boëthius*ra hivatkozó *Aquinói Szent Tamás* szerint – nem férnek össze a tudomány magasabbrendűségével. Ebből adódóan a számunkra ismerős tartalmi területeken igyekszünk deduktív bizonyításokat adni, míg az ismeretlen területen megelégszünk a szakember véleményével vagy azzal, hogy egy példát hozunk az állítás igazolására.

Tanulmányunkban a már említett öt bizonyítástípus fejlődési modelljét vázoljuk. A fejlődést mint általános törvényszerűséget értelmezzük, vagyis úgy véljük, a legtöbb tanuló és a legtöbb bizonyítandó állítás esetén hasonló lehet a fejlődés útja. Mindig lehetséges egyénenkénti vagy állítások szerinti anekdotikus különbségeket találni. Elképzelhető például, hogy valaki először megtanulja a *Pitagorasz*-tétel levezetését, majd rátalál a jól ismert 3–4–5 oldalhosszúságú derékszögű háromszögre, végül megelégszik azzal, hogy „a matektanáromtól hallottam". Nem várható ugyanakkor, hogy a többség számára, a legtöbb állítás esetén deduktív-empirikus-tekintélyelvű legyen a fejlődési sor.

A fejlődési modell kulcsai: empirikus és szimbolikus bizonyítások

A fejlődés szempontjából a Harel és Sowder által leírt öt alaptípus közül kettőnek kitüntetett szerepe van. Az újabb kutatások kimutatták az empirikus érvelés fontos szerepét a deduktív matematikai bizonyítások megértésében. A szimbolikus bizonyítások fontos szerepéhez pedig éppen a jelen kutatás szolgál empirikus adatokkal.

A „régi" DTP-modellek és az újabb eredmények szembeállítása alapján (*Csíkos*, 1999a) a kutatók hangsúlyozzák, hogy a matematika művelése során a tanulókat bátorítani kell arra, hogy ne ugorják át az induktív, felfedező szakaszt (*Hodgson és Morandi*, 1996). Balacheff (1988) munkájában is fontos szerepet játszanak az empirikus sémák, amelyeket két fő típusba sorol: naiv empiricizmus és döntő kísérlet. „A naiv empiricizmus arra utal, hogy néhány konkrét eset megvizsgálása után döntünk az állítás igazságáról." (*Balcheff*, 1988) A döntő kísérlet ugyanakkor abban különbözik a naiv empiricizmustól, hogy a tanuló explicit módon foglalkozik az általánosíthatóság problémájával. Az empirikus bizonyítások Harel és Sowder modelljében a középső szinten vannak, azaz az externális és a deduktív bizonyítások között.

A szimbolikus bizonyítások Harel és Sowder modelljében azzal jellemezhetők, hogy szimbolikus gondolkodásról árulkodnak. A szimbolikus gondolkodás „szimbólumokról gondolkodás oly módon, mintha azoknak saját életük lenne, így elszakadva a szimbólumok lehetséges funkciójától, kvantitatív jelentésétől." (*Harel és Sowder*, 1998) A szerzők szerint a túlzottan korai formalizmus vezethet oda, hogy a tanulók azt hiszik, a formai követelmények alapvetőek a matematikai bizonyításokban.

Kutatásunkban Harel és Sowder modelljének kiterjesztett értelmezését alkalmaztuk. Ez annyit jelent, hogy nem-matematikai tartalmakra is ugyanazt az öt bizonyítási sémát alkalmaztuk, és ennek érdekében a bizonyítási sémák leírását újrafogalmaztuk. Az öt alapvető bizonyítástípus legfőbb jellemzőit a következőképpen ragadhatjuk meg:

– tekintélyelvű: az érvelés egy szakértő vagy például egy tankönyv tekintélyére épül;

– rituális: rituális kijelentések használata (például „tegyük fel, hogy") anélkül, hogy előrehaladnánk a tétel igazolásában;

– szimbolikus: értelem nélküli szimbólum-manipuláció, különböző változók hatástalan jelölése vagy elnevezése;

– empirikus: példák felsorolása, néhány eset megvizsgálása;

– deduktív: matematikai szempontból korrekt.

	válaszok száma	átlag	szórás
tekintélyelvű_háromszög	65	1,17	0,45
rituális_háromszög	65	1,18	0,53
szimbolikus_háromszög	64	1,22	0,60
empirikus_háromszög	65	1,38	0,52
tekintélyelvű_páratlan	65	1,40	0,75
rituális_páratlan	64	1,50	0,67
empirikus_páratlan	64	1,61	0,75
szimbolikus_páratlan	63	2,21	1,37
analitikus_páratlan	63	4,63	0,73
analitikus_háromszög	65	4,82	0,39

1. táblázat. Az öt vizsgált bizonyítástípus tanári megítélésének alapvető statisztikai mutatói

Hogyan értékelik matematikatanáraink a különböző bizonyítástípusokat?

Módszerek

Egy nagyobb vizsgálat részeként, amely célul tűzte ki a tanulók bizonyításokról alkotott képének megismerését (*Csíkos*, 1999a, 1999b, 2000, 2001), kérdőívet készítettünk azon iskolák matematikatanárai számára, amelyek részt vettek a nagymintás fölmérésben. A kérdőíveket 1999 májusában postáztuk, és közülük 65 érkezett vissza. Tanulmányunkban most a kérdőívnek azt a részét elemezzük, amely a tanároktól az öt – korábban már említett – bizonyítástípus megítélését kérte. A kérdőívnek ez a része két matematikai tételt és az azokhoz tartozó öt-öt különböző típusú bizonyítást tartalmazott. (*Csíkos*, 2001) A két tétel a következő volt:

A háromszög belső szögeinek összege 180°.

Három páratlan szám szorzata mindig páratlan.

Valamennyi bizonyítástípus értékelése ötfokozatú Likert-típusú skálán történt. Tekintve, hogy az osztályozás is ötfokozatú, ez valójában egy egyszerű osztályozási procedúra volt tanáraink számára.

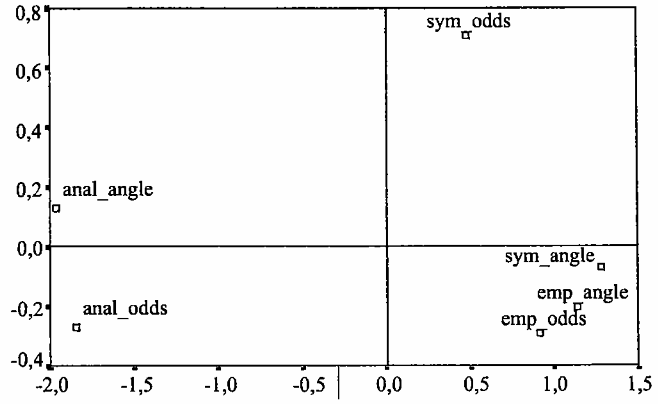
Eredmények és megbeszélés

Az 1. táblázat a tanárok által adott pontszámok átlagát és szórását mutatja. A „háromszög" és a „páratlan" szavak utalnak a két vizsgált tételre.

Eredményeink szerint (és ez egyáltalán nem volt meglepő) matematikatanáraink a deduktív (analitikus) bizonyításokra adták a legmagasabb pontszámokat. Általánosságban elmondható, hogy ebben a táblázatban a 0,19-ot elérő vagy azt meghaladó átlagbéli különbségek statisztikai szempontból jelentősek. Ebből adódóan a deduktív bizonyítások minden más típusnál magasabb átlagot kaptak, míg az empirikus és szimbolikus bizonyítások egyaránt magasabb átlagot kaptak, mint a tekintélyelvű érvelés. Az egyéb megfigyelhető különbségek tartalom-specifikusnak tekinthetők.

A „páratlan" tétel bizonyításai általában magasabb átlagokat kaptak, ami talán annak köszönhető, hogy a tanárok lágyszívűbbek a tanulók számára szokatlan bizonyítandó állítás megítélésében. Mindenesetre az átlagok és szórások különbözőségeinek elemzése semmitmondó abból a szempontból, hogy vajon mi volt a pontozás szempontrendszere. Elképzelhető ugyanis, hogy teljesen más szempont szerint tekinthető gyöngének egy empirikus és egy szimbolikus bizonyítás.

Az *1. ábra* a többdimenziós skálázás segítségével vizuálisan észlelhetővé teszi, hogy a kapott nyers pontszámok mögött milyen hasonlóságok vagy különbségek fedezhetők fel az egyes típusok megítélésében. Az ábrán – a zsúfoltság elkerülése érdekében – a fejlődési aspektusból legfontosabb három típussal foglalkozunk. Az ábra elemzése azt mutatja, hogy a „páratlan" tétel szimbolikus bizonyításának megítélése élesen elüt az analitikus és empirikus bizonyításokétól, és hogy a kétféle empirikus bizonyítás megítélése nem csupán az átlagok leíró statisztikai szintjén, hanem a vé-



1. ábra. Három bizonyítástípus euklideszi távolságmodellje a többdimenziós skálázás alapján (stress=0.01) [anal=analitikus, emp=empirikus, sym=szimbolikus, odds='páratlan', angle='háromszög']

leménykülönbségek struktúrájára épülő többdimenziós skálázás szerint is hasonló. A második észrevétel azért is érdekes, mert az egyik empirikus bizonyítás a naiv empiricizmus, míg a másik a döntő kísérlet Balacheff-i típusát képviselte.

A többdimenziós skálázással nyert euklideszi távolságmodellel lehetővé válik, hogy azonosítsuk a tanári értékítélet mélyén fellelhető tényezőket. Ehhez az szükséges, hogy a kapott ábrán a tengelyeknek (dimenzióknak) megfelelő interpretációt adjunk. Az első dimenzió (a vízszintes tengely) a leíró statisztikai táblázatban tapasztalt átlagértékek fordított skálájának tekinthető. A második dimenzió (a függőleges tengely) a bizonyítások formalizáltságaként értelmezhető. A leginkább formalizáltnak a „páratlan tétel" szimbolikus bizonyítása tekinthető, ugyanakkor az ehhez az állításhoz tartozó empirikus és analitikus bizonyítások nem tartalmaznak absztrakt matematikai jeleket. A többdimenziós skálázás tehát felszínre hozott a leíró statisztikával is kimutatható értékességi viszonyulás mellett egy másik tényezőt, amely a bizonyítások megítélését befolyásolja: a formalizáltság mértékét.

Amint azt matematikai tévképzetekkel kapcsolatban *Zaslavsky* (1989) kimutatta, a tanulók hibás fogalmai visszavezethetők tanáraikéra, így nagy valószínűséggel a bizonyítások megítélésével kapcsolatos tanulói értékítéletet döntően meghatározza a matematikatanáré. Egy kismintás mérésben empirikus adatokkal támasztottuk alá azt a plauzibilis feltételezést (*Csíkos*, 2000), hogy amikor tanulók bizonyításokat értékelnek, lényegében ugyanazt a pontszámot adják, mint amit szerintük a tanáruk adna. Ugyancsak kimutattuk, hogy az iskolai évek alatt változás következik be a tanulói bizonyítás-megítélésben. Például míg 7. osztályban ötfokú skálán a tekintélyelvű érvelésre adott átlag 1,96 és 2,82 között változik – a bizonyítandó állítás tartalmától függően, addig a 11. évfolyamos gimnazisták átlaga mindegyik esetben 1,6 alatti.

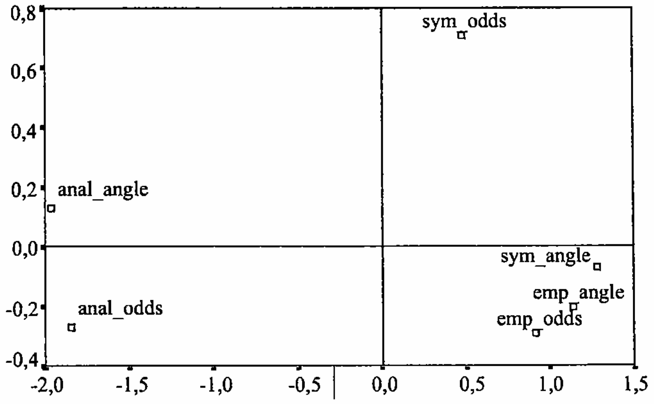
Vizsgálatunkkal közelebb juthatunk annak a hatásrendszernek a megismeréséhez, amely a tanulók szemében a bizonyítások értékességét meghatározza;

– feltételezhetjük, hogy a bizonyításokkal kapcsolatos gondolkodási folyamatok evolúciós hasonlattal írhatók le; a hatékonynak tartott sémák megerősítést nyernek, míg más sémák háttérbe szorulnak;

– nyilvánvaló, hogy amennyiben választási lehetőségünk van több séma között, akkor valamilyen értékelési folyamatnak kell lejátszódnia a gondolkodásban;

– kimutatható, hogy a tanulók lényegében úgy ítélik meg a bizonyítási sémákat, mint ahogyan véleményük szerint matematikatanáruk azokat megítéli;

– az iskolai évek alatt a bizonyítások tanulói megítélése változik, és egyre inkább a tanárokéhoz hasonlóvá válik.



1. ábra. Három bizonyítástípus euklideszi távolságmodellje a többdimenziós skálázás alapján (stress=0.01) [anal=analitikus, emp=empirikus, sym=szimbolikus, odds='páratlan', angle='háromszög']

leménykülönbségek struktúrájára épülő többdimenziós skálázás szerint is hasonló. A második észrevétel azért is érdekes, mert az egyik empirikus bizonyítás a naiv empiricizmus, míg a másik a döntő kísérlet Balacheff-i típusát képviselte.

A többdimenziós skálázással nyert euklideszi távolságmodellel lehetővé válik, hogy azonosítsuk a tanári értékítélet mélyén fellelhető tényezőket. Ehhez az szükséges, hogy a kapott ábrán a tengelyeknek (dimenzióknak) megfelelő interpretációt adjunk. Az első dimenzió (a vízszintes tengely) a leíró statisztikai táblázatban tapasztalt átlagértékek fordított skálájának tekinthető. A második dimenzió (a függőleges tengely) a bizonyítások formalizáltságaként értelmezhető. A leginkább formalizáltnak a „páratlan tétel" szimbolikus bizonyítása tekinthető, ugyanakkor az ehhez az állításhoz tartozó empirikus és analitikus bizonyítások nem tartalmaznak absztrakt matematikai jeleket. A többdimenziós skálázás tehát felszínre hozott a leíró statisztikával is kimutatható értékességi viszonyulás mellett egy másik tényezőt, amely a bizonyítások megítélését befolyásolja: a formalizáltság mértékét.

Amint azt matematikai tévképzetekkel kapcsolatban *Zaslavsky* (1989) kimutatta, a tanulók hibás fogalmai visszavezethetők tanáraikéra, így nagy valószínűséggel a bizonyítások megítélésével kapcsolatos tanulói értékítéletet döntően meghatározza a matematikatanáré. Egy kismintás mérésben empirikus adatokkal támasztottuk alá azt a plauzibilis feltételezést (*Csíkos*, 2000), hogy amikor tanulók bizonyításokat értékelnek, lényegében ugyanazt a pontszámot adják, mint amit szerintük a tanáruk adna. Ugyancsak kimutattuk, hogy az iskolai évek alatt változás következik be a tanulói bizonyítás-megítélésben. Például míg 7. osztályban ötfokú skálán a tekintélyelvű érvelésre adott átlag 1,96 és 2,82 között változik – a bizonyítandó állítás tartalmától függően, addig a 11. évfolyamos gimnazisták átlaga mindegyik esetben 1,6 alatti.

Vizsgálatunkkal közelebb juthatunk annak a hatásrendszernek a megismeréséhez, amely a tanulók szemében a bizonyítások értékességét meghatározza;

– feltételezhetjük, hogy a bizonyításokkal kapcsolatos gondolkodási folyamatok evolúciós hasonlattal írhatók le; a hatékonynak tartott sémák megerősítést nyernek, míg más sémák háttérbe szorulnak;

– nyilvánvaló, hogy amennyiben választási lehetőségünk van több séma között, akkor valamilyen értékelési folyamatnak kell lejátszódnia a gondolkodásban;

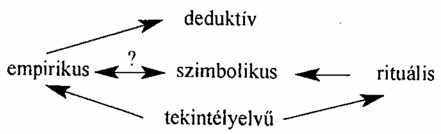
– kimutatható, hogy a tanulók lényegében úgy ítélik meg a bizonyítási sémákat, mint ahogyan véleményük szerint matematikatanáruk azokat megítéli;

– az iskolai évek alatt a bizonyítások tanulói megítélése változik, és egyre inkább a tanárokéhoz hasonlóvá válik.

Eszerint a négylépcsős elméleti következtetési lánc szerint a tanulók bizonyításokkal kapcsolatos gondolkodási folyamatait nagymértékben befolyásolja matematikatanáruk bizonyításokkal kapcsolatos értékítélete. Két dolgot ezzel kapcsolatban itt kiemelünk: az empirikus bizonyítások alulértékeltek, és a bizonyítások formalizáltságának mértéke olyan faktornak tűnik, amely befolyásolja a bizonyítások megítélését.

Bizonyítástípusok fejlődési modellje

Harel és Sowder modellje, amely a bizonyítások kategorizálásában egyszerre figyelembe veszi a matematika és a pszichológia szempontjait, kutatásaink alapján a fejlődés aspektusával egészíthető ki. Figyelembe véve azt, hogy matematikatanáraink megítélése szerint a szimbolikus bizonyítások relatíve alul-, míg az empirikus bizonyítások relatíve fölülértékeltek, a következő fejlődési bizonyítás-kategorizálási modellt javasoljuk:



2. ábra

Az ábrával kifejezett összefüggések közül hármat emelünk ki:

– érvelésünk kisgyermekkorban először leggyakrabban a tekintélyelvű, majd egyre többször megjelennek empirikus és rituális elemek;

– az iskolába lépéssel felértékelődnek a szimbolikus bizonyítások;

– a deduktív bizonyításokhoz az empirikus bizonyításokon keresztül vezet az út.

Az empirikus és szimbolikus bizonyítások közötti kérdőjel a közöttük lévő viszonyra utal: valószínű, hogy a szimbolikus bizonyítások egy fejlődési zsákutcát jelentenek, a kérdőjel pedig egyben figyelmeztető a pedagógia számára, és azt jelzi, hogy az empirikus bizonyításokon keresztül van visszatérés a fejlődés útján. Az empirikus bizonyítások fontosságának elismerése szemléletbeli változást követel. Talán kulturális örökségünk része egy olyan matematikatanítás, amely az iskolai szigorúság letéteményese és ugyanakkor a korai formalizmus táptalaja. Figyelemre méltó, hogy azok a tanulók, akik (nyílt végű kérdésfeltevés esetén) szimbolikus bizonyítást adtak, magas szintű matematikai tanulmányi éntudattal rendelkeznek. (*Józsa és Csíkos*, 1999) Gyakorlati következtetéseink között kell szerepelnie annak, hogy hangsúlyozzuk a bizonyítás előtti „terület-felderítés" (*Edwards*, 1997) fontosságát.

Ha arra a kérdésre kell felelnem, hogy vajon egy gyakorló matematikatanár számára mit mondanak ezek a kutatási eredmények, a legfontosabbnak azt tartom, hogy a tanulók empirikus bizonyításait tekintsük a valódi matematikai bizonyításokhoz vezető út fontos állomásának, és értékeljük ennek megfelelően.

Irodalom

Balacheff, N.: (1988): Aspects of proof in pupils practice of school mathematics. In: Pimm, D. (ed.): *Mathematics, teachers, and children.* Hodder and Stoughton, London. 216–235.

Csíkos Csaba (1999a): Iskolai matematikai bizonyítások és a bizonyítási képesség. *Magyar Pedagógia*, 1. 3–21.

Csíkos, C. A.: (1999b): Measuring students proving ability by means of Harel and Sowder's proof-categorization. In: Zaslavsky, O. (ed.): *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol 2, Technion, Haifa, Israel, 233–240.

Csíkos, Csaba (2000): *A bizonyítási képesség értelmezése és fejlődésének jellemzői iskoláskorban.* PhD értekezés, Szegedi Tudományegyetem, Pedagógia Tanszék.

Csíkos Csaba (2001): Bizonyítási stratégiák megítélése 12–17 éves korban. *Magyar Pedagógia*, 8. 319–345.

Edwards, L. E. (1997): Exploring the territory before proof: Students' generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computer for Mathematical Learning* 2. 3. 187–215.

Fuson, K. C. (1992): Elementary mathematics education. In: Alkin, M. C. – Linden, M. – Noel, J. – Ray, K. (eds.): *Encyclopedia of Educational Research.* 6th ed., McMillan Publishing Company, New York. 776–786.

Hanna, G. (1995): Challenges to the importance of proof. *For the Learning of Mathematics* 15. 42–49.

Harel, G. – Sowder, L. (1998): Students proof schemes: Research from exploratory studies. In: Dubinsky, E. – Schoenfeld, A. – Kaput, J. (eds.): *Research Issues in Collegiate Mathematics Education.* Vol. 7. American Mathematical Society, 234–283.
Hodgson, T. – Morandi, P. (1996): Exploration, explanation, formalization: A three-step approach to proof. *Primus*, 6. 49–57.
Hoyles, C. (1997): The curricular shaping of students' approaches to proof. *For the Learning of Mathematics*, 17. 7–16.
Józsa, K. – Csíkos, Cs. (1999): *The relationships between mathematics self-concept and cognitive abilities required for mathematics achievement.* Paper presented at the 8th European Conference for Research on Learning and Instruction, Gothenburg, Sweden. 24–28, August.
Piatelli-Palmarini, M. (1989): Evolution, selection, and cognition: From learning to parameter setting in biology and the study of language. *Cognition*, 31. 1–44.
Thompson, D. R. – Senk, S. L. (1993): Assessing reasoning and proof in high school. In: Assessment in the mathematics classroom. *Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics*, 167–176.
Wilder, R. L. (1944): The nature of mathematical proof. *American Mathematical Monthly*, 51, 309–323.
Zaslavsky, O. (1989): *The development of a concept: A trace from the teacher's knowledge to a student's knowledge.* Paper presented at the Annual Meeting of the AERA, San Francisco, CA.

A kutatást az OTKA támogatta (OTKA T 22441).

Csíkos Csaba

Matematikatanításunk, nemzetközi mércével

Iskolai matematikatanításunk helyzetének, a tanulók tudásszintjének reális megítéléséhez először is a teljes iskolai populáció átlagteljesítményét kell vizsgálnunk, életkor és iskolatípus szerint. Ez egyaránt értendő alapkészségekre, valamint komplex vagy fejlettebb képességekre. Ezt a képet egészíti ki és árnyalja a kiemelkedő tanulók képességeinek szintje, fejlődése, illetve a matematikai tehetségek eredményessége (matematikai versenyek, szaktárgyi olimpiák). Ezt követően természetesen fontos szempont a településtípusok közötti eltérések vizsgálata, akárcsak a hátrányos helyzetű vagy tanulási nehézségekkel küszködő, illetve a fogyatékos tanulók képességszintjének az elemzése is.

A hazai mérések adatai által mutatott „abszolút" változásokat érdemes összevetni nemzetközi összehasonlító mérések szerinti pozíciónk „relatív" változásaival, azaz „átlagos versenyképességünk" alakulásával.

Egy valós helyzetértékelésben olyan „környezeti" tényezők hatásával is számolnunk kell, mint a tantervi változások – tágabban a társadalmi igények változása –, a tanítási-tanulási koncepciók változása, illetve a jelenlegi gyakorlatban domináns irányzatok, a tankönyvek és más taneszközök, technikai eszközök változása, vagy a matematikatanár-képzés és továbbképzés változása és helyzete. E tekintetben is hasznos lehet az összevetés a nemzetközi változatossággal és trendekkel. Egy ilyen komplex helyzetelemzéshez kívánok ezúttal néhány adalékkal hozzájárulni.

Hazai monitor mérések

Megállapíthatjuk, hogy 1986-tól 1997-ig a matematika tudásszint minden mért korosztályban süllyedt, ami további színvonalesést jelent 1986 előtti mérési szintekhez képest. A nagyon fontos alsó tagozatos iskolaszakasz tekintetében kiemeljük, hogy 1986-ról 1995-re a 4. osztályosok teljesítménye nem változott, habár 1991-ig tartó fejlődés után esett vissza. A