17.

AZ OPERÁTORMODULUSOK KERTÉSZ-FÉLE RADIKÁLJÁRÓL

Írta: SZÁSZ FERENC

Mint ismeretes, a végességi feltételek nélküli asszociatív gyűrűk elméletében alapvető szerepe van a JACOBSON-féle radikálnak és féligegyszerűségnek, mert a gyűrűkben az eddig megadott radikáltípusok közt éppen a JACOBSON-féle radikál bizonyult — több hibája ellenére is — a legtermészetesebbnek és a leghasználhatóbbnak. FUCHS LÁSZLÓ egy észrevétele szerint egy A balegységelemes gyűrűben a $J(A)$ JACOBSON-féle radikálnak megadható egy moduluselméleti jellemzése is: ha ugyanis *az A gyűrűt A-jobbmodulusként tekintjük, akkor a $J(A)$ radikál, amely az összes maximális jobbideál metszete, éppen A-nak mint A-jobbmodulusnak a* FRATTINI-*féle részmodulusa* [2]. A FRATTINI-féle részmodulus az összes olyan x elem halmaza, amely a modulus minden generátorrendszeréből elhagyható. Jól ismert az is, hogy nem balegységelemes gyűrűkben a JACOBSON-féle radikál az összes moduláris maximális jobbideál metszete, ahol az A gyűrűben az R jobbideál akkor moduláris, ha létezik olyan $a \in A$, hogy bármely $x \in A$ elemmel $x - ax \in R$.

Kétoldali egységelemes A gyűrű feletti M unitér A-jobbmodulusokban ($m \cdot 1 = m, m \in M, 1 \in A$) már BOURBAKI [1] bevezetett egy radikálfogalmat. Megjegyezzük azonban, hogy A egységelemének létezése és M unitérsége aránylag erős kikötés.

KERTÉSZ ANDOR a [4] cikkéhez csatolt függelékben megad egy radikáltípust tetszőleges A asszociatív gyűrűk feletti M tetszőleges A-modulusokban. Ez a radikál bizonyos tekintetben hasonló az A gyűrűk $J(A)$ JACOBSON-féle radikáljához. KERTÉSZ ANDOR a [4] cikk függelékében felvet egy problémát is, amelyet mi ebben a kis cikkben megoldunk.

Gyűrűn asszociatív gyűrűt, moduluson jobbmodulust értünk. A felhasznált fogalmakat illetően elsősorban JACOBSON [3] könyvére utalunk. Egy M tetszőleges A-modulusban a $K(M)$ KERTÉSZ-féle radikál: $K(M) = \{m \mid m \in M, mA \subseteq \bigcap_{\alpha} M_\alpha, M_\alpha$ maximális részmodulus$\}$, ahol M_α befutja M összes maximális részmodulusát. Ha M maximális részmodulus nélküli, akkor definíció szerint $K = M$, és ekkor M-et radikálmodulusnak nevezzük. Ha M nem radikálmodulus, akkor K egyrészt az összes olyan $m \in M$ halmaza, amelyekre ma elhagyható minden $a \in A$ mellett M minden generátorrendszeréből (ez a halmaz nem feltétlenül esik egybe a FRATTINI-féle részmodulussal, hiszen m elhagyása helyett ma elhagyásáról van szó), másrészt K az összes homoperfekt maximális részmodulus metszete. Definíció szerint az N részmodulus akkor homoperfekt M-ben, ha $(M/N)A = M/N$. Minden A gyűrűben mint A-jobbmodulusban a $K_r(A)$ KERTÉSZ-féle radikál része a $J(A)$ JACOBSON-féle radikálnak, mert minden moduláris maximális jobbideál nyilván homoperfekt is, továbbá $K_r(A)$ az összes homoperfekt maximális jobbideál metszete és $J(A)$ az összes moduláris maximális jobbideál metszete[1]. Abban a speciális esetben, amikor A-ban minden homoperfekt maximális jobbideál moduláris, érvényes az is, hogy egyszersmind $J(A)$ is része $K_r(A)$-nak, amiből ez esetben $J(A) = K_r(A)$ folyik.

Mármost KERTÉSZ ANDOR [4] cikke függelékében azt veti fel nyílt problémaként, hogy vajon szükségképpen teljesül-e egy tetszőleges A gyűrűben $J(A) \subseteq K_r(A)$, amiből $J(A) = K_r(A)$ is következik.

Mi most konstruálunk egy egész sereg olyan A gyűrűt, amelyben léteznek homoperfekt maximális, de nem moduláris jobbideálok, és amelyekben nem érvényes $J(A) \subseteq K_r(A)$ sem. Sőt, seregünk bármely A gyűrűjében, mint A-balmodulusban a $K_l(A)$ radikálra $K_l(A) \neq K_r(A)$ teljesül.

Érvényes az élesebb állítást kimondó következő

TÉTEL. *Egy* $\mathfrak{m}$ *tetszőleges számossághoz akkor és csak akkor létezik olyan* $\mathfrak{m}$*-számosságú* A *gyűrű, amelyben* $0 = K_r(A) \neq J(A) = K_l(A)$, *ha* $\mathfrak{m}$ *nem négyzetmentes véges szám.*

BIZONYÍTÁS. Legyen először $\mathfrak{m}$ véges és négyzetmentes szám és A egy $\mathfrak{m}$-számosságú gyűrű. Ekkor A mint a p-komponenseinek a gyűrűelméleti direkt összege ciklikus, tehát kommutatív, mert minden p-komponens ciklikus. Tartozzék a p_j prímszámhoz, amely $\mathfrak{m}$ osztója, az $\{a_j\}$ ciklikus p_j-komponens ($j = 1, 2, \ldots, n$) és legyen $a_1^2 = \cdots = a_k^2 = 0$, valamint $a_l^2 = a_l$ ($k+1 \leqq l \leqq n$). Belátható, hogy a kommutatív A gyűrűben a $J(A) = \{a_1, \ldots, a_k\}$ radikál egybeesik a $K_r(A) = K_l(A)$ KERTÉSZ-féle modulus-radikállal. Ha ugyanis M olyan A-modulus, amely bizonyos részmodulusainak a diszkrét direkt összege, akkor M Kertész-féle $K(M)$ radikálja egyenlő a direkt összeadandók Kertész-féle radikáljainak a diszkrét direkt összegével.

Legyen másodszor $\mathfrak{m}$ véges, de nem négyzetmentes szám. Ekkor $\mathfrak{m} = p^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$, ahol pl. $\alpha \geqq 2$. Most bevezetjük a következő gyűrűt: $B = \{x, y\}$, ahol $px = py = xy - x = x^2 = yx = y^2 - y = 0$. Belátható, hogy B számossága p^2, és hogy az $(x)_r$ és $(y)_r$ főjobbideálok direkt összege éppen

[1] Erre az állításra KERTÉSZ ANDOR egy hosszasabb indirekt bizonyítást adott [4]-ben, de KERTÉSZ elegáns tárgyalásmódjában $J(A)$-nak a történetileg eredeti PERLIS—JACOBSON-féle jellemzése szerepelt a moduláris maximális jobbideálok metszeteként való előállítás felhasználása nélkül.

B. Könnyen igazolható továbbá, hogy $(x)_r$ és $(y)_r$ homoperfekt maximális jobbideál B-ben, de $(y)_r$ nem moduláris jobbideál. Ezekből folyik az is, hogy bár a JACOBSON-féle radikál $J(B)=(x)_r\neq 0$, és szintén $K_l(B)=(x)_r\neq 0$, de B-nek mint B-jobbmodulusnak a $K_r(B)$ KERTÉSZ-féle radikálja $(x)_r\cap(y)_r=0$ miatt 0. Tehát $J(B)=K_l(B)\neq K_r(B)=0$. Legyen mármost C a p-rendű testek $(\alpha-2)$ példányának és a p_j-rendű testek α_j példányának a gyűrűelméleti direkt összege. Továbbá, ha A definíció szerint B-nek és C-nek a gyűrűelméleti direkt összege, akkor A számossága $|A|=\mathfrak{m}$ és nyilván $J(A)=$ $=K_l(A)=(x)_r\neq K_r(A)=0$.

Legyen harmadszor $\mathfrak{m}$ egy végtelen számosság. Ekkor az A gyűrűt úgy adjuk meg speciálisan, mint a B gyűrűnek és egy $\mathfrak{m}$-számosságú tetszőleges testnek a gyűrűelméleti direkt összegét. Ekkor $|A|=\mathfrak{m}$ és nyilvánvalóan $J(A)=K_l(A)=(x)_r\neq K_r(A)=0$ is teljesül.

MEGJEGYZÉSEK[2]. A végtelen $\mathfrak{m}$ esetében konstruált A gyűrű mint A-jobbmodulus teljesen reducibilis. Tehát A-ra teljesedik bizonyos ekvivalens tulajdonságok egy egész sorozata (pl. A egybeesik a jobbsocle-jával; A jobbideálhálója komplementumos; A bármelyik elemének az A' kanonikus legszűkebb egységelemes (DORROH-féle) bővítésben vett jobbannullátora véges sok maximális jobbideál metszete; A-nak bármely maximális A-lineárisan független elemrendszere egy jobbideálbázis A-ra nézve stb.). Ugyanakkor A nem balegységelemes, és bár $(x)_r\neq 0$ az A-nak jobbannullátora, A mégis balannullátormentes. Belátható, hogy egy jobbannullátormentes tetszőleges gyűrűre akkor és csak akkor teljesül a fenti ekvivalens tulajdonságok sorozatából az egyik tulajdonság, ha A olyan JACOBSON-féle radikált nem tartalmazó gyűrű, amelyben teljesül a főjobbideáloknak a minimum-feltétele, de nem feltétlenül teljesül a jobbideálok minimum-feltétele. Ilyen tulajdonságú egyszerű gyűrű pl. az összes olyan, racionális koordinátájú végtelen matrixokból álló gyűrű, amelyekben csak véges sok sorvektor és véges sok oszlopvektor $\neq 0$.

[2] A szerzőnek a kézirat lezárása után KERTÉSZ ANDOR közléséből jutott tudomására az, hogy W. G. LEAVITT is adott meg olyan négyelemű nem kommutatív gyűrűt, amelyben a JACOBSON-féle és KERTÉSZ-féle radikál különbözik. LEAVITT példája, amelyet KERTÉSZ ANDOR-ral levélben közölt, lényegében abban az időben keletkezhetett, (1959. október 15. körül), amikor a szerző kézirata már kész volt. LEAVITT azonban nem adott meg kritériumot $\mathfrak{m}$-re nézve a levélben, hogy $K_l(A)\neq J(A)$, $|A|=\mathfrak{m}$ legyen, és $K_l(A)\neq K_r(A)$ teljesülését sem vizsgálta. LEAVITT és a szerző eredménye egymástól teljesen függetlenül oldja meg a [4] cikkben felvetett problémát. — Azt is megemlítjük, hogy bevezettünk egy $W_{\mathfrak{m}}(M)$ radikált, ahol $\mathfrak{m}$ egy számosság és M egy A-jobbmodulus. Az $\mathfrak{m}=2$ eset éppen a KERTÉSZ-féle modulus-radikált adja meg tetszőleges számosságú modulusokban.

IRODALOM

[1] BOURBAKI, N.: Éléments de mathématiques, Algèbre, Ch. VIII. Modules et anneaux semi-simples. Actualités scientifiques et industrielles 1261, Hermann, Paris. (1958).
[2] FUCHS, L.: A remark on the Jacobson radical. *Acta Sci. Math. Szeged* 14 (1952) 167—168.
[3] JACOBSON, N.: *Structure of rings.* Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 37 (1956).
[4] KERTÉSZ A.: Vizsgálatok az operátormodulusok elméletében, III., *MTA III. Oszt. Közl.* 9 (1959) 105—120.

(Beérkezett: 1959. X. 30.)

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem
Matematikai Intézete