22.

Verbandstheoretische Bemerkungen zum Fuchsschen Zeroidradikal der nichtassoziativen Ringe

Von

FERENC SZÁSZ

1. Einleitung. In der Ringtheorie besitzt der Begriff des Radikales als eines Ideales, das die Singularität des Ringes in dem einen oder anderen Sinne mißt, eine besondere Wichtigkeit. Das Radikal wurde zuerst bezüglich spezieller assoziativer Ringe mit Minimalbedingung für Linksideale bzw. für Rechtsideale definiert. Später wurden verschiedene Definitionen für das Radikal eines ganz beliebigen assoziativen Ringes diskutiert, die die Begriffe der Nilpotenz, der Quasiregularität und anderer Regularitätsbegriffe benützten. Einige Radikale wurden auch für die nichtassoziativen Ringe eingeführt.

Das Jacobsonsche Radikal von assoziativen Ringen, dessen eine Definition durch die Quasiregularität gegeben werden kann, läßt sich sehr fruchtbar anwenden. Jedoch haben interessante Ringe ohne Nullteiler, wie z. B. der Ring aller rationalen Zahlen mit ungeraden Nennern und die diskreten Bewertungsringe, ein überflüssig großes Jacobsonsches Radikal. Um dieses Problem der assoziativen Ringe ohne Nullteiler zu erledigen, hat L. FUCHS [6] ein Radikal Z definiert, das in Ringen ohne Nullteiler immer (0) ist, und dessen Definition die Linksnullteiler und Rechtsnullteiler benützte. Das Zeroidradikal von L. FUCHS ist $Z = Z_l \cap Z_r$, wobei Z_l bzw. Z_r der Durchschnitt aller maximalen unter denjenigen Idealen I_l bzw. I_r des Ringes A ist, in denen jedes Element ein Linksnullteiler bzw. Rechtsnullteiler von A ist. Auch eine schöne additividealtheoretische Eigenschaft von Z_l wurde in [6] gezeigt. Da die Frage des Zeroidradikales von A/Z noch offen geblieben ist und der durch ein Element a erzeugte endliche Ring $A = \{a\}$ mit den Relationen $2a = a^3 + a^2 = 0$ $(a^2 \neq 0, |A| = 4)$ ein vom klassischen Radikal verschiedenes, größeres Zeroidradikal hat, kann Z bis jetzt noch als kein Radikal im AMITSURschen oder KUROSschen Sinne angesehen werden.

In der vorliegenden Note wird „Ring" stets einen nicht notwendig assoziativen Ring bedeuten. Nun ist unser Zweck mehrfach.

In Abschnitt 2 wird gezeigt, daß der Begriff von Z_l und die wichtigsten Eigenschaften von Z_l wesentlich nicht ringtheoretisch, sondern — allgemeiner — verbandstheoretisch sind. Deshalb betrachten wir, wie üblich, einen beliebigen vollständigen Verband V statt des Idealverbandes des Ringes, und dann können wir einen solchen Radikalbegriff (für jedes $x \in V$) einführen, der als Spezialfall das Zeroidradikal enthält. Zu jeder Menge $\mathfrak{M}$ von sog. oberen e-Klassen von V wird das $\mathfrak{M}$-Radikal eines Elementes $x \in V$ definiert. Ist V zugleich ein — gewissen ziemlich allgemeinen Bedingungen genügendes — Gruppoid, so läßt sich das $\mathfrak{M}$-Radikal als Durchschnitt von Primelementen darstellen, und somit gilt eine volle Analogie mit dem Zeroidradikal [6].

In Abschnitt 3 wird gezeigt: *Jedes Ideal eines Ringes, das ein Durchschnitt von Primidealen ist, kann ebenfalls als ein Radikal $Z_{\mathfrak{M}}(0)$ angesehen werden.* Demnach sind sowohl die wichtigsten Radikale [2], [4], [6], [8], [14] der assoziativen Ringe, als auch das Krull-McCoysche und das van Leeuwensche Radikal eines Ideales des assoziativen Ringes stets $\mathfrak{M}$-Radikale im Idealverband des Rings. Wir betrachten auch weitere spezielle $\mathfrak{M}$-Radikale, die durch eine Menge von interessanten Teilmengen des Ringes, von sog. Teilmengen mit Eigenschaft (*) bzw. von Blöcken, bestimmt sind.

In Abschnitt 4 wird ein Satz aus Abschnitt 6 in [6] verallgemeinert, und eine andere Behauptung aus Abschnitt 6 in [6] berichtigt.

Für die gefällige Hilfe in der Abfassung dieser Note danke ich Herrn Professor L. Fuchs.

2. Grundlegende Definitionen. Zwei Sätze. Es sei V ein vollständiger Verband mit dem kleinsten Element 0 und dem größten Element i. Eine Teilmenge K werde eine *obere Klasse* von V genannt, wenn aus $x \in K$ und $x \leqq y$ stets $y \in K$ folgt. Die leere Menge $\varnothing$ sei ebenfalls eine obere Klasse von V. Ersichtlich ist $K = V$ genau dann, wenn $0 \in K$ gilt.

Eine obere Klasse K heiße eine *obere Klasse endlichen Charakters*, kurz eine *obere e-Klasse*, wenn aus $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma \in K$ die Existenz einer endlichen Teilmenge Δ von Γ mit $\bigcup_{\delta \in \Delta} x_\delta \in K$ folgt. Offenbar sind sowohl der mengentheoretische Durchschnitt von endlich vielen oberen e-Klassen, als auch die mengentheoretische Vereinigung von beliebig vielen oberen e-Klassen eine obere e-Klasse von V.

Sei $x \notin K$ $(x \in V)$ für eine obere e-Klasse K. Ein Element $y \in V$ werde im Falle $x \cup y \notin K$ ein *(K, x)-Element* genannt. Offenbar ist x selbst ein (K, x)-Element.

Ein Element $z \in V$ heiße ein *strenges (K, x)-Element*, wenn $y \cup z$ für jedes (K, x)-Element y ein (K, x)-Element von V ist. Hiernach ist jedes strenge (K, x)-Element auch ein (K, x)-Element.

Satz 1. *Die Vereinigung $z_K(x)$ aller strengen (K, x)-Elemente z ist ebenfalls ein strenges (K, x)-Element. Dieses stimmt mit dem Durchschnitt aller maximalen (K, x)-Elemente überein.*

Beweis. Sind $z_1, \ldots, z_n$ strenge (K, x)-Elemente und y ein (K, x)-Element, so ist $z_1 \cup \ldots \cup z_n$ wegen

$$(z_1 \cup \ldots \cup z_n) \cup y = z_1 \cup (z_2 (\ldots \cup (z_n \cup y)))$$

ein strenges (K, x)-Element von V. Es sei nun $z_K(x) = \bigvee_{\gamma \in \Gamma} z_\gamma$, wobei jedes z_γ ein strenges (K, x)-Element ist. Aus $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} z_\gamma \cup y \cup x \in K$ folgt $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} w_\gamma \in K$ mit $w_\gamma = z_\gamma \cup \cup y \cup x$. Nach dem endlichen Charakter von K existieren endlich viele $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ mit $w_{\gamma_1} \cup \ldots \cup w_{\gamma_n} \in K$, woraus $z_{\gamma_1} \cup \ldots \cup z_{\gamma_n} \cup y \cup x \in K$ und damit ein

Widerspruch folgt. Also ist die Vereinigung $z_K(x)$ ($\geqq x, \in V$) ebenfalls ein strenges (K, x)-Element von V.

Da wegen des endlichen Charakters von K die Vereinigung jeder aufsteigenden Kette von (K, x)-Elementen ebenfalls ein (K, x)-Element ist, und somit das Zornsche Lemma angewandt werden kann, existiert zu jedem (K, x)-Element $y \in V$ ein maximales (K, x)-Element $m \in V$ mit $m \geqq y$. Zu festgewähltem $x (\notin K, \in V)$ sei d_0 der Durchschnitt aller maximalen (K, x)-Elemente von V. Ist y ein beliebiges und m ein maximales (K, x)-Element mit $y \leqq m$, so gilt

$$d_0 \cup y \cup x \leqq m \cup m \cup x = m \cup x \notin K,$$

und somit auch $d_0 \cup y \cup x \notin K$. Daher ist d_0 ein strenges (K, x)-Element, woraus $d_0 \leqq z_K(x)$ folgt. Ist umgekehrt m ein maximales (K, x)-Element, so ist $z_K(x) \cup m$ ebenfalls ein (K, x)-Element, denn $z_K(x)$ ist ein strenges (K, x)-Element. Wegen der Maximalität von m ergibt sich $m = z_K(x) \cup m$ und $z_K(x) \leqq m$, also auch $z_K(x) \leqq$ $\leqq d_0 = \bigwedge\limits_{\alpha} m_\alpha$. Folglich ist $z_K(x) = d_0$, w. z. b. w.

Definition. *Es sei $\mathfrak{M}$ eine Menge von oberen e-Klassen K_α von V. Für $x \in V$ wird der Durchschnitt aller $z_{K_\alpha}(x)$, für die $x \notin K_\alpha$ und $K_\alpha \in \mathfrak{M}$ gelten, mit $z_{\mathfrak{M}}(x)$ bezeichnet und das $\mathfrak{M}$-Radikal von x genannt. Im Falle $x \in K$ $(K \in \mathfrak{M})$ sei $z_K(x) = i$.*

Es sei nun V ein vollständiges *Verbandsgruppoid*, d. h. V sei sowohl ein vollständiger Verband als auch ein multiplikatives Gruppoid, in dem gilt:

1) $a, b \leqq a \cap b$;
2) $(a \cup b) \cdot c \leqq ac \cup bc$;
3) $a \cdot (b \cup c) \leqq ab \cup ac$.

Eine Teilmenge K des Verbandsgruppoides V heiße ein *oberes e-Klassengruppoid* von V, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1') K ist eine obere e-Klasse des Verbandes V;
2') K ist ein Teilgruppoid des Gruppoides V.

Die leere Menge $\varnothing$ sei auch als ein oberes e-Klassengruppoid von V angesehen.

Man sieht, daß K wegen $k_1 \cdot k_2 \in K$, $k_1 k_2 \leqq k_1 \cap k_2$ und wegen der Definition der oberen Klasse ein duales Ideal (Filter) des Verbandes V ist. Sowohl die mengentheoretische Vereinigung jeder aufsteigenden Kette von oberen e-Klassengruppoiden als auch der mengentheoretische Durchschnitt von endlich vielen oberen e-Klassengruppoiden ist ebenfalls ein oberes e-Klassengruppoid von V.

Es sei nun $\mathfrak{N}$ eine beliebige Menge von oberen e-Klassengruppoiden des Verbandsgruppoides V. Dann kann das $\mathfrak{N}$-Radikal $z_{\mathfrak{N}}(x)$ für jedes $x \in V$ durch die obige „Definition" erklärt werden, und es gilt $x \leqq z_{\mathfrak{N}}(x) \leqq i$. Für $x \in K$ sei wiederum $z_K(x) =$ $= i$ gesetzt.

Ein Primelement p von V ist ein Element, für das aus $ab \leqq p$ $(a, b \in V)$ stets $a \leqq p$ oder $b \leqq p$ folgt. Hiernach ist i ein Primelement von V.

Satz 2. *Es sei V ein vollständiges Verbandsgruppoid mit den Axiomen* 1), 2) *und* 3), *K ein oberes e-Klassengruppoid in V und $x \in V$, $x \notin K$. Dann ist jedes maximale*

(K, x)-Element m in V prim. Das $\mathfrak{N}$-Radikal $z_{\mathfrak{N}}(x) = \bigwedge_{K \in \mathfrak{N}} z_K(x)$ ist der Durchschnitt von Primelementen für jede aus lauter oberen e-Klassengruppoiden von V bestehende Menge $\mathfrak{N}$.

Beweis. Die zweite Behauptung folgt nach dem Vorigen aus der ersten. Nun sei m ein maximales (K, x)-Element. Im Falle $c_1 \nleqq m$, $c_2 \nleqq m$ $(c_i \in V)$ gelten $c_1 \cup m > m$ und $c_2 \cup m > m$. Wegen der Maximalität von m ergibt sich $c_1 \cup m \cup x \in K$ und $c_2 \cup m \cup x \in K$. Da K nach 2') ein Teilgruppoid von V ist, folgt

$$m_0 = (c_1 \cup m \cup x) \cdot (c_2 \cup m \cup x) \in K .$$

Nach 2) und 3) gilt $m_0 \leqq c_1 \cdot c_2 \cup m \cup x$ und nach der Definition der oberen Klasse erhält man $c_1 c_2 \cup m \cup x \in K$. Demnach ist $c_1 c_2 \cup m$ kein (K, x)-Element. Daher $c_1 c_2 \cup m \neq m$ und $c_1 c_2 \nleqq m$. Also ist m ein Primelement von V.

3. Anwendungen auf universale Algebren, insbesondere auf Ringe. I) Es seien A eine universale Algebra im Sinne von Birkhoff [3], V ein vollständiger Teilverband des vollständigen Verbandes aller Teilalgebren von A. Dann läßt sich ein Radikal $Z_{\mathfrak{M}}(X)$ für jedes $X \in V$ und jede aus oberen e-Klassen bestehende Menge $\mathfrak{M}$ nach dem Satz 1 definieren. Insbesondere gelten die Sätze 1 und 2 auch für die Verbandshalbgruppen selbst.

II) Es seien A ein beliebiger Ring und V der Verband aller Ideale. Bezüglich der Multiplikation der Ideale von A gelten 1), 2) und 3), wobei $B \cdot C$ für die Ideale B und C von A der Durchschnitt aller Ideale I_α mit $I_\alpha \supseteqq \{bc/b \in B, c \in C\}$ und $B \cup C$ die Menge aller Elemente $b + c$ mit $b \in B$, $c \in C$ sind; somit ist V tatsächlich ein vollständiges Verbandsgruppoid im Sinne von Abschnitt 2. Es sei nun K ein oberes e-Klassengruppoid von V und I ein Ideal von A. Ist $I \in K$, so sei $Z_K(I) = A$. Im Falle $I \notin K$ kann dem Ideal I ein Radikal $Z_K(I)$ mit den Eigenschaften $Z_K(I) \in V$, $I \subseteqq Z_K(I)$ nach den Sätzen 1 und 2 zugeordnet werden. Dann ist $Z_K(I)$ nach dem Satz 2 ein Durchschnitt von Primidealen von A. Ist nun $\mathfrak{N}$ eine Menge von oberen e-Klassengruppoiden von V, so sei $Z_{\mathfrak{N}}(I) = \bigwedge_{K \in \mathfrak{N}} Z_K(I)$ das $\mathfrak{N}$-Radikal des Ideales $\mathfrak{J}$ bezüglich des Ringes $\mathfrak{A}$. Für dieses gilt Satz 2.

III) Es sei, umgekehrt, D ein Durchschnitt von Primidealen P $(P \in \Pi)$ eines beliebigen Ringes A. Wir zeigen, daß D ein $\mathfrak{N}$-Radikal des Ideals (0) bezüglich A ist. Es seien nämlich $\complement(P)$ die Komplementärmenge von P in A und $K(P)$ die Menge aller Ideale I_α von A so, daß $I_\alpha \cap \complement(P)$ nicht leer ist. Dann ist $K(P)$ offenbar ein oberes e-Klassengruppoid im Verbandsgruppoid V aller Ideale I von A. Ferner sei $\mathfrak{N}$ die Menge aller oberen e-Klassengruppoide $K(P)$ mit $P \in \Pi$. Dann ist $D = Z_{\mathfrak{N}}(0)$, w. z. b. w.

IV) Nach III) ist jedes Radikal von A, das der Durchschnitt von Primidealen ist, als ein $\mathfrak{N}$-Radikal $Z_{\mathfrak{N}}(0)$ im vorigen Sinne anzusehen. Dies gilt im speziellen Falle von assoziativen Ringen A z. B. für die Radikale von Baer und McCoy und für die von Jacobson, von Brown-McCoy und von Fuchs. Das letztere gehört zur Menge $\mathfrak{N} = \{K_l, K_r\}$, die so definiert wird: Für $k = l$ bzw. r sei K_k die Menge aller Ideale I_α von A mit $I_\alpha \cap M_k \neq \emptyset$, wobei M_l bzw. M_r die Menge aller Nichtlinksnullteiler bzw. Nichtrechtsnullteiler von A ist.

V) Die letzte Konstruktion von IV) kann folgendermaßen verallgemeinert werden. Wir betrachten im Ring A Teilmengen M mit der Eigenschaft:

(*) $0 \notin M$, *ferner folgt aus* $I_1 \cap M \neq \varnothing$ *und* $I_2 \cap M \neq \varnothing$ *stets* $I_1 \cdot I_2 \cap M \neq \varnothing$ *für beliebige Ideale* I_α *von* A.

Ist nun M eine (eventuell leere) Teilmenge mit der Eigenschaft (*), so bilden die Ideale I_α mit $I_\alpha \cap M \neq \varnothing$ ein oberes e-Klassengruppoid im Verbandsgruppoid aller Ideale. Die Komplementärmenge $\complement(M)$ von M in A braucht kein Ideal zu sein. Ist aber $\complement(M)$ ein Ideal von A, so ist es ein Primideal.

Unter einem Block des assoziativen Ringes A verstehen wir eine Teilmenge M mit der Eigenschaft (*) derart, daß aus $x \in M$ stets $x^n \in M$ für jede natürliche Zahl n folgt. Offenbar ist jede multiplikative Teilhalbgruppe M von A, für die $0 \notin M$ gilt, ein Block von A. Es existieren Blöcke, die keine multiplikativen Teilhalbgruppen von A sind. Die Komplementärmenge des Nullelementes ist in einem von einem Schiefkörper verschiedenen einfachen Ring A mit von Null verschiedenem Sockel offenbar eine Teilmenge mit der Eigenschaft (*), aber kein Block. Ist A kommutativ und assoziativ, und ist die Komplementärmenge $\complement(M)$ einer Teilmenge M mit der Eigenschaft (*) ein Ideal, so ist M notwendig eine multiplikative Halbgruppe von A mit $0 \notin M$.

Nach den Sätzen 1, 2 und II), III) umfaßt $Z_{\mathfrak{N}}(I)$ für jede Menge $\mathfrak{N}$ von oberen e-Klassenhalbgruppen der Verbandshalbgruppe aller Ideale und für jedes Ideal I von A den Durchschnitt aller Primideale von A, der mit dem Baerschen unteren Nilradikal übereinstimmt.

Es seien nun $\mathfrak{U}$ eine Menge von Blöcken des assoziativen Ringes A und $\mathfrak{N}$ die Menge aller solchen oberen e-Klassenhalbgruppen K_α von V, die durch die Blöcke $M_\alpha \in \mathfrak{U}$ folgendermaßen definiert sind: Ein Ideal I_β von A gehört dann und nur dann zu K_α, wenn $I_\beta \cap M_\alpha \neq \varnothing$ ist. Dann gilt: für jedes $I \in V$ umfaßt $Z_{\mathfrak{N}}(I)$ auch das obere Nilradikal N.

Es sei nämlich L ein beliebiges (K, I)-Ideal von A ($K \in \mathfrak{N}, L \in V$). Es genügt offenbar $N + L + I \in K$ zu bestätigen. Sonst wäre $(N + L + I) \cap M \neq \varnothing$, wobei M der zu K gehörende Block von A ist. Daraus würde aber ein Widerspruch folgen. Es gäbe nämlich Elemente $n \in N$, $l \in L$, $j \in I$ und $m \in M$ mit $n + l + j = m$ und wegen $n \in N$ einen Exponenten k mit $n^k = 0$. Nach dem distributiven Gesetz ergäbe sich

$$m^k = (n + l + j)^k \in M \cap (L + I),$$

denn M ist jetzt ein Block von A. Da L ein (K, I)-Element von V ist, müßte $(L + I) \cap M = \varnothing$ gelten, was ein Widerspruch ist. Also gilt $N + L + I \notin K$, folglich $N \subseteqq Z_{\mathfrak{N}}(I)$, w. z. b. w.

VI) Offenbar ist die Menge M_l bzw. M_r aller derjenigen Elemente von A, die in A keine Linksnullteiler bzw. keine Rechtsnullteiler sind, eine multiplikative Halbgruppe des assoziativen Ringes A mit $0 \notin M_l$ bzw. $0 \notin M_r$. Dann definiert die Menge $\mathfrak{A}$ von Blöcken M_l und M_r von A im Sinne von V) genau das Fuchssche Zeroidradikal $Z = Z_l \cap Z_r$, als ein spezielles $\mathfrak{N}$-Radikal $Z_{\mathfrak{N}}(0)$, wobei $\mathfrak{N} = \{K_l, K_r\}$ ist.

In einem assoziativen Ring A bilden die Linkseinheiten eine multiplikative Halbgruppe M mit $0 \notin M$. Ferner bilden sowohl die Linkseinselemente von A als auch jedes idempotente Element ($\neq 0$) allein eine multiplikative Halbgruppe M mit $0 \notin M$. Es seien A ein assoziativer Ring, G ein A-Rechtsmodul, N ein A-Teilmodul von G, ferner H_1 und H_2 beliebige Teilmengen von G mit $H_1 \subset H_2$, und $0 \notin H_2$. Dann ist jede der nachstehenden Teilmengen eine eventuell leere multiplikative Halbgruppe M_j von A mit $0 \notin M_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$:

$$M_1 = \{x \mid x \in A, Nx = N\};$$
$$M_2 = \{x \mid x \in A, nx = n \text{ für jedes } n \in N\};$$
$$M_3 = \{x \mid x \in A, H_2 x \subseteqq H_1\};$$
$$M_4 = \{x \mid x \in A, H_2 x \subset H_1\}.$$

Diese Halbgruppen M_j definieren in V eine obere e-Klassenhalbgruppe K_j, denn jeder Block des assoziativen Ringes A bestimmt in der Verbandshalbgruppe V aller Ideale von A eine obere e-Klassenhalbgruppe.

4. Weitere Bemerkungen zum Zeroidradikal. In Abschnitt 6 von [6] wurde bewiesen, daß das Zeroidradikal Z eines Artinschen Ringes (d. h. eines assoziativen Ringes mit Minimalbedingung für Rechtsideale) mit Rechtseinselement das klassische Radikal N ist. Der durch ein Element $\{a\}$ erzeugte Ring A (ohne Rechtseinselement) mit den Relationen $2a = a^3 + a^2 = 0$ besteht aus vier Elementen: 0, a, a^2, $a + a^2$; in A ist dann $Z = A$, aber $N = \{x + ax \mid x \in A\} \neq A$.

Satz 3. *Gilt in einem assoziativen Ring A mit Rechtseinselement e die Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, so stimmen das Zeroidradikal* [6], *das untere Nilradikal U, das Jacobsonsche Radikal J und das Brown-McCoysche Radikal G von A miteinander überein.*

Beweis. Die Gleichheit der drei letzten Radikale U, J und G für die erwähnten Ringe A wurde in unserer Dissertation (1959) und in unserer Arbeit [16] schon bewiesen. — Es sei nun $Z = Z_l \cap Z_r$ das Zeroidradikal [6] von A. Wir zeigen, daß jedes Element jedes echten zweiseitigen Ideales I von A ein Linksnullteiler von A ist. Sonst existierte ein echtes zweiseitiges Ideal C, das einen Nichtlinksnullteiler c von A enthält. In der Menge aller Hauptrechtsideale $(c)_r$ von A in C, für die c kein Linksnullteiler von A ist, wählen wir ein minimales Hauptrechtsideal $(c_0)_r$ aus. Für dieses gilt offenbar $(c_0^2)_r = (c_0)_r$. Also ist $c_0 = c_0^2 d \; (d \in A)$, denn A hat ein Rechtseinselement e. Hiernach gilt $c_0(c_0 d - e) = 0$. Da $c_0 d \in C$ und $e \notin C$, ergibt sich $c_0 d - e \neq 0$. Daher ist c_0 jedoch ein Linksnullteiler von A, was der Definition von c_0 widerspricht. Folglich ist jedes Element von C ein Linksnullteiler. Z_l ist nach [6] der Durchschnitt aller maximalen unter denjenigen Idealen, die aus lauter Linksnullteilern von A bestehen. Also ist Z_l genau der Durchschnitt aller maximalen Ideale von A, folglich wegen $A = Ae \; (e^2 = e)$ das Brown-McCoysche Radikal G, d. h. $Z_l = G$. Da die Nichtlinksnullteiler bzw. Nichtrechtsnullteiler von A eine multiplikative Halbgruppe M mit $0 \notin M$, also auch einen Block bilden, so gilt nach der Schlußbemerkung von V) für das obere Nilradikal N offenbar $N \subseteqq Z_l$ und ganz ähnlich auch $N \subseteqq Z_r$. Wegen $N = U = J = G$ erhält man $G = N \subseteqq Z_l \cap Z_r = Z \subseteqq Z_l = G$, also $Z = G$, w. z. b. w.

Satz 4. *Ist A ein assoziativer von Neumann-regulärer Ring mit (zweiseitigem) Einselement e, so ist das Zeroidradikal [6] genau das Brown-McCoysche Radikal G von A.*

Beweis. Es sei M ein maximales (echtes) Ideal von A und $m \in M$. Dann gibt es ein $x \in A$ mit $m = mxm$. Ferner gelten wegen $e \notin M$ sowohl $xm - e \neq 0$ als auch $mx - e \neq 0$. Aus $m(xm - e) = (mx - e)\,m = 0$ folgt, daß jedes Element $m \in M$ ein zweiseitiger Nullteiler von A ist. Der Durchschnitt aller maximalen (echten) Ideale von A ist also sowohl Z als auch G, womit $Z = G$ bewiesen ist.

Bemerkung. Nun wird ein Beispiel eines assoziativen von Neumann-regulären Ringes mit zweiseitigem Einselement gegeben, dessen Zeroidradikal Z von Null verschieden ist, was einer Bemerkung in Abschnitt 6 von [6] widerspricht. In diesem Ring existieren ferner auch solche $\mathfrak{N}$-Radikale $Z_{\mathfrak{N}}(0)$, die vom Zeroidradikal $Z = Z_l \cap Z_r$ verschieden sind. Daher sind die Radikale $Z_{\mathfrak{N}}(I)$ von I bezüglich A echte Verallgemeinerungen des Zeroidradikals Z von A.

Beispiel[1]). Es sei M ein Linksvektorraum über einem beliebigen Schiefkörper S von überabzählbarer Dimension $d = \aleph_\nu$. Es sei ferner A als ein Rechtsoperatorbereich für M der Ring aller S-Endomorphismen des S-Vektorraumes M. Der Ring A mit 1 ist nach den Methoden von Johnson-Kiokemeister [9] von Neumann-regulär. Nach dem Kapitel IV des Jacobsonschen Buches [8] sind alle Ideale von A: $(0), \ldots, I_{\mathfrak{n}}, \ldots, A$. Hierbei ist das Ideal $I_{\mathfrak{n}}$ für eine unendliche Mächtigkeit $\mathfrak{n}(\leqq \aleph_\nu)$ die Menge aller S-Endomorphismen $a \in A$, für die $\mathrm{Dim}_s(Ma) < \mathfrak{n}$ gilt. Die Ideale von A bilden also eine Kette, und somit ist $I_{\aleph_\nu} \neq 0$ das einzige maximale (echte) Ideal. Also gilt $Z = G = I_{\aleph_\nu} \neq 0$ in A. — Da jedes Ideal I von A wegen der von Neumann-Regularität idempotent ist, können sämtliche obere e-Klassengruppoide K_α des Verbandsgruppoides V aller Ideale von A explizit bestimmt werden, denn jede obere e-Klasse des Verbandes V ist jetzt auch ein oberes e-Klassengruppoid des Verbandsgruppoides V:

$$
\begin{aligned}
K_{-1} &= \{(0), I_{\aleph_0}, \ldots, A\},\\
&\;\;\vdots\\
K_\lambda &= \{I_{\aleph_\lambda}, \ldots, A\} \qquad (0 \leqq \lambda \leqq \nu),\\
&\;\;\vdots\\
K_{\nu+1} &= \{A\},\\
K_{\nu+2} &= \varnothing .
\end{aligned}
$$

Zum Beispiel erhält man $Z_{K_{-1}}(0) = A$, $Z_{K_0}(0) = (0)$, $Z_{K_1}(0) = I_{\aleph_0}$, $Z_{K_{\nu+2}}(0) = A$ und $Z_{K_{\nu+1}}(0) = Z = Z_l \cap Z_r = G = I_{\aleph_\nu} \neq 0$. Es bezeichne nun $\mathfrak{N}$ eine nichtleere Teilmenge der Menge $\{K_{-1}, K_0, K_1, K_{\nu+2}\}$ von oberen e-Klassengruppoiden von V. Dann ist $Z_{\mathfrak{N}}(0)$ sicher von $Z = Z_l \cap Z_r (\neq 0)$ verschieden, was wir beweisen wollten.

---

[1]) Dieses ist auch auf Seite 686 von McCoy [13] von einem anderen Gesichtspunkt aus erwähnt. Ich danke Herrn Professor N. H. McCoy für die Mitteilung.

Literaturverzeichnis

[1] S. AMITSUR, A general theory of radicals, I. Amer. J. Math. 74, 774–786 (1952); II. Amer. J. Math. 76, 100–125 (1956); III. Amer. J. Math. 76, 126–136 (1954).
[2] R. BAER, Radical ideals. Amer. J. Math. 65, 537–568 (1943).
[3] G. BIRKHOFF, Lattice theory. New-York 1948.
[4] B. BROWN and N. H. McCOY, Radicals and subdirect sums. Amer. J. Math. 69, 46–48 (1947).
[5] CH. W. CURTIS, On additive ideal theory in general rings. Amer. J. Math. 74, 687–700 (1952).
[6] L. FUCHS, On a new type of radical. Acta Sci. Math. Szeged 16, 43–53 (1955).
[7] H. HERMES, Einführung in die Verbandstheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.
[8] N. JACOBSON, Structure of rings. Providence 1956.
[9] R. E. JOHNSON and F. KIOKEMEISTER, The endomorphisms of the total operator domain of an infinite module. Trans. Amer. Math. Soc. 62, 404–430 (1947).
[10] W. KRULL, Idealtheorie. Berlin 1935.
[11] A. G. KUROŠ, Radikale von Ringen und Algebren. Mat. Sborn. 33 (75), 13–26 (1953) (Russisch).
[12] L. C. A. VAN LEEUWEN, On the zeroid radical of a ring. Indagationes Math. 21, 428–433 (1959).
[13] N. H. McCOY, Subdirect sums of rings. Bull. Amer. Math. Soc. 53, 856–877 (1947).
[14] N. H. McCOY, Prime ideals in general rings. Amer. J. Math. 71, 823–833 (1949).
[15] J. VON NEUMANN, On regular rings. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 22, 707–713 (1936).
[16] F. SZÁSZ, Über Ringe mit Minimalbedingung für Hauptrechtsideale, I. Publ. Math. Debrecen 7, 54–64 (1960); II. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 12 (im Erscheinen).
[17] B. L. VAN DER WAERDEN, Algebra II. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1959.

Eingegangen am 13. 2. 1961

Anschrift des Autors:
Ferenc Szász
Matematikai Kutató Intézet
Reáltanoda u. 13–15
Budapest V, Ungarn