A topologikus algebrákról és gyűrűkről II.

Szász Ferenc

4. §. Lokálisan bikompakt gyűrűk és rokon kérdések

A gyűrűk szerkezetét a gyűrű additív csoportjának a szerkezete általában erősen befolyásolja, persze az utóbbi ismeretéből általában nem következik az előbbi ismerete.

A lokálisan bikompakt gyűrűk tanulmányozását elősegíti a lokálisan bikompakt Abel-csoportok elmélete (lásd Pontrjagin [186] és Weil [238] könyveit). E gyűrűkről igen fontos a következő általánosabb eredmény (Kaplansky [113]): Ha A lokálisan bikompakt gyűrű, C a nullának a komponense és B jobbkorlátos additív alcsoport A-ban, akkor $C\cdot B = 0$. Ugyanis A^+ egy f tetszőleges, rögzített karakterére nézve legyen $I(f)$ az összes olyan $a \in A$ elem halmaza, hogy $f(aB)=0$. Világos, hogy A^+-ban $I(f)$ zárt alcsoport. Legyen most U a nulla olyan környezete, hogy $f(U)<\frac{1}{2}$ és legyen V a nulla olyan környezete, hogy $VB \subseteqq U$. Ekkor tetszőleges n egész számmal és tetszőleges $x \in V$ elemmel $x(nB) = nx\cdot B = 0$, ezért bármely $b \in B$ elemmel $f(nxb) \in f(U) < \frac{1}{2}$, tehát $nf(xb)=0$. Minthogy $f(y) \geqq 0$ ezért $n \to \infty$ esetén $f(xb)=0$. Tehát $f(V\cdot B) = 0$ és $x \in V \subseteqq I(f)$ miatt $I(f)$ nyílt. Ezért $I(f)$ egyszerre nyílt és zárt, továbbá $0 \in I(f)$, így $C \subseteqq I(f)$ és $f(CB)=0$. De f tetszőleges, ezért a Peter—Weyl-tétel ([184], 110 oldal) szerint $CB=0$, mert elegendő sok karakter létezik. (Minden $a \neq 0$ elemhez van olyan $f \neq 0$, hogy $f(a) \neq 0$.)

Ez az eredmény a lokális bikompaktság feltétele helyett igaz ama enyhébb feltétellel is, hogy elegendő sok additív homomorfizmus van egy olyan csoportba, amelyben nincsenek tetszőleges alcsoportok.

Mármost idézzük Weil [238]-ból azt a struktúra-tételt, amely szerint egy A additív, lokálisan bikompakt csoport direkt összege egy N valós, véges rangú vektorcsoportnak és egy olyan M csoportnak, amelyben a nullának a P komponense bikompakt. Ezért az A gyűrű esetében $P^2=PN=NP=0$. Ha speciálisan A bikompakt és összefüggő, akkor $A^2=0$. Ha tehát A nem tartalmaz kétoldali annulátorelemet, akkor $P=0$ és $A=N$, tehát A végesrangú algebra a valós test felett. Ha A asszociatív ferdetest, akkor a Pontrjagin-féle, ill. Frobenius-féle tétel alkalmazható, ha pedig A nemasszociatív ferdetest, akkor A a Cayley-féle számok teste is lehet. Ezt a négy algebrát Albert [3] egyébként úgy jellemezte, mint az összes olyan valós algebrát, amelynek létezik értékelése.

Ha vannak A-ban kétoldali annulátorok, akkor a lokálisan bikompakt gyűrű szerkezete bonyolultabb, a részletekre azonban nem térünk ki, mert az eredmények egyébként sem elég explicitek ahhoz, hogy konkrét esetekben jól alkalmazhatók legyenek. Mindenesetre nullának a C komponense összefüggő, és az A/C faktorgyűrű teljesen nemösszefüggő, amelyek KAPLANSKY [113] szerint részleteiben jobban kivizsgálható esetek.

A továbbiakban átmenetileg feltesszük, hogy A teljesen nemösszefüggő. Ekkor a bikompakt, teljesen nemösszefüggő esetben van Kampen szerint létezik A-nak alcsoportokból álló környezetbázisa, és a bikompaktság miatt áttérhetünk 0-nak ideálokból álló környezetbázisára is. Ha ugyanis U egy alcsoport-környezet, van olyan V nyílt alcsoport, hogy a $W = V+AV+VA+AVA$ ideál U-nak része. Így van Dantzig [44] definíciója szerint egy bikompakt, teljesen nemösszefüggő gyűrű b_v-adikus. Ez a tény lehetővé teszi a radikál és félig egyszerűség elméletének a hathatósabb kidolgozását. Egy I ideált A-ban topologikusan nilpotensnek nevezünk, ha 0 minden U környezetéhez van olyan n kitevő, hogy $I^n \subseteq U$. Mármost bikompakt és teljesen nemösszefüggő A gyűrű radikálja topologikusan nilpotens és zárt. Továbbá a féligegyszerű bikompakt topologikus gyűrűk véges testek feletti teljes mátrixgyűrűknek a komplett direktösszegei, amelyek topológiája a diszkrét véges komponensek Descartes-féle szorzattere. Ez az elméletnek az egyik legszebb struktúra-tétele. A bizonyítások megtalálhatók Kaplansky [112] dolgozatában. A bikompakt, teljesen nemösszefüggő gyűrűk esetében az alcsoport-környezetek létezése biztosítja azt, hogy az $x^2+x = y \in J$ egyenleteknek van $x \in J$ megoldása, ahol J a radikál. A megoldás sorbafejtéssel adható meg, amely a topológiában konvergens, és az x-szel pontosan csak azok az elemek lesznek felcserélhetők, amelyek y-nal is felcserélhetők. Ezért a bikompakt, teljesen nemösszefüggő gyűrűk ún. „S. B. I.-gyűrűk" (vö. Jacobson [96], III. fejezet). Ezek alapján a bikompakt féligegyszerű gyűrűk struktúrájának ismeretében bizonyos eredmények kimondhatók a nem féligegyszerű esetben is. Ezeket úgy kapjuk, hogy a klasszikus eljárással [96], amely lényegében még Wedderburn-tól származik, áttérünk az A/J gyűrű idempotenseiről az A gyűrű idempotenseire, ahol J az A radikálja. A Banach-algebrák Q-gyűrűk, tehát SBI-gyűrűk is, viszont a p-hez relatív prím nevezőjű (irreducibilis alakú) racionális számok gyűrűje a természetes p-adikus topológiában nem komplett és nem is SBI-gyűrű. Az SBI-gyűrűkben, így speciálisan a bikompakt, teljesen nemösszefüggő gyűrűkben is érvényesek bizonyos struktúra-tételek, az idempotensek konstruálhatósága alapján. A nevezett egységelemes gyűrűk ugyanis teljesen primer gyűrűk feletti teljes mátrixgyűrűknek a direkt összegei, ahol a teljesen primer gyűrűn olyan egységelemes gyűrű értendő, amelynek a radikálja szerint vett faktorgyűrű ferdetest. Kaplansky [113] felsorol egy olyan topologikus axióma-rendszert is, amelyen belül egyidejűleg közös mederben tárgyalható a jobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűknek és a lokálisan bikompakt gyűrűknek az analóg elmélete. Kaplansky [112] és [113] dolgozatai egyébként még sok más érdekes eredményt tartalmaznak és egyszersmind jó előkészületet jelentenek e szakterület általános tanulmányozásához is.

A lokálisan bikompakt, teljesen nemösszefüggő gyűrűk esetében a nulla teljes környezetrendszere ideálok helyett általában csak részgyűrűkből választható meg. Ha ugyanis U egy bikompakt, nyílt alcsoport, akkor van olyan V nyílt alcsoport, hogy $V \subseteq U$ és $VU \subseteq U$. Ekkor $W = V + V^2 + V^3 + \ldots$ nyílt, bikompakt részgyűrű A-ban. Továbbá zérusosztómentes lokálisan bikompakt gyűrű Kaplansky [112] szerint vagy összefüggő vagy teljesen nemösszefüggő, és Jacobson—Taussky [95] szerint a nulla C komponense vagy 0, vagy a valós testet tartalmazó ferdetest. Ezt az utóbbi tényt felhasználja [112] bizonyítása is. A zérusosztómentes bikompakt gyűrűk vagy radikálgyűrűk, vagy teljesen primér gyűrűk. Továbbá zérusosztómentes, és a második megszámlálhatósági axiómának eleget tevő lokálisan bikompakt gyűrűben van a 0-nak topologikusan nilpotens elemekből álló környezete. Megadhatók elég enyhe elegendő feltételek, hogy egy lokálisan bikompakt gyűrű Q-gyűrű legyen, és a radikál zárt legyen.

Zelinsky [249] ún. lineáris topológiát, vagy pedig van Dantzig elnevezésével b_v-adikus topológiát vizsgált gyűrűkben: ez olyan topológia, amelyben 0 környezetei zárt jobbideálok. [249] megtárgyalására még visszatérünk. Zelinsky [251] megmutatta, hogy a [249]-ben tett megszámlálhatósági feltétele a bikompaktság feltételezésével mellőzhető. Leptin [146] a lineárisan topológizált bikompakt gyűrűket vizsgálta, és bebizonyította, hogy a gyűrű ilyen topológiája gyengíthető egy egyetlen, leggyengébb lineárisan bikompakt topológiává a gyűrűn, miközben a zárt jobbideálok halmaza nem változik meg. Vizsgálta a nyílt jobbideált tartalmazó jobbideálokra nézve minimum feltételű gyűrűket is. Továbbá legyen A féligegyszerű, és a maximális jobbideálok alkossanak 0-nál egy szubbázist a topológiához. Ekkor A komplett lezárása szintén féligegyszerű és lineárisan bikompaktul topológizált. Vizsgálta Leptin általában a lineárisan bikompakt operátormodulusokat és ezek direkt felbontásait is. Leptin a [146] dolgozat második folytatásában pedig vizsgálta a diszkrét, jobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűk inverz limeszeit (lásd pl. Eilenberg—Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, Princeton, 1952, Chapter VIII). Leptin tanulmányozta [146]-ban a Loewy-sorozatok hosszát és a szereplő gyűrűk mátrixelőállításait és direkt felbontásait.

Fleischer [60] a lineárisan topologizált operátormodulusok körében tárgyal dualitási kérdéseket. Iseki [91] megmutatta, hogy ha a teljesen nemösszefüggő A-ban 0 minden környezete tartalmaz egy nyílt bikompakt ideált, akkor A véges A_α gyűrűk inverz limesze. Továbbá ekkor $x \in A$ pontosan akkor kvázireguláris, ha X képe mindegyik A_α-ban kvázireguláris. A pontosan akkor egységelemes, ha mindegyik A_α is egységelemes, és X-nek pontosan akkor van inverze, ha X minden vetületének van inverze.

Ugyancsak lineárisan topologizált bikompakt gyűrűket tárgyal Ballier [21]. Különféle eredményeket ad meg a radikálról, és igazolja, hogy a lineárisan bikompakt gyűrű a féligegyszerű esetben véges rangú egyszerű algebrák komplett direkt összege. Felteszi azt is, hogy létezik elegendő sok folytonos homomorfizmus az algebrákról az alaptestbe, és ekkor a Banach-algebrákról és lokálisan konvex algebrákról szóló bizonyos tételekhez analóg igen általános eredményekhez jut. Warner [236] a lokális gyűrűk szempontjából tárgyalja a Noether-féle bikompakt gyűrűket. Közben vizsgál lokális gyűrű feletti többváltozós formális hatványsorokból álló gyűrűket is.

Warner [235] dolgozata olyan jellegű kérdéseket vizsgál, hogy egy gyűrűnek mikor van legalább egy, vagy legfeljebb egy olyan bikompakt topológiája, amely az algebrai struktúrával összeegyeztethető (azaz topologikus gyűrűt eredményez). Különösen figyelemre méltó Warner [237] új dolgozata. Legyen A bikompakt gyűrű és J az A radikálja. A összes ideálja pontosan akkor zárt, ha A-ban teljesül a kétoldali ideálok maximum feltétele és minden főideál zárt. Ekkor A topológiája J-adikus, azaz 0 minden U nyílt környezetéhez van olyan n, hogy $J^n \subseteqq U$. Továbbá ekkor A/J véges és A-ban csak véges sok reguláris (moduláris) maximális ideál, jobbideál, balideál van. Egy egységelemes, topologikus A gyűrűre nézve, amelynek radikálja J, ekvivalens az alábbi négy feltétel:

1. A bikompakt és minden jobbideál zárt;
2. A bikompakt és jobbideáljaira teljesül a maximum feltétel;
3. A bikompakt és zárt jobbideálokra nézve maximum feltételű;
4. A a jobbideálokra maximum feltételű, A/J véges, A topológiája J-adikus, amelyben A komplett topologikus gyűrű.

Továbbá egy bikompakt gyűrűben bármely nemzérus ideál pontosan akkor nyílt, ha minden ideál zárt és minden nemzéró valódi prímideál reguláris maximális ideál. (Tehát ekkor a Baer-féle alsó nilradikál és a Brown—McCoy-féle radikál, valamint a köztük levő láncban valamennyi más radikál egybeesik.) Warner [237] szerint egy bikompakt A gyűrűben bármely nemzéró jobbideál pontosan akkor nyílt, ha A zérusosztómentes, és ha bármely nemzéró jobbideál tartalmaz egy nemzéró ideált, és ha teljesül 1. vagy 2.:

1. A a jobbideálokra maximum feltételű, A/J véges test és J az A egyetlen nemzéró valódi prímideálja;
2. A a jobbideálokra maximum feltételű radikálgyűrű és A valódi prímideálok nélküli gyűrű.

WARNER megállapított még hosszasabban részletezhető kritériumokat arra, hogy egy nemdiszkrét topologikus gyűrű nyílt részgyűrűként ferdetestbe beágyazható legyen; ezeket a terjedelem miatt nem részletezzük [237].

NUMAKURA [178] cikke első közleményében ASANO [13] egy eredményének a bikompakt topologikus gyűrűkre való átvitele található, és azonkívül a kommutativitást is gyengíti ASANOhoz képest. NUMAKURA eredménye arra vonatkozik, hogy a véges főideálgyűrűkön kívül még milyen topológikus gyűrűk (végtelen) direkt összegére bomlik egy olyan A nemkommutatív topologikus gyűrű, amelyben az egyoldali ideálok egymással felcserélhetők és A nyílt maximális M ideálja és M^2 közt nincs egyoldali ideál. NUMAKURA a második közleményben a primér és féligprimér, egységelemes bikompakt gyűrűket vizsgálja. (Félig primer gyűrűben modulo a radikál teljesül a jobbideálok minimum feltétele.) Egy A bikompakt egységelemes gyűrű pontosan akkor lesz bikompakt primér gyűrűknek a komplett direktösszege, ha bármely két maximális nyílt prímideál pontosan akkor egymással felcserélhető, ha minden olyan ideál egységelemes, amely a négyzetének a topologikus lezártjával egyenlő. Ha pedig A teljesen primér bikompakt gyűrű, és ha nincs egyoldali ideál a J radikál és J^2 közt, akkor A minden ideálja J egy hatványa. Az utóbbi esetben J főideál. Egy primér bikompakt gyűrűben J egyébként pontosan akkor főideál, ha minden jobbideál főjobbideál, minden balideál pedig főbalideál.

Legyen A topologikus gyűrű, J a Jacobson-radikál. A-ban akkor teljesül egy Wedderburn-felbontás, ha van olyan S zárt részgyűrű, hogy $A^+ = I \oplus S$. Mármost Yen [241] igazolta azt, hogy ha A lineárisan bikompakt algebra egy K test felett és ha vagy *a)* A kommutatív és A/M az A minden M zárt maximális ideálja mellett szeparáltan generált K felett, vagy ha *b)* A/M minden M zárt maximális ideállal K feletti teljes mátrix-algebra; akkor érvényes A-ban egy Wedderburn-féle felbontás. Jans [100] vizsgálta a Wedderburn-féle felbontást akkor, ha A teljesen nemösszefüggő bikompakt gyűrű, amelyben a J radikál nyílt. Az $A^+ = J \oplus S$ felbontásban bármely két S' és S'' Wedderburn faktor szükségképpen izomorf. Ekkor az alábbi három feltétel egymással ekvivalens:

1. A-ban teljesül a Wedderburn-felbontás;
2. J-nek van A-ban komplementer alcsoportja;
3. ha $\bar{e}$ az A/J egységeleme, akkor van olyan $e \in A$ hogy $e \in \bar{e}$ és az e és $\bar{e}$ elemek additív rendjei egymással egyenlők.

Ha A egységelemes is, A-nak pontosan akkor van Wedderburn-féle felbontása, ha A véges testek feletti véges sok algebrának a gyűrűelméleti direkt összege. — Ha J nyílt, akkor J transzfinit hatványai

A-ban 0 környezetbázisául vehetők. Van olyan F szabad bikompakt gyűrű, amelynek homomorf képe minden olyan A gyűrű, amelyre a J radikállal 0-ban teljesül egy Wedderburn-felbontás és J is nyílt A-ban. Ezeknek az eredményeknek a kiterjesztése található meg Numakura [177] dolgozatában, amelynek a részletezésére már nem térünk ki.

5. §. Vegyes kérdések topologikus gyűrűkre vonatkozólag

Isaku Ikushima [88] még 1950-ben átvitte a diszkrét gyűrűkben fontos szerepet játszó Brown—McCoy-féle radikálnak a fogalmát és vizsgálatát az egységelemes topologikus gyűrűkre. Nevezzük ugyanis az A egységelemes topologikus gyűrűnek egy x elemét G-elemnek, ha az x elemmel generált (x) (kétoldali) főideál maga A. Az A gyűrűt pedig G-gyűrűnek nevezzük, ha létezik az 1 egységelemnek A-ban olyan nyílt környezete, amely csupa G-elemből áll. Mármost G-gyűrűben az összes G-elem halmaza nyílt és A-nak a Brown—McCoy-féle radikálja pedig zárt. Vizsgálta Ikushima [88] a korlátos G-gyűrűket is.

Ugyanezek az eredmények, ill. ezek egy része megtalálható még K. Iseki [89], [90] dolgozataiban (1952, 1953), valamint Andrunákievics [6] még későbbi dolgozatában is, aki megjegyezte azonban egy lábjegyzetben, hogy csak utólag értesült Iseki eredményeiről.

Érdekes eredményeket ért el Maharadze [153], [154]. Megjegyzendő ugyanis, hogy Szele [222] eredménye szerint egy diszkrét, nilpotens gyűrűben a kétoldali ideálok minimum-feltételéből folyik az additív alcsoportok minimum feltétele. Mármost [153]-ban ennek egy topologikus megfelelője szerepel. Álljon az A topologikus gyűrűben 0 környezetbázisa additív alcsoportokból, és legyen A topologikusan nilpotens abban a módosított értelemben, hogy 0 minden A_α környezetéhez van olyan n kitevő, hogy A^n-nek a lezártjára $\overline{A^n} \subseteqq A_\alpha$ érvényes. A minimum-feltételt is módosítva definiálja [153]. Az A gyűrűben az alcsoportokra akkor teljesül a minimum-feltétel, ha 0 minden A_α (alcsoport-)környezetéhez és minden $H_1 \supseteqq H_2 \supseteqq H_3 \supseteqq \ldots$ fogyó alcsoportlánchoz létezik egy olyan n index, hogy $H_n \subseteqq A_\alpha$. (Itt n függ a lánctól és α-tól.) Mármost [153] indukcióval igazolja azt, hogy az olyan topologikus nilpotens gyűrűkben, amelyekben 0 környezetbázisa additív alcsoportokból áll, a kétoldali ideáloknak és az additív alcsoportoknak a minimum-feltételei egymással ekvivalensek.

Vizsgálta [153] a lokálisan bikompakt, teljesen nem összefüggő topologikusan nilpotens és a kétoldali ideálokra vonatkozólag minimum-feltételű gyűrűknek a nyílt bikompakt részgyűrűit és a mondott gyűrűknek egy leírását, miközben felhasználta Vilenkin egy eredményét (A topologikus csoportok elmélete, Uszpehi Mat. Nauk 5 (38) (1950) 19—74.)

Továbbá Maharadze [154] a diszkrét gyűrűk Levitzki-radikáljának a topologikus megfelelőjét is tárgyalta. (Ez a diszkrét esetben a lokálisan nilpotens ideálok összege; és egy gyűrű lokálisan nilpotens, ha minden végesen generált részgyűrűje nilpotens.) Mármost [154] három feltételt tárgyal:

I. 0-nak van zárt jobbideálokból álló $\{A_\alpha\}$ környezetbázisa az A topologikus gyűrűben;

II. 0-nak van A-ban olyan A_α környezete, hogy létezik minden A_β környezethez olyan A_γ környezet, hogy $A_\alpha \cdot A_\gamma \subseteq A_\beta$ teljesül;

III. 0-nak létezik A-ban egy lokálisan nilpotens környezete.

Itt a nilpotencia természetesen a fenti [153]-beli topologikus nilpotenciát jelenti, a lezárási műveletet felhasználva, továbbá a B részhalmaz A-ban lokálisan nilpotens, ha B bármely végesen generált részgyűrűjének a lezártja topologikusan nilpotens. Mármost legyen $N(A)$ az összes, A-beli, lokálisan nilpotens ideál összege. [154] az alábbi állításokat mondja ki:

1. Ha teljesül I. és II., akkor $N(A)$ lokálisan nilpotens.
2. Ha teljesül I., II és III, akkor $N(A)$ tartalmazza az összes lokálisan nilpotens zárt jobbideált és balideált.
3. Ha teljesül I., II. és III., akkor $N \cdot (A/N(A)) = 0$.
4. Ha teljesül III., akkor $N(A)$ nyílt, tehát zárt is. Egyébként ugyanis $N(A)$ nem feltétlenül zárt ideál A-ban.

Ehrlich [52] vizsgálta, hogy két egységelemes, topologikus, Neumann-reguláris gyűrűben a multiplikatív invertálható elemek G_1 és G_2 csoportja mikor lesz egymással izomorf.

Jennings [101] egy G végesen generált, torziómentes, nilpotens csoportnak egy nullkarakterisztikájú K test feletti Γ csoportgyűrűjében vezetett be topológiát. Legyen ugyanis Δ az összes $g-1$ alakú elemmel felfeszített ideál Γ-ban, ahol g befutja G elemeit. Igazolható, hogy Δ összes természetes kitevőjű hatványának a metszete nulla, így a $\Delta^n (\neq 0)$ ideálok, mint a 0 környezetbázisa, egy topológiát értelmeznek Γ-ban, amelyben Γ általában nem komplett. Jennings vette a Γ topologikus gyűrű Γ^* komplett lezárását. Ebben értelmezhető $\log(1+x)$ tehát $g \in G$ esetén $\log g$ is. A további eredményei a Lie-algebrákhoz kapcsolódnak.

Szele [223] a tetszőleges G (additív) Abel-csoportok endomorfizmus-gyűrűjében vezetett be egy sajátos topológiát. Bármely A egységelemes gyűrű előáll úgy, mint az A^+ additív csoport $E(A^+)$ endomorfizmus gyűrűjében a Θ balszorzások centralizátorával izomorf gyűrű. Ez az A gyűrű kanonikus előállítása. Ha mármost $P = E_\Theta(A^+)$ az A gyűrű kanonikus előállítása ($1 \in A$) és B egy tetszőleges (esetleg üres) részhalmaz A-ban, akkor B-nek a $\bar{B}$ lezártja az összes olyan $\gamma \in P$ halmaza, hogy $\gamma \in B$ és az összes olyan γ elem halmaza is $\bar{B}$ része, hogy bármely $x \in A^+$ elemhez létezik végtelen sok olyan $\beta_\mu \in B$ elem, hogy $x\gamma = x\beta_\mu$ érvényes. Igazolható, hogy a lezárási operáció axiómái valóban teljesülnek, és így P egy T_1-tér lesz. Legyen most $\Phi = \{\varphi_\nu\}$ $(\varphi_\nu \in P)$ egy elemrendszer. Ezt 0-rendszernek nevezte Szele, ha a 0 elemet nem tartalmazó zárt C részhalmazokra $\varphi_\nu \in C$ csak véges sok ν index mellett teljesül. Igazolható, hogy Φ pontosan akkor 0-rendszer, ha bármely $x \in A^+$ esetén $x\varphi_\nu = 0$ csak véges sok ν indexre teljesül. Ha $\Phi' = \{\varphi'_\nu\}$ egy tetszőleges elemrendszer, és φ' olyan elem P-ben, hogy $\Phi'' = \{\varphi'_\nu - \varphi\}$ már 0-rendszer, akkor azt mondjuk, hogy Φ konvergál a φ elemhez, azaz $\varphi' = \lim \varphi'_\nu$. Minthogy P egy T_1-tér, a φ' limesz egyértelműen van meghatározva. Szokásosan értelmezve P-ben a konvergens elemrendszerek $\Phi_1 + \Phi_2$ összegét és Φ_1, Φ_2 szorzatát, igazolható, hogy P topologikus gyűrű lesz.

Egy $\Phi = \{\varphi_\nu\}$ $(\nu \in N)$ elemrendszer P-ben Cauchy-rendszer, ha minden $x \in A^+$ elemhez létezik olyan véges N_x részhalmaz N-ben, hogy $x(\varphi_{\nu_1} - \varphi_{\nu_2}) = 0$ teljesül minden $\nu_1, \nu_2 \in N \setminus N_x$ esetén. Igazolható, hogy P komplett, azaz minden Cauchy-rendszernek van P-ben határértéke. P-ben a $\Phi = \{\varphi_\nu\}$ elemrendszer „összegezhető", éspedig összege φ ha minden $x \in A^+$ elemhez létezik az N indexhalmaznak olyan N_x véges részhalmaza, hogy bármely olyan V véges részhalmazra, amely tartalmazza az N_x halmazt, teljesül $x(\varphi - \sum_{\nu \in F} \varphi_\nu) = 0$. SZELE azt is megmutatta, hogy az „összegezhető" elemrendszerek P-ben pontosan a 0-rendszerek.

Gacsályi Sándor [63] tovább folytatta ennek a P topologikus gyűrűnek a Szele-féle vizsgálatát. Gacsályi definiálta egy kétindexes $\{\varphi_{\mu\nu}\}$ elemrenszernek a φ kettős határértékét, továbbá az iterált határértékeit, ilyen utóbbi kétféle is lehet. Ha a kettős határérték létezik, akkor az iterált határértékek is léteznek, és ez a három elem P-ben egymással egybeesik. Vizsgálta annak szükséges és elegendő feltételét is, hogy a két iterált limesz a P gyűrűben létezzék és egybeessék. Gacsályi definiálta és vizsgálta a kétindexes $\{\varphi_{\mu\nu}\}$ elemrendszer egyenletes konvergenciáját is.

MAURER GYULA [156] az Abel-csoportok endomorfizmus-gyűrűjében ugyancsak bevezetett egy topológiát, amely általában különbözik a SZELE-féle topologizálástól. MAURER lényegében azt a topológiát viszi át gyűrűkre, amelyet korábban egy végtelen halmaz permutációcsoportjában vezetett be.

Steinfeld Ottó [219] a Cauchy-féle sorozatokkal kapcsolatban igazolja Kalmár László [106] egy sejtését. Legyen ugyanis K az R valós számtestének egy részteste és legyen B az összes olyan korlátos sorozat gyűrűje, amelyek elemei K-ból valók, továbbá legyen C a B-ben az összes Cauchy-sorozat részgyűrűje és N pedig a B-ben azoknak a sorozatoknak a halmazából álló ideál, amelyek nullához konvergálnak. Kalmár

[106] sejtése, amelyet Steinfeld [219] bebizonyított, az volt, hogy ha D olyan gyűrű, hogy $C \subseteqq D \subseteqq B$ és $C \neq D$, akkor N nem maximális ideál D-ben.

M. Strauss (Wiss. Zeitschrift, Humboldt Univ. 5 (1955/56) 93–97) vizsgálta a valós testben az

$$(E) \qquad a \dot{+} b = \frac{a+b}{1+ab}; \qquad (G) \qquad a \hat{+} b = a+b-ab$$

binér műveleteket, és megmutatta, hogy nincs olyan g invertálható függvény, hogy $(G)g=E$, azaz nincs olyan invertálható g függvény, amely az (E)-be áttranszformálná (E)-t. Mármost Aczél János [2] megmutatta, hogy létezik olyan g invertálható függvény, amelyre $g^{-1}(G)g=(E)$ teljesül. Az ilyen függvényekre szükségképpen érvényes az alábbi

$$g\left(\frac{a+b}{1+ab}\right) = g(a)+g(b)-g(a) \cdot g(b)$$

függvényegyenlet, amelynek összes megoldásai [2] szerint

$$g(a) = \frac{2a}{1+a} \quad \text{és} \quad g(a) = 1-\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^k,$$

ahol $k \neq 0$.

Kaplansky [118] topologikus módszerekkel igazolta azt, hogy ha egy diszkrét algebra polinom-azonosságnak tesz eleget, és hogy ha minden elem végesrangú részalgebrát generál, akkor bármely véges elemrendszer is véges rangú részalgebrát generál tetszőleges alaptest felett. Megjegyzendő, hogy ez a Kuros-féle problémának a részleges megoldása, amelyet Kuros ama feltétel nélkül kérdezett, hogy az algebra polinom-azonosságnak eleget tesz. Minthogy kommutatív algebrákban $x_1x_2 - x_2x_1 = 0$, vagy n-nilpotenciafokú algebrákban $x_1 \cdot x_2 \ldots x_n = 0$ azonosan teljesül ezért ezek az algebrák polinom-azonosságnak tesznek eleget, és rájuk nézve igenlő a Kuros-probléma megoldása.

Megjegyzendő, hogy Kaplanskynak ezt az eredményét később topológiai módszerek nélkül, tisztán algebrailag Amitsur és Levitzki is igazolta.

Arens és Kaplansky [12] vizsgálják többek közt azoknak a folytonos függvényeknek az A gyűrűjét, amelyeknek az értelmezési tartománya egy X lokálisan bikompakt, teljesen nemösszefüggő halmaz, értékkészletük pedig egy egységelemes, diszkrét, egyszerű R gyűrű, és egy bikompakt halmazon kívül nulla e függvények értéke. Egy ilyen A gyűrű egységelemes és bireguláris, azaz bármely kétoldali főideálnak van kétoldali egységeleme, és benne a főideálok komplett, komplementumos, moduláris hálót alkotnak. Továbbá az A bármely M maximális ideáljával $A/M \cong R$ kanonikusan fennáll. Eme [12] cikk anyaga bizonyos részeinek nem-asszociatív általánosításait Behrens [26] adta meg, miközben a szereplő függvények értékei pl. a Cayley-féle számok.

Kaplansky [111] a topologikus gyűrűk közül az ún. „duális" gyűrűket vizsgálja. Legyen I az A topologikus gyűrűben egy tetszőleges részhalmaz, és legyen $L(I)$ az I összes balannulátorának a halmaza. Ekkor $L(I)$ az A-nak zárt balideálja. Hasonlóan, az $R(I)$ jobbannulátor pedig zárt jobbideál lesz A-ban. Az A topologikus gyűrűt Kaplansky duálisnak nevezi, ha $L(R(I))=I$ illetve $R(L(I))=I$ teljesül A-ban minden I zárt balideálra és zárt jobbideálra.

Ha A duális gyűrű, és benne a zárt reguláris (moduláris) maximális jobbideálok metszete nulla (amely a féligegyszerűségnél erősebb feltétel), akkor A-ban létezik egy olyan mindenütt sűrű részgyűrű, amely egyszerű duális gyűrűknek a (végtelen) direkt összege. E felbontásban mindenik egyszerű duális gyűrűben van egy olyan mindenütt sűrű részgyűrű, amelyek ferdetestek feletti olyan végtelen mátrixokból álló gyűrűk, hogy mindenik mátrixban csak véges sok koordináta nem nulla. Bármely bikompakt féligegyszerű gyűrű duális gyűrű. Ugyancsak duális gyűrű bármely olyan primitív gyűrű, amelyben vannak minimális jobbideálok, és amely úgy van topologizálva, hoogy a nulla környezetei a „socle" elemei balannulátorainak és jobbannulátorainak a véges metszetei. A duális Banach-algebrák pedig szükségképpen Ambrose-féle H^*-algebrák; ezek olyan algebrák, melyek egyszersmind Hilbert-terek, és éppen az utóbbi belső szorzata szolgáltatja az előbbihez a normát, továbbá van egy konjugált-lineáris * involució, amelyre az alábbi axiómák teljesülnek:

$$(xy, z)=(y, x^* z), \; (yz, z)=(y, zx^*),$$

ahol (a, b) a Hilbert-tér belső szorzatának a jele. (Gyakran felteszik azt is, hogy ez az algebra balannullátormentes.) Kaplansky azt is újra megmutatja, hogy bármely G bikompakt csoporton a folytonos valós függvények C algebrája, valamint G-n a megfelelő L_2 és L_p algebrák szintén duális, mégpedig féligegyszerű gyűrűk, és vizsgálja eme algebrákban az ideálokat is.

Megjegyezzük azt is, hogy bármely A diszkrét gyűrűhöz hozzárendelhető egy T topologikus tér az A gyűrű prímideáljainak a halmazán. Ezáltal A persze nem válik topologikus gyűrűvé, viszont figyelemreméltó kapcsolat lehet az A gyűrű algebrai és a T tér topológiai szerkezete közt. Legyen ugyanis T az összes A-beli prímideál halmaza. Legyen továbbá $S \subseteq T$. Ekkor S-nek az $\bar{S}$ lezártját úgy definiáljuk, mint az S-hez tartozó prímideálok metszetét tartalmazó összes prímideál halmazát. Az üres metszeten maga A értendő. Ha P_1 és P_2 két különböző prímideál, akkor $\overline{\{P_1\}} \neq \overline{\{P_2\}}$, tehát T egy T_0-tér. Viszont T nem lesz általában T_1-tér, mert egy prímideál lehet valódi része egy másik prímideálnak. Hasonló konstrukció végezhető el általánosabban bizonyos primideálok U halmazán is, és ekkor $S(\subseteq U)$-nak az $\bar{S}$ lezártjánál is csak az U-beli primideálokat használjuk fel a metszetképzéshez. Minden primitív ideál prímideál, és Jacobson a primitív ideálok halmazán definiált ilyen topológiát.

Ezt a teret az A gyűrű Stone-terének, vagy struktúra-terének nevezik. Ez részletesen tárgyalva van JACOBSON [96] könyve 9. fejezetében. Egységelemes gyűrű struktúra-tere bikompakt. Bireguláris gyűrű struktúra-tere lokálisan bikompakt és teljesen nemösszefüggő. Hasonló eredményeket illetően megemlítendő még Gillman [74], Kohl [135] és a nemasszociatív gyűrűk esetében háromfajta Stone-térre: Behrens [25] dolgozata.

Zelinsky [249] olyan A topologikus gyűrűket vizsgál, amelyek komplettek, szeparáltak és amelyekben 0 teljes környezetrendszere A_α nyílt kétoldali ideálokból áll. (Az utóbbi feltétel szerint A egy b_ν-adikus, tehát lineárisan topologizált gyűrű.) Feltesszük, hogy $A_\alpha \subseteqq A_\beta$ esetén A/A_α-nak mindig a természetes homomorfizmusát tekintjük A/A_β-ra. Ezek a faktorgyűrűk diszkrétek, és Zelinsky az A gyűrűt mint az A/A_α gyűrűk projektív limeszét vizsgálja (Eilenberg—Steenrod, Princeton, 1952, vagy pedig Kowalsky [139], 7. fejezet). Ha A kommutatív és mindenik A/A_α minimum-feltételű gyűrű, akkor Zelinsky megállapítja, hogy A-nak milyen topologikus felbomlása van egy radikálgyűrűre és primér gyűrűkre.

6. §. A normált algebrák bizonyos klasszikus kérdéseiről

Minthogy terv szerint a Banach-algebrákról egy részletesebb ismertetés fog e lapokban megjelenni, ezért most csak a régebbi, klaszszikusabb irodalmat, és ebből is csak a struktúra-tételekkel kapcsolatos eredményeket tekintjük át. Megjegyezzük, hogy a jelen ismertetés 3. §-ában már szóltunk az olyan Banach-algebrákról, amelyek ferdetestek, vagy pedig Neumann-reguláris gyűrűk.

Gelfand [64] alapvető eredménye megállapítja, hogy egy Banachalgebra radikálja éppen a nilideálok összege, ahol nilideál olyan ideált jelent, amelynek minden eleme topologikus nilpotens. (Lásd még Jacobson, The radival and semi-simplicity for arbitrary rings, Amer. Jour, Math. 67/1945 (300—320). Ez a tény azon az általánosabb tényen múlik, hogy egy A nem feltétlenül egységelemes, komplex Banachalgebrában egy $x \in A$ elemre teljesül:

$$\text{supremum}\,|\,\text{spektrum}\,(x)\,| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

ahol az x spektruma úgy értendő, mint azoknak a λ komplex számoknak a halmaza, amelyekre nincs a $(-\lambda^{-1}x)$ elemnek kváziinverze. Ennek az általánosabb ténynek az igazolása elvégezhető $(-\lambda^{-1}x)$ kváziinverzének λ szerinti hatványsorba való fejtésével, és a konvergencia-sugár megbecslésével. A valós test feletti Banach-algebrák radikálja is hasonlóan viselkedik.

Miként a radikálok topologikus nilideál-jellege tekintetében a Banach-algebrák és a bizonyos végesség jellegű gyűrűk (diszkrét Artin-féle gyűrűk, és diszkrét, főjobbideálokra minimum feltételű gyűrűk („MHR-gyűrűk”), másfelől pedig a bikompakt topologikus gyűrűk) közt bizonyos analógia áll fenn, úgy a féligegyszerű Banach-algebrák bizonyos osztályainál is várható valamilyen explicitebb struktúratétel, amint ez a helyzet a féligegyszerű, végességi-feltételt kielégítő legtöbb gyűrűnél is. (Egy gyűrű valamilyen végességi feltétele olyan feltétel, amely megvan minden véges gyűrűnek, de nincs meg legalább egy végtelen gyűrűnek.) Különösen akkor várhatók struktúra-tételek a féligegyszerű Banach-algebrákra, ha az $x \to ax$ és $x \to xa$ leképezések bármely a rögzített elemmel teljesen folytonosak. Ilyen algebrák szerepelnek FREUNDLICH [61] és KAPLANSKY [115] dolgozatában.

Gelfand és Najmark [68] igen szép és hatékony struktúra-tételhez jutott a kommutatív, egységelemes, féligegyszerű, komplex test feletti Banach-algebrákra vonatkozólag. Legyen egy ilyen A algebrában adva még egy $*$ involució is, amely konjugált lineáris és amelyre $\|x \cdot x^*\| = \|x\| \, \|x^*\|$. Akkor a struktúra-tétel szerint A izomorf egy bikompakt Hausdorff-téren (nevezetesen lényegében A összes maximális ideáljának a halmazán) folytonos összes komplex-értékű függvénynek az algebrájával, ahol a norma az abszolút érték szuprémuma, és a $*$ involució pedig azonosítható a konjugált komplex értékének a képzésével.

ARENS [8] megjegyzéseket fűzött GELFAND és NAJMARK bizonyításához, és ARENS [11] vizsgálta az egységelem nélküli esetet is. A valós függvényekből álló féligegyszerű algebrák hasonló jellemzései ARENS [11] és SEGAL [215] dolgozatában szerepelnek, továbbá ARENS és KAPLANSKY [12] dolgozatában a valós és komplex eset tárgyalása egyesítve szerepel. A folytonos függvények gyűrűi ilyen jellemzéseinek szép alkalmazásai vannak. (Egy teljesen reguláris topologikus térnek zárt részhalmazként való Stone-Cech-féle beágyazása egy bikompakt térbe; vagy a Hilbert-tér korlátos, normális operátorainak spektrál-tétele; vagy pedig az a Stone [220] és Eidelheit [53]-féle tétel, amely szerint egy bikompakt Hausdorff-téren folytonos összes függvény algebrájának egy zárt részalgebrája önmaga is egy alkalmas bikompakt Hausdorff-téren folytonos összes függvénynek az algebrája. A szakirodalomban elég sok további ilyen jellegű eredmény szerepel.)

A nemkommutatív féligegyszerű, egységelemes Banach-algebrákról Gelfand és Najmark [68] megmutatta, hogy ha az A-beli $*$ involúcióra $\|x^*\| = \|x\|$ teljesül, és ha létezik az $1 + x \cdot x^*$ elemnek minden x elem mellett multiplikatív inverze, akkor az A Banach-algebra izomorf egy Hilbert-tér összes korlátos operátora Banach-algebrájának egy zárt, önadjungált részalgebrájával.

Ennek a fontos és elegáns struktúra-tételnek azonban sok alkalmazásnál az a hátránya, hogy ennek a zárt önadjungált részalgebrának a körülhatárolása nem eléggé határozott, tehát csak zárt beágyazás exisztenciája szerepel, de a beágyazás közelebbi módja nem.

Ambrose [4] vizsgálta a H^*-algebrákat. Miként már említettük (az 5. végén, Kaplansky [111] cikkével kapcsolatban), ezek olyan Hilbert-terek, amelyek Banach-algebrák is az (x, y) belső szorzatból származtatott normával, továbbá van bennük egy $*$ involúció, amelyre $(x, y, z) = (y, x^* z)$ és $(yx, z) = (y, zx^*)$ teljesül, és amely természetesen konjugált lineáris. Mármost Ambrose a féligegyszerűség helyett az A

algebra balannulátor-mentességét tételezte fel, és megállapította, hogy ekkor az A H^*-algebra egyszerű H^*-algebráknak a *Hilbert-térben értelmezett* direkt összege. Az egyszerű H^*-algebrák pedig az összes olyan komplex-koordinátájú végtelen $a=(a_{ij})$ mátrix gyűrűjével izomorfok, amelyekre $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 < \infty$, továbbá a szorzás a mátrix-szorzás, valamint $a^* = (a'_{ji})$, tehát a transzponáltnak a konjugált komplexe, és

$$(a, b) = \alpha \cdot \Sigma\, a_{ij} b'_{ij}, \quad (\alpha \text{ szám}),$$

ahol x' jelenti x konjugáltját. Ennek az Ambrose-féle eredménynek meglepő alkalmazása van egy G bikompakt csoporton vett $L_2(G)$ algebrára, amelyből következik a Peter—Weyl-tétel [184] és a vele kapcsolatos tények. Legyen ugyanis G bikompakt topologikus csoport és A pedig a G-beli Haar-mértékre vonatkozólag négyzetesen integrálható komplex függvényeknek az algebrája, ahol a gyűrűszorzás az

$$(\Delta) \qquad (f \cdot g)(x) = \int f(y) g(y^{-1} \cdot x) dy$$

általánosított konvolúció révén van értelmezve és az $*$ involúció pedig az $f^*(x) = (f(x^{-1}))'$ képlet által, ahol z' a z komplex szám konjugáltját jelenti. Akkor igazolható, hogy ez az A algebra H^*-algebra. Megjegyzendő, hogy Koethe [133] a G csoporton korábban az A algebra helyett az összes folytonos függvény algebráját tanulmányozta. A Peter—Weyl-tétel abból folyik, hogy megmutatható az, hogy a G bikompakt csoport feletti L_2 (konvolúciós, involúciós) Banach-algebra egyszerű gyűrűkből álló komponensei mind végesdimenziójúak a komplex számtest felett, amely számolással vezethető le a feltételekből.

Legyen most G lokálisan bikompakt topologikus csoport, és A a G-beli Haar-mértékre vonatkozólag az L_1-algebra, vagyis az integrálható komplex függvények algebrája, ahol a Banach-algebra szorzása a (Δ) alatti konvolúció G-n. Segal [213] igazolta, hogy ez az L_1-algebra Jacobson-értelemben, sőt bizonyos esetekben erősebben még Brown—McCoy-értelemben is féligegyszerű, azaz benne a moduláris maximális kétoldali ideálok metszete nulla.

Ha egy Hilbert-tér korlátos önadjungált operátorának a spektruma csak a nulla, akkor maga az operátor is nulla. Ezért A hűen ábrázolható bizonyos $L_2(G)$-beli operátorokkal, és a Hilbert-tér korlátos operátorainak minden önadjungált részalgebrája féligegyszerű. Rajkov [193] más módon bizonyította be $L_1(G)$ féligegyszerűségét. $L_1(G)$ féligegyszerűségéből folyik, hogy létezik a G egy Banach-tér operátoraival való irreducibilis reprezentációnak a teljes rendszere. Ezeket a reprezentációkat Segal [213] B-reprezentációknak nevezte. Ha G bikompakt vagy kommutatív, akkor a B-reprezentációk véges-dimenziósok és ezért unitérok. Gelfand—Rajkov [70] és Segal [214] igazolták, hogy lokálisan bikompakt G csoport esetében is van irreducibilis unitér reprezentációknak egy teljes rendszere.

Legyen most G kommutatív, lokálisan bikompakt csoport. Ekkor $L_1(G)$ is kommutatív. Ekkor $L_1(G)$-nek minden I zárt valódi ideálja beágyazható egy moduláris (reguláris) maximális ideálba. Ez a beágyazhatóság szoros kapcsolatban áll egy abszolút konvergens trigonometrikus sor reciprokának az abszolút konvergenciájáról szóló N. Wiener-féle eredménnyel. Ha G nem diszkrét, akkor I beágyazásának vizsgálata megtalálható Godement [77] és Segal [213] dolgozatában.

Az I zárt ideál speciális megválasztásával az $L_1(G)/I$ faktorgyűrű radikáljának a vizsgálata parciális eredményeket adott Wiener és Pitt „Tauber-típusú" tételeinek általánosításához, amelyek Ditkin [47] és Segal [213] dolgozatában vannak. Varsavsky is végzett ilyen jellegű általánosabb vizsgálatokat [229].

Ha G nemkommutatív, lokálisan bikompakt csoport, akkor az $L_2(G)$ Hilbert-tér nem feltétlenül lesz Banach-algebra, mert $L_2(G)$ nem zárt általában a konvolúciós szorzásra. Ehhez a problémakörhöz hasonló parciális eredményeket ért el Mautner [157] miközben a G csoportra további feltételt szabott ki.

Megjegyzendő még, hogy Milman [160] vizsgálta a topologikus gyűrűk normálhatóságának a feltételeit, továbbá Michael [159] pedig bizonyos, speciális topologikus algebrákra sok olyan eredményt általánosított, amelyek eredetileg csak a Banach-algebrákra vonatkozólag voltak bebizonyítva.

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ И КОЛЬЦАХ II.

Ф. Сас

ON TOPOLOGICAL ALGEBRAS AND RINGS II.

F. Szász