BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sciences math., astr. et phys. — Vol. XI, No. 6, 1963

32

MATHEMATIK
(ALGEBRA)

Über Artinsche Ringe

von

F. SZÁSZ

Vorgelegt von A. MOSTOWSKI 5 April 1963

Unter einem Ring verstehen wir in dieser Note immer einen assoziativen Ring. Die Ringe mit Minimalbedingung für Rechtsideale werden Artinsche Ringe genannt. Bezüglich der nötigen Begriffe verweisen wir auf [1], [3] und [5].

Das folgende interessante Problem stammt (1953) von T. Szele: Ist die additive Gruppe jedes ringdirekt unzerlegbaren Artinschen Ringes entweder torsionsfrei oder eine p-Gruppe? Dieses Problem ist offensichtlich dem folgenden Problem von Fuchs und Szele ([2], Fussnote 11) äquivalent: Ist das maximale periodische Ideal P jedes Artinschen Ringes A auch ein ringdirekter Summand von A? Dasselbe Problem wurde in [4] über Artinsche Ringe an einer Ringtagung (Oberwolfach-Schwarzwald, 1961) von A. Kertész als „Problem 3" aufgeworfen.

Das Ziel dieser Note ist die Lösung dieses Problems: Es wird nämlich gezeigt, dass das maximale periodische Ideal P eines beliebigen Artinschen Ringes A notwendig ein ringdirekter Summand von A ist. Fuchs und Szele [2] bewiesen diese Tatsache nur für den speziellen Fall, wenn die additive Gruppe A^+ von A keine Prüfersche Untergruppe $Z(p^\infty)$ besitzt.

Zu unseren Untersuchungen brauchen wir einige Vorbereitungen.

HILFSSATZ 1. *Ist in einem Ring A die additive Gruppe R^+ jedes Rechtsideals R von A torsionsfrei und teilbar („divisible"), so gilt $a \in a.A$ für jedes Element $a \in A$.*

Beweis. Nehmen wir an, dass $a \notin a.A$ für ein $a \in A$. Dann gilt auch $ka \notin aA$ für jedes ganze $k \neq 0$, denn aus $ka = aa_1$ $(a_1 \in A)$ erhält man wegen der Teilbarkeit von A^+ gewiss $a_1 = ka_2$ und somit wegen der Torsionsfreiheit von A^+ auch $a = aa_2 \in aA$. Bezeichnet J den Ring der ganzen Zahlen, folgt also wegen der Voraussetzung die Existenz der additiven direkten Summe $Ja \oplus aA$ die genau die additive Gruppe des Hauptrechtsideals $(a)_r$ ist. Da $(a)_r^+ = Ja + aA$ jedoch teilbar ist, ergibt sich wegen $(Ja)^+ \cong J^+$ ein Widerspruch. Man erhält also $a \in aA$ für jedes $a \in A$.

HILFSSATZ 2. *Gelten in einem Ring A mit dem Jacobsonschen Radikal J die Bedingungen $a \in aA$ für jedes $a \in A$ und $b - be \in J$ für ein Idempotent e und für jedes $b \in A$, so ist e ein Rechtseinselement von A.*

Beweis. Es sei $a \in A$ ein beliebiges Element und e ein Idempotent mit $b - be \in J$ für jedes $b \in A$. Da für $a_1 = a - ae$ nach Voraussetzung $a_1 \in a_1 A$ gilt, erhält man $a_1 = a_1 a_2$ mit $a_2 \in A$. Wegen $a_2 = (a_2 - a_2 e) + a_2 e$ ergibt sich $a - ae = (a - ae) \cdot (a_2 - a_2 e) + (a - ae) a_2 e$. Nach einer Rechtsmultiplikation mit e folgt nun $(a - ae) a_2 e = 0$ und daher $(a - ae) = (a - ae)(a_2 - a_2 e)$. Wegen $a_2 - a_2 e \in J$ existiert ein $a_3 \in J$ mit $(a_2 - a_2 e) + a_3 - (a_2 - a_2 e) a_3 = 0$.
Hiernach gilt aber auch

$$a - ae = (a - ae) - (a - ae)[(a_2 - a_2 e) + a_3 - (a_2 - a_2 e) a_3] = \\ = (a - ae) - (a - ae)(a_2 - a_2 e) - [a - ae - (a - ae)(a_2 - a_2 e)] a_3 = 0.$$

Folglich, e ist ein Rechtseinselement von A_1.

Nun gilt der folgende

SATZ 3. *Jeder Artinsche Ring A mit torsionsfreier additiver Gruppe A^+ besitzt ein Rechtseinselement e.*

Beweis. Es sei N das Radikal von A_1, das bekanntlich nilpotent ist. Im Falle $A = N$ ist A^+ nach [6] periodisch, und da A^+ torsionsfrei ist, ergibt sich $A \neq N$. Es gibt in A ein Idempotent e, für das die Nebenklasse $e + N$ genau das Einselement des halbeinfachen Artinschen Ringes A/N ist. Dann erhält man offensichtlich $a - ae \in N$ für jedes $a \in A$. Es gilt aber auch $a \in aA$ für jedes $a \in A$, denn mR^+ ist wegen der Minimalbedingung für Rechtsideale für jedes Rechtsideal R von A und für eine passende ganze Zahl $m \neq 0$ eine teilbare Gruppe, für die nach einem Satz von R. Baer (vgl. z.B. [1]) $R^+ = mR^+ \oplus K$ gilt, wobei die Untergruppe K von A wegen $K \cong (R/mR)^+$ und wegen der Torsionsfreiheit von A^+ Null ist. Da R für jedes Rechtsideal R von A teilbar ist, erhält man nach dem Hilfssatz 1 wirklich $a \in aA$ für jedes $a \in A$. Wegen $a - ae \in N$ für jedes $a \in A$ ist e nach dem Hilfssatz 2 gewiss ein Rechtseinselement von A.

Als eine nichttriviale Folgerung des Satzes 3 erhält man den folgenden

SATZ 4. *Das maximale periodische Ideal P eines beliebigen Artinschen Ringes A ist notwendig ein ringdirekter Summand von A, d.h. es gibt ein torsionsfreies Ideal Q von A, dass die ringdirekte Zerlegung $A = P \oplus D$ gilt.*

Beweis. Nach [2] gilt $A^+ = B \oplus C \oplus D$, wobei B eine beschränkte Abelsche Gruppe ($kB = 0$, $k \neq 0$), C — die Summe von endlich vielen $Z(p^\infty)$, D — eine teilbare torsionsfreie Gruppe und $\oplus$ — additive direkte Summe sind. $B \oplus C = P$ ist also das maximale periodische Ideal von A, der eine Everettsche Ringerweiterung von P mit A/P ist. Wegen der erwähnten Struktur von A können hierbei das additive Faktorsystem $[r_1, r_2] \in P$ ($r_i \in R = A/P$) und die Endomorphismensysteme rp und pr ($p \in P$, $r \in R$) identisch Null gewählt werden, denn P ist ein additiver direkter Summand von A und es gilt wegen der Teilbarkeit von B auch $PB = BP = 0$. Es sei $\langle r_1, r_2 \rangle \in P$ ($r_i \in R$) das multiplikative Faktorsystem der erwähnten Ringerweiterung A von P mit $R = A/P$. Bekanntlich gilt in diesem besonderen Fall

(1) $$\langle r_1 + r_2, r_3 \rangle = \langle r_1, r_3 \rangle + \langle r_2, r_3 \rangle,$$

(2) $$\langle r_1, r_2 + r_3 \rangle = \langle r_1, r_2 \rangle + \langle r_1, r_2 \rangle$$

(3) $$\langle r_1, r_2 r_3 \rangle = \langle r_1 r_2, r_3 \rangle.$$

Da $R = A/P$ ein torsionsfreier Artinscher Ring ist, hat R nach dem Satz 3 ein Rechtseinselement e. Ist nun $r_3 = e$, so ergibt sich nach der Formel 3 offensichtlich $\langle r_1, r_2\rangle = \langle r_1 r_2, e\rangle$. Es sei jetzt $r^\varphi = \langle r_1, e\rangle$. Dann erhält man $\langle r_1, r_2\rangle = (r_1\cdot r_2)^\varphi$ wobei φ wegen (1) ein additiver Homomorphismus von R^+ in P^+ ist. Es gilt also, $R^\varphi \subseteq C = \sum_{\text{endlich}} Z(p^\infty)$. Dann ist A bis auf Ringisomorphie die Menge aller formal verschiedenen Paare (r, p) mit $r \in R$; $p \in P$ und

$$(r_1, p_1) + (r_2, p_2) = (r_1 + r_2, p_1 + p_2),$$

$$(r_1, p_1)\cdot(r_2, p_2) = (r_1\cdot r_2, (r_1\cdot r_2)^\varphi + p_1 p_2).$$

Die Menge aller Paare (r, r^φ) bildet in A ein torsionsfreies Ideal Q mit $Q \subseteq A^2$, denn $Z(p^\infty)$ liegt im zweiseitigen Annulator von A. Wegen $(r, p) = (r, r^\varphi) + (0, p - r^\varphi)$ erhält man $A = P + Q$, und wegen $P \cap Q = 0$ auch $A = P \oplus Q$.

Bemerkung 1. Ist A ein ringdirekt unzerlegbarer Artinscher Ring, so ist A^+ entweder eine p-Gruppe oder eine torsionsfreie teilbare Gruppe. Dies is für $Z(p^\infty) \subseteq A^+$ aus [2] nicht ersichtlich.

Mit den vorigen Bezeichnungen erhält man nach den Sätzen 3 und 4 den folgenden

Satz 5. *Für jedes Rechtsideal R eines beliebigen Artinschen Ringes A gilt die ringdirekte Zerlegung $R = (R \cap P) \oplus (R \cap Q)$. Ferner erhält jeder torsionsfreie Artinsche Ring ohne Rechtsannulatoren ein zweiseitiges Einselement.*

Satz 6. *Jeder kommutative Artinsche Ring ist die ringdirekte Summe von einem nilpotenten kommutativen Artinschen Ring N und von endlich vielen komplett primären ringdirekt unzerlegbaren kommutativen, Artinschen Ringen A_i ($i = 1, 2, \dots, n$), wobei jedes A_i^+ entweder eine p-Gruppe, oder eine torsionsfreie teilbare Gruppe ist.*

Der Beweis ist nach dem Satz 4 und nach den Sätzen 3.9.1, 3.9.2 und 3.9.4 von Jacobson [3] klar.

Satz 7. *Das Radikal N jedes Artischen Ringes ist die ringdirekte Summe eines periodischen Ringes und eines torsionsfreien teilbaren Ringes. Eine Abelsche Gruppe G ist dann und nur dann die additive Gruppe des Radikals N eines Artinschen Ringes, wenn*

$$(*)\qquad G \cong \sum R \oplus \sum_{\text{endlich}} Z(p^\infty) \oplus \sum_{p^k/m} Z(p^k)$$

gilt, wobei R eine volle rationale Gruppe ist.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus dem Satz 4 unmittelbar, denn es gilt $N = N_P \oplus N_Q$ und $A/(N_P \oplus N_Q) \cong P/N_P \oplus QN_Q$. Die Notwendigkeit der Bedingung (*) in der zweiten Behauptung folgt aus der ersten Behauptung und daraus, dass jedes Rechtsideal eines torsionsfreien Artinschen Ringes, wie wir es z.B. beim Beweis des Satzes 3 gesehen haben, teilbare additive Gruppe besitzt. Das Hinreichen der Bedingung (*) ergibt sich folgendermassen. Hat ΣR den Rang $\mathfrak{m} < \aleph_0$, so sei K eine einfache algebraische Körpererweiterung von K_0 ($K_0^+ \cong R$) mit dem Grad $\mathfrak{m}$

über K_0. Ist $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$, so sei K eine rein transzendente Körpererweiterung von K_0 mit dem Transzendenzgrad über K_0. Es sei $A_0 = Ke + Kz$ mit $e^2 - e = ez - z =$ $= ze - z = z^2 = 0$. Dann ist Kz das Radikal von A_0 mit $(Kz)^+ \cong \Sigma R$. Ferner ist $\sum_{\text{endlich}} Z(p^\infty)$ ein Artinscher nilpotenter Ring, und zwar ein Zeroring. Nun lässt sich $\sum_{p^k, m} Z(p^k)$ als die direkte Summe von endlich vielen Gruppen G_{p^i} zerlegen, derart, dass $G_{p^i} = \Sigma Z(p^i)$ für dasselbe feste p und i ist, und G_{p^i} einen Rang $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(p^i)$ hat. Nach dem Lemma 72.4 von Fuchs [1] gibt es einen kommutativen Artinschen Ring $A_{p^{i+1}}$ über $G_{p^{i+1}}$ (mit $i+1$ statt i aber mit demselben Rang $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(p^i)$). Dann ist $pA_{p^{i+1}}$ das Radikal von $A_{p^{i+1}}$ und ergibt sich auch $(pA_{p^{i+1}})^+ \cong G_{p^i}$. Folglich ist $A_0 \oplus \sum_{\text{endlich}} Z(p^\infty) \oplus \sum_{p^i/m} A_{p^{i+1}}$ ein Artinscher Ring, dessen Radikal N solche additive Gruppe N^+ besitzt, dass $G \cong N^+$ ist. Dies beweist das Hinreichen von (*).

Bemerkung 2. Der Satz 7 löst ein Problem von A. Kertész [4]. Nach dem Satz 4 lassen sich auch sämtliche solche Radikalringe bestimmen, deren jede direkte Everettsche Ringerweiterung mit jedem halbeinfachen Ring ein Artinscher Ring ist.

Bemerkung 3. T. Szele hat auch gefragt (1949): Gibt es (Artinsche) Ringe mit endlich vielen Rechtsidealen und mit unendlich vielen Linksidealen? Bezüglich des Aufwerfens dieses Problems vgl. noch [5] und [4]. Bedeutet nun $A(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) = \uparrow$ für die beliebige Mächtigkeiten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ die Existenz eines Artinschen Ringes A genau mit $\mathfrak{m}$ Rechtsidealen und genau mit $\mathfrak{n}$ Linksidealen, so ergibt sich nach unserem Resultat das Bestehen von $A(n, \aleph_\nu) = \uparrow$ für jede natürliche Zahl $n \geqq 3$ und jedes $\aleph_\nu$, und $A(\aleph_\mu, \aleph_\nu) = \uparrow$ für jedes Paar $\aleph_\mu$ und $\aleph_\nu$. Diese Artinsche Ringe haben dabei auch Einselement. Es gilt $A(3, 4) = \downarrow$, es gibt aber unendlich viele Paare $(m_i^{(k)}, n_i^{(k)})$ von Folgen natürlicher Zahlen derart, dass $\mathfrak{m}_i^{(k)}$, bzw., $n_i^{(k)}$ für jedes feste k arithmetische Folgen bilden, und auch $A(m_i^{(k)}, n_i^{(k)}) = \uparrow$ gilt. Wir haben auch sämtliche Ringe mit drei Rechtsidealen bestimmt. Diese Resultate von Bemerkung 3 und weitere Resultate werden in Acta Math. Acad. Sci. Hung. 14 (1963) ausführlicher betrachtet.

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSINSTITUT, UNGARISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, BUDAPEST

SCHRIFTTUM

[1] L. Fuchs, *Abelian Groups*, Budapest, 1958.
[2] L. Fuchs, T. Szele, *On Artinian rings*, Acta Sci. Math. Szeged, **17** (1956), 30—40.
[3] N. Jacobson, *Structure of rings*, Prov., 1956.
[4] A. Kertész, *Artinsche Ringe* (Referat an einer Ringtagung in Oberwolfach-Schwarzwald, 1961).
[5] L. Rédei, *Algebra* I., Leipzig, 1959.
[6] T. Szele, *Nilpotent Artinian rings*, Publ. Math. Debrecen, **4** (1955), 71—78.