EIN RADIKALTHEORETISCHER VEREINIGUNGSENDOMORPHISMUS DES IDEALVERBANDES DER RINGE

Von

F. SZÁSZ

Mathematisches Forschungsinstitut der Ungarischen Akademie der Wissenschaften

(Eingegangen am 20. Dezember 1968)

Unter einem Ring wird in dieser Note ein assoziativer Ring bzw. ein alternativer Ring, unter einem Radikal stets ein Amitsur—Kurosches Radikal verstanden [1], [6]. Bezüglich der nötigen Grundbegriffe verweisen wir noch auf ANDRUNAKIEWITSCH [3], BIRKHOFF [4], DIVINSKY [5] und RÉDEI [7].

Für die Abfassung des Resultates dieser Note machen wir eine Vorbereitung. Ist R ein Radikal, so wird ein R-halbeinfacher Ring A streng R-halbeinfach genannt [3], wenn jedes homomorphe Bild von A ebenfalls R-halbeinfach ist. Offenbar ist nicht jeder R-halbeinfache Ring streng R-halbeinfach. Weiterhin gibt es Radikale R, für die jeder R-halbeinfache Ring auch streng R-halbeinfach ist. Sind nun I ein Ideal eines Ringes A, und R ein beliebiges Radikal, so ist

$$\varphi : I \to R(I)$$

eine Abbildung des Idealverbandes des Ringes A in sich, denn das Radikal $R(I)$ des Ideals I ist nach Theorem 47 von DIVINSKY [5] ebenfalls ein Ideal des Ringes A. In dieser Note wird auch die Modularität des Idealverbandes eines Ringes benützt, die folgendes bedeutet:

Sind I_1 und I_2 Ideale von A mit der Bedingung $I_1 \supseteq I_2$, so gilt $I_1 \cap (I_2 + I_3) = I_2 + (I_1 \cap I_3)$ für jedes Ideal I_3 des Ringes A.

Als gewisse Dualisierung eines Satzes von AMITSUR [1] (Theorem 4.1, S. 783) kann folgendes Resultat bestätigt werden:

SATZ. *Sind A ein (assoziativer bzw. alternativer) Ring, I ein Ideal von A und R ein solches Radikal, für das jeder R-halbeinfache Ring auch streng R-halbeinfach ist, so ist die Abbildung*

$$\varphi : I \to \bar{I} = R(I)$$

ein Vereinigungsendomorphismus des Idealverbandes V von A; es gilt also $\overline{I_1 + I_2} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$ für beliebige Ideale I_1 und I_2 von A.

Bemerkung 1. In der Arbeit von Amitsur [1] wurde ein Durchschnitt-homomorphismus für den Idealverband V des Ringes A mit der Hilfe sogenannter erblicher Radikale [1], [3] und einer wesentlich anderen, wohlbestimmten Abbildung ψ angegeben.

Beweis. Es seien I_1 und I_2 Ideale des Ringes A mit $I_1 \subseteq I_2$. Dann erhält man $\bar{I}_1 \subseteq I_2$, und somit steht an der linken Seite der Isomorphie

$$(\bar{I}_1 + \bar{I}_2)/\bar{I}_2 \cong \bar{I}_1/\bar{I}_1 \cap \bar{I}_2$$

ein Ideal des R-halbeinfachen Ringes $I_2/\bar{I}_2$, und daher ist $(\bar{I}_1 + \bar{I}_2)/\bar{I}_2$ R-halbeinfach nach dem Theorem 47 von bzw. nach Theorem 2 von [2]. An der rechten Seite der Isomorphie kommt aber ein R-Radikalring, als ein homomorphes Bild eines R-Radikalringes, hervor. Hiernach ergibt sich $\bar{I}_1/\bar{I}_1 \cap \bar{I}_2 = 0$, folglich $\bar{I}_1 = \bar{I}_1 \cap \bar{I}_2 \subseteq \bar{I}_2$.

Die Abbildung $\varphi : I \to \bar{I}$ ist also monoton.

Sind nun die Ringe B/C und C beide R-halbeinfach für ein Ideal C von B und für ein Radikal R, so ist B selbst R-halbeinfach. Es sei nämlich $R(B)$ das R-Radikal des Ringes B. Da $(R(B)+C)/C$ ein R-Radikalideal und B/C R-halbeinfach sind, ergibt sich $R(B) \subseteq C$, woraus man wegen der R-Halbeinfachheit von C wirklich $R(B) = 0$, also die R-Halbeinfachheit von B erhält.

Hiernach ist jede Everettsche Erweiterung eines R-halbeinfachen Ringes mit der Hilfe eines R-halbeinfachen Ringes ebenfalls R-halbeinfach.

Bisher haben wir die strenge R-Halbeinfachheit der R-halbeinfachen Ringe noch nicht benützt. Diese letztere Voraussetzung wird nur jetzt benötigt.

Wegen der Modularität des Idealverbandes V des Ringes A und wegen $I_2 \supseteq \bar{I}_2$ ergibt sich $I_2 \cap (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) = \bar{I}_2 + (\bar{I}_1 \cap I_2)$ für beliebige Ideale I_1 und I_2, und somit ist der Faktorring $I_2/I_2 \cap (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)$ ein homomorphes Bild des R-halbeinfachen Ringes $I_2/\bar{I}_2$. Also ist auch $I_2/I_2 \cap (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)$ R-halbeinfach nach der vorausgesetzten strengen R-Halbeinfachkeit von $I_2/\bar{I}_2$. Nach dem Isomorphiesatz erhält man aber

$$\bar{I}_1 + I_2/\bar{I}_1 + \bar{I}_2 = (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) + I_2/\bar{I}_1 + \bar{I}_2 \cong I_2/I_2 \cap (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)$$

und daher ist der Faktorring $\bar{I}_1 + I_2/\bar{I}_1 + \bar{I}_2$ R-halbeinfach.

Wegen der Modularität des Idealverbandes V von A und wegen $I_1 \supseteq \bar{I}_1$ erhält man andererseits $I_1 \cap (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) = \bar{I}_1 + (I_1 \cap \bar{I}_2)$ und somit ist der Faktorring $I_1/I_1 \cap (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)$ ein homomorphes Bild des strengen R-halbeinfachen Ringes $I_1/\bar{I}_1$. Also ist auch $I_1/I_1 \cap (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)$ ein R-halbeinfacher Ring. Nach der Isomorphie

$$(I_1 + \bar{I}_2)/\bar{I}_1 + \bar{I}_2 = (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) + I_1/\bar{I}_1 + \bar{I}_2 \cong I_1/I_1 \cap (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)$$

ergibt sich die R-Halbeinfachheit von $I_1 + \bar{I}_2/\bar{I}_1 + \bar{I}_2$.

Da jetzt der Faktorring $B/C \cong (I_1 + I_2)/\bar{I}_1 + I_2$ und das Ideal $C = (\bar{I}_1 + I_2)/(\bar{I}_1 + \bar{I}_2)$ nach dem vorigen beide R-halbeinfache Ringe sind, ist auch der Faktorring $B = (I_1 + I_2)/(\bar{I}_1 + \bar{I}_2)$ nach dem vorigen R-halbeinfach, denn $B = (I_1 + I_2)/(\bar{I}_1 + \bar{I}_2)$ ist eine Everettsche Ringerweiterung von $C = (\bar{I}_1 + I_2)/(\bar{I}_1 + \bar{I}_2)$

mit der Hilfe von $B/C \cong (\bar{I}_1+\bar{I}_2)/(I_1+I_2)$. Wegen $R(\bar{I}_1+\bar{I}_2) = \bar{I}_1+\bar{I}_2$ erhält man also $\overline{I_1+I_2} \subseteq \bar{I}_1+\bar{I}_2$ denn $\bar{I}_1+\bar{I}_2$ ist ein R-Radikalring, und $\overline{I_1+I_2}/\bar{I}_1+\bar{I}_2$ ist R-halbeinfach.

Nach der bewiesenen Monotonität von $I \to \bar{I}$ ergibt sich aus $I_j \subseteq I_1+I_2$ $(j = 1, 2)$ offenbar $\bar{I}_j \subseteq \overline{I_1+I_2}$, folglich auch $\bar{I}_1+\bar{I}_2 \subseteq \overline{I_1+I_2}$. Wegen der bewiesenen Relation $\overline{I_1+I_2} \subseteq \bar{I}_1+\bar{I}_2$ folgt $\overline{I_1+I_2} = \bar{I}_1+\bar{I}_2$ Daher ist $I \to \bar{I}$ wirklich ein Vereinigungsendomorphismus, w.z.b.w.

Bemerkung 2. Auch eine kategorientheoretische Verallgemeinerung des Satzes und seines dualen Satzes kann in gewissen Kategorien abgefaßt und bewiesen werden. Für solche Kategorien siehe z. B. [8] und [9].

Bemerkung 3. Folgendes Beispiel zeigt, daß der obige Satz nicht für jedes Radikal R gilt. Bestehe nämlich die Klasse aller R-Radikalringe aus sämtlichen idempotenten Ringen, und seien weiterhin I der Ring der ganzen rationalen Zahlen, p und q Primzahlen mit der Bedingung $(p, q) = 1$. Für die Ideale (p) und (q) von I ergibt sich dann $R((p)) = R((q)) = 0$ und $R((p)+(q)) = R(I) = I$, und somit $\overline{(p)}+\overline{(q)} \neq \overline{(p)+(q)}$.

Literaturverzeichnis

[1] S. A. Amitsur, A general theory of radicals, I., *Amer. J. Math*, **74** (1952), 774–786; II., *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 100–125; III., *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 126–136.

[2] T. Anderson – N. Divinsky – A. Sulinski, Hereditary radicals in associative and alternative rings, *Canadian J. Math.*, **17** (1965), 594–603.

[3] W. A. Andrunakiewitsch, Radikale assoziativer Ringe, I, *Mat. Sbor.* **44** (1958), 179–212; II, *Mat. Sbor.* **55** (1961), 329–346 (Russisch).

[4] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, New-York (1948).

[5] N. Divinsky, *Rings and Radicals*, London (1965).

[6] A. G. Kurosch, Radikale der Ringe und Algebren, Mat. Sbor., **33** (1953), 13–26 (Russisch)

[7] L. Rédei, *Algebra*, I. Leipzig (1959).

[8] F. Szász – R. Wiegandt, On the dualization of subdirect embeddings, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (im Erscheinen).

[9] F. Szász – R. Wiegandt, On radicals and semi-simplicities in categories, *Acta Math. Acad. Sci Hung.* (im Erscheinen).