Simultane Lösung eines halbgruppentheoretischen und eines ringtheoretischen Problems

Von F. SZÁSZ in Budapest

Unter einem Ring verstehen wir in dieser Arbeit stets einen assoziativen Ring. Bezüglich der nötigen Begriffe verweisen wir auf die Bücher CLIFFORD—PRESTON [1], JACOBSON [3], KERTÉSZ [4] und RÉDEI [6]. Weiterhin bezeichnen wir mit $\{a, b, \ldots\}$ und $(a, b, \ldots)$ die Unterstruktur und das Ideal, welche durch die eingeklammerten Elemente der Halbgruppe bzw. des Ringes erzeugt sind.

Als ein halbgruppentheoretisches Analogon des in meiner Arbeit [8] betrachteten Problems kann folgendes gefragt werden:

Für welche Halbgruppen sind die echten, endlich erzeugbaren Teilhalbgruppen der Halbgruppe untereinander isomorph?

Weiterhin hat RÉDEI [6, § 27, Seite 90] gefragt:

Soll jede Teilmenge einer Halbgruppe H eine Teilhalbgruppe in H sein, wenn die Frattinische Teilhalbgruppe Φ von H leer ist?

Im Buch [4. § 28, Seite 123] von KERTÉSZ ist folgendes Problem aufgeworfen:

Ist der Durchschnitt von zwei modularen Rechtsidealen eines Ringes stets modular?

Dieses Problem war schon vor dem Erscheinen des Buches [4] behandelt.

In dieser Note werden wir diese drei Probleme betrachten, und zwar derart, daß eine simultane Lösung des erwähnten Problems von RÉDEI und des Problems von KERTÉSZ mit der Lösung des ersten Problems in Zusammenhang steht. Für diese simultane Lösung betrachten wir nämlich einen explizit angegebenen Ring und seine adjungierte Halbgruppe. Es soll bemerkt werden, daß das erwähnte Problem von RÉDEI in der Arbeit von LAJOS [5] gelöst ist. Weiterhin hat Verfasser [7] das erwähnte Problem von KERTÉSZ in einer schärferen Form schon gelöst. In dieser Note werden aber diese dreien Probleme miteinander verbunden betrachtet, und aus dieser simultanen Lösung ergibt sich eine Lösung von anderem Typ für das Problem von KERTÉSZ[1]).

Es gilt für die Lösung des ersten Problems dieser Note der folgende

Satz 1. *Ist H eine Halbgruppe, für die sämtliche endlich erzeugbare echte Teilhalbgruppen untereinander isomorph sind, so ist H einer der folgenden Halbgruppen isomorph:*

I) *eine endliche zyklische Gruppe von Primzahlordnung;*

II) *eine Halbgruppe $H=\{h\}$ mit $h^2=h$* (dann hat H nur ein Element);

III) *eine (kommutative) Halbgruppe $H=\{h, g\}$ der Ordnung zwei mit $g^2=g$, $h^2=h$ und $gh=hg$, wobei eine der Teilhalbgruppen $\{g\}$, $\{h\}$ ein Ideal von H ist;*

IV) *eine (nichtkommutative) Halbgruppe $H=\{g, h\}$ der Ordnung vier mit der Multiplikationstabelle:*

	g	h	i	j
g	g	i	i	g
h	j	h	h	j
i	g	i	i	g
j	j	h	h	j

Beweis. Um kurz zu sprechen, wird H eine Halbgruppe mit der Eigenschaft E genannt, wenn die endlich erzeugbaren echten Teilhalbgruppen von H untereinander isomorph sind. Weder die Endlichkeit noch die Kommutativität von H wird vorausgesetzt, die Endlichkeit der Halbgruppen mit der Eigenschaft E wird aber bewiesen.

[1]) Obwohl zwischen den Lösungen des ursprünglichen ringtheoretischen Problems von [8] genau kontinuum viele nicht isomorphe unendliche Ringe vorkommen, dagegen ist die Anzahl der Lösungen des ersten Problems dieser Note endlich, und auch selbst die Lösungen sind notwendig endliche aber nicht notwendig kommutative Halbgruppen. Die einzige nichtkommutative, zwischen den Lösungen auftretende Halbgruppe der Ordnung vier ist zur in LAJOS [5] betrachteten Halbgruppe isomorph, und sie kann auch in den Verzeichnissen für alle Halbgruppen der Ordnung vier bzw. fünf der Arbeiten von FORSYTHE [2], TAMURA [12] bzw. von TETSUYA, HASHIMOTO, AKAZAWA, SHIBATA, INUI und TAMURA [13] gefunden werden. — Die Wichtigkeit des Kertészschen Problems ruht an den folgenden Tatsachen: Das Jacobsonsche Radikal stimmt in jedem Ring bekanntlich mit dem Durchschnitt aller modularen maximalen Rechtsideale überein. Weiterhin ist der Durchschnitt von endlich vielen modularen maximalen Rechtsidealen in einem Ring stets modular. Gilt ferner $R_1+R_2=A$ für die modularen Rechtsideale R_i des Ringes $A (i=1, 2)$, so soll $R_1 \cap R_2$ ebenfalls modular in A sein.

Besitze H im folgenden die Eigenschaft E.

Dann ist H periodisch. Hat nämlich H ein Element unendlicher Ordnung, so besitzt H auch eine echte unendliche zyklische Teilhalbgruppe $\{h\}$. Weiterhin ist dann die Teilhalbgruppe $\{h^2, h^3\}$ ebenfalls echt, endlich erzeugt, aber nicht zyklisch, was der Definition der Eigenschaft E widerspricht, und somit ist H wirklich periodisch.

Nach dem Beweise des Satzes 29.3 von RÉDEI [6, Seite 51] hat jede periodische zyklische Teilhalbgruppe $\{h\}$ einer Halbgruppe ein idempotentes Element e. Gibt es nämlich natürliche Zahlen m und n $(m>n)$ mit $h^m=h^n$, so ist $e=h^{m(m-n)}$ idempotent. Hiernach besteht jede endlich erzeugbare echte Teilhalbgruppe einer Halbgruppe mit der Eigenschaft E nur aus einem einzigen (idempotenten) Element e.

Es sei zuerst $H=\{h\}$.

Existiert eine natürliche Zahl $k\geqq 2$ mit $\{h^k\}=H$, so gilt $h=h^{kk_1}$ mit einer geeigneten natürlichen Zahl k_1, und somit ist dann $f=h^{kk_1-1}$ das Einselement der Halbgruppe H, die jetzt eine zyklische Gruppe ist. Da für jeden Teiler d der Ordnung von H eine Teilgruppe der Ordnung d gibt, und da H die Eigenschaft E besitzt, ist H eine Gruppe von Primzahlordnung. Das ist der Fall I) im Satz 1.

Existiert aber keine natürliche Zahl $k\geqq 2$ mit $\{h^k\}=H$, so ist nach dem vorigen h^k für jedes $k\geqq 2$ idempotent. Ist k_0 die kleinste solche natürliche Zahl, für die h^{k_0} nicht mit einer Potenz h^l mit $l<k_0$ übereinstimmt, so ist gewiß $k_0=1$. Es sei nämlich $k_0\geqq 2$. Im Falle $k_0=2s$ ergibt sich $h^{k_0}=h^{2s}=h^s$ mit $k_0>s$, und im Falle $k_0=2s+1$ erhält man $h^{k_0}=(h^s)^2h=h^s\cdot h=h^{s+1}$ mit $k_0>s+1$ die der Minimalität von k_0 widersprechen. Es gilt also $k_0=1$, woraus $h^2=h$ folgt. Das ist der Fall II) im Satz 1.

Zum Schluß nehmen wir an, daß H durch kein Element $h\in H$ erzeugt werden kann. Dann gilt $g^2=g$ für jedes $g\in H$, und $H=\{g, h\}$ für beliebige voneinander verschiedene Elemente g und h von H. Hiernach sind höchstens die Elemente

$$g,\ h,\ gh,\ hg,\ ghg,\ hgh$$

die formal verschiedenen Elemente von H. Diese sechs Elemente dürfen aber übereinstimmen.

Besteht $g=hgh$ oder $h=ghg$, so erhält man aus der ersten Gleichung:

$$g=hg=gh=ghg=hgh,$$

oder aus der zweiten Gleichung

$$h=gh=hg=hgh=ghg.$$

Hiernach ist H in beiden Fällen eine kommutative Halbgruppe der Ordnung zwei, die ein echtes Ideal enthält, dessen einziges Element idempotent ist. Das ist der Fall III) im Satz 1.

Gilt aber weder $g = hgh$, noch $h = ghg$, so ergibt sich nach dem vorigen, daß

$$H = \{g, hgh\} = \{h, ghg\}.$$

Da $x^2 = x$ für jedes $x \in H$, ferner $g \in H$, $h \in H$, $g \neq h$, erhält man hieraus, daß

$$g = ghg \quad \text{und} \quad h = hgh.$$

Das ist der Fall IV) im Satz 1 mit $i = gh$ und $j = hg$.

Damit haben wir alle Halbgruppen mit der Eigenschaft E explizit bestimmt. Umgekehrt besitzt jede im Satz 1 vorkommene Halbgruppe die Eigenschaft E, womit Satz 1 bewiesen ist.

Aus dem Satz 1 ergibt sich leicht:

Folgerung 2. Die im Satz bei IV) vorkommene Halbgruppe ist die einzige *nichtkommutative* Halbgruppe mit der Eigenschaft E. Diese ist zur Lajosschen Lösung des Rédeischen Problems isomorph.

Als eine simultane Lösung des zweiten (Rédeischen) und des dritten (Kertészschen) Problems erhält man den folgenden

Satz 3. *Es gibt einen endlichen nichtkommutativen Ring A der Ordnung* 16, *der folgende Eigenschaften besitzt:*

I) *A hat zwei solche modulare nilpotente Rechtsideale, deren Durchschnitt nicht modular in A ist;*

II) *das Jacobsonsche Radikal J von A ist selbst ein modulares maximales Rechtsideal in A, für das $J^2 \neq 0$ und $J^3 = 0$ bestehen;*

III) *die Elemente von A bilden bezüglich der Kreisverknüpfung $x \circ y = x + y - xy$ eine Halbgruppe H_1, die eine nichtkommutative Teilhalbgruppe H_2 der Ordnung vier und mit der Eigenschaft E enthält, derart, daß die Frattinische Teilhalbgruppe von H_2 leer ist, obwohl eine Teilmenge in H_2 keine Halbgruppe ist.*

Beweis. Der Ring A sei über dem Primkörper K_2 mit zwei Elementen 0 und 1 durch die Basiselemente a, b, c und d erzeugte Algebra, für die die folgende Multiplikationstabelle gilt:

	a	b	c	d
a	a	$a+b+c$	a	d
b	$a+b+d$	b	c	b
c	c	b	c	$a+c+d$
d	a	d	$b+c+d$	d

Diese Algebra ist offenbar nicht monomial (vgl. Rédei [6]), denn die Produkte der Basiselemente sollen i.a. keine Skalarmehrfache eines Basiselementes sein. Dagegen ist die Multiplikation von A nach einem unmittelbaren Rechnen assoziativ. Da jedes Element von A eine kanonische Form

$$x = \varrho_1 a + \varrho_2 b + \varrho_3 c + \varrho_4 d \qquad (\varrho_i \in K_2)$$

besitzt, hat A 16 Elemente.

Die Rechtsideale $R_1 = (1+a)A$ und $R_2 = (1+b)A$ von A sind offenbar modular. Man erhält weiterhin $a+c \neq b+d$, $(a+c)^2 = a+a+c+c = 0$ und ähnlich $(b+d)^2 = 0$. Da R_1 nur die Elemente 0 und $a+c$ enthält, ist R_1 kein maximales Rechtsideal von A, aber R_2 ist nilpotent mit $R_1^2 = 0$. Ähnlich ist R_2 ein nilpotentes Rechtsideal, das nicht maximal in A ist. Wegen $a+c \neq b+d$ ergibt sich $R_1 \cap R_2 = 0$.

Dieser Durchschnitt ist dann und nur dann modular in A, wenn A ein Linkseinselement enthält. Ist

$$e = \sigma_1 a + \sigma_2 b + \sigma_3 c + \sigma_4 d \qquad (\sigma_i \in K_2)$$

die kanonische Form eines Linkseinselementes e von A, so erhält man wegen

$$ea = a,\ eb = b,\ ec = c \quad \text{und} \quad ed = d$$

einerseits $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0$, andererseits $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = 1$ mit $\tau_j = \sum_{i \neq j} \sigma_i$, die offenbar im Widerspruch zueinander stehen. Daher existiert kein Linkseinselement e in A, und somit ist der Durchschnitt $R_1 \cap R_2 = 0$ der modularen Rechtsideale R_1 und R_2 nicht modular in A.

Das Rechtsideal $R = (1+a)A + (1+b)A$ ist ebenfalls nilpotent, und R ist nach einem unmittelbaren Rechnen ein zweiseitiges Ideal von A. Der Faktorring A/R der Ordnung vier ist weder kommutativ, noch halbeinfach. Es gilt dabei auch $R^2 = 0$.

Das Radikal J von A ist das durch R und $a+b$ erzeugte Ideal, also gilt

$$J = (R, a+b).$$

Weiterhin enthält J die folgenden acht Elemente:

$$0,\ a+b,\ a+c,\ a+d,\ b+c,\ b+d,\ c+d,\ a+b+c+d.$$

Man kann wegen $a+b+c+d \in J^2$ auch $J^2 \neq 0$ und leicht $J^3 = 0$ bestätigen. Da $A/J \cong K_2$ ein Körper ist J selbst ein modulares maximales Rechtsideal von A.

Betrachten wir zum Schluß die adjungierte Halbgruppe H_1 des Ringes A, die bekanntlich die Menge aller Ringelemente mit der Kreisverknüpfung $x \circ y = x + y - xy$ bedeutet. Die Basiselemente a, b, c und d der Algebra A erzeugen in der adjungierten Halbgruppe H_1 eine Teilhalbgruppe H_2. Diese Halbgruppe H_2 ist aber nach den Zuordnungen

$$a \leftrightarrow g, \quad b \leftrightarrow h, \quad c \leftrightarrow i, \quad d \leftrightarrow j$$

zur im Satz 1 bei IV) vorkommenden Halbgruppe isomorph, und somit hat H_2 ebenfalls die Eigenschaft E. Weiterhin ist die Menge $[a, b]$ wegen $a \circ b = c \neq a$ und $c \neq b$ keine Teilhalbgruppe von H_2. Da die Teilhalbgruppen $\{a\}$ und $\{b\}$ maximal in $(H_2 \circ)$ sind und einen leeren Durchschnitt haben, ist die Frattinische Teilhalbgruppe Φ der Halbgruppe H_2 leer.

Damit haben wir Satz 3 bewiesen.

Es soll bemerkt werden, daß Verfasser [11] ein Frattinisches Rechtsideal der Halbgruppen mit Nullelement von einem anderen Gesichtspunkt aus betrachtet hat.

Die Halbgruppen mit leerer Frattinischer Teilhalbgruppe wurden ausführlicher von H. J. Weinert [14] untersucht.

Wir schließen mit einigen ungelösten Problemen:

1) Gibt es für jede natürliche Zahl $n \geqq 4$ einen endlichen Ring mit den im Satz 3 erwähnten Eigenschaften, aber in II) mit der Bedingung $J^{n-1} \neq 0$ und $J^n = 0$ für das Radikal J?

2) Gilt $2A = 0$ für jeden solchen Ring (bzw. endlichen Ring) A, der eine Lösung des Kertészschen Problems ist?

3) Für welche Halbgruppen sind die echten, endlich erzeugbaren Rechtsideale (bzw. Ideale) untereinander isomorph?

4) Gibt es eine kommutative Halbgruppe H mit leerer Frattinischer Teilhalbgruppe derart, daß eine Teilmenge von H keine Halbgruppe ist?

Literatur

[1] A. H. Clifford—G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*. I, II (Providence, 1961, 1967).

[2] G. E. Forsythe, SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **6** (1955), 443—447.

[3] N. Jacobson, *Structure of Rings* (2nd ed.) (Providence, 1964).

[4] A. Kertész, *Vorlesungen über Artinsche Ringe* (Budapest, 1968).

[5] S. Lajos, On a semigroup theoretical problem of László Rédei, *Mat. Lapok*, **10** (1959), 274—277 (Ungarisch, mit englischer Zusammenfassung).

[6] L. Rédei, *Algebra*. I (Leipzig, 1959).

[7] F. Szász, Die Lösung eines Problems bezüglich des Durchschnittes zweier modularer Rechtsideale in einem Ring, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **20** (1969), 211—216

[8] F. Szász, Die Ringe mit lauter isomorphen nichttrivialen endlich erzeugbaren Unterringen, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 196—201.

[9] F. Szász, Ringe, deren von Null verschiedene endlich erzeugbare Unterringe untereinander isomorph sind, *Rendiconti Circolo Mat. Palermo*, II. **6** (1957), 1—3.

[10] F. Szász, Die Halbgruppen, deren endlich erzeugte echte Teilhalbgruppen Hauptrechtsideale sind, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 135—138.

[11] F. Szász, Radikalbegriffe für Halbgruppen mit Nullelement, die dem Jacobsonschen ringtheoretischen Radikal ähnlich sind, *Math. Nach.*, **34** (1967), 157—61.

[12] T. Tamura, Notes on finite semigroups and determination of semigroups of order 4, *J. Gakugei Tokushima Univ.*, **5** (1954), 17—27.

[13] K. Tetsuya—T. Hashimoto—T. Akazawa—R. Shibata—T. Inui—T. Tamura, All semigroups of order at most 5, *ebenda*, **6** (1955), 19—39.

[14] H. J. Weinert, Halbgruppen ohne Frattinische Unterhallgruppe, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **15** (1964), 309—323.

(Eingegangen am 1. August 1968 und in umgearbeiteter Form am 27. Dezember 1968)