Reduktion eines Problems bezüglich der Brown—McCoyschen Radikalringe

Von F. SZÁSZ in Budapest

In der Ringtheorie, Gruppentheorie und Kategorientheorie spielen die Radikale und Halbeinfachkeiten bekanntlich eine sehr wichtige Rolle. Eine wohlbestimmte Äquivalenz des Radikals und Halbeinfachkeit in gewissen, natürliche Bedingungen erfüllenden Kategorien wurde von F. SZÁSZ und R. WIEGANDT [16] untersucht. Die genannten Bedingungen sind übrigens sowohl von der Kategorie aller assoziativen Ringe, als auch von der Kategorie aller Gruppen erfüllt. Eine ähnliche kategorientheoretische Untersuchung findet man bei RJABUHIN [13]. Dagegen scheinen Radikal und Halbeinfachkeit für beliebige Kategorien (und zwar für die Kategorie der nichtassoziativen Ringe) nicht äquivalent zu sein. Nach Resultaten von KUROSCH [8] läßt sich übrigens jede Klasse von assoziativen Ringen sowohl in eine Klasse von Radikalringen als auch in eine Klasse von halbeinfachen Ringen für geeignete allgemeine Radikale einbetten.

Jedoch ist wesentlich weniger über Radikalringe als über halbeinfache Ringe für die nützlichen konkreten Radikale (wie z.B. das untere Nilradikal, das obere Nilradikal [2], das Levitzkische lokal nilpotente Radikal [10], das Jacobsonsche Radikal [6], das Brown—McCoysche Radikal [3] usw.) bekannt. Deshalb ist zweckmäßig die Radikalringe als in gewissem Sinne „schlechte" und mühsamer untersuchbare Ringe für konkrete, nützbare Radikale zu diskutieren.

Bezüglich der nötigen Begriffe verweisen wir auf die Bücher [5], [6], [7], [9] und [12].

In dieser Arbeit werden wir ein Problem über die Brown—McCoyschen Radikalringe untersuchen. Bekanntlich ist jeder Nilring und jeder Jacobsonsche Radikalring auch ein Brown—McCoyscher Radikalring. Ein Ring ist genau dann ein Brown—McCoyscher Radikalring, wenn er auf keinen von Null verschiedenen einfachen Ringen mit Einselement homomorph abgebildet werden kann.

In der Arbeit [14] des Verfassers sind gewisse Klassen von sogenannten $\overline{E_i}$-Ringen (für $i=1, 2, 3, 4, 5$) untersucht. Dementsprechend bedeutet ein E_2-Ring einen solchen Ring A, für den der maximale triviale A-Rechtsuntermodul M_0 von jedem A-Rechtsmodul M ein direkter Summand von M ist. Hierbei versteht man unter einem trivialen A-Modul einen Modul N mit $NA=0$. In anderer Abfassung stammt der Begriff eines E_2-Ringes von Kertész [7], wobei auch gefragt ist, ob jeder E_2-Ring ein zweiseitiges Einselement haben soll. Jeder Ring mit Einselement ist nämlich ein E_2-Ring.

In der Arbeit [14] des Verfassers sind einige Kriterien für die Existenz des Einselementes in einem Ring mit der Hilfe von E_2-Ringen bzw. E_5-Ringen angegeben, und ebendort wurde vom Verfasser auch folgendes Problem aufgeworfen:

(P) Gibt es einen von Null verschiedenen Brown—McCoyschen Radikalring, der gleichzeitig auch ein E_2-Ring ist?

In der vorliegenden Arbeit werden wir einige Eigenschaften, der im obigen Problem (P) erwähnten Ringe bestätigen, ohne ihre Existenz zu beweisen. In der Arbeit [14] hat Verfasser bewiesen, daß es keinen von Null verschiedenen Jacobsonschen Radikalring gibt, der auch ein E_2-Ring ist (Satz 2. 3. 2 von [14]), und daß $a\in aA+AaA$ für jedes Element a eines E_2-Ringes (sogar allgemeiner schon eines E_5-Ringes) gilt. Dr. G. Michler hat mir in einem Brief geschrieben, daß genau mit den Methoden des Beweises für den Satz 2. 3. 2 in [14] auch die schärfere Relation $a\in aA$ für jedes Element a von jedem E_2-Ring A bewiesen werden kann. Die Ringe A, für die $a\in aA$ für jedes Element $a\in A$ gilt, wurden in meiner Arbeit [14] E_3-Ringe genannt. Also ergibt sich:

($*$) *Jeder E_2-Ring ist ein E_3-Ring.*

Gilt nämlich $a\notin aA$ für ein Element $a\in A$ eines E_2-Ringes A, so gibt es nach dem Zornschen Lemma ein maximales solches Rechtsideal R von A, für das $a\notin R$ und $R\supseteqq aA$ bestehen. Dann ist der A-Rechtsmodul A/R subdirekt irreduzibel, und wegen $aA\subseteqq R$ liegt der minimale A-Untermodul M_1/R von A/R im maximalen trivialen A-Untermodul M_0/R von A/R. Da A ein E_2-Ring ist, erhält man $M_0=A$, $A^2\subseteqq R$, was dem in [14] bewiesenen Resultat $A^2=A$ widerspricht. Hiernach ist die Behauptung ($*$) von Michler mit den Methoden meines Beweises für den Satz 2. 3. 2 [14] wirklich bewiesen.

Der Ring aller linearen Transformationen von endlichem Rang eines Vektorraumes von unendlichem Rang über einem Schiefkörper ist ein solcher von Null verschiedene Brown—McCoysche Radikalring, der ein von Neumannscher regulärer Ring, folglich auch ein E_3-Ring ist, obwohl kein von Null verschiedener Jacobsonscher Radikalring nach meinem Satz 2. 3. 2 bzw. nach der Michlerschen Behauptung ($*$) ein E_2-Ring ist.

Jetzt bestätigen wir einige Eigenschaften solcher von Null verschiedenen Brown—McCoyschen Radikalringe, die auch E_2-Ringe sind. Die Existenz solcher Ringe ist nicht bewiesen. Es gilt aber der

Satz. *Existiert ein von Null verschiedener Brown—McCoyscher Radikalring A, der gleichzeitig auch ein E_2-Ring ist, so hat A folgende Eigenschaften:*

1) *A läßt sich auch als ein linksprimitiver oder ein rechtsprimitiver Ring (folglich als ein Primring) wählen;*

2) *jedes Element a von A ist ein Linksnullteiler in A; wenn dabei A auch ein Primring ist, so gilt schon $axa = 0$ mit $xa \neq 0$ für jedes $a \neq 0$ $(a \in A)$; und somit hat dann jedes Linksideal ein von Null verschiedenes nilpotentes Element xa;*

3) *es gilt $A(1-a)A = A$ für jedes Element $a \in A$;*

4) *für jedes von Null verschiedene Element $a \in A$ existiert ein $b \in A$ mit $ab \notin Aa$, und somit hat A kein nichttriviales Zentrum, weiterhin gilt $Aa \neq A$ für jedes $a \in A$;*

5) *es gilt $a \in (a+n)A + A(a+n)A$ für jedes $a \in A$ und für jede ganze rationale Zahl n;*

6) *in A existieren maximale Linksideale, und es gilt $LA = A$ für jedes maximale Linksideal L von A;*

7) *die Maximalbedingung gilt nicht für die Linksideale der Gestalt*

$$L_a = \{x\colon\ x \in A,\ xa = x\}$$

für jedes $a \in A$, und somit ist A kein linksnoetherscher Ring.

Bemerkung 1. Weitere Eigenschaften der im Satz erwähnten Ringe können nach den Resultaten der §§ 2 und 3 meiner Arbeit [14] abgefaßt werden.

Bemerkung 2. Die im Satz erwähnte Eigenschaft 2) besagt, daß das Linksideal Aa für jedes $a \in A$ hinreichend groß im Sinne ist, daß Aa Rechtsnullteiler $b = b_a$ für jedes $a \in A$ enthält, für die $ab = 0$ gilt, dagegen drückt die Eigenschaft 4) aus, daß das Linksideal Aa für jedes $a \in A$ auch hinreichend klein im anderen Sinne ist, daß Aa nicht alle Produkte ab enthält. Diese „groß" und „klein" Begriffe sind freilich von den üblichen modultheoretischen Begriffen verschieden (s. z. B. Lambek [9]). Es ist ebenfalls interessant, daß nach der Eigenschaft 6) maximale Linksideale in A so existieren, daß A nach 7) kein linksnoetherscher Ring ist.

Beweis des Satzes. Wir verifizieren die im Satz erwähnten Eigenschaften des Ringes A nacheinander.

1) Jedes homomorphe Bild eines Brown—McCoyschen Radikalringes ist ein Radikalring von demselben Typ. Ebenfalls ist jedes homomorphe Bild von jedem E_2-Ring nach [14] auch ein E_2-Ring. Weiterhin stimmt ein im Satz betrachtete E_2-Ring A nach [14] nicht mit seinem Jacobsonschen Radikal $J(A)$ überein, und $A/J(A)$ ist dann sowohl eine subdirekte Summe von rechtsprimitiven Ringen als auch eine subdirekte Summe von linksprimitiven Ringen. Dabei sind diese subdirekten Summanden S_α homomorphe Bilder von A, also Brown—McCoysche Radikalringe und E_2-Ringe, die jetzt auch Primringe sind. Deshalb kann A durch S_α ersetzt werden.

2) Ist ein Element $a \in A$ kein Linksnullteiler von A, so kann ein Widerspruch folgendermaßen abgeleitet werden. Nach der Behauptung $(*)$ gibt es ein $b \in A$ mit $a = ab$, folglich mit $a(1-b)A = 0$. Da a jetzt kein Linksnullteiler ist, erhält man $(1-b)A = 0$, und somit ist b ein Linkseinselement von A. Nach dem Zornschen Lemma gibt es dann ein maximales solches Ideal M, daß $b \notin M$ besteht, denn es gilt offenbar $b \notin (1-b)A = 0$. Dann ist A/M wegen $(A(1-b))^2 = 0$ ein einfacher Ring mit Einselement, was der Definition der Brown—McCoyschen Radikalringe widerspricht. Damit ist der erste Teil von 2. bewiesen.

Ist nun A insbesondere ein Primring, so erhält man $cAd \neq 0$ für jedes von Null verschiedene c und d, folglich $cA \cap Ad \neq 0$. Es sei jetzt a ein beliebiges von Null verschiedenes Element von A, und $b \neq 0$ ein Element mit $ab = 0$, welches nach dem vorigen existiert. Dann gibt es ein $x \in A$ und ein $y \in A$ mit $0 \neq xa = by \in bA \cap Aa$, woraus man $axa = aby = 0$ erhält. Offenbar ist xa ein von Null verschiedenes nilpotentes Element im beliebigen Hauptlinksideal $(a)_l$.

3) Wegen Satz 2. 1. 3 meiner Arbeit [14] ergibt sich $A(1-a) \subseteqq A(1-a)A$ für jedes Element a von A, und somit ist $A/A(1-a)A$ ein Ring mit dem Rechtseinselement $a + A(1-a)A$. Gilt $a \notin A(1-a)A$ und ist M ein maximales solches (nach dem Zornschen Lemma existierendes) Ideal, für das $a \notin M$ und $M \supseteqq A(1-a)A$ bestehen, so ist A/M ein einfacher Ring bekanntlich mit dem zweiseitigen Einselement $a + M$. Dieser Widerspruch zur Definition der Brown—McCoyschen Radikalringe beweist $a \in A(1-a)A$ für jedes $a \in A$. Ist nämlich $a + M$ kein Linkseinselement von A/M, so ist $(1-a)A + M/M$ ein nilpotentes von Null verschiedenes Rechtsideal von A/M, was unmöglich ist. Daraus folgt aber wegen $A(1-a) \subseteqq A(1-a)A$ auch $A(1-a)A = A$ für jedes $a \in A$, w. z. b. w.

4) Existiert ein Element $a \in A$ mit $ab \in Aa$ für jedes $b \in A$, so ergibt sich $aA \subseteqq Aa$. Es sei weiterhin $c \in A$ so gewählt, daß $a = ac$ gilt, was nach der Behauptung $(*)$ für E_2-Ringe immer möglich ist. Nach der Eigenschaft 3) erhält man $A(1-c)A = A$ mit diesem c, folglich ergibt sich wegen $aA \subseteqq Aa$ auch $aA = aA(1-c)A \subseteqq \subseteqq Aa(1-c)A = A.0.A = 0$. Daraus folgt aber $a = 0$, denn jeder E_2-Ring ist nach [14] linksannihilatorfrei. Es gilt also $aA \nsubseteqq Aa$ für jedes $a \in A$. Hiernach besteht auch das Zentrum von A nur aus 0, und es gilt wegen $aA \nsubseteqq Aa$ insbesondere auch $Aa \neq A$ für jedes Element $a \in A$.

5) Gibt es ein von Null verschiedenes Element a von A und eine ganze rationale Zahl n mit

$$a \notin (a+n)A + A(a+n)A = B,$$

so ist $a + B$ im Faktorring A/B ein Linksmultiplikator von A/B. Da auch A/B gleichzeitig mit A ein E_2-Ring ist, erhält man nach Satz 3. 4. 1 aus [14], daß A/B ein zweiseitiges Einselement hat. Dann läßt sich aber A/B auch auf einen einfachen Ring mit Einselement homomorph abbilden. Diese Tatsache widerspricht der Voraussetzung, daß A ein Brown—McCoyscher Radikalring ist, und somit ist 5) bewiesen.

6) Da jedes homomorphe Bild eines E_2-Ringes nach Satz 2. 3. 1 bzw. 2. 2. 2 von [14] bzw. Behauptung $(*)$ keinen von Null verschiedenen Linksannihilator besitzt, ist A auch ein E_5-Ring im Sinne [14]. Es gilt folglich $L_1 \subseteq L_1 A$ für jedes Linksideal L_1 von A, und A besitzt nach Satz 2. 3. 3 [14] maximale Linksideale L. Es gilt also entweder $LA = L$ oder $LA = A$. Im Falle $LA = L$ ist L auch ein zweiseitiges Ideal von A, und somit ist A/L, da nur triviale Linksideale hat, entweder ein Zeroring oder ein Schiefkörper. Der erste Unterfall widerspricht aber der Tatsache $A^2 = A$ (vgl. Satz 2. 2. 1 von [14]), und der zweite Unterfall widerspricht der Definition der Brown—McCoyschen Radikalringe. Es gilt also $LA = A$ für jedes maximale Linksideal L von A.

7) Aus dem vorigen folgt leicht, daß A kein Rechtseinselement hat, d.h, $A(1-b) \neq 0$ für jedes $b \in A$ ist, denn nach der Eigenschaft 3) stets $A(1-b)A = A$ gilt. Das im Satz definierte Linksideal

$$L_b = \{x\colon\ x \in A,\ xb = x\}$$

ist genau ein Linksideal L, für das $L(1-b) = 0$ besteht. Wegen $A(1-b) \neq 0$ ergibt sich $L_b \neq A$ für jedes b, und nach der Behauptung $(*)$ folgt $b \in bA$, also $b = bc$ mit einem $c \in A$, und somit $b \in L_c$ mit einem $c = c_b \in A$ für jedes $b \in A$. Es sei weiterhin $x \circ y = x + y - xy$ für jedes $x, y \in A$. Man erhält offenbar $L_x \subseteq L_{x \circ y}$ für beliebiges x und y. Es sei jetzt b ein beliebiges Element und a ein solches Element von A, für das $a(1-b) \neq 0$, also $a \notin L_b$ gilt. Dann existiert nach Behauptung $(*)$ ein $c \in A$ mit $a(1-b) = a(1-b)c$, folglich mit $a(1-b \circ c) = 0$ also $a \in L_{b \circ c}$. Daher ist $L_{b \circ c}$ echt größer als L_b, und somit gilt in A nicht die Maximalbedingung für die Linksideale der Gestalt L_x. Insbesondere ist A deshalb auch kein linksnoetherscher Ring, w. z. b. w.

Damit haben wir auch den Satz bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] S. A. Amitsur, A general theory of radicals. I, *Amer. J. Math.*, **74** (1952), 774—786. II, *Amer. J. Math.*, 76 (1954), 100—125. III, *Amer. J. Math.*, 76 (1954), 126—136.

[2] R. Baer, Radical ideals, *Amer. J. Math.*, 65 (1943), 537—568.

[3] B. Brown—N. H. McCoy, Radicals and subdirect sums, *Amer. J. Math.*, 69 (1947), 46—58.

[4] B. Brown—N. H. McCoy, The radical of a ring, *Duke Math. J.*, **15** (1948), 495—499.

[5] N. Divinsky, *Rings and Radicals* (London, 1965).

[6] N. Jacobson, *Structure of Rings* (2nd edition) (Providence, 1964).

[7] A. Kertész, *Vorlesungen über Artinsche Ringe* (Budapest, 1968).

[8] A. G. Kurosch, Radikale von Ringen und von Algebren, *Mat. Sbornik*, **33** (75) (1953), 13—26 (Russisch).

[9] J. Lambek, *Lectures on Rings and Modules* (Massachusetts—Toronto—London, 1966).

[10] J. Levitzki, On the radical of a general ring, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), 462—466.

[11] G. MICHLER, Kleine Ideale, Radikale und die Eins in Ringen, *Publ. Math. Debrecen*, **12** (1965), 231—252.
[12] L. RÉDEI, *Algebra*, 1 (Leipzig, 1959).
[13] JU. M. RJABUHIN, Radikale in Kategorien, *Matem. Issled. Kišinev*, **2:3** (1967), 107—165 (Russisch).
[14] F. SZÁSZ, Einige Kriterien für die Existenz des Einselementes in einem Ring, *Acta Sci. Math.*, 28 (1967), 31—37.
[15] F. SZÁSZ—R. WIEGANDT, On the dualization of subdirect embeddings, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 20 (1969), 289—302.
[16] F. SZÁSZ—R. WIEGANDT, On radicals and semi-simplicity in categories, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (im Erscheinen).

(Eingegangen am 4. Dezember, 1968)