Über das im Operatorring enthaltene allgemeine Radikal eines Untermoduls

Von FERENC A. SZÁSZ in Budapest

Professor B. Szőkefalvi-Nagy zu seinem 60. Geburtstag gewidmet

Das Radikal einer algebraischen Struktur gibt die Singularität der Struktur in gewissem Sinne an. Oft kann man für eine Struktur mit einem Radikal (0) einen Struktursatz bestätigen, der die Struktur mit Invarianten charakterisiert. Ein klassisches Beispiel ist dafür der Wedderburn—Artinsche Struktursatz der Artinschen Ringe mit Radikal Null (vgl. N. JACOBSON [6, Chapter III]).

Als Verallgemeinerungen der Vektorräume über einem Schiefkörper, spielen die Operatormoduln über einem Ring in der Mathematik (so z. B. in der Algebra, sowie auch in der Funktionalanalysis) eine wichtige Rolle. Wie es bekannt ist, definiert die Aufgabe 5. 28 des Buches von A. KERTÉSZ [7, Seite 141] ein Radikal eines beliebigen A-Rechtsmoduls M folgendermaßen:

$$I(M) = [x;\ \ x \in A,\ \ Mx \subseteqq \varphi(M)];$$

wobei $\Phi(M)$ den Frattinischen A-Untermodul von M bedeutet. Man kann leicht zeigen, daß dieses Radikal $I(M)$ immer ein Ideal des Operatorringes A ist, derart, daß $I(M)$ das Jacobsonsche Radikal (siehe H. JACOBSON [6, Chapter I, II]) des Ringes A enthält.

Andererseits hat O. STEINFELD [10] folgendes bewiesen: Sind $\mathscr{I}$ ein Ideal eines Ringes A, und P ein Primideal von $\mathscr{I}$, so ist der Idealquotient

$$P:I = [a;\ \ a \in A,\ \ \mathscr{I}a + a\mathscr{I} \subseteqq P]$$

ebenfalls ein Primideal des Ringes A. Weiterhin hat O. STEINFELD [11] einige Eigenschaften der Abbildung $x \to (x:y)$ untersucht, wobei $(x:y)$ ein Rechtsresiduum in einem verbandsgeordneten Gruppoid ist. Die Verbandsvereinigung zweier Rechtsresiduuma braucht i. allg. kein Rechtsresiduum zu sein, und Verfasser [13] gibt hinreichende Bedingungen an, damit diese Vereinigung wiederum ein Rechtsresiduum ist.

Das Ziel dieser Arbeit is zweifach. Einerseits werden wir den Kertészschen Begriff des Radikals eines Moduls in zweien Stufen verallgemeinern, in dem wir (1) auch A-Untermoduln statt eines A-Rechtsmoduls und (2) auch Amitsur—Kurošsche allgemeine Radikale und Modulquotienten statt nur der Modulquotienten benützen werden. Andererseits werden wir sowohl das Ergebnis von SREINFELD [10], als auch einige Resultate von ION D. ION [5] verallgemeinern.

Bezüglich der benützten Begriffe verweisen wir auf G. BIRKHOFF [1], N. I. DIVINSKY [2], L. FUCHS [3], L. FUCHS [4, Seiten 189—191 und 195—208], A. KERTÉSZ [7], L. LESIEUR and R. CROISOT [8] weiterhin auf F. SZÁSZ [12] und G. SZÁSZ [14]. Es soll bemerkt werden, daß unsere Beweismethoden manchmal den Methoden von ION D. ION [5] und J. A. RILEY [9] ähnlich sind.

Definition 1. Für die A-Untermoduln L_1 und L_2 eines A-Rechtsmoduls M sei

$$L_1:L_2 = [a; a\in A, \quad L_2 a \subseteqq L_1]$$

Dieses nennen wir den Modulquotienten von L_1 und L_2. Offenbar ist $L_1:L_2$ ein ideal von A.

Definition 2. Sind $\mathbf{R}$ eine allgemeine (Amitsur—Kurošsche) Radikaleigenschaft eines Ringes A, und N ein A-Untermodul eines A-Rechtsmoduls M, so heißt die maximale solche Untermenge $\mathbf{R}(N)$ von A, für die $\mathbf{R}(N)/(N:M)=\mathbf{R}(A)/(N:M)$ gilt, das $\mathbf{R}$-Radikal des A-Untermoduls N.

Behauptung 3. $\mathbf{R}(N)$ *ist ein Ideal von* A, *und es gilt* $(N:M)\subseteqq\mathbf{R}(N)$.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus dem zweiten Isomorphismussatz und die zweite Aussage ist trivial.

Behauptung 4. (1) *Ist* $(N:M)=\mathbf{R}(A)$, *so gilt* $\mathbf{R}(N)=\mathbf{R}(A)$. (2) *Sind insbesondere* $\mathbf{R}=\mathbf{J}$ *das Jacobsonsche Radikal, und* $N=\Phi(M)$ *der Frattinische* A*-Untermodul von* M, *so gilt* $\mathbf{J}(N)\supseteqq\mathbf{J}(A)$ (vgl. Aufgabe 5. 28 von KERTÉSZ [7]).

Beweis. (1) Im Falle $(N:M)=\mathbf{R}(A)$ bringt die Definition 2 und Axiom (C) des Buches von Divinsky [2, Seite 3] $\mathbf{R}(N)=\mathbf{R}(A)$ zur Folge. (2) Weiterhin erhält man $\mathbf{J}(A)\subseteqq(\Phi(M):M)=(N:M)$ und wegen $\mathbf{J}(N)\supseteqq(N:M)$ ergibt sich auch $\mathbf{J}(A)\subseteqq\mathbf{J}(N)$.

Definition 5. Sind $\mathbf{R}$ eine allgemeine Radikaleigenschaft von Ringen, und N ein A-Untermodul eines A-Rechtsmoduls M, so heißt N ein R-primärer Untermodul in M, wenn für jedes Ideal I von A, aus der Bedingung

$$mI\subseteqq N \qquad (m\in M)$$

immer $m\in N$ oder $I\subseteqq\mathbf{R}(N)$ folgt.

Behauptung 6. *Der A-Untermodul N eines A-Rechtsmoduls M ist für ein Radikal $\mathbf{R}$ dann und nur dann $\mathbf{R}$-primär in M, wenn für jeden A-Untermodul K von M und für jedes $a \in A$ aus $Ka \subseteqq N$ immer $K \subseteqq N$ oder $a \in \mathbf{R}(N)$ folgt.*

Beweis. Es seien N ein $\mathbf{R}$-primärer A-Untermodul im A-Rechtsmodul M und $k \in K$ ein solches Element, für welches $k \notin N$ gilt. Bezeichne (a) das durch ein Element $a \in A$ erzeugte zweiseitige Hauptideal von A. Dann folgt $k(a) \subseteqq N$ aus $k(Aa) = (kA)a \subseteqq \subseteqq Ka \subseteqq N$, und daher wegen $k \notin N$ für $I = (a)$ auch $(a) \subseteqq \mathbf{R}(N)$ Hiernach ergibt sich $a \in \mathbf{R}(N)$.

Umgekehrt, nehmen wir an, daß die Bedingungen der Behauptung 6 erfüllt sind, und wir zeigen, daß N wirklich $\mathbf{R}$-primär in M ist. Es seien $m \in M$, und $K = mA \nsubseteq \nsubseteq N$. Da für jedes $a \in I$ das Umfassen $KI = mA$. $I \subseteqq mI \subseteqq N$ hat $Ka \subseteqq N$ zur Folge, erhält man $a \in \mathbf{R}(N)$ und somit auch $I \subseteqq \mathbf{R}(N)$, w. z. b. w.

Behauptung 7. *Es seien $\mathbf{R}$ eine Radikaleigenschaft von Ringen und I ein beliebiges Ideal eines Ringes A. Nehmen wir an, daß $\mathbf{R}(A/I)$ für jedes Ideal I von A nilpotent ist. Ist N ein $\mathbf{R}$-primärer A-Untermodul im A-Rechtsmodul M, so ist das Radikal $P = \mathbf{R}(N)$ von N ein Primideal von A.*

Beweis. Sind I_1 und I_2 solche Ideale von A, für die $I_1 \cdot I_2 \subseteqq P$ und $I_1 \nsubseteq P$ bestehen, so existiert ein Exponent e, für den $M \cdot (I_1 \cdot I_2)^e \subseteqq N$ und $M \cdot (I_1 \cdot I_2)^{e-1} \nsubseteq N$ erfüllt sind. Es seien $K_1 = M \cdot (I_1 I_2)^{e-1}$, $k_1 \in K_1$ und $k_1 \notin N$. Dann erhält man $(k_1 I_1) I_2 = k_1 (I_1 I_2) \subseteqq K_1 I_1 I_2 \subseteqq N$, und wegen $I_1 \nsubseteq P$ auch $k_1 I_1 \nsubseteq N$. Es sei k_2 ein beliebiges Element von $K_2 = k_1 I_1$ mit $k_2 \notin N$. Dann gilt $k_2 I_2 \subseteqq N$, folglich, wegen $k_2 \notin N$, auch $\mathscr{I}_2 \subseteqq P = \mathbf{R}(N)$, w. z. b. w.

Behauptung 8. *Es seien A ein rechtartinscher Ring oder ein rechtsnoetherscher Ring, und $\mathbf{R}$ das Baer—Koethesche obere Nilradikal. Ist N ein $\mathbf{R}$-primärer A-Untermodul des A-Rechtsmoduls M, so ist das $\mathbf{R}$-Radikal $P = \mathbf{R}(N)$ von N ein Primideal von A.*

Beweis. Nach einem Satz von J. Levitzki [2] ist $\mathbf{R}(A/\mathscr{I})$ nilpotent für rechtsnoethersche Ringe A. Weiterhin ist $\mathbf{R}(A/\mathscr{I})$ ebenfalls nilpotent nach einem Satz von Ch. Hopkins [2] für rechtsartinsche Ringe. Deshalb ist es genügend Behauptung 7 für diese Fälle anzuwenden.

Definition 9. Es seien $\mathbf{R}$ eine Radikaleigenschaft von Ringen, und N ein A-Untermodul eines A-Rechtsmoduls M, weiterhin $P = \mathbf{R}(N)$ das $\mathbf{R}$-Radikal von N. Dann heißt N ein P-primärer Untermodul, wenn $P = \mathbf{R}(N)$ ein Primideal von A ist.

Satz 10. *Es sei $\mathbf{R}(A/I)$ nilpotent für jedes Ideal $\mathscr{I}$ von A. P ist ein Primideal von A, und N ist ein P-primärer A-Untermodul von M dann und nur dann, wenn die folgenden Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:*

(1) *Für jedes Ideal I von A und jedes $m \in M$ folgt immer aus $mI \subseteqq N$ die Relation $m \in N$ oder $I \subseteqq P$;*

(2) $(N:M) \subseteqq P$;

(3) *Es gibt einen Exponenten e für jedes Hauptideal $(x) \subseteqq P$, derart, daß $M \cdot (x)^e \subseteqq N$ besteht.*

Beweis. Ist N ein P-primärer A-Untermodul, so folgt (1) und (2) unmittelbar aus der Definition 9. Da $\mathbf{R}(A/I)$ nach der Voraussetzung stets nilpotent ist, folgt aus $(x) \subseteqq P = \mathbf{R}(N)$ die Existenz eines Exponenten e derart, daß $M \cdot (x)^e \subseteqq N$ gilt. Dies bedeutet aber, daß auch (3) erfüllt ist.

Umgekehrt, nehmen wir an, daß die Bedingungen (1), (2) und (3) für N bestehen. Wir werden zeigen, daß $P = \mathbf{R}(N)$ gilt, und, daß P ein Primideal von A ist.

Ist nämlich x ein beliebiges Element von P, so gilt wegen (3) $M \cdot (x)^e \subseteqq N$ mit einem geeigneten Exponent e. Es sei P_α ein beliebiges Primideal von A mit der Bedingung

$$(N:M) \subseteqq P_\alpha.$$

Wegen $(x)^{e_\alpha} \subseteqq P_\alpha$ und $\bigcap_\alpha P_\alpha = \mathbf{R}(N)$ erhält man dann $x \in \mathbf{R}(N)$ und somit $P \subseteqq \mathbf{R}(N)$.

Das umgekehrte Umfassen $\mathbf{R}(N) \subseteqq P$ werden wir folgendermaßen zeigen. Ist y ein *beliebiges* Element von $\mathbf{R}(N)$, so gibt es wegen der Nilpotenz von $\mathbf{R}(A/I)$ einen Exponenten e, derart, daß

$$M \cdot (y)^e \subseteqq N \quad \text{und} \quad M \cdot (y)^{e-1} \nsubseteq N$$

bestehen. Ist hier $e=1$, so gilt $(y) \subseteqq (N:M)$, woher man wegen der Bedingung (2) $(y) \subseteqq P$, folglich $\mathbf{R}(N) \subseteqq P$ erhält. Ist aber $e \geqq 2$, so seien $K = M \cdot (y)^{e-1}$, weiterhin $k \in K$ und $k \notin N$. Wegen

$$k \cdot (y) \subseteqq M \cdot (y)^e \subseteqq N$$

und wegen der Bedingung (1) ergibt sich $(y) \subseteqq P$, folglich $y \in P$ und daher auch $\mathbf{R}(N) \subseteqq P$, womit alles nötiges bewiesen ist.

Behauptung 11. *Es seien $\mathbf{R}$ das Baer—Koethesche obere Nilradikal und A ein rechtsnoetherscher oder ein rechtsartinscher Ring. Dann sind die Behauptungen* (1), (2) *und* (3) *des Satzes* 10 *notwendig und hinreichend, damit P ein Primideal von A und N ein P-primärer A-Untermodul von M sind.*

Beweis ist ähnlich dem Beweis der Behauptung 8, und somit kann er weggelassen werden.

Bemerkung 12. Der Ring Z der ganzen rationalen Zahlen ist Noethersch aber nicht Artinsch. Dagen ist ein Zeroring über einer Prüferschen quasizyklischen additiven Gruppe $C(p^\infty)$ Artinsch aber nicht Noethersch (siehe L. Fuchs [3]).

Behauptung 13. *Es sei* $\mathbf{R}(A/I)$ *nilpotent für jedes Ideal* $\mathscr{I}$ *von* A. *Für ein festes Primideal* P, *der Durchschnitt endlich vieler* P*-primärer* A*-Untermoduln* N_j $(j=1, 2, \ldots, k)$ *wiederum* P*-primär im Modul* M.

Beweis. Wegen $N = \bigcap_{j=1}^{e} N_j$ und wegen der Bedingung (2) des Satzes 10 erhält man $(N:M) \subseteqq (N_j:M) \subseteqq P$. Weiterhin gibt es wegen der Bedingung (3) des Satzes 10 für $x \in P$ geeignete Exponenten e_j mit

$$M \cdot (x)^{e_j} \subseteqq N \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Es sei nun $e = \max(e_1, e_2, \ldots, e_k)$. Dann gilt auch $M \cdot (x)^e \subseteqq N$. Es sei weiterhin I ein beliebiges Ideal von A. Bestehen $m \in M$, $m \notin N$ und $mI \subseteqq N$, so gibt es einen Index j mit $m \notin N_j$, woraus wegen $mI \subseteqq N_j$ offenbar $I \subseteqq P = \mathbf{R}(N)$ folgt, w. z. b. w.

Jetzt beweisen wir die folgende Verallgemeinerung des erwähnten Ergebnisses von Steinfeld, die folgendermaßen lautet:

Satz 14. *Es seien* $\mathbf{R}$ *eine Radikaleigenschaft von Ringen derart, daß* $\mathbf{R}(A/I)$ *für jedes Ideal* I *eines Ringes* A *nilpotent ist,* P *ein Primideal von* A, N *ein* P*-primärer* A*-Untermodul des* A*-Rechtsmoduls* M *und* I *ein Ideal von* A *mit der Bedingung* $I \subseteqq P = \mathbf{R}(N)$. *Ist nun*

$$N^* = [m; m \in M, \quad m\mathscr{I} \subseteqq N],$$

so ist N^* *ein* A*-Untermodul von* M, *derart, daß* N^* *auch* P*-primär in* M *ist.*

Beweis. Wir werden den Satz 10 auf N^* anwenden. Ist x ein beliebiges Element von $(N^*:M)$, so bestehen

$$Mx \subseteqq N^* \quad \text{und} \quad Mx\mathscr{I} \subseteqq N.$$

Wegen $I \subseteqq P = \mathbf{R}(N)$ erhält man offenbar $Mx \subseteqq N$, woher $x \in (N:M)$, folglich auch $(N^*:M) \subseteqq (N:M) \subseteqq P$. Deshalb gilt die Bedingung (2) des Satzes 10 für N^*.

Es seien nun B ein Ideal von A und m ein Element von M, derart, daß

$$mB \subseteqq N^* \quad \text{und} \quad m \notin N^*$$

erfüllt sind. Nach der Definition von N^* ergibt sich:

$$mBI \subseteqq N,$$

und wegen $N \subseteqq N^*$ auch $mBI \subseteqq N^*$. Wegen $I \subseteqq P = \mathbf{R}(N)$ und wegen der Bedingung (1) des Satzes 10 hat $BI \subseteqq P$ offenbar $B \subseteqq P$ zur Folge, denn P ist ein Primideal von A.

Wegen der Bedingung (3) des Satzes 10 gibt es für jedes $x \in P = \mathbf{R}(N)$ einen Exponenten e mit $M \cdot (x)^e \subseteqq N$. Wegen $N \subseteqq N^*$ erhält man aber auch $M \cdot (x)^e \subseteqq N^*$, w. z. b. w.

Literaturverzeichnis

[1] G. Birkhoff, *Lattice Theory* (Providence, 1948).
[2] N. Divinsky, *Rings and Radicals* (London, 1965).
[3] L. Fuchs, *Abelian Groups* (Budapest, 1958).
[4] L. Fuchs, *Partially Ordered Algebraic Systems* (Oxford—London—New York—Paris, 1963).
[5] Ion D. Ion, O prezentare simplă a teoriei descompunerilor primare in necomutativ, *Analele Universităţii Bucureşti, Ser. Matem.*, **16** (1967), 109—112.
[6] N. Jacobson, *Structure of Rings*, 2. edition (Providence, 1964).
[7] A. Kertész, *Vorlesungen über Artinsche Ringe* (Budapest, 1968).
[8] L. Lesieur—R. Croisot, *Algèbre noetherienne noncommutative* (Paris, 1963).
[9] J. A. Riley, Axiomatic primary and tertiary decomposition theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **105** (1962), 177—201.
[10] O. Steinfeld, On ideal-quotients and prime ideals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 4 (1953), 289—298.
[11] O. Steinfeld, On residuals in partially ordered semigroups, *Publ. Math. Debrecen*, **12** (1965), 107—116.
[12] F. Szász, *Radikale der Ringe* (im Erscheinen).
[13] F. Szász, On right residuals in lattice-ordered groupoids, *Math. Nachrichten*, 53 (1972) 69—75.
[14] G. Szász, *Introduction to Lattice Theory* (New York, 1963).

(Eingegangen am 1. April 1972)