VIZSGÁLATOK ALGEBRAI STRUKTÚRÁK RADIKÁL-ELMÉLETÉBEN (II)*

Írta: SZÁSZ FERENC

III. FEJEZET

GYŰRŰK GYENGÉN SZUPERNILPOTENS RADIKÁLJAIRÓL

11. §. Az antiegyszerű gyűrűkről

Ennek a §-nak az anyaga szerző [56] dolgozatában található meg.

Egy R radikál gyengén szupernilpotens, ha minden nilpotens gyűrű R-radikálgyűrű. Egy radikál szupernilpotens, ha öröklődő és gyengén szupernilpotens. Egy A gyűrű antiegyszerű, ha A homomorf módon nem képezhető le idempotens szívű szubdirekt irreducibilis gyűrűre. Az antiegyszerű gyűrűket V. A. ANDRUNAKIEVICS [1] vizsgálta részletesen. Bármely antiegyszerű gyűrű nilpotens szívű szubdirekt irreducibilis gyűrűknek egy szubdirekt összege. Bármely nilpotens gyűrű antiegyszerű, és bármely, kétoldali ideálokra minimumfeltételű antiegyszerű gyűrű nilpotens.

Az antiegyszerű gyűrűk osztálya radikálosztály, mégpedig speciális radikál *Andrunakievics*-féle értelemben, tehát szupernilpotens is. Az antiegyszerű radikál a minimális ideált tartalmazó prímgyűrűk osztályával meghatározott felső radikál.

57. TÉTEL. *Egy A gyűrűre ekvivalens az alábbi két feltétel:*

1. *A antiegyszerű gyűrű;*

2. *$(a)=(a+b)$ érvényes minden (a) főideálra és $(a)^2$ ideálnégyzet minden b elemére.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy 2. nem teljesül. Akkor van olyan $a\in A$ és $b\in(a)^2$ elem, hogy

$$(a) \neq (a+b).$$

Nyilván $(a+b)\subset(a)$. Legyen M maximális olyan ideál A-ban, hogy $a\notin M$ és $M\supseteq(a+b)$. Ilyen M a *Zorn*-lemma alapján létezik. Ekkor A/M szubdirekt irreducibilis gyűrű, amelynek $(a)/M$ lesz a szíve. Minthogy $a+b\in M$, ezért

$$(a)+M = (b)+M$$

és $b\in(a)^2$ miatt az $(a)/M$ szív idempotens. Ezért nem teljesül (1).

Fordítva, ha 1. nem teljesül, akkor van A-nak olyan I ideálja, hogy $A/I\cong S$ szubdirekt irreducibilis és a H/I szív idempotens. Ekkor $H=(h)$, így

$$(h)+I = (h)^2+I.$$

* Doktori értekezés, Budapest, 1972. Az értekezés I. és II. fejezete, valamint a teljes tartalom és irodalomjegyzék az MTA *III. Osztály Közleményei* **22**:2—3—4 füzetében pp. 215—255. jelent meg. A paragrafusok, tételek stb. számozása folytatólagos.

Van tehát olyan $h_0 \in (h)^2$ és $i_0 \in I$ elem, hogy

$$h = h_0 + i_0.$$

Ekkor $(h) \neq (h - h_0)$, mert $(h - h_0) \subseteq I$ viszont $(h) \not\subseteq I$. Ezért 2. nem teljesül.

12. §. Négy kritérium arra, hogy egy konkrét F-radikál a Brown—McCoy-féle radikál legyen

Ennek a §-nak az anyaga megtalálható szerző [38] dolgozatában. Minden (k, l, m, n) nemnegatív egész számokból álló számnégyeshez explicit módon bevezetünk egy konkrét (k, l, m, n)-radikált. Ha az A gyűrű elemei az $a \circ b = a + b - ab$ körműveletre egy *Neumann*-reguláris félcsoportot alkotnak, akkor A egy $(k, 0, 1, 1)$-radikálgyűrű és $(0, l, 1, 1)$-radikálgyűrű lesz minden nemnegatív $k, l \in Z$ esetén. Továbbá bármely (k, l, m, n)-féligegyszerű és kétoldali főideálokra minimumfeltételű A gyűrű, mint (A, A)-dupla modulus, teljesen reducibilis.

Legyen $a^{(0)} = 0$, $a^{(1)} = a$, $a^{(n+1)} = a^{(n)} \circ a$ a körművelettel. Legyen $a \in A$ rögzített, $x \in A$ változó elem és legyen

$$(k, l, m, n)(a) = \sum_{x \in A} (a^{(m)} \circ x \circ a^{(n)} - k \cdot a^{(l)}.$$

Ekkor egy speciális F-regularitás definiálható $a \in (k, l, m, n)(a)$ által, ahol $F(a) = (k, l, m, n)(a)$.

58. Tétel. *Ha G jelöli a Brown—McCoy radikált, akkor $G(a) = (1, 1, 1, 1)(A) = (1, 1, 1, 0)(A) = (1, 1, 0, 1)(A) = (1, 2, 1, 1)(A)$ teljesül minden A gyűrűben.*

Bizonyítás. Legyen P szubdirekt irreducibilis és (k, l, m, n)-féligegyszerű gyűrű. Ekkor P-nek az S-szívében van olyan $d \neq 0$ elem, hogy $(k, l, m, n)(d) = 0$, tehát

$$d^{(m)} \circ x \circ d^{(n)} = k \cdot d^{(l)}$$

minden $x \in P$ elemre. Ha speciálisan $x = 0$, akkor $d^{(m+n)} = kd^{(l)}$, így tetszőleges $x \in P$ elemre

$$x = d^{(m)} x + x d^{(n)} - d^{(m)} \cdot x \cdot d^{(n)} \in S,$$

tehát $S = P$. Ezért P-ben csak triviális ideálok vannak:

$$0 \text{ és } P.$$

Továbbá:

$$(1 - d^{(m)}) P (1 - d^{(n)}) = 0 \quad \text{és} \quad d = d \cdot d^{(m+n)} = kd \cdot d^{(l)}.$$

Hosszasabb számolással igazolható, hogy d akkor és csak akkor lesz P kétoldali egységeleme, ha $(k, l, m, n) = (1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$ vagy $(1, 2, 1, 1)$.

A számolás részletesen megtalálható a [38] dolgozatban. Pl. $k = l = m = n = 1$ esetén $d^2 = d \neq 0$ és $(1 - d) P (1 - d) = 0$ miatt d egységelem.

13. §. Gyengén szupernilpotens radikálok és idealizátorok

Ennek a §-nak az anyaga megtalálható szerző [72] dolgozatában.

Legyen S tetszőleges részgyűrű az A gyűrűben. A-nak azt a legbővebb $I(S)$ részgyűrűjét, amelyben S még kétoldali ideál, az S idealizátorának nevezzük. Továbbá egy A gyűrűt T-nilpotensnek nevezünk, ha a

$$p_m = a_1 a_2 \dots a_m \quad \text{és} \quad p'_n = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$$

szorzatok sorozatai nullát tartalmazzák. Az összes T-nilpotens gyűrű osztályával meghatározott alsó radikál szupernilpotens. Bármely, főjobbideálokra nézve minimum-feltételű gyűrűnek a Jacobson-radikálja T-nilpotens.

59. TÉTEL. *Legyen R gyűrűknek egy gyengén szupernilpotens radikálja. Legyen S maximális A-nak az R-radikál részgyűrűi közt. Ekkor bármely S részgyűrű $I(S)$ idealizátorának az $I(I(S))$ idealizátorára $I(I(S))=I(S)$ teljesül.*

Bizonyítás. $I(S)$-nek az R-radikálja S, mert S ideál $I(S)$-ben és S maximális R-radikál részgyűrű A-ban. Továbbá $I(S)\cdot I(I(S))\subseteq I(S)$ miatt $I(S)\cdot I(I(S))\cdot S\subseteq S$. Definíciónk alapján $I(I(S))\subseteq I(S)$, ezért $I(I(S))S+S/S$ jobbannihilátora $I(S)/S$-nek, és minthogy S maximális R-radikál részgyűrű A-ban, ezért $I(I(S))S\subseteq S$. Hasonlóan igazolható $S.I(I(S))\subseteq S$, tehát S kétoldali ideál $I(I(S))$-ben is. Ennélfogva $I(I(S))\subseteq I(S)\subseteq I(I(S))$, tehát $I(I(S)=I(S))$.

MEGJEGYZÉS. Az 59. Tétel hasonló az egyik jól ismert csoportelméleti tételhez: Ha S egy π-*Sylow*-alcsoport egy tetszőleges G csoportban, akkor az $N(S)$ normalizátornak az $N(N(S))$ normalizátora maga $N(S)$, tehát $N(N(S))=N(S)$.

60. TÉTEL. *Ha az S valódi részgyűrű T-nilpotens az A gyűrűben, akkor $I(S)$ valódi módon bővebb S-nél, tehát $I(S)\supsetneqq S$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $I(S)=S$. Minthogy $S\neq A$, van olyan $x\in A$, elem, hogy $x\notin I(S)=S$. Ezért van olyan s_1 és $s'_1\in S$ elem, hogy $xs_1\notin S$ vagy $s'_1x\notin S$. Így $S=I(S)$ miatt van olyan s_2 és $s'_2\in S$, hogy pl. $s_2xs_1\notin S$ vagy $s'_2s'_1x\notin S$. Eljárásunkat tovább folytatva olyan $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots$ és $\bar{s}'_1, \bar{s}'_2, \dots$ sorozatok adódnak, hogy

$$\bar{s}'_m\cdot\bar{s}'_{m-1}\dots\bar{s}'_1x\bar{s}_1\cdot\bar{s}_c\dots\bar{s}_n\notin S,$$

ami ellentmond annak, hogy S T-nilpotens A-ban. Ezért valóban $I(S)\neq S$.

MEGJEGYZÉS. Említettük, hogy főjobbideálokra nézve minimumfeltételű gyűrűk *Jacobson*-radikálja T-nilpotens. E gyűrűk *Jacobson*-radikálja egybeesik a *Baer*-féle alsó nilradikállal és ha a gyűrű balegységelemes, akkor a *Brown—McCoy*-féle radikállal is.

Másfelől, ha egy tetszőleges A (asszociatív) gyűrűben a B *Baer*-féle alsó nilradikál különbözik a G *Brown—McCoy*-féle radikáltól, akkor:

1. van A-nak olyan végesen generált valódi részgyűrűje, amely nem egy $(a)_r$ főjobbideál [40],
2. van A-nak olyan végesen generált valódi részgyűrűje, amely nem aA alakú jobbideál [41].

Ugyanis a [40] dolgozatban bizonyított tételünk *explicit* módon meghatározza mindazon gyűrűket, amelyeknek bármely végesen generált valódi részgyűrűjük főjobbideál, míg a [41] dolgozatban bizonyított tételünk pedig *explicit* módon meghatározza mindazon A gyűrűket, amelyeknek bármely végesen generált valódi részgyűrűjük aA alakú jobbideál. Szerző [40] tételének bizonyítása a kvadratikus nemmaradékokat is felhasználja. Megjegyzendő, hogy a [40] és [41] gyűrűosztályok explicit leírásának feladatát RÉDEI LÁSZLÓ akadémikus említette még 1958 tavaszán a szerzőnek.

IV. FEJEZET

A JACOBSON-RADIKÁL TETSZŐLEGES (ASSZOCIATÍV) GYŰRŰKBEN

14. §. A Jacobson-radikál jellemzése Green-ekvivalenciával

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [54] dolgozatában szerepel. Az A gyűrű B és C részhalmazaira nézve legyen

$$B^{-1}C = [x; x \in A, Bx \subseteq C].$$

Továbbá definiáljuk az $a, b \in A$ elemekre az $a \equiv b$ ekvivalenciát $(a)_r = (b)_r$ által, ahol $(a)_r$ főjobbideál A-ban. $a \equiv b$ az A multiplikatív félcsoportjában egy *Green*-féle ekvivalencia, amely a félcsoport balkongruenciája.

61. TÉTEL. *Az A gyűrű J Jacobson-radikálja egybeesik mindazon x elemek K halmazával, amelyekre az $(x)_r$ főjobbideál minden y elemével és A minden z elemével*

$$z \equiv z + zy.$$

Bizonyítás. Legyen Φ_r az A A-jobbmodulus *Frattini*-részmodulusa. KERTÉSZ ANDOR [21] szerint $J = A^{-1}\Phi_r$. Először a $K \subseteq J$ tartalmazást igazoljuk. Ha $x \in A$, és $x \notin J$, akkor $x \notin A^{-1}\Phi_r$, $Ax \nsubseteq \Phi_r$, tehát van olyan $y \in A$ és R maximális jobbideál, hogy $yx \notin R$. Minthogy ekkor $A^2 \nsubseteq R$ és A/R egyszerű A-jobbmodulus, van olyan $u \in A$, hogy $y + R = yxu + R$, ahonnan a $v = -xu \in (x)_r$ jelöléssel

$$(y + yv)_r \subseteq R \neq A = (y)_r + R,$$

tehát $y + yv \not\equiv y$, és $v \in (x)_r$ miatt $x \notin K$. Így $K \subseteq J$.

Most a $J \subseteq K$ tartalmazást bizonyítjuk be. Ha ugyanis $x \in A$ és $x \notin K$, akkor létezik olyan $y \in (x)_r$ elem és olyan $z \in A$ elem, hogy $z \not\equiv z + zy$. ZORN lemmája alapján van olyan R jobbideál, amely maximális a $z \notin R$ és $R \supseteq (z + zy)_r$ relációkra nézve. Ekkor az A/R A-jobbmodulus szubdirekt irreducibilis, mert A/R minden nemzérus A-részmodulusában z benne van. Minthogy $z + zy \in R$ ezért

$$(y)_r + R = (zy)_r + R = z(y)_r + R \neq R.$$

Minthogy $(z)_r + R/R$ egyszerű A-jobbmodulus és $z(y)_r \nsubseteq R$, ezért $y \in (x)_r$ miatt $x \notin J$. Tehát valóban $J \subseteq K$, és ezért $J = K$, amivel a 61. Tételt bebizonyítottuk.

15. §. Kertész Andor egy problémájának és Kertész Andor és Wiegandt Richard egy közös problémájának megoldása . modulusok egy radikáljáról

Ennek a §-nak az anyaga szerző [62] és [74] dolgozataiban található meg.

Legyen A tetszőleges (asszociatív) gyűrű, M egy A-jobbmodulus és $\Phi(M)$ az M *Frattini*-részmodulusa. M *Kertész*-féle radikálját így értelmezzük

$$K(M) = [m; m \in M, mA \subseteqq \Phi(M)].$$

Világos, hogy $K(M)$ részmodulus M-ben (vö. KERTÉSZ [20]). M-nek egy N részmodulusa homoperfekt, ha $MA+N=M$. KERTÉSZ ANDOR [20] igazolta, hogy $K(M)$ egybeesik M összes homoperfekt maximális részmodulusának a metszetével. Ha A balegységelemes gyűrű, akkor A-nak, mint A-jobbmodulusnak a *Kertész*-radikálja éppen A *Jacobson*-radikálja lesz. Egyébként pedig minden A gyűrűben $K(A) \subseteqq J(A)$.

KERTÉSZ ANDOR [20] kérdezte, hogy vajon bármilyen A gyűrűben $K(A)$, mint az A A-jobbmodulus (*Kertész*-féle) radikálja egybeesik-e a $J(A)$ *Jacobson*-radikállal.

Az alábbi példa mutatja, hogy erre a válasz nemleges.

Példa. Legyen A a p elemű véges prímtest felett az

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixokkal generált algebra. Ekkor A egy p^2-elemű nemkommutatív gyűrű és a szorzási tábla:

	x	y
x	0	x
y	0	y

Minthogy y jobbegységelem A-ban, $A^2=A$, tehát minden jobbideál A-ban homoperfekt. Ezért $(x)_r=Zx$ és $(y)_r=Zy$, ahol Z a racionális egészek gyűrűje, homoperfekt, p-elemű, ezért maximális jobbideál A-ban. Minthogy pedig

$$(x)_r \wedge (y)_r = 0,$$

ezért $K_r(A)=0$. Viszont a $J(A)$ *Jacobson*-radikál éppen

$$(x)_l = Zx = (x)_r = K_l(A) = J(A) \neq 0,$$

ahol K_l a K_r bal-jobb duálisa.

62. TÉTEL. *Egy tetszőleges* $\mathfrak{m}$ *számossághoz akkor és csak akkor létezik olyan* $\mathfrak{m}$*-számosságú gyűrű, amelyben* $0=K_r(A)\neq J(A)=K_l(A)$, *ha* $\mathfrak{m}$ *nem négyzetmentes véges szám.*

Bizonyítás. Ha $\mathfrak{m}$ véges négyzetmentes szám, akkor minden p-komponens p-elemű zérógyűrű, vagy p-elemű test. Ezért A kommutatív, tehát minden homoperfekt maximális jobbideál moduláris, és ennélfogva

$$J(A) = K_r(A) = K_l(A).$$

Ha $\mathfrak{m}$ véges, de nem négyzetmentes szám, akkor $\mathfrak{m}=p^2\mathfrak{n}$. Legyen A az előző példában szereplő p^2-rendű nemkommutatív gyűrű, B pedig $\mathfrak{n}$-számosságú gyűrű, amely p-hatványrendű véges testek direkt összege. Ekkor $K_r(B)=J(B)=0$. Ha $C=A\oplus B$, akkor

$$K_r(C) = K_r(A) = 0 \neq J(C) = J(A) = (x)_r = K_l(C).$$

Ha pedig $\mathfrak{m}$ végtelen számosság, legyen B egy tetszőleges $\mathfrak{m}$-számosságú test (pl. a racionális számtest $\mathfrak{m}$-transzcendenciafokú tisztán transzcendens bővítése), A az előbbi gyűrű és $C=A\oplus B$. Ekkor szintén $K_r(B)=J(B)=0$ és

$$K_r(C) = K_r(A) = 0 \neq J(C) = J(A) = (x)_r = K_l(C).$$

63. TÉTEL. *K_r és K_l kétoldali ideálok minden A gyűrűben, amelyekre $AK_r \subseteqq \Phi_r \subseteqq \subseteqq K_r \subseteqq J(A)$ és $K_l A \subseteqq \Phi_l \subseteqq K_l \subseteqq J(A)$ teljesülnek. De K_r és K_l nem gyűrűradikálok Amitsur—Kuros értelemben.*

Bizonyítás. $\Phi_r \subseteqq K_r \subseteqq J$ az előzőek alapján világos, míg a *Hille* [16]—*Kertész* [21]-féle $AJ \subseteqq \Phi_r$ tartalmazásból $AK_r \subseteqq \Phi_r$ is adódik.

Láttuk az előző példában szereplő A gyűrűre, hogy $K_r(A)=0$, de A-nak az $A_0=(x)_r\neq 0$ ideáljára $K_r(A_0)=A_0\neq 0$. Ezért K_r nem *Amitsur—Kuros*-féle gyűrűradikál. K_l vizsgálatához A-nak az A' antiizomorf képét kell tekintenünk.

A Keszthelyi Gyűrűelméleti Konferencián KERTÉSZ ANDOR említette A. KERTÉSZ—A. WIDIGER egy közös eredményét, hogy bármely N nilgyűrűre $K_r(N)=N$ teljesül és a konferencián WIEGANDT RICHARD is kérdezte, hogy: melyek azok az összes A gyűrűk, amelyekre $K_r(A)=A$?

64. TÉTEL. *Egy A gyűrűre $K_r(A)=A$ akkor és csak akkor teljesül, ha $J(A)=A$.*

Bizonyítás. Ha $K_r(A)=A$, akkor $K_r\subseteqq J$ miatt $J(A)=A$ is teljesül.

Fordítva, ha $J(A)=A$, akkor $AJ\subseteqq \Phi_r \subseteqq J(A)$ miatt $A^2 \subseteqq \Phi(A)$. Ez pedig azt jelenti, $K(M)$ definíciója alapján, hogy $A=K_r(A)$. Ezzel a 64. Tételt elemmentesen bebizonyítottuk.

Bizonyítás nélkül megemlítjük azt az eredményünket, amely szerint az A gyűrűre az alábbi két feltétel egymással ekvivalens:

1. A *Jacobson*-radikálmentes jobbartin-féle gyűrű;

2. A olyan egységelemes MHR-gyűrű, hogy bármely M A-jobbmodulusban a $K(M)$ *Kertész*-radikál egybeesik M maximális triviális részmodulusával, azaz $K(M)\cdot A=0$ ([42], Satz 4.3).

16. §. Kertész Andor egy problémájának megoldása kvázi-moduláris, maximális, de nem moduláris jobbideálok létezéséről

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [45] és [75] dolgozatában szerepel.

Az A gyűrű egy R jobbideálját kvázimodulárisnak nevezzük, ha $A^{-1}R \subseteq R$, ahol $B^{-1}C = [x;\ x \in A,\ Bx \subseteq C]$. Továbbá egy R jobbideál moduláris, ha van olyan $e \in A$ elem, hogy minden $x \in A$ elemre $x - xe \in R$. Egy R moduláris jobbideálra $R = A$ akkor és csak akkor teljesül, ha $e \in R$. JACOBSON ([19] 1.3.1. állítás Korolláriuma, 6. oldal) szerint minden moduláris jobbideál kvázimoduláris.

KERTÉSZ ANDOR ([23, 125. oldal) könyvének 3. Problémája (más elnevezésekkel) kérdezi:

Minden kvázimoduláris maximális jobbideál moduláris-e?

A probléma azért jelentős, mert JACOBSON [19] szerint a J *Jacobson*-radikál minden gyűrűben az összes moduláris maximális jobbideál metszete. Másrészt KERTÉSZ ([23], 5. 24. Tétel (g)) szerint az összes kvázimoduláris maximális jobbideál metszete is éppen a *Jacobson*-radikál.

65. TÉTEL. *Minden $\mathfrak{m}$ végtelen számossághoz létezik egy K_p ($p = 0$ vagy prímszám) prímtest felett vett A algebra, amely tartalmaz egy kvázimoduláris, maximális, de nem moduláris R jobbideált, úgy hogy*

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} R = \mathfrak{m}.$$

Bizonyítás. Legyen $\delta_{\alpha\beta}$ a *Kronecker*-szimbólum és Γ egy $\mathfrak{m}$-számosságú indexhalmaz. Legyen továbbá A az összes a_α, $r_{\beta\gamma}$ és $s_{\varepsilon\eta\vartheta}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \eta, \vartheta \in \Gamma)$ szimbólummal a K_p prímtest felett generált algebra, ahol a szorzótábla

	a_ε	$r_{\varepsilon\eta}$	$s_{\varepsilon\eta\vartheta}$
a_α	a_ε	$\delta_{\alpha\varepsilon} \cdot a_\eta$	$\delta_{\alpha\varepsilon} \cdot a_\vartheta$
$r_{\alpha\beta}$	$s_{\alpha\beta\varepsilon}$	$\delta_{\beta\varepsilon} \cdot r_{\alpha\eta}$	$\delta_{\beta\varepsilon} \cdot s_{\alpha\eta\vartheta}$
$s_{\alpha\beta\gamma}$	$s_{\alpha\beta\varepsilon}$	$\delta_{\gamma\varepsilon} \cdot s_{\alpha\beta\eta}$	$\delta_{\gamma\varepsilon} \cdot s_{\alpha\beta\vartheta}$

Ez az A algebra monomiális és asszociatív. Legyen R az összes $r_{\alpha\beta}$ és $s_{\alpha\beta\gamma}$ elemmel generált részalgebra. A minden eleme

$$(*) \qquad a = \sum \pi_i a_{\alpha_i} + \sum \varrho_{i'j'} r_{\alpha_{i'}\beta_{j'}} + \sum \sigma_{i''j''k''} s_{\alpha_{i''}\beta_{j''}\gamma_{k''}}$$

alakban írható, ahol π_i, $\varrho_{i'j'}$, $\sigma_{i'j'k''} \in K_p$ és mindhárom $\sum$ összeg véges. R nyilván jobbideál A-ban, és minthogy $aR + R = A$ adódik minden $a \notin R (a \in A)$ elemre, R maximális jobbideál A-ban. Továbbá R nem moduláris $(1-a)A \subsetneqq R$ miatt. Ugyanis $a \in R$ esetén $(1-a]a_\alpha \notin R$ minden $\alpha \in \Gamma$ indexre. Ha pedig $a \notin R$, akkor $(*)$-ban legalább egy $\pi_i \neq 0$, és

$$(1-a)(-\pi_i^{-1} r_{\alpha_i\beta}) = a_\beta + r'' \notin R \quad (r'' \in R).$$

Meg lehet mutatni, hogy minden $a \notin R$ elemhez (lásd $(*)$) van végtelen sok olyan a_ε elem, hogy

$$a_\varepsilon \cdot a \notin R,$$

amiből következik, hogy a kvázimoduláris jobbideál. Ugyanis ha $a_\alpha a = r^*$, akkor $a = \sum \pi_i a_{\alpha_i} + r (r \in R)$. Minthogy $a_\alpha r = -\sum \pi_i a_{\alpha_i} + r^*$, ezért

$$r = \sum \sigma_i r_{\alpha\alpha_i} + \sum \tau_{jk} s_{\alpha\beta_j\gamma_k} + r_\alpha,$$

ahol $\sigma_i, \tau_{jk} \in K_p$ és mindkét $\sum$ összeg véges. Továbbá $r_\alpha \in R$ és $ar_\alpha \in R$. Tehát

$$(**) \qquad r_\alpha = \sum \pi_{ij}(r_{\alpha\gamma_i} - s_{\alpha\beta_j\gamma_i}) + \sum \sigma'_{ij} r_{\beta_i\gamma_j} + \sum \tau'_{ijk} s_{\varepsilon_i\eta_j\vartheta_k}.$$

Minthogy mindhárom $\sum$ véges és $|\Gamma| = \mathfrak{m}$, van $\mathfrak{m}$ számosságú végtelen sok olyan ε index, hogy $\varepsilon \neq \alpha$ és ε különbözik a véges $\sum$-okban balról álló összes véges sok β_i és ε_i indextől is. Ekkor $a_\varepsilon r_\alpha = a_\varepsilon r = 0$ és

$$a_\varepsilon a = \sum \pi_i a_{\alpha_i} \notin R.$$

Nyilvánvalóan $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} R = \mathfrak{m}$ is érvényes.

66. TÉTEL. *Ha egy A gyűrű tartalmaz kvázimoduláris, maximális de nem moduláris R jobbideált és egy nemzérus e idempotens elemet, akkor R is tartalmaz egy nemzérus f idempotens elemet.*

Bizonyítás. Nyilván $A = (1-e)A + R$, mert R maximális és nem moduláris. Ezért $e = (a - ea) + r$, ahol $r \in R$, és $e = e^2 = er$. Ebből pedig $e = ere$, $re \neq 0$ és $f = re$ idempotens elem R-ben.

Szerző [45] dolgozata 3. §-ában több eredmény szerepel egyoldali ideálhányadosokkal kapcsolatban.

Redukáltnak nevezünk egy A gyűrűt, ha egy kvázimoduláris, maximális, de nem moduláris R jobbideáljában fekvő kétoldali ideálja csak (0) lehet. Redukált gyűrű primitiv is.

67. TÉTEL. *Redukált gyűrű centruma* 0.

Bizonyítás. Legyen $a \in A$ és $a \notin R$. Ekkor $A^2 \nsubseteq R$ miatt $aA + R = A$. Tehát van olyan $b \in A$ és $r \in R$, hogy

$$a = ab + r,$$

amiből $a(1-b)A = rA \subseteq R$. Másfelől $A = R + (1-b)A$, mert R maximális és nem moduláris. Ezért $aA \subseteq aR + R$ tehát $aR + R = A$. Legyen most C az A redukált gyűrű centruma és $c \in C$. Ekkor $cR = Rc \subseteq R$ és a bizonyítás előző részlete miatt $C \subseteq R$. Ekkor $(C) = C + CA \subseteq R$ és minthogy A redukált, a (C) ideál 0, és ezért $C = 0$.

68. TÉTEL. *Redukált A gyűrűnek az A^+ additív csoportja vagy elemi p-csoport, vagy pedig olyan torziómentes csoport, amelyre minden m racionális egész számmal*

$$A^+ = mA^+ + R^+$$

teljesül, ahol R kvázimoduláris, maximális, de nem moduláris jobbideál. Ekkor R^+ tiszta alcsoport A^+-ban.

Bizonyítás. Legyen $A[p]$ az A^+ maximális elemi p-alcsoportja. Ha A^+ nem torziómentes, van olyan p prímszám, hogy $A[p] \neq 0$, ezért $A = A[p] + R$, ahonnan $pA = pR \subseteq R$. Minthogy pA ideál A-ban és A redukált, ezért $pA = 0$. Ebben az esetben R^+ direkt összeadandó A^+-ban, ezért R^+ ekkor tiszta alcsoport is. Ha viszont $A[p] = 0$ minden p prímszámra, akkor A^+ torziómentes, és ha $mA \neq 0$, akkor a redukáltság és R maximalitása miatt

$$A = mA + R.$$

Tegyük fel, hogy $a \in A$, $a \notin R$ és $na \in R$ egy nemzérus n egész számra. Minthogy $aR + R = A$, ezért $nA \subseteq R$, ami A redukáltságának ellentmond. Ezért $a \notin R$ esetén $Za \wedge R = 0$, ahol Za jelenti most az a-val generált ciklikus csoportot, más szóval $(A/R)^+$ torziómentes. Ezért R^+ ekkor is tiszta alcsoport.

69. TÉTEL. *Legyen R kvázimoduláris, maximális, de nem moduláris jobbideál az A gyűrűben, amely nem feltétlen redukált, de additív csoportja olyan legyen, mint a 68. tételben levő gyűrű additív csoportja. Legyen az $[x]^{-1}R$ jobboldali ideálhányadosra, ahol $[x]$ a csak az x elemből álló halmazt jelöli, $R = x$. $([x]^{-1}R)$. Ekkor $A = xR$, tehát x egy balnövelő elem, és $x_0R + R = A$ teljesül az x elemmel generált $\{x\}$ részgyűrű minden x_0 elemére. Van olyan $y \in A$ elem, hogy minden $x_0 \in \{x\}$ elemre fennáll:*

$$(y - x_0)R + R = A.$$

Bizonyítás, amely nemtriviális, két oldalon megtalálható [45]-ben, ezért ezt itt mellőzzük.

1. *Példa.* Legyen A a racionális számtest felett az a és b elemekkel generált algebra, ahol

$$a = ba^2 \quad \text{és} \quad b = b^2a.$$

Igazolni lehet, hogy A-ban a szorzás asszociatív. Az is belátható, hogy A-ban nincs sem kétoldali, sem egyoldali egységelem. Legyen $R = baA$ és $L = Aba$. Ekkor R jobbideál és L balideál, továbbá

$$b \notin R \neq A \quad \text{és} \quad a \notin L \neq A.$$

Minthogy azonban $bA = Aa = A$, ezért $bR = b^2aA = bA = A$ és $La = Aba^2 = Aa = A$. Tehát b *balnövelő*, a *jobbnövelő* elem A-ban.

2. *Példa.* Legyen A a racionális számtest felett az a, b és c elemekkel generált algebra, ahol

$$a = aba = a^2b, \quad b = ab^2 = bab,$$

$$c = abc = bac \quad \text{és} \quad ca = cb = c^2 = 0.$$

Ekkor $c = ab$ és $f = ba$ nemzérus idempotensek, legyen $R = fA$. Nyilván $R \neq A$, mert $a \notin R$, pedig A balegységelemes, hiszen $eA = A$.

Minthogy

$$aR = afA = abaA = aA \supseteq abA = eA = A,$$

ezért a *balnövelő* elem. A-nak a $J(A)$ *Jacobson*-radikálja $A(1-e) = (c)_l$. Továbbá, ha

$$e_i = b^i(1-f)a^i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots),$$

akkor e_i és e_j $(i \neq j)$ páronként orthogonális idempotens elemek. A nem jobbartin-féle és nem balartin-féle gyűrű, mert az

$$R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} e_i A$$

jobbideálok valódi végtelen fogyó láncot alkotnak és az

$$L_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} A e_i$$

balideálok pedig szintén valódi fogyó láncot alkotnak. $cA=0$ miatt A-ban nincs jobbegységelem, de $e=ab$, miként említettük, balegységelem. Továbbá

$$a^i + b^j a^k c \quad (i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$$

minden $x \in A$ elemnek balosztója.

70. TÉTEL. *Legyen R kvázimoduláris, maximális, de nem moduláris jobbideál az A gyűrűben. Legyenek*

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \in A$$

olyan elemek, hogy $x_i R = A$ és $x_i r_i = x_i$ $(r_i \in R)$ $(i=1, 2, \ldots, m)$, továbbá $(1-r)A = [a-ra;\, a \in A]$ és $I = \bigcap_{i=1}^{m} (1-r_i)A$. Legyen $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, vagyis az x_i elemekkel generált részgyűrű. Ha I moduláris jobbideál az A gyűrűben, akkor $S+R$ valódi $(\neq A)$ alcsoport az A^+ additív csoportban.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $A^+ = S+R$. Minthogy $I = \bigcap_{i=1}^{m} (1-r_i)A$ feltétel szerint moduláris jobbideál, van olyan $a_0 \in A$ elem, hogy $(1-a_0)A \subseteqq I$. Továbbá tetszőleges $a \in A$ elemre $a = s+r$, ahol $s \in S = \{x_1, \ldots, x_m\}$ és $r \in R$.

Minthogy pedig

$$x_i(1-a_0)A \subseteqq x_i(1-r_i)A = (x_i - x_i r_i)A = 0A = 0,$$

ezért minden $s \in S$ elemre $s(1-a_0)A = 0$, tehát minden $a = s+r$ elemre $a(1-a_0)A = r(1-a_0)A \subseteqq R$, ennélfogva $A(1-a_0)A \subseteqq R$. Az R kvázimodularitása miatt $(1-a_0)A \subseteqq R$, ami pedig ellentmond annak, hogy R nem moduláris A-ban. Ezért tényleg

$$R+S \neq A.$$

17. §. Kertész Andor egy problémájának megoldása moduláris jobbideálok metszetéről

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [51], [52] és [53] dolgozataiban található meg. — Ismeretes, hogy véges sok moduláris maximális jobbideál metszete szintén moduláris. Továbbá, vö. A. KERTÉSZ ([23], Satz 5.2), ha $A = R_1 + R_2$, ahol R_1 és R_2 moduláris jobbideálok az A gyűrűben, akkor $R_1 \cap R_2$ metszet szintén moduláris. A disszertáció 70. Tételében pedig feltételként szerepelt az, hogy $I = \bigcap_{i=1}^{m} (1-r_i)A$ legyen moduláris jobbideál.

KERTÉSZ ANDOR [23] könyvének 2. Problémája (a könyv 123. oldalán) kérdezi: Két moduláris jobbideál metszete mindig moduláris-e?

71. TÉTEL. *Minden $\aleph_\nu$ végtelen számossághoz van olyan A gyűrű, amely tartalmaz $\aleph_\nu$ számú olyan moduláris jobbideált, amelyek közül bármely kettőnek a metszete nem moduláris.*

Bizonyítás. Legyen A a kételemű test felett bizonyos t_α elemekkel generált algebra, ahol a t_α elemek halmazának számossága $\aleph_\nu$ és

$$t_\alpha^{k_\alpha} t_\beta^{k_\beta} = t_\alpha^{k_\beta} + t_\beta^{k_\beta} + t_\alpha^{k_\alpha + k_\beta}.$$

Közvetlen számolás mutatja, hogy ez a szorzás $x+x=0$ miatt asszociatív. $t_\alpha \neq t_\beta$ esetén $f(t_\alpha)=g(t_\beta)$ akkor és csak akkor teljesül, ha $f(t_\alpha)=g(t_\beta)=0$. Továbbá

$$(1-t_\alpha)A = (1+t_\alpha)A$$

pontosan az $(1+t_\alpha)f(t_\alpha)$ alakú polinomok halmaza lesz. Ezért $t_\alpha \neq t_\beta$ esetén $(1-t_\alpha)A \wedge \wedge (1-t_\beta)A=0$. Viszont 0 akkor és csak akkor moduláris, ha A balegységelemes. Megmutatjuk, hogy egyik

$$e = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s} a_{ij} t_{\alpha_i}^{j}$$

elem sem lehet A balegységeleme. Ugyanis $et_\alpha = t_\alpha$ és

$$t_\beta^k t_\alpha = t_\alpha + t_\beta + t_\beta^{k+1}$$

miatt egyidejűleg

$$1 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{k} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad \text{és} \quad 0 = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq m}}^{n} a_{ij},$$

tehát az $1=0$ ellentmondás adódik. Ezért A nem balegységelemes és $(1-t_\alpha)A \cap \cap (1-t_\beta)A$ pedig nem moduláris.

RÉDEI [26] *Algebra* I. könyvének német változata veti fel (a könyv 90. oldalán) azt a kérdést, hogy: Minden olyan F félcsoportban, amelyben a *Frattini*-részfélcsoport üres, félcsoport-e minden részhalmaz?

Ezt a problémát, mint ismeretes, LAJOS SÁNDOR negatív irányban, tehát egy F példa megadásával megoldotta. Ebben az F példában, amely négyelemű félcsoport, $\Phi(F)$ üres, bár van olyan részhalmaz, amely nem félcsoport.

Most egy szimultán megoldást adunk KERTÉSZ ANDOR könyve 2. problémájára és RÉDEI LÁSZLÓnak erre a félcsoportelméleti problémájára.

72. TÉTEL. *Létezik olyan* 16 *elemű A gyűrű, amelyre:*

1. *A-ban két moduláris nilpotens jobbideál metszete nem moduláris;*

2. *A elemei az $x \circ y = x+y-xy$ körművelettel olyan F_1 félcsoportot alkotnak, amelynek egy F négyelemű részfélcsoportjában $\Phi(F)$ üres, de F nem minden részhalmaza félcsoport;*

3. *A-ban a J Jacobson-radikál moduláris jobbideál, $J^3=0$, de $J^2 \neq 0$.*

Bizonyítás. Legyen A a kételemű test felett az a, b, c és d elemekkel generált algebra, és legyen a szorzási tábla:

	a	b	c	d
a	a	$a+b+c$	a	d
b	$a+b+d$	b	c	b
c	c	b	c	$a+c+d$
d	a	d	$b+c+d$	d

Ebben a bázis-előállításban A nem-monomiális algebra, de létezik A-nak olyan bázisa, miként H. J. WEINERT megmutatta, amelyben A már monomiális algebra lesz. Igazolható, közvetlen számolással, hogy A-ban a szorzás asszociatív, és hogy nincs A-nak balegységeleme. Továbbá

$$(1-a)A \wedge (1-b)A = 0,$$

tehát ez a metszet nem moduláris jobbideál. Nyilvánvalóan

$$(1-a)A = Z(a+c) \quad \text{és} \quad (1-b)A = Z(b+d),$$

amelyek nilpotens moduláris jobbideálok. J nyolc elemből áll, ezek:

$$0, a+b+c+d,$$

továbbá

$$a+b,\ a+c,\ a+d,\ b+c,\ b+d \quad \text{és} \quad c+d.$$

Belátható, hogy $J^3=0$, de $J^2 \neq 0$.

Végül megjegyezzük, hogy az a, b, c és d elemek a körművelettel egy olyan félcsoportot alkotnak, amely a *Lajos Sándor*-féle F nemkommutatív négyelemű félcsoporttal izomorf.

MEGJEGYZÉS. A 72. Tétel bizonyításában szereplő a, b, c és d elemek megadhatók 5×5 típusú matrixokkal is ([51], 213. oldal).

Most elegendő feltételeket adunk meg arra, hogy két moduláris jobbideál metszete mindig moduláris legyen:

73. TÉTEL. *Ha egy A gyűrűben teljesül az alábbi két feltétel egyike, akkor A bármely két moduláris jobbideáljának a metszete moduláris:*

1. *A balegységelemes,*
2. *minden $a, b \in A$ elempárra a*

$$Q_a = [a+x-ax;\, x \in A] \quad \text{és} \quad Q_b = [b+y-by;\, y \in A]$$

halmazok metszete nem üres.

Bizonyítás. Ha 1. teljesül, akkor minden jobbideál moduláris. Tegyük fel azt, hogy 2. teljesül. Ekkor van olyan $x, y \in A$, hogy

$$q = a+x-ax = b+y-by \in Q_a \cap Q_b,$$

ezért

$$(1-q)A = (1-a)(1-x)A = (1-b)(1-y)A \subseteqq (1-a)A \cap (1-b)A$$

miatt bármely két moduláris jobbideál metszete moduláris.

74. TÉTEL. *Teljesüljön az A gyűrűre az alábbi feltételek egyike:*

1. $a-b \in (1-a)A+(1-b)A$, *minden* $a, b \in A$ *elemre;*
2. *A Jacobson-radikálgyűrű;*
3. *Minden* $a, b \in A$ *elempárhoz létezik olyan* $q_a \in Q_a$ *és* $q_b \in Q_b$, *hogy* $q_a q_b = q_b \cdot q_a$;
4. *A kommutatív;*
5. *Ha* $q_a t = q_a$ *érvényes egy* $q_a \in Q_a$ *elemmel és* $t \in A$ *elemmel, akkor minden* Q_b*-ben van egy* q_b *elem úgy, hogy* $q_b t = q_b$;
6. *A jobbegységelemes;*
7. $a-ab \in (1-ab)A$ *érvényes minden* $a, b \in A$ *elemre.*

Bizonyítás. Mind a hét feltételről megmutatjuk, hogy belőle $Q_a \cap Q_b \neq \emptyset$ következik, és ekkor elég a 73. Tételt alkalmazni. Az 1. feltétel alapján van olyan $x, y \in A$, hogy

$$a-b = (1-a)(-x)+(1-b)y,$$

amiből

$$q = a+x-ax = b+y-by \in Q_a \cap Q_b$$

adódik.

A 2. feltételből triviálisan következik 1. és így $Q_a \cap Q_b \neq \emptyset$.

A 3. feltétel alapján van olyan $q_a \in Q_a$ és $q_b \in Q_b$, hogy $q_a \cdot q_b = q_b \cdot q_a$, tehát

$$q_a \circ q_b = q_b \circ q_a,$$

ezért, ha $q_a = a \circ x$ és $q_b = b \circ y$, akkor valóban:

$$a+(x \circ q_b)-a(x \circ q_b) = b+(y \circ q_a)-b(y \circ q_a) \in Q_a \cap Q_b.$$

A 4. feltételből következik 3., tehát $Q_a \cap Q_b \neq \emptyset$.

Az 5. feltétel alapján legyen egyidejűleg $q_a t = q_a$ és $q_b t = q_b$. Ekkor

$$t = q_a+t-q_a t = q_b+t-q_b t = a \circ x \circ t = b \circ y \circ t \in Q_a \cap Q_b.$$

6. feltétel alapján legyen e jobbegységelem. Ekkor $q_a e = q_a$ és $q_b e = q_b$ miatt 5. teljesül.

7. feltétel alapján van olyan $c \in A$, hogy $a-ab = c-abc$, amiből $c = a-ab+abc$. Ezért a $d = b-bc$ jelöléssel:

$$c = a-ad.$$

Ennélfogva egyrészt $a \circ d \in Q_a$, másrészt $b \circ c \in Q_b$ és fennáll az

$$a \circ d = a+d-ad = a+b-bc-ad = b \circ c$$

azonosság miatt $a \circ d \in Q_a \cap Q_b$.

F. HANSEN megmutatta, hogy ezek az elegendő feltételek nem szükségesek, és ő megadta a pontos kritériumot is későbbi dolgozatában.

Most megadjuk a „kínai maradék-tétel" egy általánosítását.

75. TÉTEL. *Legyen* $m \geqq 2$ *természetes szám és* $I_1, I_2, \dots, I_m$ *olyan kétoldali ideálok az* A *gyűrűben, hogy* $I_0 = \bigcap_{j=1}^{m} I_j$ *moduláris és* $i \neq j$ *esetén mindig* $I_i + I_j = A$: *Legyen*

$$x_1, x_2, \dots, x_m \in A$$

tetszőleges elemrendszer A*-ban. Ekkor van olyan* $x_0 \in A$ *elem, hogy* $x_0 - x_j \in I_j$ *minden* j *indexre* $(1 \leqq j \leqq m)$, *és ha* $y_0 - x_j \in I_j$ *minden* j *indexre, akkor* $x_0 - y_0 \in I_0$.

Bizonyítás. Minthogy I_0 moduláris, van olyan $e \in A$, hogy $x - ex \in I_0 \subseteqq I_j$ minden j indexre. Továbbá $i \neq j$ esetén $I_j + I_i = A$, tehát

$$A^{m-1} = \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{m} (I_t + I_s) \subseteqq I_s + \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{m} I_t \subseteqq A. \tag{1}$$

Minthogy $x - ex \in I_0$ minden $x \in A$ elemre, ezért $x \in A^2 + I_0$, tehát $A^2 + I_0 = A$, és az eljárást ismételve, $A = A^k + I_n$ minden k kitevőre. Ezért (1) és $I_0 \subseteqq I_j$ alapján:

$$A^{m-1} + I_0 \subseteqq I_s + \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{m} t_t \subseteqq A = A^{m-1} + I_0. \tag{2}$$

Tehát nyilván

$$A = I_s + \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{m} I_t \quad \text{minden } s \text{ indexre } (1 \leqq s \leqq m). \tag{3}$$

Legyen

$$K_s = \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{m} I_t.$$

Ekkor (3) alapján $A = I_s + K_s$ minden s-re $(1 \leqq s \leqq m)$, tehát létezik olyan $i_s \in I_s$ és $k_s \in K_s$, hogy

$$e = i_s + k_s. \tag{4}$$

Tekintsük a következő összegeket:

$$x_0 = \sum_{s=1}^{m} k_s x_s, \quad y_0 = x_0 + i_0 (i_0 \in I_0). \tag{5}$$

Ekkor $y_0 - x_0 \in I_0$ és

$$k_t \in K_t = \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{m} I_s \subseteqq \bigcap_{\substack{s=1 \\ s \neq t}}^{m} I_s \subseteqq I_s$$

miatt

$$\sum_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{m} k_t x_t \in I_s.$$

Ezért

$$k_s x_s - x_s = (e - i_j)x_s - x_s \in I_s,$$

következőleg

$$x_0 - x_s = \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{m} k_t x_t + (k_s x_s - x_s) \in I_s.$$

18. §. Steinfeld Ottó két problémájának a megoldása és egy eredményének az élesítése

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [48], [49] és [63] dolgozataiban található meg. (Megjegyezzük, hogy [63]-ban BECHTELL amerikai matematikus négy tételét megcáfoljuk.)

Legyen R egy kvázimoduláris maximális jobbideál az A (asszociatív) gyűrűben. A $Q = A^{-1}R = [x;\ x \in A,\ Ax \subseteq R]$ ideálhányadost kváziprimitív ideálnak nevezzük, az A/Q gyűrűt pedig kváziprimitív gyűrűnek.

STEINFELD OTTÓ kérdezte, hogy az összes kváziprimitív ideál D metszete egybeesik-e minden gyűrűben a J *Jacobson*-radikállal.

Szerző két bizonyítást is adott arra, hogy $D = J$. Az első [48] igen rövid és gyűrűelemekkel számol. Minthogy $D \subseteq J$, elég megmutatni, hogy $D \neq J$ lehetetlen. A másik bizonyítás, amely a [48] dolgozatban szerepel, gyűrűelemek használata nélkül mutatja meg négy metszetnek, köztük D-nek és J-nek az egyenlőségét. STEINFELD OTTÓ még kéziratban olvasta a [48] dolgozatot, és ennek a módszereit is felhasználva bebizonyította [32], hogy minden kváziprimitív ideál primitív ideál. STEINFELD OTTÓ [32] azt is igazolta, hogy ha R kvázimoduláris maximális jobbideál, akkor *létezik* egy olyan $x \in A$ és $x \notin R$ elem, hogy $[x]^{-1}R$ moduláris maximális jobbideál, és hogy teljesül:

$$A^{-1}R = A^{-1}[x]^{-1}R.$$

Élesebben igaz a következő:

76. TÉTEL. *Ha R egy kvázimoduláris maximális jobbideál az A gyűrűben, akkor minden olyan $x \in A$ elemre, amelyre $x \notin R$, érvényes, hogy*

$$P_x = (xA)^{-1}R$$

primitív ideál A-ban (tehát lényegében minden x-re egy x helyett).

Bizonyítás. Szerző [48] szerint $R_x = [x]^{-1}R$ moduláris maximális jobbideál, ha R kvázimoduláris maximális jobbideál. (Ugyanis, [48]-t követve, R_x jobbideál, és $A^2 + R = A$ miatt $RA^{-1} = R$, tehát minden $x \in A$, $x \notin R$ elemre $xA + R = A$. Ezért minden $x \notin R$ elemhez van olyan $y \in A$, hogy $xy \notin R$, ezért $y \notin R_x$, tehát $R_x \neq A$. Ha $z \in A$ és $z \notin R_x$, akkor $xz \notin R$ és $xzA + R = A$, tehát tetszőleges $b \in A$ elemhez van olyan $a \in A$, $r \in R$, hogy

$$xza + r = xb.$$

Ennélfogva $x(b-za)=r\in R$, tehát $b-za\in R_x$ és $zA+R_x=A$, mert $b\in A$ tetszőleges elem. Ezért R_x maximális jobbideál A-ban. $xza_1+r_1=x$ teljesül bizonyos $a_1\in A$ és $r_1\in R$ elemekre, ahonnan $x(1-za_1)=r_1\in R$, tehát $x(1-za_1)A\subseteqq R$ és $(1-za_1)A\subseteqq R_x$ miatt R_x moduláris.

Minthogy pedig

$$A((xA)^{-1}R) = (xA+R)((xA)^{-1}R) \subseteqq R,$$

következésképpen $(xA)^{-1}R\subseteqq A^{-1}R$. Másfelől, ha $y\in A^{-1}R$, akkor $A^{-1}R=(xA+R)^{-1}R$ miatt $xAy\subseteqq R$, tehát $y\in(xA)^{-1}R$, ezért $A^{-1}R=(xA)^{-1}R$ minden $x\in A$, $x\notin R$ elemre. Triviálisan igaz, hogy $(xA)^{-1}R=A^{-1}[x]^{-1}R=A^{-1}R_x^{-1}$, amivel a tételt bebizonyítottuk.

STEINFELD OTTÓ definiált egy T tulajdonságot egy A gyűrű maximális R jobbideáljaira: R egy T-tulajdonságú maximális jobbideál, ha minden $a\in A$, $a\notin R$ és minden $c\in A$ elemhez létezik olyan $b\in A$ elem, hogy teljesül:

$$abc-c^2\in R.$$

STEINFELD OTTÓ azt kérdezte, hogy tartalmazás szempontjából az összes T-tulajdonságú maximális jobbideál I metszete hogyan viszonylik a J *Jacobson*-radikálhoz.

77. TÉTEL. *Minden R maximális jobbideál T-tulajdonságú. Ezért $I=\Phi_r$ és $AJ\subseteqq I\subseteqq J$ minden A gyűrűben,*

Bizonyítás. Ha $A^2\subseteqq R$, akkor $abc-c^2\in R$ minden a, b, c elemre. Ha pedig $A^2\nsubseteqq R$, akkor A/R egyszerű A-jobbmodulus, tehát N. JACOBSON ([19], 5. oldal) 1.2. Állítása szerint ciklikus is. Ezért létezik olyan moduláris maximális M jobbideál, hogy A/M és A/R egymással A-izomorfok. Minden $a\in A, a\notin R$ elemre $aA+R=A$, ezért minden $c\in A$ elemre:

$$c^2\in Ac = (aA+R)c \subseteqq aAc+R$$

érvényes, tehát van olyan $b\in A$ és $r\in R$, hogy

$$c^2 = abc+r,$$

amiből $abc-c^2 = -r\in R$ adódik. Ezért $I=\Phi_r$.

19. §. Bizonyos egyszerű Jacobson-radikálgyűrűkről

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [56] és [76] dolgozataiban szerepel.

Egy A gyűrű egyszerű, ha $A^2=A$ és A-ban csak 0 és A kétoldali ideálok. Miként jól ismeretes, E. SASIADA [19] adott meg példát egyszerű *Jacobson*-radikálgyűrűre, amely nem zérus, tehát nem is nilpotens. (Ugyanis $A^m=0$ és $A^2=A$ esetén $A=0$.)

Legyen A egy *Jacobson*-radikálgyűrű. Minden $a\in A$ elemre

$$\varphi_a : x \to (1-a)x(1-a)^{-1}$$

az A gyűrűnek egy kvázibelső-automorfizmusa. Itt 1 operátor és $(1-a)^{-1}=1-b$, ahol $a+b-ab=0$.

Jelölje $\bar{x}$ az x elem összes kvázibelső automorf képének a halmazát.

78. TÉTEL. *Legyen A olyan nemzérus Jacobson-radikálgyűrű, amelyre az $\bar{x}$ halmazzal generált $\{\bar{x}\}$ részgyűrű minden $x\in A$ elemmel kommutatív és az alábbi feltételek egyike teljesül:*

1. *A-ban nincs nemzérus nilpotens elem,*
2. *A-ban nincs olyan elem, amely egyidejűleg balnullosztó és jobbnullosztó,*
3. *A nullosztómentes.*

Akkor az $\bar{x}$ halmaz végtelen minden nemzérus $x\in A$ elemre.

Bizonyítás. 3.-ból következik 2., 2.-ből következik 1. és 1.-ből, mert A prímgyűrű, következik 3. Ezért azt igazoljuk, hogy 2. feltételű egyszerű *Jacobson*-radikálgyűrűben az $\bar{x}$ halmaz végtelen, ha $x\neq 0$. Ha ugyanis $\bar{x}$ véges volna, legyen

$$y=\prod_{z\in\bar{x}} z.$$

Ekkor $y=y\varphi_a$ minden φ_a kvázibelső automorfizmusra és az $R=yA$ jobbideálra $R\varphi_a\subseteq R$. Ezért

$$(1-a)R(1-a)^{-1}\subseteq R,$$

tehát $(1-a)R\subseteq R(1-a)\subseteq R$. Más szóval $r-ar\in R$ minden $a\in R$ elemre, ennélfogva $AR\subseteq R$. Tehát $R=A$ vagy $R=0$. De $yA=R=A$ lehetetlen, mert ekkor volna olyan $v\in A$ és $w\in A$, hogy $yv=y$ és $v+w-vw=0$, amiből

$$y=y(1-v-w+vw)=(y-yv)(1-w)=0$$

adódik. De $yA=0$ esetén is $y=0$, mert $A^2\neq 0$. Viszont $y=0$ esetén

$$\prod_{i=1}^{k} x\varphi_{a_i}=0$$

miatt

$$x\cdot\left(\prod_{i=2}^{k-1} x\varphi_{a_i}\right)x=0,$$

tehát 2. alapján $x=0$.

79. TÉTEL. *Az előző jelölésekkel $A=\sum_{z\in\bar{x}} zA$ érvényes az A egyszerű Jacobson-radikálgyűrű minden $x\in A$ elemére.*

Bizonyítás. Ha $R=\sum_{z\in\bar{x}} zA$, akkor mindig $R\varphi_a\subseteq R$, tehát $AR\subseteq R$ és $R=A$.

A továbbiakban olyan A *Jacobson*-radikálgyűrűket vizsgálunk, amelyekre $x\neq 0$ és $y\neq 0$ esetén mindig $\bar{x}=\bar{y}$. Tehát csak két ekvivalencia osztály van $\bar{0}$ és $\bar{x}=A\setminus 0$. Az ilyen gyűrűket *Ω-gyűrűknek* nevezzük. $\bar{x}=\bar{y}$ miatt van olyan z, hogy

$$(*)\qquad x=(1-z)y(1-z)^{-1}.$$

Ezért, ha $A^2=A$, akkor A egyszerű gyűrű, amely algebra egy K_p ($p=0$ vagy prímszám) prímtest felett.

80. TÉTEL. *Ha egy Ω-gyűrűben vannak nemzérus nilpotens elemek, akkor $A^2=0$ és $|A|=2$.*

Bizonyítás. Feltételünk és $(*)$ alapján A olyan ideálmentes gyűrű, amelyben minden nemzérus elem négyzete 0. Így

$$0 = (x+y)^2 = xy+yx$$

miatt $yx = -xy$, és szintén $(*)$ alapján

$$x = (1-z)y(1-z)^{-1} = (1-z)y(1+z) = y+2yz \in (y)_r.$$

$(y)_r$ tehát minimális jobbideál, amelyre $(y)_r = A$, ennélfogva $A^2=0$ és $|A|=2$.

81. TÉTEL. *Nilpotens elem nélküli A Ω-gyűrű zérusosztómentes, és ha K_p az A algebra operátorprímteste, akkor minden $x \in A$ elem transzcendens K_p felett. Továbbá minden nemzérus $a \in A$ elemhez és minden $f(x) \in xZ[x]$ polinomhoz van olyan $c \in A$ elem, hogy $a=f(c)$. Speciálisan, ha $a^m+b^m \neq 0$, van olyan $c \in A$, hogy $a^m+b^m=c^m$.*

Bizonyítás. Nilpotens elem nélküli Ω-gyűrű $A^2 \neq 0$ miatt egyszerű, tehát prímgyűrű, és minden nilpotens elem nélküli prímgyűrű zérusosztómentes. (Ugyanis $xy=0$ és $x \neq 0$ esetén $(yAx)^2=0$, tehát $yAx=0$ és $(y)(x)=0$ miatt $(y)=0$, tehát $y=0$.) N. JACOBSON ([19], 1.10.1 Tétel) alapján A minden eleme transzcendens K_p felett, mert A nilpotens elem nélküli. Ezért ha $a \neq 0$, $a \in A$, és ha $f(x) \in z, Z[x]$, akkor $a^* = f(a) \neq 0$. Van tehát olyan $b \in A$ elem, hogy

$$a^* = f(a) = a\varphi_b = (1-b)a(1-b)^{-1}.$$

Legyen $c = a\varphi_{b^*} = (1-b)^{-1}a(1-b)$, ahol tehát

$$\varphi_b \cdot \varphi_{b^*} = \varphi_{b^*} \cdot \varphi_b = 1, \qquad b+b^*-bb^* = 0.$$

Ekkor nyilván b^* kváiinverze b-nek és fennáll:

$$f(c) = f(a\varphi_{b^*}) = f(a) \cdot \varphi_{b^*} = a\varphi_b \varphi_{b^*} = a \cdot 1 = a.$$

Ha $a_1^m+b_1^m \neq 0$ és $f(x)=x^m$, nyilván van olyan $c_1 \in A$ elem is, hogy $a_1^m+b_1^m=c_1^m$, amivel a tételt bebizonyítottuk.

82. TÉTEL. *Legyen A zérusosztómentes Ω-gyűrű, $x \neq 0$, $x \in A$ és $x+x'-xx'=0$, $x+x'-x'x=0$. Tegyük fel azt, hogy $2y-y^2 \in \{x, x'\}$ esetén mindig $y \in \{x, x'\}$, ahol $\{v, w\}$ jelenti a v és w által generált részgyűrűt. Ekkor minden x elemnek a C_x centralizátora bővebb, mint $\{x, x'\}$.*

Bizonyítás. Van olyan $z \in A$ elem, hogy $x'=(1-z)x(1-z)^{-1}$. Minthogy $(1-x)(1-x')=(1-x')(1-x)=1$, ahol 1 operátor,

$$(1-x')\big(1-(1-z)x'(1-z)^{-1}\big) = 1,$$

amiből a kváziinverz egyértelműsége miatt $x=(1-z)x'(1-z)^{-1}$, tehát $x=(1-z)^2 \cdot$ $\cdot x(1-z)^{-2}$ és $x'=(1-z)x'(1-z)^{-2}$. Ezért $c=2z-z^2 \in C_x \cap C_{x'}$. Triviálisan $\{x, x'\} \subseteq$ $\subseteq C_x \cap C_x$. Ha $2z-z^2 \in \{x, x'\}$ volna, akkor a Tételben kimondott feltétel szerint $z \in \{x, x'\}$, de ekkor $z \in C_x \cap C_{x'}$, tehát z definíciója miatt $x'=x$ és így $2x-x^2=0$ volna, ami a 81. Tétel szerint $x \neq 0$ esetén lehetetlen. Ezért $c \notin \{x, x'\}$ és így tényleg fennáll, hogy

$$\{x, x'\} \subsetneqq \{x, x', c\} \subseteq C_x \cap C_{x'} \subseteq C_x.$$

V. FEJEZET

A JACOBSON-RADIKÁL NEMZÉRUS JOBBTALPÚ GYŰRŰKBEN

20. §. Szele, Fuchs és Kertész közös problémájának megoldása jobbartin-féle gyűrűk széthasíthatóságáról

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [44] dolgozatában található.

Jobb talpon a gyűrű összes minimális jobbideáljának az összegét értjük. MHR-gyűrűkben és jobbartin-féle gyűrűkben a jobbtalp nemzérus. Egy A jobbartin-féle gyűrűt széthasíthatónak nevezünk, ha A egy torziómentes ideáljának és egy torzióideáljának a direkt összege. E direkt összeadandók, mint A homomorf képei, szintén jobbartin-féle gyűrűk. Ha $A=J(A)$ és A jobbartin-féle, akkor A nilpotens, és minthogy ekkor A^+ torziócsoport, ezért A széthasítható. Másrészt, ha $J(A)=0$ és A jobbartin-féle gyűrű, akkor A, mint (A, A)-duplamodulus teljesen reducibilis, tehát a maximális torzióideál direkt összeadandó, és ezért A ekkor is széthasítható. Másrészt FUCHS és SZELE [12] igazolta azt, hogy ha nincs $C(p^\infty)$ alcsoport A^+-ban, akkor az A jobbartin-féle gyűrű mindig széthasítható.

SZELE még 1953-ban kérdezte, hogy létezik-e vegyes additív csoportú, gyűrűelméletileg direkt felbonthatatlan, jobbartin-féle gyűrű.

Ezzel ekvivalens FUCHS és SZELE 1955-ből való problémája:

Vajon minden jobbartin-féle gyűrű széthasítható-e?

1961 őszén ugyanezt a problémát KERTÉSZ ANDOR újra felvetette Oberwolfachban, a Gyűrűelméleti Konferencián tartott előadásában.

Minthogy $C(p^\infty)$ benne van az A jobbartin-féle gyűrű kétoldali annihilátorában, és az annihilátor pedig a $J(A)$ *Jacobson*-radikálban és minthogy $C(p^\infty)$-t nem tartalmazó, jobbartin-féle gyűrűk, vagy ha $A=J(A)$ vagy ha $J(A)=0$, széthasíthatók, a *Jacobson*-radikálnak nyilván szerepe van A széthasíthatóságában.

Ebben a §-ban minden A jobbartin-féle gyűrűre megoldjuk az említett *Szele—Fuchs—Kertész*-féle problémát, mert igazoljuk, hogy minden jobbartin-féle gyűrű széthasítható.

83. TÉTEL. *Ha egy torziómentes A gyűrűben minden R jobbideál additív csoportja osztható, akkor A Divinsky-radikálgyűrű, azaz $a\in aA$ érvényes minden $a\in A$ elemre.*

Bizonyítás. Tegyük fel azt, hogy van olyan $a\in A$, hogy $a\notin aA$. Ha $ka=aa_1\in aA$ volna egy $k\neq 0$, $k\in Z$ számmal, akkor volna olyan $a_2\in A$, hogy $a_1=ka_2$, tehát

$$ka = kaa_2, \qquad k(a-aa_2) = 0,$$

így $a=aa_2\in aA$, ami lehetetlen. Ezért $Za\cap aA=0$ és minthogy $(a)_r^+=(Za+aA)^+$ osztható csoport, $Za\cong(a)_r^+/aA^+$ is osztható, ami lehetetlen. Ezért valóban $a\in aA$ teljesül minden $a\in A$ elemre.

84. TÉTEL. *Ha $a\in aA$ minden $a\in A$ elemre, és ha van olyan $e\in A$ idempotens elem, hogy $b-be\in J$, ahol J az A Jacobson-radikálja, akkor e jobbegységelem A-ban.*

Bizonyítás. Legyen $a \in A$ tetszőleges elem, és $e^2 = e \in A$ olyan idempotens elem, hogy $b - be \in J$ minden $b \in A$ elemre. Van olyan $a_2 \in A$ elem, hogy $a_1 = a_1 a_2$, ahol $a_1 = a - ae$. Ezért fennáll, hogy

$$a - ae = (a - ae)(a_2 - a_2 e) + (a - ae)a_2 e.$$

Szorozzuk meg e-vel jobbról ezt az egyenlőséget:

$$(a - ae)a_2 e = 0,$$

tehát

$$a - ae = (a - ae)(a_2 - a_2 e).$$

Minthogy $a_2 - a_2 e \in J$, van olyan a_3 elem, hogy

$$(a_2 - a_2 e) + a_3 - (a_2 - a_2 e)a_3 = 0,$$

ennélfogva

$$a - ae = (a - ae)\big(1 - (a_2 - a_2 e) - a_3 + (a_2 - a_2 e)a_3\big) =$$

$$= (a - ae)\big(1 - (a_2 - a_2 e)\big)(1 - a_3) = 0.$$

Tehát $a = ae$, és így e tényleg jobbegységelem A-ban.

85. TÉTEL. *Bármilyen torziómentes jobbartin-féle gyűrű jobbegységelemes.*

Bizonyítás. A-nak a J *Jacobson*-radikálja nilpotens. Minthogy A^+ torziómentes, ezért $J \neq A$, mert $J = A$ esetén A^+ torziócsoport volna. Minthogy A/J egységelemes és J nilpotens, van olyan $0 \neq e \in A$ idempotens elem, hogy $e + J$ éppen A/J egységeleme lesz. Ekkor $a - ae \in J$ minden $a \in A$ elemre. Legyen R tetszőleges jobbideál A-ban, és legyen mR minimális az nR alakú jobbideálok közt $(m, n \in Z)$. Ekkor mR^+ osztható, tehát $R^+ = mR^+ + K$, ahol K egy alkalmas additív alcsoport A^+-ban. Minthogy $K \cong R/mR$ m-korlátos elemrendű és A^+ torziómentes, ezért $K = 0$ és $R^+ = mR^+$ osztható csoport. Ennélfogva $a \in aA$ érvényes a 83. tétel alapján, és A-ban e jobbegységelem lesz a 84. Tétel alapján. Ezzel a 85. Tételt bebizonyítottuk.

86. TÉTEL. *Minden jobbartin-féle A gyűrű széthasítható.*

Bizonyítás. Legyen P az A maximális torzió ideálja. Ekkor A *Everett*-bővítése P-nek a torziómentes A/P gyűrűvel. Minthogy $A^+ = B + C + D$, ahol B korlátos elemrendű *Abel*-csoport, C véges sok $C(p^\infty)$ direkt összege és D torziómentes osztható csoport, nyilván $P^+ = B + C$. Legyen $T = A/P$. Ekkor, mind a $[t_1, t_2]$ additív faktorrendszer, mind pedig a pt és tp $(p \in P, t \in T)$ endomorfizmus-rendszerek választhatók azonos zérusnak, mert $A^+ = P^+ + D$. Legyen $\langle t_1, t_2 \rangle$ az *Everett*-bővítés multiplikatív faktorrendszere.
Ekkor

$$\langle t_1 + t_2, t_3 \rangle = \langle t_1, t_3 \rangle + \langle t_2, t_3 \rangle$$

$$\langle t_1, t_2 + t_3 \rangle = \langle t_1, t_2 \rangle + \langle t_1, t_3 \rangle,$$

valamint $\langle t_1, t_2 t_3 \rangle = \langle t_1 t_2, t_3 \rangle$, ahol $t_i \in T$. Minthogy a torziómentes jobbartin-féle $T = A/P$ gyűrűnek van egy e jobbegységeleme, $\langle t_1 t_2, e \rangle = \langle t_1, t_2 \rangle$. Ekkor

$$\varphi : t \to \langle t, e \rangle$$

additív homomorfizmusa T^+-nak P^+-ba és

$$(t_1 t_2)\varphi = \langle t_1 t_2, e\rangle = \langle t_1, t_2\rangle.$$

Minthogy $T^+ \cong (A/P)^+ = D$, ezért $T\varphi$ osztható, tehát $T\varphi \subseteq B$. Ennélfogva A formálisan az összes (p, t) rendezett pár halmaza, ahol a párok egyenlőségét triviálisan értelmezzük, az összeadást is triviálisan, azaz

$$(p_1, t_1)+(p_2, t_2) = (p_1+p_2, t_1+t_2).$$

A szorzás pedig

$$(p_1, t_1)\cdot(p_2, t_2) = (p_1\cdot p_2+(t_1\cdot t_2)\varphi, t_1 t_2).$$

Az összes $(t\varphi, t)$ alakú elem A-ban egy torziómentes Q ideált képez, és $Q \subseteq A^2$, mert B — ami véges sok $C(p^\infty)$ összege — A kétoldali annihilátorában fekszik. Minthogy pedig $(p, t) = (p - t\varphi, 0) + (t\varphi, t)$, ahol $(p - t\varphi, 0) \in P$, $(t\varphi, t) \in Q$, továbbá $P \cap Q = 0$, nyilván $A = P \oplus Q$. Ezzel a 86. Tételt bebizonyítottuk.

MEGJEGYZÉS. Később J. N. HERSTEIN [14] másik bizonyítást adott arra, hogy torziómentes jobbartin-féle gyűrű jobbegységelemes, és szintén később KERTÉSZ ANDOR [22] az *Everett*-bővítések nélkül bebizonyított egy általánosabb $A = P \oplus Q$ széthasíthatósági tételt, de KERTÉSZ ANDOR szintén feltette azt, hogy $Q \cong A/P$ jobbegységelemes gyűrű.

21. §. Szele, Rédei és Kertész egy közös problémájának a megoldása olyan gyűrűk létezéséről, melyeknek csak véges sok jobbideáljuk, de végtelen sok balideáljuk van

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [42] dolgozatában található.

SZELE TIBOR [89] 1949-ben kérdezte, hogy létezik-e olyan gyűrű, amelynek csak véges sok jobbideálja, de végtelen sok balideálja van.* Ugyanezt a kérdést RÉDEI [26] Algebra I. könyve 211. oldalán 1959-ben újra felveti. KERTÉSZ ANDOR pedig 1961-ben, az Oberwolfachban tartott Gyűrűelméleti Konferencián, előadásában veti fel ugyanezt a *Szele*-féle problémát. Később HAJNAL ANDRÁS egy másik, ilyen típusú kérdést vetett fel. E §-ban ezeket a kérdéseket oldjuk meg.

Példa. Legyen F tetszőleges ferdetest, $\varphi: F \to F\varphi$ az F-nek egy önmagába való izomorfizmusa pl. F legyen a K_0 racionális számtestnek egy $\aleph_\nu$ transzcendenciafokú transzcendens testbővítése, ahol $[\dots, t_\alpha, \dots]$ lesz egy $\aleph_\nu$-számosságú transzcendenciabázisa. Legyen A_0 az összes

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} z^k f_k$$

formális hatványsor halmaza, ahol z transzcendens elem F felett, $Z^0 = 1 \in F$ és $f_k \in F$. Ekkor A_0 egy (F, F)-duplaalgebra lesz, ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k f_k + \sum_{k=0}^{\infty} z^k g_k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k (f_k + g_k),$$

* Ha A ilyen gyűrű, akkor a $J(A)$ *Jacobson*-radikálra nyilván $0 \neq J(A) \neq A$ teljesül.

továbbá $fz=zf\varphi$ és $fz^k=z^kf\varphi^k$. Legyen két hatványsor szorzata a következő:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k f_k\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty} z^l g_l\right) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \left(\sum_{m=k+l} f_k\varphi^l, g_l\right).$$

Minthogy a hatványsorok együtthatóit jobbról írtuk, ezek lényegileg jobbhatványsorok, de $fz=z(f\varphi)$ miatt bármely balhatványsor átírható jobbhatványsorba, és $(f\varphi^{-1})z=zf$ alapján bármely jobbhatványsor is átírható balhatványsorrá.

Legyen R tetszőleges jobbideál A_0-ban, $r_k=\sum_{j\geq k}^{\infty} z^j f_j$ olyan elem, ahol $f_k\neq 0$ és k minimális. Minthogy

$$\begin{aligned} f_k h_0 &= g_k \\ (f_k\varphi)h_1+f_{k+1}h_0 &= g_{k+1} \\ (f_k\varphi^2)h_2+(f_{k+1}\varphi)h_1+f_{k+2}h_0 &= g_{k+2} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \end{aligned}$$

egyenletek a $h_0, h_1, h_2, \ldots$ ismeretlenekre megoldhatók, belátható, hogy $R=(r_k)_r$ főjobbideál. Tehát A_0-ban minden jobbideál egy $(z^k)_r$ alakú főjobbideál. Az A_0 balideálhálója erősen függ attól, hogyan választjuk meg az

$$F\to F\varphi$$

testizomorfizmust. Nyilván A_0 lokális gyűrű, amelyben $(z)_r=zA_0$ az egyetlen maximális ideál és $F\cong A_0/zA_0$, $zA_0=J(A)$.

87. TÉTEL. *Minden $n\geqq 3$ természetes számhoz és minden $\aleph_\nu$ végtelen számossághoz van olyan A jobbartin-féle gyűrű, hogy teljesül:*

1. *A egységelemes, és A-nak pontosan $\aleph_\nu$ számú eleme van;*
2. *A jobbideálhálója n-elemű lánc, és minden jobbideál kétoldali ideál;*
3. *A balideálhálójának $\aleph_\nu$ számú eleme van, és ez a háló véges hosszúságú.*
4. *A-nak pontosan $\aleph_\nu$ számú főbalideálja van.*

Bizonyítás. Legyen $A=A_0/z^{n-1}A_0$ és F a K_0 racionális számtestnek $[\ldots, t_\alpha, \ldots]$ transzcendencia-bázisú, $\aleph_\nu$ transzcendencia-fokú transzcendens testbővítése, és legyen

$$t_\alpha\varphi = \begin{cases} t_\beta^n, & \text{ha} \quad \alpha=\beta \\ t_\alpha, & \text{ha} \quad \alpha\neq\beta. \end{cases}$$

A $\varphi\colon t_\alpha\to t_\alpha\varphi$ leképezés, amely K_0 elemeit rögzítve hagyja, kiterjeszthető F-nek egy testizomorfizmusává. Ekkor F rangja az $F\varphi$ résztest felett éppen n, és közvetlenül igazolható, hogy az $A=A_0/z^{n-1}A_0$ faktorgyűrűre 1., 2., 3. és 4. feltételek teljesülnek.

Még 1962 tavaszán említettem HAJNAL ANDRÁSnak a 87. Tételem tartalmát, és akkor HAJNAL ANDRÁS azt kérdezte, hogy lehetséges-e az, hogy a gyűrűnek $\aleph_\nu$ eleme, $2^{\aleph_\nu}$ balideálja, de csak véges sok jobbideálja van. (Itt $2^{\aleph_\nu}$ nyilván a halmazelméleti maximum.) Ekkor bebizonyítottam a következőt:

88. TÉTEL. *Minden* $n \geqq 3$ *természetes számhoz és minden* $\aleph_\nu$ *végtelen számossághoz létezik olyan jobbartin-féle A gyűrű, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:*

1. *A egységelemes, és A-nak pontosan* $\aleph_\nu$ *számú eleme van;*
2. *A jobbideálhálója n-elemű lánc, és minden jobbideál kétoldali ideál;*
3. *A balideálhálója pontosan* $2^{\aleph_\nu}$ *elemű, és a balideálháló* $\aleph_\nu$*-hosszúságú.*
4. *Léteznek a balideálhálóban fogyó és növő,* $\aleph_\nu$*-elemű láncok, tehát A sem balartin-féle, sem balnoether-féle gyűrű;*
5. *A-nak* $\aleph_\nu$*-számú főbalideálja van, de a főbalideálok láncainak hosszai összességükben végesek, és korlátosak.*

Bizonyítás. Legyen $A = A_0/z^{n-1}A_0$, és φ úgy megválasztva, hogy az F rangja $F\varphi$ résztest felett éppen $\aleph_\nu$ legyen. Ez például történhetik úgy, hogy minden α indexre a transzcendencia-bázisnak a

$$t_\alpha \varphi = t_\alpha^2 \quad \text{(minden } \alpha \text{ indexre)}$$

leképezését kiterjesztjük F önmagába való $\varphi\colon F \to F\varphi$ izomorfizmusává. Ekkor F rangja $F\varphi$ felett tényleg $\aleph_\nu$. Igazolható, hogy 1., 2., 3., 4. és 5. teljesül az $A = A_0/z^{n-1}A_0$ faktorgyűrűre.

89. TÉTEL. *Minden* $(\aleph_\mu, \aleph_\nu)$ *végtelen számosságpárhoz létezik olyan egységelemes, balról és jobbról is Artin-féle C gyűrű, amelynek pontosan* $\aleph_\nu$ *számú balideálja és pontosan* $\aleph_\nu$ *számú jobbideálja van.*

Bizonyítás. A 87. Tétel alapján van olyan A gyűrű, amelynek n $(\geqq 3)$ jobbideálja és $\aleph_\nu$ balideálja van. Továbbá legyen B antiizomorf egy olyan A'-gyűrűhöz, hogy A'-nek n jobbideálja és $\aleph_\mu$ balideálja van. Ekkor B-nek n balideálja és $\aleph_\mu$ jobbideálja van. Ekkor a

$$C = A \oplus B$$

direkt összegnek pontosan $\aleph_\nu$ balideálja és pontosan $\aleph_\mu$ jobbideálja van.

Megjegyezzük, hogy szerző ([42], Satz 2.5) explicit meghatározta mindazokat a gyűrűket, amelyeknek pontosan három jobbideáljuk van. SZÉP JENŐ [90] olyan G csoportokat vizsgált korábban, amelyeknek 1, N és G, ahol $1 \neq N \neq G$, az összes normálosztója. Szerző ([42], Satz 2.7) szerint minden három jobbideálos A gyűrűben teljesül a főbalideálok minimum-feltétele, és ha ekkor a balideálháló végtelen, akkor A egységelemes.

Probléma. Teljesül-e a gyűrűben a főbalideálok minimum-feltétele, ha a jobbideálháló véges?

22. §. Hans-Jürgen Hoehnke egy problémájának megoldása bizonyos nemzérus jobbtalpú primitív gyűrűknek a körművelettel való jellemzéséről

E §-nak az anyaga a szerző [64] dolgozatában található meg.

Ismeretes, hogy az A gyűrű akkor és csak akkor *Jacobson*-radikálgyűrű, ha elemei az $x \circ y = x + y - xy$ körművelettel csoportot alkotnak. Tetszőleges A gyűrűben az elemek a körművelettel egységelemes félcsoportot alkotnak és éppen $0 (\in A)$

lesz e félcsoportnak az egységeleme. Ez az adjungált félcsoport akkor és csak akkor „jó", ha a gyűrű „rossz". H. J. HONEHKE azt kérdezte, hogy a körművelet felhasználásával hogyan jellemezhetők bizonyos *Jacobson*-féligegyszerű gyűrűk. Eredményképpen bizonyos nemzérus jobbtalpú primitív gyűrűket, éspedig kételemű testeket fogunk kapni. Ezeknek legfőbb jelentőségük a kétértékű logikában és a *Boole*-algebrák elméletében van, ui. *Stone*-tétele szerint bármely *Boole*-gyűrű (vagyis $a^2=a$ minden $a \in A$ elemre) kételemű testeknek egy szubdirekt összege, és tudvalevőleg a *Boole*-algebrák és *Boole*-gyűrűk egymást kölcsönösen és egyértelműen meghatározzák.

Legyen S egy tetszőleges absztrakt félcsoport. S-nek egy $s \in S$ elemét jobbkváziregulárisnak nevezzük, ha minden $t, u \in S$ elemhez létezik olyan nemnegatív m és n kitevő, hogy

$$s^m t = s^n u.$$

(Ha esetleg $m=0$, akkor legyen $s^0=1$, az egységoperátor, vagy S egységeleme, ha S egységelemes.)

Az e egységelemes S félcsoportot majdnem jobbkváziregulárisnak (ill. majdnem nil-nek, majdnem nilpotensnek, majdnem triviálisnak) nevezzük, ha $S=e \cup Q, e \notin Q$ és a Q ideál minden eleme jobbkvázireguláris (illetve, Q zéruselemes, és Q nil félcsoport; Q nilpotens félcsoport, ill. $Q^2=0$).

Az A gyűrű elemeinek a körművelettel ellátott egységelemes félcsoportját a gyűrű adjungált félcsoportjának nevezzük.

90. TÉTEL. *Egy A gyűrűre, illetve A-nak az S adjungált félcsoportjára az alábbi tizenhárom feltétel egymással ekvivalens:*

1. *S majdnem jobbkvázireguláris;*
2. *S majdnem jobbkvázireguláris és van olyan $e \in S$ idempotens eleme, hogy $e \neq 1 \in S$ (itt $1 \in S$ éppen az A gyűrű zéruseleme lesz, és S esetleges zéruseleme pedig A esetleges (kétoldali) egységeleme);*
3. *S balzéruselemes és majdnem jobbkvázireguláris;*
4. *S jobbzéruselemes és majdnem jobbkvázireguláris;*
5. *S zéruselemes és majdnem jobbkvázireguláris;*
6. *S zéruselemes és majdnem nil;*
7. *S zéruselemes, majdnem nil és elemei korlátos nilpotenciafokúak;*
8. *S zéruselemes és majdnem nilpotens;*
9. *S zéruselemes, majdnem nilpotens és kommutatív;*
10. *S zéruselemes és majdnem triviális;*
11. *S zéruselemes, majdnem triviális és véges;*
12. *S kételemű félcsoport és szorzótáblája*

	a	b
a	a	a
b	a	b

13. *S egy kételemű A test adjungált félcsoportja.*

Bizonyítás. Az 1., 2., ..., 12. és 13. feltételek logikai összefüggése olyan, hogy ha igazoljuk csupán 1. és 13. ekvivalenciáját, akkor már mind a tizenhárom feltétel ekvivalenciáját is igazoltuk. *Hoehnke*-gyűrűnek, röviden H-gyűrűnek nevezzük A-t, ha az S adjungált félcsoportra az 1. feltétel teljesül. Feltesszük tehát, hogy A egy H-gyűrű, és igazoljuk, hogy A kételemű test, tehát hogy teljesül 13. A bizonyítást kilenc lépésben végezzük el, ezeket a lépéseket *a)*-val, *b)*-vel, ... *h)*-val és *i)*-vel jelöljük.

a) Minden nemzérus x elemhez és tetszőleges y és z elemekhez van olyan nemnegatív kitevő, hogy $1-(1-x)^m(1-y)=1-(1-x)^n(1-z)$. Ennek bizonyítása a jobbkvázireguláris elem definíciója és $x\circ y=1-(1-x)(1-y)$ alapján adódik.

b) Ha A egy H-gyűrű és $0\neq e=e^2\in A$ idempotens elem, akkor e az A balegységeleme. Nyilván $(1-e)^2=1-e$, és ha *a)*-ban $x=y=e$, akkor $1-(1-e)=$ $=1-(1-e)(1-z)$, tehát $ez=z$ minden $z\in A$ elemre.

c) Minden A H-gyűrű minden $a\in A$ eleméhez van két különböző k és l kitevő, úgy hogy $1-(1-a)^k=1-(1-a)^l$. Ha ugyanis az *a)* állításban $x=y=a\circ a=2a-a^2$ és $z=a$, akkor

$$1-(1-a\circ a)^m(1-a\circ a) = 1-(1-a\circ a)(1-a)$$

bizonyos m és n nemnegatív kitevőkkel. Ezért

$$1-(1-a)^{2m+2} = 1-(1-a)^{2n+1}$$

és ez a két kitevő különbözik, mert baloldalon páros, jobboldalon páratlan szám a kitevő.

d) Bármely A H-gyűrű bármely nemzérus a eleméhez van olyan m kitevő, hogy minden $b\in A$ elemre

$$(1-a)^m b = 0$$

érvényes, ezért az $\{a\}$ részgyűrűnek mindig van egységeleme.

Ugyanis *c)* alapján az S adjungált félcsoport torziófélcsoport. Ezért S minden a eleme olyan részfélcsoportot generál, amelyben van egy e idempotens, amelyre $e\neq 0$ (0 az A zérus eleme). Ekkor $e=1-(1-a)^m$, és minthogy *b)* alapján $eb=b$ minden $b\in A$ elemre, ezért $(1-a)^m b=0$. Minthogy $e\in\{a\}$, ezért $\{a\}$ egységelemes.

e) Ha az A H-gyűrűben van az $a\in A$ elemnek kváziinverze, tehát $a\circ b=b\circ a=0$, akkor $a=0$.

Ugyanis, ha $a\neq 0$ és $(1-a)(1-b)=(1-b)(1-a)=1$, akkor minden m kitevőre $1-(1-b)^m(1-a)^m=0$. Viszont a *d)* lépés alapján $a\neq 0$ esetén van olyan m kitevő, hogy $(1-a)^m c=0$ minden $c\in A$ elemre, ezért

$$c = 1.\, c = (1-b)^m(1-a)^m c = (1-b)^m\cdot 0 = 0,$$

ami lehetetlen. Ezért $a=0$.

f) Bármely A H-gyűrű 2-karakterisztikájú, azaz $2A=0$. Ugyanis *d)* alapján minden $\{a\}$ részgyűrűben van egy e kétoldali egységelem, és minthogy

$$0 = 4e-4e = 2e+2e-2e\cdot 2e,$$

ezért $2e$-nek kváziinverze van, és így *e)* lépés alapján $2e=0$. Ekkor $x=ex$ miatt minden $x\in\{a\}$ elemre $2x=2(ex)=(2e)x=0x=0$, tehát $2A=0$.

g) Bármely A H-gyűrűnek van kétoldali egységeleme. Ugyanis *d)* alapján van e balegységelem A-ban. Ekkor $L=A(1-e)=[y-ye;\, y\in A]$ minden elemének négyzete nulla, tehát L minden elemének van kváziinverze A-ban. Ezért az *e)* lépés alapján $L=0$, tehát A egységelemes.

h) Bármely A H-gyűrűnek az adjungált félcsoportja majdnem nil. Ugyanis *g)* alapján A-nak van egységeleme, amely S-nek zéruseleme és H. SEIDEL [27] 3.3 Tételéből és 3.4 Tételéből következik, hogy S majdnem nil, mert SEIDEL [27] szerint zéruselemes félcsoport nil, ha minden eleme jobbkvázireguláris.

i) Bármely H-gyűrű kételemű test. Ugyanis *g)* alapján van 1 egységelem A-ban és minthogy pedig *h)* alapján S majdnem nil, minden nemzérus $a\in A$ elemére $a\circ b=a+b-ab$ miatt *d)* alapján $1-(1-a)^m=1$, $(1-a)^m=0$ teljesül alkalmas m kitevővel. Minthogy pedig $(1-a)$ nilpotens, van kváziinverze A-ban, tehát *e)* alapján $1-a=0$. Ezért $a=1$ és így A, minthogy a tetszőleges nemzérus elem A-ban, valóban kételemű test.

23. §. További eredmények nemzérus jobbtalpú gyűrűkkel és a Jacobson-radikállal kapcsolatban

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [39], [42] és [43] dolgozataiban található meg. Ebben a §-ban külön bizonyítások nélkül ismertetünk néhány eredményt.

Mint az 1.§-ban már említettük, STEINFELD OTTÓ kérdezte azt, hogy létezik-e olyan MHR-gyűrű (ez nyilván nemzérus jobbtalpú), amelyben az összes nilpotens ideál összege nem nilpotens. Az 1.§-ban 2)-nél tárgyalt (I, II, III)$=\uparrow$ esetnél explicit módon megadtunk olyan, végtelen sok elemmel generált MHR-nilgyűrűt, amely példa megoldja STEINFELD OTTÓ említett problémáját.

* * *

Szerző ([36], 477. oldal) egy A gyűrű R jobbideálját szabályosnak nevezte, ha R tartalmaz olyan e nemzérus idempotens elemet, hogy $R=eA$ és $Q=(1-e)AeA(1-e)$ nilpotens kváziideál, azaz $Q^n=0$ egy n kitevővel. Ismeretes, hogy a kváziideál fogalmát gyűrűkben (és félcsoportokban is) STEINFELD OTTÓ definiálta (lásd pl. [30]), és hogy a gyűrű jobbtalpában fekvő szabályos jobbideáloknak szerepük van abban, hogy a „jobbideálnak lennie reláció" tranzitív legyen. Ugyanis érvényes a következő:

91. TÉTEL. (1) *Ha $R=eA$, az e nemzérus idempotens elemmel generált szabályos főjobbideál az A gyűrűben, úgy hogy R az A gyűrű A_1 jobbtalpában fekszik, akkor az R gyűrű minden S jobbideálja egyszersmind A-nak is jobbideálja, továbbá $eA=eAe$ érvényes, és eAe jobbartin-féle Jacobson-féligegyszerű gyűrű, valamint $eN=0$, ahol N jelenti A összes nilpotens minimális jobbideáljának az összegét.*

(2) *Ha $N_0=Ne$ és $n\in N_0$, akkor $(e+n)^2=e+n$ és*

$$eA\oplus N=(e+n)A\oplus N,$$

továbbá $(e+n)A$ szintén szabályos jobbideál A-ban, és $(e+n)A$ szintén az A_1 jobbtalpban fekszik. Az

$$ex \leftrightarrow (e+n)x$$

megfeleltetés A-izomorfizmus eA-ról $(e+n)A$-ra. Ha $n_1 \in N_0$, $n_2 \in N_0$, és ha

$$(e+n_1)A = (e+n_2)A$$

akkor $n_1 = n_2$. Ha $n \in N_0$, akkor érvényesek a tartalmazások:

$$A(1-e) \subseteqq (1-e-n)A$$

és

$$A(1-e-n) \subseteqq (1-e)A.$$

(3) *Fordítva, ha R' az A olyan jobbideálja, hogy*

$$R' \oplus N = eA \oplus N$$

és ha $e=e^2$ és ha eA szabályos jobbideál, akkor R' is szabályos jobbideál és van olyan $m \in N_0 = Ne$ elem, hogy $R' = (e+m)A$.

(4) *Ha $e^2=e$, $f^2=f$, $eA=fA$ és ha eA szabályos főjobbideál A-ban, akkor $e=f$.*

(5) *Ha $Q=(1-e)AeA(1-e)$ nilpotens, akkor már $Q=0$.*

* * *

Szerző [39] dolgozatát követve, egy gyűrűt nevezzünk nemkommutatív főideálgyűrűnek, röviden F-gyűrűnek, ha bármely balideál főbalideál, és bármely jobbideál főjobbideál.

92. TÉTEL. *Minden F-gyűrűben a Baer-féle felső nilradikál minden nil egyoldali ideált tartalmaz, és ez a radikál egybeesik a Baer-féle alsó nilradikállal, tehát a Levitzki-féle radikállal is.*

93. TÉTEL. *Legyen A egy F-gyűrű és P az A-nak egy komplett prímideálja (azaz A/P nullosztómentes), és minden $x \in A$ elemre teljesüljön:*

$$x \in (xA+P) \cap (Ax+P).$$

Ekkor A/P egységelemes, és a minimum-feltétel teljesül mindazokra a jobb- és balideálokra, amelyek a P ideált és egy rögzített

$$b \in A, \quad b \notin P$$

elemet tartalmaznak.

94. TÉTEL. *Ha A egy F-gyűrű, P komplett prímideál A-ban, $x \in (xA+P) \cap \cap (Ax+P)$ minden $x \in A$ elemre teljesül, és ha P valódi ideál a Jacobson-radikálban, akkor $G=J$, ahol G a Brown—McCoy-féle radikál.*

95. TÉTEL. (1) *A akkor és csak akkor nemzérus jobbtalpú jobbprimitív F-gyűrű, ha A jobbartin-féle egyszerű gyűrű.* (2) *A akkor és csak akkor egységelemes Neumann-reguláris F-gyűrű, ha A jobbartin-féle Jacobson-féligegyszerű gyűrű.* (3) *Egy G Abel-féle csoport akkor és csak akkor egy F-nilgyűrű additív csoportja, ha G végesen generált Abel-féle csoport.* (4) *Az A F-nilgyűrű A^+ additív csoportja akkor és csak akkor torziómentes, ha van A-nak végtelenrendű balannihilátora (vagy jobbannihilátora).*

* * *

96. TÉTEL. (1) *Legyen M mindazon nilgyűrűk osztályával meghatározott alsó radikál, amelyek MHR-gyűrűk J Jacobson-radikáljai, tehát egyszersmind Baer-féle alsó nilradikáljai és T legyen az összes egyszerű MHR-gyűrű osztályával meghatározott felső radikál. Egy R általános radikál akkor és csak akkor esik J-vel egybe az MHR-gyűrűk osztályán, ha $M \leqq R \leqq T$.* (2) *Legyen N_0 a prímszámrendű zérógyűrűk osztályával meghatározott alsó radikál. Ha A egy MHR-nilgyűrű, amelynek minden B ideáljára $B \neq (B: A)_r \cap (B: A)_l$, akkor A egy N_0-radikálgyűrű.* (3) *Minden A MHR-gyűrűben a Jacobson-radikál T-nilpotens és transzfinit nilpotens.*

VI. FEJEZET

ZÉRUSELEMES FÉLCSOPORTOKNAK ÉS BIZONYOS AUTOMORFIZMUS-CSOPORTOKNAK A RADIKÁLJAIRÓL

24. §. Zéruselemes félcsoportok radikáljairól

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [47], [77], [79] és [80] dolgozataiban található meg. E § eredményeit bizonyítás nélkül közöljük. — Legyen S zéruselemes tetszőleges félcsoport, B és C két részhalmaz S-ben. Legyen

$$B^{-1}C = [x; x \in S, Bx \subseteqq C] \quad \text{és} \quad CB^{-1} = [y; y \in S, yB \subseteqq C].$$

Ezek a $B^{-1}C$ és CB^{-1} részhalmazok persze üresek is lehetnek. Ha B balideál és C is balideál, akkor $B^{-1}C$ ideál lesz. Tetszőleges B részhalmazra $B^{-1}C$ jobbideál, ha C jobbideál és CB^{-1} balideál, ha C balideál.

Jelölje Φ_r az S jobbfrattini jobbideálját, tehát Φ_r az S összes maximális jobbideáljának a metszete (ami persze üres is lehet), és legyen $\Phi_r = S$, ha nincs maximális jobbideál S-ben.

Egy R maximális jobbideált kvázimodulárisnak nevezünk, ha $S^{-1}R \subseteqq R$. Továbbá egy kétoldali $Q^{(r)}$ ideált jobbkváziprimitívnek nevezünk, ha van olyan kvázimoduláris maximális R jobbideál, hogy $Q^{(r)} = S^{-1}R$. Ekkor nyilván $Q^{(r)} \subseteqq R$. Bal-jobb dualitás alapján definiálható a kvázimoduláris maximális balideál és balkváziprimitív kétoldali ideál, továbbá a Φ_l balfrattini balideál. Legyenek:

1) $I_1 = S^{-1}\Phi_r$
2) $I_2 = \Phi \; S^{-1}$
3) $I_3 =$ az összes jobbkváziprimitív ideál metszete;
4) $I_4 =$ az összes balkváziprimitív ideál metszete;
5) $I_5 =$ az összes kvázimoduláris maximális jobbideál metszete; és
6) $I_6 =$ az összes kvázimoduláris maximális balideál metszete.

97. TÉTEL. (1) *I_1, I_2, I_3 és I_4 kétoldali ideálok, és érvényes, hogy*

$$I_1 \subseteqq I_3 \subseteqq I_5 \quad \text{és} \quad I_2 \subseteqq I_4 \subseteqq I_6.$$

(2) *Ha S-ben érvényes a baloldali törlési szabály (tehát $s \neq 0$ és $ss_1 = ss_2$ esetén mindig $s_1 = s_2$), akkor $\Phi_r \subseteqq I_1$.* (3) *Ha S-ben érvényes a baloldali törlési szabály, R kvázimoduláris maximális jobbideál, és ha $z \in S^2$, de $z \notin R$, akkor $R_z = [z]^{-1}R$ is kvázimodu-*

láris, és I_5 kétoldali ideál S-ben. (4) *Ha S-ben érvényes a baloldali törlési szabály, és ha R_z kvázimoduláris minden maximális R jobbideálra, akkor*

$$I_1 = I_3 = I_5.$$

MEGJEGYZÉS. Később H. SEIDEL [28] igazolta, hogy minden zéruselemes S félcsoportban

$$H = I_1 = I_3 (= I_2 = I_4),$$

ahol H jelenti S-nek a HOEHNKE-radikálját [17].

Probléma. Mi annak a kritériuma, hogy:

1. I_5 kétoldali ideál legyen, és hogy
2. $H = I_5$ legyen.

Szerző [77] zéruselemes félcsoportokra az *Amitsur—Kuros*-féle R radikálosztályt a következőképpen definiálta:

1. R zárt minden félcsoport-homomorfizmusra nézve;
2. Minden S zéruselemes félcsoport tartalmaz egy $R(S) \in R$ kétoldali ideált, amely minden más $I \in R$ ideált tartalmaz S-ben. Ezt az $R(S)$ ideált R-radikálnak nevezzük.
3. Az $S/R(S)$ *Rees*-féle faktor-félcsoport R-radikálja 0, azaz $R(S/R(S)) = 0$.

98. TÉTEL. (1) *Ha I ideál a zéruselemes S-félcsoportban, akkor R(I) ideál S-ben.* (2) *Bármely homomorfban zárt H zéruselemes félcsoportosztályból kiindulva transzfinit indukcióval definiálható egy (a Kuroš-féle alsó radikálosztályhoz hasonló, általában bővebb) $\bar{H} \supseteq H$ félcsoportosztály úgy, hogy ez a konstrukció már ω lépésben véget ér, ahol ω a legkisebb végtelen rendszám* [77].

Egy R félcsoport-radikál öröklődő (vö. szerző [79]), ha abból, hogy I ideál S-ben és hogy $S \in R$, következik $I \in R$. ROBERT SHULKA [29] több tételét általánosítottam a következőképpen:

99. TÉTEL. *Legyen S minden I ideáljára $\bar{I}/I = R(S/I)$, ahol R öröklődő radikál. Ekkor $I \to \bar{I}$ az S ideálhálójának egy metszet-endomorfizmusa, vagyis $\overline{I_1 \wedge I_2} = \bar{I}_1 \wedge \bar{I}_2$.*

R-féligegyszerű a zéruselemes S félcsoport, ha $R(S) = 0$, és erősen R-féligegyszerű, ha S minden homomorf képe R-féligegyszerű.

100. TÉTEL. *Ha az R radikál olyan, hogy minden R-féligegyszerű zéruselemes félcsoport erősen R-féligegyszerű, akkor egy tetszőleges zéruselemes S félcsoport ideálhálójában az*

$$I \to R(I)$$

leképezés mindig egyesítés-endomorfizmus, vagyis:

$$R(I_1 \cup I_2) = R(I_1) \cup R(I_2).$$

25. §. Bizonyos Hashimoto-féle univerzális algebrák automorfizmus-csoportjának egy féligegyszerűségéről

Ennek a §-nak az anyaga a szerző [82] dolgozatában szerepel.

Legyen V az összes véges G csoport osztálya. A csoport egységelemét 1 fogja jelölni. V nyilván zárt mind a homomorf képeknek, mind pedig a normálosztóknak a képzésére nézve. Legyen $\bar{V}$ mindazon csoportoknak az osztálya, amelyeknek bármely $N \neq 1$ normálosztójuk homomorfan leképezhető egy véges csoportra. (Ilyenek pl. a véges, egyszerű csoportok is, ezekhez lásd pl. SZÉP [91].) Nyilván $V \subseteq \bar{V}$. Legyen továbbá R mindazon G csoportoknak az osztálya, amelyek nem képezhetők le homomorf módon egy $G_1 \neq 1$ olyan csoportra, amely $\bar{V}$ eleme. Igazolhatók az alábbi tulajdonságok:

1. Az R csoportosztály homomorfan zárt;

2. Minden G csoport tartalmaz egy $N \in R$ normálosztót úgy, hogy N tartalmazza G-nek minden más $N_1 \in R$ normálosztóját. Ezt az $N = R(G)$ normálosztót a G csoport R-radikáljának nevezzük; továbbá G R-féligegyszerű akkor lesz, ha $R(G) = 1$.

3. Minden G csoportra $R(G/R(G)) = 1$, vagyis $G/R(G)$ R-féligegyszerű.

Azt sem nehéz bebizonyítani, hogy R-féligegyszerű csoportoknak bármilyen szubdirekt szorzata szintén R-féligegyszerű csoport, és hogy R-féligegyszerű csoportnak bármely normálosztója szintén R-féligegyszerű lesz.

Így egy *konkrét Amitsur—Kuros*-féle R radikált definiáltunk az összes csoport osztályán. Meg fogjuk mutatni, hogy bizonyos, alább definiált *Hashimoto*-féle univerzális algebráknak a teljes automorfizmus-csoportja (a továbbiakban röviden csak automorfizmus-csoportja) erre a konkrét radikálra nézve féligegyszerű.

Egy U univerzális algebrát *Hashimoto*-félének nevezünk, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

1. Minden homomorfizmusnak van egy és csak egy magva, amit ideálnak nevezünk, és minden ideál részalgebra U-ban;

2. Minden ideál fellép egy és csak egy homomorfizmus magvaként.

3. Éppen az ideálok szerint vett mellékosztályok adják U összes kongruencia-osztályát.

Példák. *Hashimoto*-féle univerzális algebrákra:

1. Tetszőleges (nem-feltétlen kommutatív vagy véges) csoportok;

2. Asszociatív és nemasszociatív gyűrűk;

3. Egy A asszociatív gyűrű felett vett A-jobbmodulusok;

4. P. J. HIGGINS [15]-féle multioperátor-csoportok;

5. Alulról korlátos, relatív komplementumos, disztributív hálók, (lásd SZÁSZ GÁBOR [88], (vö. még HASHIMOTO [13])) így speciálisan pl. a *Boole*-algebrák.

Egy H *Hashimoto*-féle univerzális algebrát *Hopf*-félének nevezünk, ha bármely önmagára való homomorfizmusa szükségképpen automorfizmus. Minden véges univerzális algebra, vagy pl. a végtelen ciklikus csoport nyilván *Hopf*-féle; viszont a *Prüfer*-féle kváziciklikus csoportok nyilván nem *Hopf*-féle univezális algebrák.*

* Korábban G. BAUMSLAG vizsgált *Hopf*-féle kommutatív csoportokat.

Egy H *Hashimoto*-féle univerzális algebra I ideálja teljesen invariáns, ha $I\varepsilon\subseteq I$ teljesül minden ε endomorfizmusra.

101. TÉTEL. (1) *Egy H Hashimoto-féle univerzális algebra akkor és csak akkor Hopf-féle, ha léteznek olyan teljesen invariáns I_α $(\alpha\in A)$ ideálok H-ban, hogy mindegyik H/I_α Hopf-féle, és H az összes ilyen H/I_α-nak egy szubdirekt összetétele,* (2) *Ha mindegyik I_α ideál teljesen invariáns a H Hashimoto-féle univerzális algebrában úgy, hogy mindegyik H/I_α véges, és ha H az összes ilyen H/I_α-nak egy szubdirekt összetétele, akkor H Hopf-féle.*

Bizonyítás. Minthogy (2) következik (1)-ből, elég (1)-et bebizonyítani. Legyen ε tetszőleges olyan endomorfizmusa H-nak, hogy $H\varepsilon=H$ és legyen $a_1, a_2\in H$ két olyan elem, hogy $a_1\varepsilon=a_2\varepsilon$. Minthogy I_α teljesen invariáns ideál H-ban, $I_\alpha\varepsilon\subseteq I_\alpha$, és minthogy H/I_α *Hopf*-féle, ezért ε egy automorfizmust indukál a H/I_α univerzális algebrában. Ezért a_1 kongruens a_2-vel modulo I_α, ahol I_α a mondott tulajdonságú ideálok közt *tetszőleges*. Minthogy $\bigwedge_{\alpha\in A} I_\alpha=0$, ahol 0 a legfinomabb kongruencia, ezért a_1 és a_2 kongruensek modulo 0 is, tehát $a_1=a_2$ és így H tényleg *Hopf*-féle. Az (1) állítás megfordítása triviális és ezzel a 101. Tételt bebizonyítottuk.

H-nak egy I ideálját karakterisztikusnak nevezzük, ha I invariáns H minden automorfizmusával szemben.

102. TÉTEL. *Legyen a Hashimoto-féle univerzális algebra olyan véges H/I_α $(\alpha\in A)$ univerzális algebráknak egy szubdirekt összetétele, hogy mindegyik I_α ideál karakterisztikus H-ban. Ekkor H-nak az* Aut $H=G$ *automorfizmus-csoportja R-féligegyszerű* (e § elején explicit módon definiált konkrét R radikálra), *éspedig G véges csoportoknak lesz egy szubdirekt szorzata.*

Bizonyítás. Legyen $1\neq\gamma\in G$ tetszőleges automorfizmusa H-nak. Minthogy $\gamma\neq 1$, van olyan $h\in H$, hogy $h\gamma\neq h$, és mert $\bigwedge_{\alpha\in A} I_\alpha=0$ van olyan I_α ideál is, hogy $h\gamma$ és h inkongruensek modulo I_α. Ekkor a $\overline{h\gamma}$ és $\bar{h}$ mellékosztályok (modulo I_α véve) különbözők. Minthogy I_α karakterisztikus ideál H-ban, ezért γ egy automorfizmust indukál H/I_α-ban. Minthogy H/I_α véges, ezért $\bar{G}=\mathrm{Aut}\,(H/I_\alpha)$ is véges. Ha tehát M_α a G-nek $\bar{G}$-be való homomorfizmusánál a mag, akkor G/M_α is véges. Továbbá $\bar{h}\bar{\gamma}\neq\bar{h}$ miatt $\gamma\notin M_\alpha$. Ezért $\bigwedge_{\alpha\in A} M_\alpha=1$, és minthogy G/M_α R-féligegyszerű és G pedig az összes ilyen véges G/M_α csoportnak egy szubdirekt szorzata, ezért G maga is R-féligegyszerű csoport.

MEGJEGYZÉS. A H *Hashimoto*-féle univerzális algebra egy H_α részalgebrája karakterisztikus, ha H_α invariáns H minden automorfizmusával szemben. Szerző ([82], Proposition 8.) igazolta, és itt bizonyítás nélkül közöljük, a következőt:

103. TÉTEL. *Legyen a H Hashimoto-féle univerzális algebra bizonyos H_α $(\alpha\in A)$ karakterisztikus részalgebráinak a halmazelméleti egyesítése, és mindegyik H_α legyen olyan véges $H_\alpha/I_{\alpha\beta}$ $(\beta\in B)$ algebráknak egy szubdirekt összetétele, hogy mindegyik $I_{\alpha\beta}$ ideál H_α-ban karakterisztikus. Ekkor H-nak a $G=$*Aut H *automorfizmus-csoportja R-féligegyszerű, éspedig G véges csoportoknak lesz egy szubdirekt szorzata.*

(Beérkezett: 1973. I. 24.)