A 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformáció egy egyszerű megoldása

Závoti József
MTA CSFK GGI

A természetben fennálló összefüggések, törvények többségükben nemlineáris egyenletekre vezetnek, amelyeket általában linearizálva, iterációval szokás megoldani. A linearizálás eleve elhanyagolást, közelítést eredményez. Bizonyos esetekben lehetőség nyílik arra, hogy a nemlineáris problémákra egzakt, korrekt megoldást kapjunk. Az előadásban megadtunk egy levezetést a 3D hasonlósági transzformáció nemlineáris feladatának megoldására. A módszer sem nem iteratív, sem nem követeli meg a megfigyelési egyenletek linearizálását. A méretarány paraméterének meghatározására másodfokú polinom-egyenletet adódik, a forgatási mátrix paraméterei a legkisebb négyzetek módszerének ez elvéből is levezethetők. Maga a végeredmény ismert a szakirodalomban, ez a megoldás az egyszerűségével mégis figyelmet érdemel.

1. Bevezetés

A dátum transzformációk számítógépes algebrai rendszerekkel történő tárgyalásában Awange és Grafarend (2002, 2003a, 2003b) években megjelent tanulmányai tekinthetők kiindulási alapnak. Magyar nyelven Závoti (2005) tanulmánya módosításokat javasolt a matematikai modellhez. A Závoti, Jancsó (2006) tanulmány a módosításokat pontosította. Az abszolút tájékozási probléma kvaterniókkal történő megoldását Horn (1987) tanulmánya tartalmazta az elsők között.

A szakirodalomban eddig publikált eredmények azonban nem tekinthetők végleges megoldásnak, mert az alkalmazásuk nehézkes, a gyakorlati felhasználás során fellép az u.n. kombinatorikus robbanás problémája.

Ezen tanulmányban olyan matematikai megoldást adunk, amely kiküszöböli a kombinatorikus robbanás problémáját, és az egyéb numerikus nehézségek is elmaradnak.

2. A 3D, 7 paraméteres transzformáció megoldása

A 3-dimenziós, 7-paraméteres transzformáció gyakran használt eljárás a műszaki tudományokban, úgymint a geodéziában, a navigációs rendszerekben, a kartográfiában, az űrkutatásban és a számítógépes grafikában. Az egyik dátumban megadott pontokat torziómentesen a másik dátumba átvivő transzformáció matematikai összefüggése az alábbi összefüggéssel adható meg:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \lambda \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \qquad i = 1,2,\ldots,n \tag{1}$$

ahol:

$[X_i, Y_i, Z_i]^T$ célpontok koordináta értékei,

$[X_0, Y_0, Z_0]^T$ az ismeretlen eltolási értékek,

λ az ismeretlen méretarány-tényező,

$\boldsymbol{R}(\omega, \varphi, \kappa)$ a forgási mátrix,

$[x_i, y_i, z_i]^T$ tárgypontok koordináta értékei.

Az $\boldsymbol{R}$ forgási mátrix a három tengely körüli elforgatással, három független, meghatározandó ω, φ és κ paraméterrel írható le:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1(\omega)\boldsymbol{R}_2(\varphi)\boldsymbol{R}_3(\kappa) \ . \tag{2}$$

Feladat. A 7 ismeretlen paraméter becslése a két rendszerben ismert közös pontok ($n \geq 3$) alapján.

Az R forgatási mátrixot az S ferdén szimmetrikus mátrix bevezetésével a következő módon írhatjuk fel:

$$R = (I_3 - S)^{-1}(I_3 + S) \tag{3}$$

- ahol I_3 a három dimenziós egységmátrix, és S mátrixot az a, b és c paraméterekkel az alábbi módon adjuk meg:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Az adott közös pontok alapján meghatározhatók a két rendszer súlypontjainak koordinátái:

$$X_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \quad Y_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}, \quad Z_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n},$$
$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n}. \tag{5}$$

A súlypontok kielégítik az alábbi egyenleteket:

$$\begin{aligned}
s_1 &:= +X_0 + cY_0 - bZ_0 + \lambda x_s - \lambda c y_s + \lambda b z_s - X_s - cY_s + bZ_s = 0 \\
s_2 &:= -cX_0 + Y_0 + aZ_0 + \lambda c x_s + \lambda y_s - \lambda a z_s + cX_s - Y_s - aZ_s = 0 \\
s_3 &:= bX_0 - aY_0 + Z_0 - \lambda b x_s + \lambda a y_s + \lambda z_s - bX_s + aY_s - Z_s = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

Az (1) egyenleteket n pontra felírva, az alábbi egyenletek adódnak:

$$\begin{aligned}
f_1 &:= +X_0 + cY_0 - bZ_0 + \lambda x_1 - \lambda c y_1 + \lambda b z_1 - X_1 - cY_1 + bZ_1 = 0 \\
f_2 &:= -cX_0 + Y_0 + aZ_0 + \lambda c x_1 + \lambda y_1 - \lambda a z_1 + cX_1 - Y_1 - aZ_1 = 0 \\
f_3 &:= +bX_0 - aY_0 + Z_0 - \lambda b x_1 + \lambda a y_1 + \lambda z_1 - bX_1 + aY_1 - Z_1 = 0 \\
f_4 &:= +X_0 + cY_0 - bZ_0 + \lambda x_2 - \lambda c y_2 + \lambda b z_2 - X_2 - cY_2 + bZ_2 = 0 \\
f_5 &:= -cX_0 + Y_0 + aZ_0 + \lambda c x_2 + \lambda y_2 - \lambda a z_2 + cX_2 - Y_2 - aZ_2 = 0 \\
f_6 &:= +bX_0 - aY_0 + Z_0 - \lambda b x_2 + \lambda a y_2 + \lambda z_2 - bX_2 + aY_2 - Z_2 = 0 \\
&\ \ \vdots \\
f_{3n-2} &:= +X_0 + cY_0 - bZ_0 + \lambda x_n - \lambda c y_n + \lambda b z_n - X_n - cY_n + bZ_n = 0 \\
f_{3n-1} &:= -cX_0 + Y_0 + aZ_0 + \lambda c x_n + \lambda y_n - \lambda a z_n + cX_n - Y_n - aZ_n = 0 \\
f_{3n} &:= +bX_0 - aY_0 + Z_0 - \lambda b x_n + \lambda a y_n + \lambda z_n - bX_n + aY_n - Z_n = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

A fenti egyenletekből az s_1, s_2 és s_3 súlyponti egyenleteket rendre kivonva, eltávolíthatjuk az eltolási paramétereket és az egyenletekben egyúttal áttérünk a súlyponti koordinátákra:

$$
\begin{array}{llcccccccc}
f_{1s} := & f_1 - s_1 = & \lambda x_{1s} & -\lambda c y_{1s} & +\lambda b z_{1s} & -X_{1s} & -cY_{1s} & +bZ_{1s} & =0 \\
f_{2s} := & f_2 - s_2 = & \lambda c x_{1s} & +\lambda y_{1s} & -\lambda a z_{1s} & +cX_{1s} & -Y_{1s} & -aZ_{1s} & =0 \\
f_{3s} := & f_3 - s_3 = & -\lambda b x_{1s} & +\lambda a y_{1s} & +\lambda z_{1s} & -bX_{1s} & +aY_{1s} & -Z_{1s} & =0 \\
f_{4s} := & f_4 - s_1 = & \lambda x_{2s} & -\lambda c y_{2s} & +\lambda b z_{2s} & -X_{2s} & -cY_{2s} & +bZ_{2s} & =0 \\
f_{5s} := & f_5 - s_2 = & \lambda c x_{2s} & +\lambda y_{2s} & -\lambda a z_{2s} & +cX_{2s} & -Y_{2s} & -aZ_{2s} & =0 \\
f_{6s} := & f_6 - s_3 = & -\lambda b x_{2s} & +\lambda a y_{2s} & +\lambda z_{2s} & -bX_{2s} & +aY_{2s} & -Z_{2s} & =0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
f_{3n-2s} := & f_{3n-2} - s_1 = & \lambda x_{ns} & -\lambda c y_{ns} & +\lambda b z_{ns} & -X_{ns} & -cY_{ns} & +bZ_{ns} & =0 \\
f_{3n-1s} := & f_{3n-1} - s_2 = & \lambda c x_{ns} & +\lambda y_{ns} & -\lambda a z_{ns} & +cX_{ns} & -Y_{ns} & -aZ_{ns} & =0 \\
f_{3ns} := & f_{3n} - s_3 = & -\lambda b x_{ns} & +\lambda a y_{ns} & +\lambda z_{ns} & -bX_{ns} & +aY_{ns} & -Z_{ns} & =0
\end{array}
\qquad (8)
$$

ahol

$$
\mathrm{X_{is}} = \mathrm{X_i} - \mathrm{X_s},\ \mathrm{Y_{12}} = \mathrm{Y_1} - \mathrm{Y_2},\ Z_{is} = Z_i - Z_s \qquad i = 1,2,3,\ldots,n
$$
$$
\mathrm{x_{is}} = \mathrm{x_i} - \mathrm{x_s},\ y_{is} = y_i - y_s,\ z_{is} = z_i - z_s \qquad i = 1,2,3,\ldots,n\,.
$$

Az f_{3i-2s}, $f_{3i-1s}\,(i = 1,2,3,\ldots,n)$ egyenletekből a b paramétert, illetve az a paramétert kifejezve, kapjuk az alábbi formulákat:

$$
\begin{aligned}
b &= (-\lambda x_{is} + \lambda c y_{is} + X_{is} + cY_{is})/(Z_{is} + \lambda z_{is}) \\
a &= (\lambda c x_{is} + \lambda y_{is} + cX_{is} - Y_{is})/(Z_{is} + \lambda z_{is})
\end{aligned}
\qquad (i = 1,2,3,\ldots,n) \qquad (9)
$$

A $f_{3is}\ (i = 1,2,3,\ldots,n)$ egyenletek a következő módon is felírhatók:

$$
(\lambda y_{is} + Y_{is})a - (\lambda x_{is} + X_{is})b = Z_{is} - \lambda z_{is}, \quad (i = 1,2,3,\ldots,n)\,. \qquad (10)
$$

A (9) összefüggéssel adott a és b paramétereket a (10) képletbe helyettesítve adódik az alábbi egyenlet:

$$
(\lambda y_{is} + Y_{is})[\lambda y_{is} - Y_{is} + c(\lambda x_{is} + X_{is})] + (\lambda x_{is} + X_{is})[\lambda x_{is} - X_{is} - c(\lambda y_{is} + Y_{is})] = Z_{is}^2 - \lambda^2 z_{is}^2, \qquad (11)
$$
$$
(i = 1,2,3,\ldots,n)\,.
$$

Néhány egyszerűsítés és összevonás után azt tapasztaljuk, hogy a c ismeretlen paraméter kiesik, és a λ paraméterre egy ismeretlenes, másodfokú, túlhatározott egyenletrendszer áll elő egy:

$$
\lambda^2\left(x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2\right) = \mathrm{X}_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2 \qquad (i = 1,2,3,\ldots,n)\,. \qquad (12)
$$

Az egyenletrendszer a következő alakban is felírható:

$$
\left(\lambda\sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2} - \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2}\right)\left(\lambda\sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2} + \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2}\right) = 0 \qquad (i = 1,2,3,\ldots,n) \qquad (13)
$$

Ezen túlhatározott egyenletrendszer megoldása során a λ méretarány-tényezőre - a számunkra fizikai jelentéssel bíró pozitív gyök alapján - az alábbi, az Albertz-Kreiling (1975) kézikönyvben megadott, a tapasztalatból is ismert összefüggés, vagy a Horn (1987) tanulmányában a kvaterniókkal levezetett összefüggés adódik:

$$
\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\mathrm{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2}}}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\mathrm{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2}}}. \qquad (14)
$$

Tehát esetünkben a méretarány-tényező a másodfokú egyenletekből egyértelműen meghatározható – a szakirodalomból ismert (Awange és Grafarend (2002)) negyedfokú polinom gyökeinek kényszerű szétválasztási eljárásával ellentétben.

3. A lineáris paraméterek meghatározása

A λ méretarány-tényező ismeretében valamennyi pontra a (8) összefüggés felhasználásával az alábbi formában írhatjuk fel a közvetítő egyenleteket:

$$\begin{bmatrix} X_{1s}-\lambda x_{1s} \\ Y_{1s}-\lambda y_{1s} \\ Z_{1s}-\lambda z_{1s} \\ X_{2s}-\lambda x_{2s} \\ Y_{2s}-\lambda y_{2s} \\ Z_{2s}-\lambda z_{2s} \\ \vdots \\ X_{ns}-\lambda x_{ns} \\ Y_{ns}-\lambda y_{ns} \\ Z_{ns}-\lambda z_{ns} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \\ v_{z2} \\ \vdots \\ v_{xn} \\ v_{yn} \\ v_{zn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda z_{1s}+Z_{1s} & -(\lambda y_{1s}+Y_{1s}) \\ -(\lambda z_{1s}+Z_{1s}) & 0 & \lambda x_{1s}+X_{1s} \\ \lambda y_{1s}+Y_{1s} & -(\lambda x_{1s}+X_{1s}) & 0 \\ 0 & \lambda z_{2s}+Z_{2s} & -(\lambda y_{2s}+Y_{2s}) \\ -(\lambda z_{2s}+Z_{2s}) & 0 & \lambda x_{2s}+X_{2s} \\ \lambda y_{2s}+Y_{2s} & -(\lambda x_{2s}+X_{2s}) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda z_{ns}+Z_{ns} & -(\lambda y_{ns}+Y_{ns}) \\ -(\lambda z_{ns}+Z_{ns}) & 0 & \lambda x_{ns}+X_{ns} \\ \lambda y_{ns}+Y_{ns} & -(\lambda x_{ns}+X_{ns}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \qquad (15)$$

A Gauss-Helmert modell alapján keressük az alábbi szélsőérték feladat megoldását:

$$\sum_{i=1}^{n} v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2 \xrightarrow{\min} \qquad (16)$$

Néhány mátrix-aritmetikai azonosság alkalmazásával a következő normál mátrix vezethető le:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda y_{is}+Y_{is})^2+(\lambda z_{is}+Z_{is})^2\right] & -\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_{is}+X_{is})(\lambda y_{is}+Y_{is}) & -\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_{is}+X_{is})(\lambda z_{is}+Z_{is}) \\ & \sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda x_{is}+X_{is})^2+(\lambda z_{is}+Z_{is})^2\right] & -\sum_{i=1}^{n}(\lambda y_{is}+Y_{is})(\lambda z_{is}+Z_{is}) \\ & & \sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda x_{is}+X_{is})^2+(\lambda y_{is}+Y_{is})^2\right] \end{bmatrix} \qquad (17)$$

Hasonló módon adódik a normál vektor:

$$2\lambda \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(y_{is}Z_{is}-z_{is}Y_{is}) \\ \sum_{i=1}^{n}(z_{is}X_{is}-x_{is}Z_{is}) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_{is}Y_{is}-y_{is}X_{is}) \end{bmatrix} \qquad (18)$$

A 3x3 méretű normál-egyenletrendszerből az *a*, *b* és *c* paraméterek számos eljárással meghatározhatók, mi a singular value decomposition módszert javasoljuk. A még ismeretlen X_0, Y_0 és Z_0 eltolási paramétereket az (1) összefüggés alapján az alábbi egyenletből lehet meghatározni:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{1+a^2+b^2+c^2} \begin{bmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab-c) & 2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2+b^2-c^2 & 2(bc-a) \\ 2(ac-b) & 2(bc+a) & 1-a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}, \quad (19)$$

ahol a súlypontok a két koordináta-rendszerben adott közös pontok koordinátáiból számoltak.

4. Összefoglalás

A tudományos kutatásokat segítő technikai eszközök, eljárások fejlődésével a műszaki tudományok elmélete is fejlődik: új elméletek alakulnak ki, új modellek keletkeznek, új kiértékelési módszereket dolgoznak ki, amelyek pontosabbak, vagy egyszerűbbek, mint a korábbi eljárások. A műszaki tudományok egyik fontos feladatára, a 3D, 7 paraméteres nemlineáris hasonlósági transzformáció megoldására egy olyan új levezetést mutattunk be, amely összhangban van az eddigi eredményekkel, de az ismert elméleteknél sokkal egyszerűbb és világosabb matematikai eszközöket használ fel.

A 3D, 7 paraméteres nemlineáris hasonlósági transzformáció megoldásához az általunk megadott új matematikai levezetés a forgási mátrix alkalmas paraméterezésén alapul. Ez a módszer nem igényel iterációt és nem szükséges a megfigyelési egyenletek sorba fejtése, linearizálása sem. Nincs megkötés a tengelykörüli forgatások nagyságrendjére vonatkozóan sem. A modell levezetése során a 3D, 7 paraméteres dátum transzformáció problémáját mi egy másodfokú polinom egyenlet megoldására vezettük vissza, a szakirodalomban ismert negyedfokú egyenlettel szemben. A kidolgozott matematikai modell nem a szakirodalomból ismert kvaterniókat, nem a Gröbner-bázist, nem a Dixon- vagy Sylvester rezultánst alkalmazza, hanem elemi matematikai eszközöket használ fel.

Hivatkozások

Albertz, Kreiling (1975): Photogrammetric Guide, Herbert Wichmann Verl., Karlsruhe, 58-60.

Awange JL, Grafarend EW (2002): Linearized Least Squares and nonlinear Gauss-Jacobbi combinatorical algorithm applied to the 7 parameter datum transformation $C_7(3)$ problem. Zeitschrift für Vermessungswesen,127, 109-116.

Awange JL, Grafarend EW (2003a): Closed form solution of the overdetermined nonlinear 7 parameter datum transformatiotn. Allgemeine Vermessungsnachrichten, 4, 130-149.

Awange JL, Grafarend EW (2003b): Journal of Geodesy, 77, 66-76.

Horn BKP (1987): Closed form solution of absolute orientation using unit quaternions. J. of the Optical Society of America, 4, 629-642.

Závoti J (2005): A 7 paraméteres 3D transzformáció egzakt megoldása. Geomatikai Közlemények, VIII, 53-60.

Závoti J, Jancsó T (2006): The solution of the 7-parameter datum transformation problem with- and without the Gröbner basis. Acta Geod. Geoph. Hung., 41(1), 87-100.