A 2D és 3D NEMLINEÁRIS HASONLÓSÁGI (HELMERT) TRANSZFORMÁCIÓK MEGOLDÁSÁNAK ÚJ LEVEZETÉSE

Závoti József *

New treatment of the solution of 2D and 3D non-linear similarity (Helmert) transformations *- The laws of nature in general, and the relations and laws in geodesy in particular can be expressed in most cases by non-linear equations which are generally solved by transforming them to linear form and applying iteration. The process of bringing the equations to linear form implies neglections and approximation. In certain cases it is possible to obtain exact, correct solutions for non-linear problems. In the present work we introduce parameters into the rotation matrix, and using this we derive solutions for the 2D and 3D similarity transformations. This method involves no iteration, and it does not require the transformation of the equations to linear form. The scale parameter is determined by solving a polynomial equation of second degree. This solution is already known, but our derivation is worth consideration because of its simple nature*

Keywords: 3D, 7-parameter datum transformation, absolute orientation

A természetben, így a geodéziában is fennálló összefüggések, törvények többségükben nemlineáris egyenletekre vezetnek, amelyeket általában linearizálva, iterációval szokás megoldani. A linearizálás eleve elhanyagolást, közelítést eredményez. Bizonyos esetekben lehetőség nyílik arra, hogy a nemlineáris problémákra egzakt, korrekt megoldást kapjunk. A tanulmányban a forgatási mátrix parametrizálásával megadunk egy levezetést a 2D és 3D hasonlósági transzformációk nemlineáris feladatának megoldására. A módszer sem nem iteratív, sem nem követeli meg a megfigyelési egyenletek linearizálását. A méretarány paraméterének meghatározására másodfokú polinomegyenletet adódik. Maga a megoldás ismert a szakirodalomban, ez a levezetés az egyszerűségével mégis figyelmet érdemel.

Kulcsszavak: 3D, 7 paraméteres dátum transzformáció, abszolút tájékozás

1 Bevezetés

A koordináta-rendszerek közötti áttérés során kiemelkedő jelentőségű a 3D, 7 paraméteres Helmert-féle transzformáció alkalmazása, ez a legelterjedtebb módszer a GPS rendszerek közötti átszámítások elvégzésében is. A gyakorlatban közelítő, iterációs megoldásokat használnak. A számítógéppel támogatott algebrai rendszerek elterjedésével megjelentek egzakt, analitikus megoldást adó modellek. Ezeknek a modelleknek gyakorlati használatát az akadályozza, hogy az átszámításhoz használt közös pontok számának növekedésével kombinatorikus robbanás lép fel, azaz a feladat a számítástechnika mai állása mellett sem oldható meg valós időben.

A probléma sokoldalú tárgyalása a Grafarend és Krumm (1995), a Grafarend és Kampman (1996) és a Grafarend és Shan (1997) tanulmányokban megtalálható, később Awange et al. (2004) tanulmánya bővíti a feladat megoldási lehetőségeit. Závoti (1999) munkája L1 normában oldotta meg a feladatot.

A dátum transzformációk számítógépes algebrai rendszerekkel történő tárgyalásában Awange és Grafarend (2002, 2003a, 2003b, 2003c) években megjelent tanulmányai tekinthetők kiindulási alapnak. Magyar nyelven Závoti (2005) tanulmánya módosításokat javasolt a matematikai modellhez. A Závoti és Jancsó (2006) tanulmány a linearizálásra új módszert adott, a Battha és Závoti (2009a, 2009b) cikkek pedig kiterjesztették az alkalmazási területeket. A fotogrammetriai külső tájékozás esetére a Závoti és Fritsch (2011) tanulmány tartalmaz új eredményeket. Az abszolút tájékozási probléma kvaterniókkal történő megoldását Horn (1987) tanulmánya tartalmazta az elsők között.

*MTA CSFK GGI, 9400 Sopron, Csatkai u. 6-8.
E-mail: zavoti@ggki.hu

Ezen tanulmányban olyan matematikai megoldást adunk, amely kiküszöböli a kombinatorikus robbanás problémáját, és az egyéb numerikus nehézségek is mellőzhetők. E cikk alapjának a Závoti (2012) tanulmány tekinthető, és teljes levezetését adja a 3D, 7-paraméteres, nemlineáris hasonlósági transzformáció elemi eszközökkel történő tárgyalásának.

2 A 2D hasonlósági (Helmert) transzformáció alapformulái

A 4 paraméteres, 2D (Helmert) hasonlósági transzformáció Závoti (1999) tanulmánya alapján az alábbi egyenlettel adható meg:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} + \lambda \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{1}$$

ahol $\{x_i, y_i\}$ és $\{X_i, Y_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ ugyanazon pontok koordinátái a két koordináta rendszerben, λ az ismeretlen méretarány tényező, X_0, Y_0 az ismeretlen eltolási értékek, $\boldsymbol{R}$ a forgatási mátrix. Az elforgatás α szögével az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrixot a következőképp írhatjuk fel:

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Az $\boldsymbol{R}$ elforgatási mátrix előállítható egy ferdén szimmetrikus $\boldsymbol{S}$ mátrix felhasználásával:

$$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{S}), \tag{3}$$

ahol $\boldsymbol{I}_2$ kétdimenziós egységmátrix és

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Mivel

$$(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{S})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1+c^2} & \dfrac{-c}{1+c^2} \\ \dfrac{c}{1+c^2} & \dfrac{1}{1+c^2} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

ezért a fenti $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrixot explicit kifejezhetjük az alábbi módon:

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{1+c^2}\begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+c^2}\begin{pmatrix} 1-c^2 & -2c \\ 2c & 1-c^2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

A ferdén szimmetrikus mátrix segítségével a forgatási mátrix elemeinek felhasználásával a forgatási szög szögfüggvényeire kapjuk

$$\sin\alpha = \frac{2c}{1+c^2}, \quad \cos\alpha = \frac{1-c^2}{1+c^2}, \quad tg\alpha = \frac{2c}{1-c^2}. \tag{7}$$

A (7) összefüggések utolsó tagja miatt a $c \neq \pm 1$ kikötést kell tenni.

A (1) összefüggés alapján írhatjuk:

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \lambda(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{S})\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{8}$$

Az $(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{S})$ mátrixszal balról szorozzuk végig a fenti egyenletet

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3, ..., n). \tag{9}$$

3 A 2D hasonlósági (Helmert) transzformáció méretarány-tényezőjének meghatározása

A súlyponti koordinátákra bevezetjük a következők jelölést:

$$\begin{aligned} X_s &= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \quad Y_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}, \\ x_s &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}. \end{aligned} \tag{10}$$

A súlypontok kielégítik az alábbi egyenleteket:

$$\begin{aligned} s_1 &:= +X_0 + cY_0 + \lambda x_s - \lambda c y_s - X_s - cY_s = 0 \\ s_2 &:= -cX_0 + Y_0 + \lambda c x_s + \lambda y_s + cX_s - Y_s = 0\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Valamennyi adott pontpárra felírható a (9) összefüggés, így egy túlhatározott egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} f_1 &:= +X_0 + cY_0 + \lambda x_1 - \lambda c y_1 - X_1 - cY_1 = 0 \\ f_2 &:= -cX_0 + Y_0 + \lambda c x_1 + \lambda y_1 + cX_1 - Y_1 = 0 \\ f_3 &:= +X_0 + cY_0 + \lambda x_2 - \lambda c y_2 - X_2 - cY_2 = 0 \\ f_4 &:= -cX_0 + Y_0 + \lambda c x_2 + \lambda y_2 + cX_2 - Y_2 = 0 \quad . \\ &\vdots \\ f_{2n-1} &:= +X_0 + cY_0 + \lambda x_n - \lambda c y_n - X_n - cY_n = 0 \\ f_{2n} &:= -cX_0 + Y_0 + \lambda c x_n + \lambda y_n + cX_n - Y_n = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

A (11) összefüggéssel adott súlyponti egyenletek alkalmas kivonásával kiküszöbölhetők az eltolási paraméterek

$$\begin{aligned} f_{1s} &:= f_1 - s_1 = \lambda x_{1s} - \lambda c y_{1s} - X_{1s} - cY_{1s} = 0 \\ f_{2s} &:= f_2 - s_2 = \lambda c x_{1s} + \lambda y_{1s} + cX_{1s} - Y_{1s} = 0 \\ f_{3s} &:= f_3 - s_1 = \lambda x_{2s} - \lambda c y_{2s} - X_{2s} - cY_{2s} = 0 \\ f_{4s} &:= f_4 - s_2 = \lambda c x_{2s} + \lambda y_{2s} + cX_{2s} - Y_{2s} = 0 \quad , \\ &\vdots \\ f_{2n-1s} &:= f_{2n-1} - s_1 = \lambda x_{ns} - \lambda c y_{ns} - X_{ns} - cY_{ns} = 0 \\ f_{2ns} &:= f_{2n} - s_2 = \lambda c x_{ns} + \lambda y_{ns} + cX_{ns} - Y_{ns} = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

ahol

$$X_{is} = X_i - X_s\,,\ Y_{is} = Y_i - Y_s\,,\ x_{is} = x_i - x_s\,,\ y_{is} = y_i - y_s \qquad (i = 1, 2, 3, ..., n).$$

Valamennyi f_{2i-1s} $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ egyenletből kifejezhető a *c* paraméter

$$c = (\lambda x_{is} - X_{is}) / (\lambda y_{is} + Y_{is}) \qquad (i = 1, 2, 3, ..., n). \tag{14}$$

Ha a (14) képlettel adott *c* paramétert behelyettesítjük az f_{2is} $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ egyenletekbe, kapjuk:

$$\lambda^2 \left(x_{is}^2 + y_{is}^2\right) = X_{is}^2 + Y_{is}^2 \qquad (i = 1, 2, 3, ..., n). \tag{15}$$

A (15) összefüggés akkor és csak akkor teljesül, ha fennáll az alábbi összefüggés is:

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} \left(x_{is}^2 + y_{is}^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(X_{is}^2 + Y_{is}^2\right). \tag{16}$$

A fenti egyenletekből a méretarány matematikai jelentése alapján az λ paraméterre a következő megoldást kapjuk (csak a pozitív gyököt tekintjük)

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_{is}^2 + Y_{is}^2\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{is}^2 + y_{is}^2\right)}}. \tag{17}$$

4 A lineáris- és az eltolási paraméterek meghatározása

A (17) képlettel megadott λ paraméter ismeretében a még hiányzó *c* paraméter a (13) összefüggésekből a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásával meghatározható:

$$c = \frac{2\lambda \sum_{i=1}^{n} \left(x_{is} Y_{is} - y_{is} X_{is}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left[(\lambda x_{is} + X_{is})^2 + (\lambda y_{is} + Y_{is})^2\right]}. \tag{18}$$

Az X_0 és Y_0 eltolási paraméterek a súlyponti koordinátákból az (1) összefüggés alapján származtathatók:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \end{bmatrix} - \lambda \frac{1}{1+c^2} \begin{pmatrix} 1-c^2 & -2c \\ 2c & 1-c^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix}. \tag{19}$$

5 A 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformáció alapformulái

A 3D, 7-paraméteres (Helmert) térbeli túlhatározott hasonlósági transzformáció a következő matematikai modellel adható meg: a transzformáció az elsődleges (cél) *(X, Y, Z)*, és a másodlagos (tárgy) *(x, y, z)* koordináta-rendszerek közötti Euklidészi térben adott pontok között valósít meg leképezést az eltolási, az elforgatási és a skálaparaméter függvényében:

$$\boldsymbol{X_i} = \boldsymbol{X}_0 + \lambda \boldsymbol{R}\boldsymbol{x_i} \qquad (i = 1,2,...,n), \tag{20}$$

ahol $\boldsymbol{X_i} = [X_i, Y_i, Z_i]^T$ a célpontok koordináta értékei,

$\boldsymbol{X_0} = [X_0, Y_0, Z_0]^T$ az ismeretlen eltolási vektor,

λ az ismeretlen méretarány-tényező,

$\boldsymbol{R}(\alpha,\beta,\gamma)$ a forgatási mátrix,

$\boldsymbol{x_i} = [x_i, y_i, z_i]^T$ tárgypontok koordináta értékei.

Az $\boldsymbol{R}$ forgási mátrix a három tengely körüli elforgatással, három független, meghatározandó α, β és γ paraméterrel írható le

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1(\alpha)\boldsymbol{R}_2(\beta)\boldsymbol{R}_3(\gamma)\ . \qquad (21)$$

Az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix levezetését Cardan-szögekkel a fizikai geodéziában Awange (2002) az alábbi módon adta meg:

$$\boldsymbol{R}_1(\alpha)\boldsymbol{R}_2(\beta)\boldsymbol{R}_3(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \cos\beta\sin\gamma & -\sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} . \qquad (22)$$

(Természetesen, eltérő forgatási sorrend vagy ellenkező irányú tengely körüli forgatások más-más eredményre vezetetnek. - Lásd pl. a fotogrammetriában Kraus (1996) által bevezetett forgatási mátrix.)

A forgási szögek a forgási mátrix elemeiből az alábbi összefüggéssel határozhatók meg:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{r_{23}}{r_{33}}\right),\ \ \beta = -\arcsin(r_{13}),\ \ \gamma = \arctan\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right), \qquad (23)$$

ahol r_{ij} érték az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix *i*-edik sorának és *j*-edik oszlopának eleme.

Az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrixot az $\boldsymbol{S}$ ferdén szimmetrikus mátrix bevezetésével a következő módon írhatjuk fel:

$$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{S})\ , \qquad (24)$$

ahol I_3 a háromdimenziós egységmátrix, és az $\boldsymbol{S}$ mátrixot az *a*, *b* és *c* paraméterekkel az alábbi formában adjuk meg:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix}. \qquad (25)$$

Ha a (24) összefüggés alapján a (20) egyenletet az $(\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{S})$ mátrixszal balról szorozzuk, akkor a következő alak adódik:

$$\begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}. \qquad (26)$$

6 A 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformáció méretarány-tényezőjének meghatározása

Közismert, hogy súlyponti koordináták bevezetésével mód nyílik az eltolási paraméterek eliminálására. Ezen a módon teljesen új levezetés adható a 3D, 7 paraméteres Helmert-féle transzformáció megoldására. A méretarány-tényező meghatározása után a feladat lineárisra redukálható, és megadható a lineáris probléma kiegyenlítő számítási modellje. Ezen a módon tetszőlegesen sok egyenletből (közös pontból adódó) álló egyenletrendszer is megoldható, a normál mátrix speciális tulajdonságát kihasználva a forgatási paraméterek is meghatározhatók.

Az adott közös pontok alapján meghatározhatók a két rendszer súlypontjainak koordinátái:

$$\begin{aligned} X_s &= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \quad Y_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}, \quad Z_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n}, \\ x_s &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \quad z_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n}. \end{aligned} \tag{27}$$

A súlypontok kielégítik az alábbi fiktív egyenleteket:

$$\begin{array}{llllllllllll} s_1 := & +X_0 & +cY_0 & -bZ_0 & +\lambda x_s & -\lambda c y_s & +\lambda b z_s & -X_s & -cY_s & +bZ_s & =0 \\ s_2 := & -cX_0 & +Y_0 & +aZ_0 & +\lambda c x_s & +\lambda y_s & -\lambda a z_s & +cX_s & -Y_s & -aZ_s & =0 \\ s_3 := & bX_0 & -aY_0 & +Z_0 & -\lambda b x_s & +\lambda a y_s & +\lambda z_s & -bX_s & +aY_s & -Z_s & =0 \end{array} . \tag{28}$$

A (26) formulát minden adott pontra felírva, a következő túlhatározott egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{array}{lllllllllllll} f_1 & := & +X_0 & +cY_0 & -bZ_0 & +\lambda x_1 & -\lambda c y_1 & +\lambda b z_1 & -X_1 & -cY_1 & +bZ_1 & =0 \\ f_2 & := & -cX_0 & +Y_0 & +aZ_0 & +\lambda c x_1 & +\lambda y_1 & -\lambda a z_1 & +cX_1 & -Y_1 & -aZ_1 & =0 \\ f & := & +bX_0 & -aY_0 & +Z_0 & -\lambda b x_1 & +\lambda a y_1 & +\lambda z_1 & -bX_1 & +aY_1 & -Z_1 & =0 \\ f_4 & := & +X_0 & +cY_0 & -bZ_0 & +\lambda x_2 & -\lambda c y_2 & +\lambda b z_2 & -X_2 & -cY_2 & +bZ_2 & =0 \\ f_5 & := & -cX_0 & +Y_0 & +aZ_0 & +\lambda c x_2 & +\lambda y_2 & -\lambda a z_2 & +cX_2 & -Y_2 & -aZ_2 & =0 \\ f_6 & := & +bX_0 & -aY_0 & +Z_0 & -\lambda b x_2 & +\lambda a y_2 & +\lambda z_2 & -bX_2 & +aY_2 & -Z_2 & =0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \\ f_{3n-2} & := & +X_0 & +cY_0 & -bZ_0 & +\lambda x_n & -\lambda c y_n & +\lambda b z_n & -X_n & -cY_n & +bZ_n & =0 \\ f_{3n-1} & := & -cX_0 & +Y_0 & +aZ_0 & +\lambda c x_n & +\lambda y_n & -\lambda a z_n & +cX_n & -Y_n & -aZ_n & =0 \\ f_{3n} & := & +bX_0 & -aY_0 & +Z_0 & -\lambda b x_n & +\lambda a y_n & +\lambda z_n & -bX_n & +aY_n & -Z_n & =0 \end{array} . \tag{29}$$

A fenti egyenletekből az s_1, s_2 és s_3 súlyponti egyenleteket rendre kivonva, eltávolíthatjuk az eltolási paramétereket és az egyenletekben egyúttal áttérünk a súlyponti koordinátákra

$$\begin{array}{llllllllllll} f_{1s} & := & f_1 - s_1 = & \lambda x_{1s} & -\lambda c y_{1s} & +\lambda b z_{1s} & -X_{1s} & -cY_{1s} & +bZ_{1s} & =0 \\ f_{2s} & := & f_2 - s_2 = & \lambda c x_{1s} & +\lambda y_{1s} & -\lambda a z_{1s} & +cX_{1s} & -Y_{1s} & -aZ_{1s} & =0 \\ f_{3s} & := & f_3 - s_3 = & -\lambda b x_{1s} & +\lambda a y_{1s} & +\lambda z_{1s} & -bX_{1s} & +aY_{1s} & -Z_{1s} & =0 \\ f_{4s} & := & f_4 - s_1 = & \lambda x_{2s} & -\lambda c y_{2s} & +\lambda b z_{2s} & -X_{2s} & -cY_{2s} & +bZ_{2s} & =0 \\ f_{5s} & := & f_5 - s_2 = & \lambda c x_{2s} & +\lambda y_{2s} & -\lambda a z_{2s} & +cX_{2s} & -Y_{2s} & -aZ_{2s} & =0 \\ f_{6s} & := & f_6 - s_3 = & -\lambda b x_{2s} & +\lambda a y_{2s} & +\lambda z_{2s} & -bX_{2s} & +aY_{2s} & -Z_{2s} & =0 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ f_{3n-2s} & := & f_{3n-2} - s_1 = & \lambda x_{ns} & -\lambda c y_{ns} & +\lambda b z_{ns} & -X_{ns} & -cY_{ns} & +bZ_{ns} & =0 \\ f_{3n-1s} & := & f_{3n-1} - s_2 = & \lambda c x_{ns} & +\lambda y_{ns} & -\lambda a z_{ns} & +cX_{ns} & -Y_{ns} & -aZ_{ns} & =0 \\ f_{3ns} & := & f_{3n} - s_3 = & -\lambda b x_{ns} & +\lambda a y_{1s} & +\lambda z_{ns} & -bX_{ns} & +aY_{ns} & -Z_{ns} & =0 \end{array} , \tag{30}$$

ahol

$$X_{is} = X_i - X_s, \; Y_{is} = Y_i - Y_s, \; Z_{is} = Z_i - Z_s \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

$$x_{is} = x_i - x_s, \; y_{is} = y_i - y_s, \; z_{is} = z_i - z_s \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Az f_{3i-2s}, f_{3i-1s} $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ egyenletekből a b paramétert, illetve az a paramétert kifejezve, kapjuk az alábbi formulákat:

$$b = \left(-\lambda x_{is} + \lambda c y_{is} + X_{is} + cY_{is}\right) / \left(Z_{is} + \lambda z_{is}\right)$$
$$a = \left(\lambda c x_{is} + \lambda y_{is} + cX_{is} - Y\right)_{is} / \left(Z_{is} + \lambda z_{is}\right) \qquad \left(i = 1, 2, 3, ..., n\right). \qquad (31)$$

Az $f_{3is}\ \left(i = 1, 2, 3, ..., n\right)$ egyenletek a következő módon is felírhatók:

$$\left(\lambda y_{is} + Y_{is}\right)a - \left(\lambda x_{is} + X_{is}\right)b = Z_{is} - \lambda z_{is} \qquad \left(i = 1, 2, 3, ..., n\right). \qquad (32)$$

A (31) összefüggéssel adott *a* és *b* paramétereket a (32) képletbe helyettesítve adódik az alábbi egyenlet:

$$(\lambda y_{is} + Y_{is})\left[\lambda y_{is} - Y_{is} + c(\lambda x_{is} + X_{is})\right] + (\lambda x_{is} + X_{is})\left[\lambda x_{is} - X_{is} - c(\lambda y_{is} + Y_{is})\right] = Z_{is}^2 - \lambda^2 z_{is}^2$$
$$\left(i = 1, 2, 3, ..., n\right). \qquad (33)$$

Néhány egyszerűsítés és összevonás után azt tapasztaljuk, hogy a *c* ismeretlen paraméter kiesik, és a λ paraméterre egy ismeretlenes, másodfokú, túlhatározott egyenletrendszer áll elő:

$$\lambda^2\left(x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2\right) = X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2 \qquad \left(i = 1, 2, 3, ..., n\right). \qquad (34)$$

(Megjegyezzük, hogy Awange és Grafarend (2002) tanulmányukban a méretarány-tényezőre egy negyedfokú egyenletet vezettek le.) A fenti egyenletrendszer a következő alakban is felírható:

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^{n}\left(x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2\right). \qquad (35)$$

Ezen túlhatározott egyenletrendszer megoldása során a λ méretarány-tényezőre - a számunkra fizikai jelentéssel bíró pozitív gyök alapján - az alábbi, a Horn (1987) tanulmányában a kvaterniókkal levezetett összefüggés adódik:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2\right)}}. \qquad (36)$$

Tehát esetünkben a méretarány-tényező a másodfokú egyenletekből egyértelműen meghatározható a szakirodalomból ismert (Awange és Grafarend 2002) negyedfokú polinom gyökeinek kényszerű szétválasztási eljárásával ellentétben.

7 A lineáris- és az eltolási paraméterek meghatározása

A λ méretarány-tényező ismeretében valamennyi pontra a (30) összefüggés felhasználásával az alábbi formában írhatjuk fel a közvetítő egyenleteket:

$$\begin{bmatrix} X_{1s}-\lambda x_{1s} \\ Y_{1s}-\lambda y_{1s} \\ Z_{1s}-\lambda z_{1s} \\ X_{2s}-\lambda x_{2s} \\ Y_{2s}-\lambda y_{2s} \\ Z_{2s}-\lambda z_{2s} \\ . \\ . \\ . \\ X_{ns}-\lambda x_{ns} \\ Y_{ns}-\lambda y_{ns} \\ Z_{ns}-\lambda z_{ns} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \\ v_{z2} \\ . \\ . \\ . \\ v_{xn} \\ v_{yn} \\ v_{zn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda z_{1s}+Z_{1s} & -(\lambda y_{1s}+Y_{1s}) \\ -(\lambda z_{1s}+Z_{1s}) & 0 & \lambda x_{1s}+X_{1s} \\ \lambda y_{1s}+Y_{1s} & -(\lambda x_{1s}+X_{1s}) & 0 \\ 0 & \lambda z_{2s}+Z_{2s} & -(\lambda y_{2s}+Y_{2s}) \\ -(\lambda z_{2s}+Z_{2s}) & 0 & \lambda x_{2s}+X_{2s} \\ \lambda y_{2s}+Y_{2s} & -(\lambda x_{2s}+X_{2s}) & 0 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 0 & \lambda z_{ns}+Z_{ns} & -(\lambda y_{ns}+Y_{ns}) \\ -(\lambda z_{ns}+Z_{ns}) & 0 & \lambda x_{ns}+X_{ns} \\ \lambda y_{ns}+Y_{ns} & -(\lambda x_{ns}+X_{ns}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}. \tag{37}$$

A Gauss-Helmert modell alapján keressük az alábbi szélsőérték feladat megoldását:

$$\sum_{i=1}^{n} v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2 \longrightarrow \min . \tag{38}$$

Néhány mátrixaritmetikai azonosság alkalmazásával a normálegyenlet együtthatómátrixára a következő alak vezethető le:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda y_{is}+Y_{is})^2+(\lambda z_{is}+Z_{is})^2\right] & -\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_{is}+X_{is})(\lambda y_{is}+Y_{is}) & -\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_{is}+X_{is})(\lambda z_{is}+Z_{is}) \\ & \sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda x_{is}+X_{is})^2+(\lambda z_{is}+Z_{is})^2\right] & -\sum_{i=1}^{n}(\lambda y_{is}+Y_{is})(\lambda z_{is}+Z_{is}) \\ & & \sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda x_{is}+X_{is})^2+(\lambda y_{is}+Y_{is})^2\right] \end{bmatrix}. \tag{39}$$

A normálegyenlet együtthatómátrixa szimmetrikus. Hasonló módon adódik a normálegyenlet tisztatagjának vektora:

$$2\lambda \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(y_{is}Z_{is}-z_{is}Y_{is}) \\ \sum_{i=1}^{n}(z_{is}X_{is}-x_{is}Z_{is}) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_{is}Y_{is}-y_{is}X_{is}) \end{bmatrix}. \tag{40}$$

A 3x3 méretű normál-egyenletrendszerből az *a, b* és *c* paraméterek számos eljárással meghatározhatók, mi a szinguláris érték felbontás (singular value decomposition, SVD) módszert javasoljuk. A még ismeretlen X_0, Y_0 és Z_0 eltolási paramétereket az (20) összefüggés alapján az alábbi egyenletből lehet meghatározni:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{1+a^2+b^2+c^2} \begin{bmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab-c) & 2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2+b^2-c^2 & 2(bc-a) \\ 2(ac-b) & 2(bc+a) & 1-a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}, \tag{41}$$

ahol a súlypontok a két koordináta-rendszerben adott közös pontok koordinátáiból származnak.
A 2D és 3D hasonlósági transzformációk matematikai modelljének alkalmazása során a pontossági, variancia és kovariancia paraméterek számítása a hagyományos módon történik.

8 Összegzés

A tanulmányban a 2D, síkbeli hasonlósági (Helmert) transzformáció modelljét vizsgáltuk. Bár a szakirodalomban többféle tárgyalás ismeretes, talán nem érdektelen a 3D, 7 paraméteres nemlineáris hasonlósági transzformáció levezetésével való egységes összevetés.

A 3D, 7 paraméteres nemlineáris hasonlósági transzformáció megoldásához az általunk megadott új matematikai levezetés a forgási mátrix alkalmas paraméterezésén alapul. Ez a módszer nem igényel iterációt és nem szükséges a megfigyelési egyenletek sorba fejtése, linearizálása sem. Nincs megkötés a tengelykörüli forgatások nagyságrendjére vonatkozóan sem. A matematikai modell levezetése során a 3D, 7 paraméteres dátum transzformáció problémáját egy másodfokú polinom-egyenlet megoldására vezettük vissza, a szakirodalomban ismert negyedfokú egyenlettel szemben. A kidolgozott matematikai modell nem a szakirodalomból ismert kvaterniókat, nem a Gröbner-bázist, nem a Dixon- vagy Sylvester rezultánst alkalmazza, hanem elemi matematikai eszközöket használ fel.

Hivatkozások

Awange JL (2002): Gröbner Bases, Multipolynomial Resultants and the Gauss-Jacobbi Combinatorical Algorithms-Adjustment of Nonlinear GPS/LPS Observations. Dissertation, Geodätisches Institut der Universität Stuttgart.

Awange JL, Grafarend EW (2002): Linearized Least Squares and nonlinear Gauss-Jacobbi combinatorical algorithm applied to the 7 parameter datum transformation c_7 (3) problem. Zeitschrift für Vermessungswesen, 127, 109-116.

Awange JL, Grafarend EW (2003a): Closed form solution of the overdetermined nonlinear 7 parameter datum transformatiotn. Allgemeine Vermessungsnachrichten, 4, 130-149.

Awange JL, Grafarend EW (2003b): Explicit Solution of the Overdetermined Three-Dimensional Resection Problem. Journal of Geodesy, 76, 605-616.

Awange JL, Grafarend EW (2003c): Polynomial Optimization of the 7-Parameter Datum Transformation Problem when Only Three Stations in Both Systems are Given. Zeitschrift für Vermessungswesen, 128, 266-270.

Awange JL, Grafarend EW, Fukuda Y (2004): Exact solution of the nonlinear 7-parameter datum transformation by Groebner basis. Bul. di Geodesia e Scienze Affini, 63,117-127.

Battha L, Závoti J (2009a): Solution of the intersection problem by the Sylvester-resultant and a comparison of two solutions of the 2D similarity transformation. Acta Geod. Geoph. Hung., 44(4), 429-438.

Battha L, Závoti J (2009b): Az előmetszési probléma és a 2D hasonlósági transzformáció. Geomatikai közlemények, 12, 19-26.

Grafarend EW, Kampmann G (1996): C_{10}(3): The ten parameter conformal group as a datum transformation in threedimensional Euclidean space. Zeitschrift für Vermessungswesen, 121, 68-77.

Grafarend EW, Krumm F (1995): Curvilinear geodetic datum transformations. Zeitschrift für Vermessungswesen, 120, 334-350.

Grafarend EW, Shan J (1997): Estimable quantities in projective networks. Zeitschrift für Vermessungswesen, 122, 323-333.

Horn BKP (1987): Closed form solution of absolute orientation using unit quaternions. Journal of the Optical Society of America, 4, 629-642.

Závoti J (1999): A geodézia korszerű matematikai módszerei. Geomatikai közlemények, 2, 149.

Závoti J (2005): A 7 paraméteres 3D transzformáció egzakt megoldása. Geomatikai Közlemények, 8, 53-60.

Závoti J, Jancsó T (2006): The solution of the 7-parameter datum transformation problem with- and without the Gröbner basis. Acta Geod. Geoph. Hung., 41(1), 87-100.

Závoti J, Fritsch D (2011): A first attempt at a new algebraic solution of the exterior orientation of photogrammetry. Acta Geod. Geoph. Hung., 46, 317-325.

Závoti J (2012): A simple proof of the solutions of the Helmert- and the overdetermined nonlinear 7-parameter datum transformation. Acta Geod. Geoph. Hung., 47(4), 453-464.

Függelék

Numerikus példa a 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformáció megoldására

A módszer gyakorlati alkalmazásának bemutatásához az Awange és Grafarend (2002) tanulmányban közölt példát vesszük. A közvetlen összehasonlítás során a pontossági vizsgálatok arra utalnak, hogy a két módszer ugyanarra az eredményre vezet. Kiemeljük az általunk bemutatott eljárás egyszerűségét:

1. A (36) összefüggéssel meghatározható a λ méretarány-tényező.
2. A (39) és (40) formulákkal adott normálegyenlet-rendszerből meghatározhatók az a, b és c paraméterek.
3. A (41) képlet megadja az X_0, Y_0 és Z_0 eltolási paramétereket.
4. Az α, β és γ forgatási szögek a (23) összefüggésekkel számolhatók az alábbi $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrixból:

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{1+a^2+b^2+c^2}\begin{bmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab-c) & 2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2+b^2-c^2 & 2(bc-a) \\ 2(ac-b) & 2(bc+a) & 1-a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix}. \qquad (42)$$

Amint látható, nem szükséges kezdőértéket megadni, nem kell az egyenleteket sorba fejteni, szükségtelen iterálni, és az eljárás tetszőleges szögelfordulások esetén is használható. Természetesen az eddig ismert numerikus eljárásokkal azonos eredményeket szolgáltat.

A két koordináta rendszerben – a *WGS84* és egy *lokális* rendszerben – adott pontok koordinátái az 1. táblázatban adottak. (A számításokat MATLAB-ban írt saját programmal végeztük).

1. táblázat. A cél- és tárgykoordináták (m)

No.	X_i	Y_i	Z_i	x_i	y_i	z_i
1	4157870.237	664818.678	4775416.524	4157222.543	664789.307	4774952.099
2	4149691.049	688865.785	4779096.588	4149043.336	688836.443	4778632.188
3	4173451.354	690369.375	4758594.075	4172803.511	690340.07	4758129.701
4	4177796.064	643026.700	4761228.899	4177148.376	642997.635	4760764.800
5	4137659.549	671837.337	4791592.531	4137012.190	671808.029	4791128.215
6	4146940.228	666982.151	4784324.099	4146292.729	666952.887	4783859.856
7	4139407.506	702700.227	4786016.645	4138759.902	702670.738	4785552.196

A tanulmányban ismertetett algoritmussal a nemlineáris feladat megoldására az alábbi eredményeket kapjuk:

2. táblázat: A numerikus számítások eredménye

Ismeretlen	Nemlineáris módszer
λ	1.0000055825
a	0.0000024204
b	-0.0000021664
c	-0.0000024073
X_0	641.8804
Y_0	68.6553
Z_0	416.3981

A nemlineáris módszer a Cardan szögekre a következő értékeket adja:

$$\alpha = -0.9984976709[''], \qquad \beta = 0.8936957645[''], \qquad \gamma = 0.9930877298[''].$$