KÖZGAZDASÁGI SZEMLE, LXV. ÉVF., 2018. JÚLIUS–AUGUSZTUS (687–700. o.)

BIHARY ZSOLT–CSÓKA PÉTER–KONDOR GÁBOR

A részvénytartás spektrális kockázata hosszú távon

A hosszú távon befektetők (például nyugdíjalapok, céldátum-eszközalapok és fiatal befektetők) számára fontos kérdés, hogy mennyire kockázatos hosszú távon részvényt tartani. Tanulmányunk a spektrális kockázati mértékeket helyezi középpontba, amelyek a vizsgált kitettségek lehetséges veszteségeit úgy átlagolják, hogy a nagyobb veszteségek nagyobb súlyt kapnak. A kitettséget a kockázatmentes bankbetét és a részvényárfolyam különbségének választva, a spektrális kockázatra tekinthetünk úgy, mint annak a mértékére, hogy a befektető átlagosan mennyire fogja azt bánni, hogy kockázatmentes bankbetét helyett részvényekbe fektetett. Tanulmányunkban illusztráljuk *Bihary és szerzőtársai* [2018] eredményeit, amelyek analitikusan megmutatták, hogy a részvénytartás spektrális kockázata kellően hosszú távon csökken, sőt negatív lesz. Ugyanakkor numerikusan azt tapasztaljuk, hogy az elviselhető kockázathoz legalább száz évet kell várnunk.*
Journal of Economic Literature (JEL) kód: G11.

Bevezetés

Az időbeli diverzifikáció mögött az a gondolat áll, hogy a részvénytartás kockázata az időhorizont növelésével egyre kisebb (*Bennyhoff* [2009]). A sokat vitatott elképzelésnek különösen nagy a gyakorlati jelentősége a hosszú távon befektetők (például nyugdíjalapok, céldátum-eszközalapok és fiatal befektetők) számára, ugyanis ha az elgondolás igaznak bizonyul, akkor portfólióik kialakításakor sokkal nagyobb szerepet kaphatnak a részvények a kötvényekkel szemben.

* Köszönjük a Magyar Közgazdaságtudományi Egyesület 2017. évi konferenciáján kapott hozzászólásokat.

Bihary Zsolt, BCE Gazdálkodástudományi Kar, Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék (e-mail: zsolt.bihary2@uni-corvinus.hu).

Csóka Péter, BCE Gazdálkodástudományi Kar, Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék és MTA KRTK KTI Játékelméleti Kutatócsoport (e-mail: peter.csoka@uni-corvinus.hu).

Kondor Gábor, BCE Gazdálkodástudományi Kar Befektetések és Vállalati Pénzügy Tanszék és a Pallas Athéné Domus Educationis Alapítvány ösztöndíjasa (e-mail: gabor.kondor@uni-corvinus.hu).

A kézirat első változata 2018. június 12-én érkezett szerkesztőségünkbe.
DOI: http://dx.doi.org/10.18414/KSZ.2018.7-8.687

A témakör alapjait az 1990-es évek első felében fektették le (lásd *Bennyhoff* [2009]), és az elmúlt évtizedek során nagy érdeklődés kísérte mind a gyakorlati, mind az elméleti szakemberek részéről. Ugyanakkor a kérdést illetően az irodalom igencsak ellentmondásos, és mind a mai napig nem született meg a végső következtetés. A vita kezdeti időszakából *Bennyhoff* [2009] két fontosabb álláspontot és nézőpontot is kiemel. Egyfelől *Siegel* [1998] szerint a legalább 15 évet meghaladó befektetések esetén a részvények a historikus hozamok alapján a kötvények és a kincstárjegyek hozamait is felülmúló, pozitív reálhozamokat értek el. Továbbá azt is hangsúlyozza, hogy kutatásaik alapján úgy találták: hosszú távon a részvények kockázata kisebb, mint a kötvényeké vagy a kincstárjegyeké. Ezzel szemben *Samuelson* [1994] elvetette azt az állítást, hogy a részvények kockázata az időtáv növekedésével csökken, és egzakt tételként hivatkozik arra, hogy a befektetési horizont bizonyos feltételek esetén nincs hatással a portfólió összetételére. Vegyük észre, hogy *Samuelson* [1994] tételében már a portfólió összetételéről beszél, míg *Siegel* [1998] még csak a részvénytartás kockázatáról, amiből nem triviális eljutni az optimális portfólió-összetételig. Ebben a tanulmányban a részvénytartás kockázatára helyezzük a hangsúlyt, de a zárófejezetben felhívjuk a figyelmet a portfólió összetételével kapcsolatos néhány fontos tanulmányra.

A pontos módszertan és főként a részvénytartás kockázatának mérésére szolgáló eszköz tekintetében különböző megközelítések állnak rendelkezésünkre. A részvények évesített realizált szórását (volatilitását) vizsgálva *Siegel* [1998] azt találta, hogy több évtizedre sokkal alacsonyabb értékeket kapunk, mint néhány évre számolva. Ezzel szemben *Pástor–Stambaugh* [2012] amellett érvelt, hogy egy befektető szempontjából a részvények hosszabb távon sokkal volatilisebbek. A befektetők ugyanis nem ismerik a részvényár alakulásának paramétereit (különösen nem a feltételes várható hozamot), azokat zajosan előre jelezve hosszabb távon legalább 1,3-szer nagyobb évesített volatilitással szembesülnek. *Avramov és szerzőtársai* [2017] a befektetői vélekedéseket modellezve szintén arra jut, hogy lehetnek olyan befektetők, akik kisebbnek érzékelik a részvényhozamok átlaghoz való visszahúzását, és így kockázatosabbnak tartják a részvényeket.

Egy másik megközelítésben tekinthetjük annak a valószínűségét is, hogy a t időpontban a részvénybefektetés $S(t)$ értéke kisebb, mint a kockázatmentes bankbetét S_0e^{rt} értéke, ahol S_0 a kezdeti befektetés mértékét, r pedig a kockázatmentes hozamot jelöli. A valószínűség már egy egyszerű GBM- (geometriai Brown-mozgás) modell esetén is csökken a t függvényében, ami alátámasztani látszik azt az elképzelést, hogy a részvénybefektetés kockázata csökken a tartási periódus növelésével. Ugyanakkor, ahogyan arra már *Harlow* [1991] is felhívta a figyelmet, ez az elemzés nem veszi figyelembe az $S(t)$ és az S_0e^{rt} közötti különbséget, amely persze a t növekedésével egyre nagyobb lehet.

Bodie [1995] a kockázat számszerűsítésére egy olyan európai eladási *(put)* opció árát tekintette, amelynek az alapterméke egy részvény, és egy rögzített t lejáratra az S_0e^{rt} kockázatmentes kifizetést garantálja. A *put* opció díja t-ben növekvőnek bizonyult, ami *Bodie* [1995] gondolatmenete alapján a részvénytartás időben növekvő kockázatát jelenti. Ezt az elemzést ugyanakkor több komoly kritika is érte. *Wilkie* [2001] szerint az előző következtetés kétségkívül helytelen, és egyrészt az előző módszertanból tulajdonképpen az következik, hogy ha a kockázatmentes kifizetést kívánjuk garantálni, akkor mindent a kockázatmentes befektetésbe kell invesztálnunk. Másrészt pedig úgy találta, hogy a garancia formájától és a kockázat mérésétől függően a részvények kockázata időben nőhet, csökkenhet, vagy nőhet és csökkenhet, illetve fordítva. Továbbá *Ferguson–Dean* [1996] rámutatott arra, hogy amennyiben a modellben az opció díjának időbeli emelkedése a részvénybefektetés kockázatának növekedését jelenti a kockázatmentes befektetéshez képest, akkor hasonló érvelés alapján a fordított viszony esetében is a kockázat időbeli növekedésével kell szembesülnünk, így ellentmondásra jutunk. Sőt a befektetési horizont növelésével gyakorlatilag bármilyen eszköz kockázata növekszik, bármihez viszonyítunk.

Treussard [2006] az $Y(t) = S_0 e^{rt} - S(t)$ kifejezés, vagyis tulajdonképpen a kockázatmentes bankbetét helyetti részvénytartás kockázatát vizsgálja GBM-részvényárfolyamatot tekintve. Ha $Y(t)$ pozitív (negatív), akkor a részvény gyengén (jól) teljesít a kockázatmentes bankbetéthez képest, így $Y(t)$-re tekinthetünk úgy, mint a veszteségeket megragadó valószínűségi változóra. *Treussard* [2006] a kockázati mértékek közül a kockáztatott értéket *(Value-at-Risk)* és a feltételes kockáztatott értéket (*Conditional Tail Expectation – Artzner és szerzőtársai* [1999]) vizsgálta. A kockázati mértékekre magyarul lásd például *Csóka* [2003] és *Szegö* [2004] munkáit. *Treussard* [2006] azt találta, hogy a valós (statisztikai) mértéken mért $Y(t)$ kockázata egy idő után csökken, míg a kockázatsemleges mértéken mért kockázat időben monotonon nő. Ezek alapján *Treussard* [2006] arra hivatkozva, hogy a részvénytartás kockázatának időben növekednie kell, a kockázatsemleges mérték használatát javasolta.

Treussard [2006] állítását vizsgálta felül *Nguyen és szerzőtársai* [2012]: a szerzők az $Y(t) = S_0 e^{rt} - S(t)$ kifejezés Choquet-integrál kockázatát (lásd például *Sriboonchita és szerzőtársai* [2009]) elemezték, valamint két további Lévy-folyamatot is szemügyre vettek: egy eltolt Poisson-folyamatot *(shifted Poisson process)* és egy olyan folyamatot, amelynek logaritmusa véletlen bolyongás. Következtetésük szerint a kockázatsemleges mértéken is csökkenhet a kockázat időben, így nem egyértelmű, hogy a kockázatsemleges vagy a valós mértéket kell-e használni a részvénytartás kockázatának mérésekor. Véleményünk szerint ezt a kockázatot csak a valós mérték szerint érdemes mérni.

Bihary és szerzőtársai [2018] ezen az úton halad tovább, és a Choquet-integrál kockázattal ekvivalens spektrális kockázati mérték (*Acerbi* [2002]) segítségével vizsgálja az $Y(t) = S_0 e^{rt} - S(t)$ veszteségi változó kockázatának időbeli alakulását a valós mértéken. A spektrális kockázati mértékek a koherens kockázati mértékekhez (*Artzner és szerzőtársai* [1999]) tartoznak, és kifejezhetők a veszteségek súlyozott átlagaként, ahol a nagyobb veszteségekhez nagyobb súlyok tartoznak. Ezért úgy is tekinthetünk az $Y(t)$ spektrális kockázatára, mint annak a mértékére, hogy várhatóan és átlagosan mennyire fogjuk azt bánni, hogy kockázatmentes bankbetét helyett részvénybe fektettünk. A spektrális kockázati mértékek kiemelt alosztálya a várható veszteség *(Expected Shortfall, ES; Acerbi–Tasche* [2002], *Rockafellar–Uryasev* [2002]), amely hatékonyan számolható és becsülhető (*Acerbi–Tasche* [2002]), valamint backtesztelhető is (*Acerbi–Székely* [2014]), és amely normális eloszlású hozamok esetén egybeesik a feltételes kockáztatott értékkel. Emellett a Bázeli Bankfelügyeleti Bizottság 2013-ban a belső tőkemegfelelési modellek esetén az ES használata mellett döntött (*BIS* [2013]), amely szintén nyomatékosítja az ES mint gyakorlati szempontból is fontos kockázati mérték jelentőségét.

Bihary és szerzőtársai [2018] a lehetséges részvényár-alakulások modellezésére a következő modelleket vizsgálja. A szerzők a standard geometrikus Brown-mozgás (GBM) mellett az exponenciális Lévy-modellt (lásd például *Mandelbrot* [1963], *Bertoin* [1996] és *McCulloch* [1996]) is szemügyre veszik (amelynek a GBM egy speciális esete), amely sokkal nagyobb rugalmasságot kínál a részvényárak vastag szélű viselkedésének modellezésére. Szemléltetésképpen elemzik az exponenciális Lévy-modellek egy speciális típusát is, a Véges Momentumú Log-Stabil (FMLS) modellt (*Carr–Wu* [2003]). A kockázat hosszú távú viselkedésénél két jól elkülönülő esetet tekintenek. A részvényár-folyamat paramétereitől (a μ *drift* és a κ konvexitást kiigazító tag) függően megkülönböztetnek magas ($\mu > r + \kappa$) és közepes ($r + \kappa \geq \mu > r$) növekedési ütemeket.

Bihary és szerzőtársai [2018] megvizsgálja, hogy a különböző részvényár-alakulás és növekedési ütemek mellett hogyan alakul hosszú távon annak a spektrális kockázata, ha kockázatmentes bankbetét helyett részvénybe fektetünk. Vegyük észre, hogy a kockázat úgy is értelmezhető, mint szükséges készpénztartalék. Ha a kockázat negatív, akkor az azt jelenti, hogy akár egy tőkeáttételes részvénypozíció is elfogadható. Ahogy látni fogjuk, időben a kockázat nullából indul, és kezdetben növekszik. A kérdés az, hogy van-e olyan időpont, amikor a kockázat csökkenni kezd, és elér valamilyen kívánt szintet, vagy akár át is lép a negatív tartományba. Tanulmányunkban részletezzük és illusztráljuk ezeket a spektrális kockázati mértékekre kapott analitikus és numerikus eredményeket.

Spektrális kockázati mértékek

Tekintsük az X valószínűségi változót, amely egy portfólió veszteségeloszlását reprezentálja a t időpontban. Így az X pozitív értékei veszteségeknek felelnek meg, míg az X negatív értékei profitoknak. A véletlen veszteségi változók halmazát jelölje $\mathcal{X}$.

A koherens kockázati mértékek (*Artzner és szerzőtársai* [1999]) axiomatikusan jól megalapozottak, az általános egyensúlyelmélet keretébe is beleillenek (*Csóka és szerzőtársai* [2007]), és még a likviditási kockázatot is megragadják (*Acerbi–Scandolo* [2008]).

1. DEFINÍCIÓ • A $\rho: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ kockázati mértéket *koherens kockázati mértéknek* nevezzük, ha eleget tesz a következő feltételeknek:

- monotonitás: $Y \leq X \Rightarrow \rho(Y) \leq \rho(X)$,
- pozitív homogenitás: $h > 0 \Rightarrow \rho(hX) = h\rho(X)$,
- szubadditivitás: $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$,
- transzláció-invariancia: $a \in \mathbb{R} \Rightarrow \rho(X + a) = \rho(X) + e^{-rt}a$, ahol e^{-rt} a diszkontfaktor a t időpontban.

Elemzésük során *Bihary és szerzőtársai* [2018] konstans kockázatmentes r kamatlábat feltételez. Az e^{-rt} diszkontfaktort több tanulmányban is kihagyják, a mi szempontunkból viszont különösen fontos, mivel hosszú időtávot vizsgálunk.

Az *Expected Shortfall* (várható veszteség, *ES; Acerbi–Tasche* [2002], *Rockafellar–Uryasev* [2002]) a bevezetőben említett több tulajdonsága miatt is kiemelkedő koherens kockázati mérték. Egy adott $X \in \mathcal{X}$ véletlen veszteségi változó és egy $\alpha \in [0, 1]$ konfidenciaszint mellett $ES_\alpha(X)$ az esetek legrosszabb $100(1-\alpha)$ százalékában realizált veszteségek átlaga. Egy tipikus választás az $\alpha = 99\%$, és ekkor $ES_{99\%}$ az esetek legrosszabb 1 százalékában adódó veszteségek átlagának felel meg.

Ahhoz, hogy formálisan is definiáljuk az ES-t, további jelölésekre van szükségünk. Egy adott $X \in \mathcal{X}$ véletlen veszteségi változó esetén jelölje $F_X(x) = P[X \leq x]$ a hozzá tartozó eloszlásfüggvényt. Az X veszteségeloszlásának általánosított inverzét az $F_X^{-1}(p) = \inf\left\{x \middle| F_X(x) \geq p\right\}$ függvénnyel adjuk meg.

2. DEFINÍCIÓ • Egy adott $X \in \mathcal{X}$ veszteségi változó és $\alpha \in [0, 1)$ esetén $ES_\alpha(X)$ az X *várható veszteség (ES) szerinti kockázatát* jelöli az α *szinten*, amelyet a következőképpen definiálunk:

$$ES_\alpha(X) = e^{-rt}\frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 F_X^{-1}(p)dp.$$

Az $\alpha = 1$ érték esetén ES_1 a (diszkontált) maximális veszteségnek felel meg, vagyis

$$ES_1(X) = e^{-rt}\,\text{ess. sup}\{X\}.$$

A spektrális kockázati mértékek (*Acer* [2002]) szintén koherensek, és ahogyan a következő definícióban is szerepel, úgy általánosítják az ES-t, hogy a veszteségeknek egy növekvő súlyok szerinti súlyozott átlagát veszik.

3. DEFINÍCIÓ • Egy adott $X \in \mathcal{X}$ veszteségi változó esetén $\rho_\phi(X)$ az X *spektrális kockázati mértékét* jelöli, amelyet a következőképpen definiálunk:

$$\rho_\phi(X) = e^{-rt}\int_\alpha^1 F_X^{-1}(p)\phi(p)dp,$$

ahol $\phi \in L^1([0, 1])$, valamint eleget tesz a következő feltételeknek:

- ϕ pozitív,
- ϕ monotonon növő,
- $\int_0^1 |\phi(p)|dp = 1.$

Ismét felhívjuk rá a figyelmet, hogy az általános képletek a veszteségekre vonatkoznak, és nem a nyereségekre, továbbá valamennyit kiigazítjuk az e^{-rt} diszkontfaktorral. Ahogyan az a definíciójából is látszik, az *ES* egy spektrális kockázati mérték.

A spektrális kockázati mértékek a Choquet-integrálok (*Choquet* [1954]) egy speciális eseteként is előállnak. A Choquet-integrál kockázati mértékeket (lásd például *Sriboonchita és szerzőtársai* [2009]) a következőképpen definiáljuk.

4. DEFINÍCIÓ • Egy adott $X \in \mathcal{X}$ veszteségi változó esetén $\rho_h(X)$ az X *Choquet-integrál kockázati mértékét* jelöli, amelyet a következőképpen definiálunk:

$$\rho_h(X) = e^{-rt}\int_0^\infty h\left[1 - F_X(x)\right]dx + e^{-rt}\int_{-\infty}^0 \left\{h\left[1 - F_X(x)\right] - 1\right\}dx,$$

ahol h az úgynevezett torzítási függvény (*Wang* [1996]), amely nem csökkenő, és eleget tesz a $h(0)=0$ és $h(1)=1$, valamint a $\lim_{0+} h=0$ és $\lim_{1-} h=1$ feltételeknek.

Ahogyan azt *Nguyen és szerzőtársai* [2012] is írja, a konkáv h torzítási függvényekre a következő kapcsolat áll fenn a Choquet-integrál kockázati mértékek és a spektrális kockázati mértékek között: ha $h'(1-p)=\phi(p)$, akkor $\rho_h(X)=\rho_\phi(X)$ minden $X\in\mathcal{X}$ esetén. A tanulmány hátralévő részében a spektrális kockázati mértékeket és a Choquet-integrál kockázati mértékeket egymással felcserélhető fogalmakként használjuk, és a 4. DEFINÍCIÓBAN szereplő képletre hivatkozunk.

Vegyük észre, hogy a fenti definíció révén csupán a nem degenerált torzítási függvényekkel foglalkozunk, ezzel pedig kizárjuk a maximális veszteséget mint degenerált esetet. Azt mondjuk, hogy egy h torzítási függvény nem degenerált, ha létezik olyan $p>0$, amelyre $h'(p)>0$, vagy ekvivalensen, létezik olyan $q<1$, amelyre $\phi(q)>0$.

Bihary és szerzőtársai [2018] tanulmányukban *Treussard* [2006] és *Nguyen és szerzőtársai* [2012] nyomán az $Y(t)=S_0e^{rt}-S(t)$ kifejezést tekintik veszteségi változóként, és ennek határozzák meg a spektrális kockázatát a 4. DEFINÍCIÓ segítségével. Ha $Y(t)$ pozitív (negatív), akkor a részvény gyengén (jól) teljesít a kockázatmentes bankbetéthez képest, így $Y(t)$-re úgy is tekinthetünk, mint ami megmutatja, hogy a t évben mennyire bántuk meg, hogy kockázatmentes bankbetét helyett részvénybe fektettünk. Az $Y(t)$ spektrális kockázata így annak a mértéke, hogy várhatóan és átlagosan menynyire fogjuk azt bánni, hogy kockázatmentes bankbetét helyett részvénybe fektettünk.

Vizsgált modellek

Legyen $S(t)$ egy pozitív értékű sztochasztikus folyamat, amely a piacon lévő részvény áralakulását reprezentálja. A sztochasztikus folyamatot szokás szerint az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ filtrált valószínűségi mezőn definiáljuk.

A *geometriai Brown-mozgás (GBM-)* modellben a részvényár alakulása az

$$S(t)=S_0e^{\left(\mu-\sigma^2/2\right)t+\sigma W_t},\qquad S(0)=S_0 \tag{1}$$

sztochasztikus folyamatot követi, ahol $\mu>0$ a drift, $\sigma>0$ a volatilitás, és W_t egy Wiener-folyamat.

Ekkor az $S(t)$ folyamat loghozamára a t időpontban a következő teljesül:

$$P\left\{\frac{\ln\left[\dfrac{S(t)}{S_0}\right]-\left(\mu-\sigma^2/2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}<z\right\}=\Phi[z], \tag{2}$$

ahol $\Phi[z]$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényének értékét jelöli a z pontban.

Az *exponenciális Lévy-folyamat* (lásd például *Mandelbrot* [1963], *Bertoin* [1996] és *McCulloch* [1996]), amelynek a GBM egy speciális esete, sokkal rugalmasabb eszközt kínál számunkra a vastag szélek modellezésére.

Az exponenciális Lévy-modellben a részvényár az

$$S(t) = S_0 e^{(\mu - \kappa_X t + X_t)}, \qquad S(0) = S_0 \tag{3}$$

sztochasztikus folyamatot követi, ahol az X_t egy Lévy-folyamat, amelyet egyértelműen meghatároz a $\mathbb{T}$ úgynevezett Lévy-triplet, továbbá $\mu > 0$ a drift, és végül

$$\kappa_X = \frac{1}{t} \ln \mathbb{E} e^{X_t} \tag{4}$$

a konvexitást kiigazító tag. A κ_X egyféle kompenzátor szerepét tölti be abban az értelemben, hogy az $e^{-\kappa_X t + X_t}$ kifejezés martingál. Vegyük észre, hogy a Lévy-folyamat időhomogén tulajdonságából következően κ_X nem függ az időtől. A $\mathbb{T}$ Lévy-triplet által megadott Lévy-folyamat eloszlásfüggvényét a t időpontban F_t-vel jelöljük.

A *Véges Momentumú Log-Stabil (Finite Moment Log Stable, FMLS)* modellt *Carr–Wu* [2003] vezette be: a szerzők az S&P500 indexre kiírt opciókat vizsgálva azt figyelték meg, hogy az implicit volatilitásgörbék – az úgynevezett *moneyness* (a kötési árfolyam és a határidős ár hányadosának logaritmusa, osztva a lejárati idő gyökével) függvényében kirajzolva – nem simulnak ki a lejárati idő növekedésével. Tehát empirikus eredmények alapján a hozamok kockázatsemleges eloszlásának bal oldali széle hosszabb időtávot figyelembe véve is vastag marad, ami látszólag ellentmond a centrális határeloszlás-tétel következményeinek. Hagyományosan erre mint egy lassú konvergenciára tekintettek a normális eloszlás felé, *Carr–Wu* [2003] viszont egy másik megközelítést javasolt. A részvényár modellezéséhez az α-stabil eloszláscsalád egy tagját használták fel, ahol az α paraméter az eloszlás egészéhez képest szabályozza a szélek vastagságát. Az α-stabil mozgás önhasonló tulajdonságú, vagyis az eloszlás alakja a skálázástól eltekintve minden időhorizonton megegyezik, vagyis az eloszlás széleinek vastagsága invariáns az időbeli aggregációra.

Az FMLS-modellben a részvényár alakulása (*Carr–Wu* [2003]) az

$$S(t) = S_0 e^{(\mu - \kappa)t + \sigma L_t^\alpha}, \qquad S(0) = S_0 \tag{5}$$

sztochasztikus folyamatot követi, ahol μ a drift, κ a konvexitást kiigazító tag, σ a volatilitás skálaparamétere, L_t^α pedig α-stabil eloszlású $\alpha \in (1, 2)$ alakparaméterrel, $\beta = -1$ értékkel, $t^{1/\alpha}$ skálaparaméterrel és nulla várható értékkel, vagyis $L_t^\alpha \sim S\left(\alpha, \ -1, \ t^{1/\alpha}, \ 0\right)$. Így az eloszlás egyetlen szabadon megválasztható paramétere az α.

A $\beta = -1$ választás garantálja, hogy a részvényár összes feltételes momentuma létezik. Az $\alpha \in (1, 2)$ feltétel mellett pedig a loghozamok a teljes valós számegyenes mentén vehetik fel értékeiket, ugyanakkor a loghozamok varianciája (és valamennyi magasabb rendű momentuma) végtelen. Az α értékének csökkentése vastagabb széleket eredményez a veszteségekre nézve, az $\alpha = 2$ paraméterrel pedig visszakapnánk a GBM-modellt mint speciális esetet.

A konvexitást kiigazító tag az FMLS-modell esetén a következő alakban adott:

$$\kappa = -\sigma^\alpha \sec(\pi\alpha/2). \tag{6}$$

Vegyük észre, hogy κ pozitív az $\alpha \in (1, 2)$ voltának és a sec függvénytulajdonságainak köszönhetően. Az $S(t)$ folyamat loghozamára pedig

$$\ln\left[\frac{S(t)}{S_0}\right] = (\mu - \kappa)t + \sigma L_t^{\alpha} \tag{7}$$

adódik, így az eloszlása rögzített t esetén $S\left[\alpha,\ -1,\ \sigma t^{1/\alpha},\ (\mu - \kappa)t\right]$.
Az $S(\alpha, -1, 1, 0)$ eloszláshoz kapcsolódó eloszlás- és sűrűségfüggvényeket a z helyen rendre $\Theta_{\alpha}(z)$-vel és $\Theta'_{\alpha}(z)$-vel jelöljük.

Analitikus eredmények

Bihary és szerzőtársai [2018] elemzésének középpontjában tehát a $\rho_h[Y(t)]$ spektrális kockázat hosszú távú viselkedése áll. Ahogyan azt a szerzők is szemléltették, a kockázati mérték nullában kezdődik, folytonos, és kezdetben növekszik. A kérdés pedig az, hogy elkezd-e csökkenni egy pont után, vagy végig növekvő marad. Tanulmányukban a valós mértéken dolgoztak, és valamennyi eredményüket erre fogalmazták meg. Ugyanakkor a $\mu = r$ helyettesítéssel a kockázatsemleges mérték szerinti elemzés is elvégezhető.

A tanulmány szerzői úgy találták, hogy két eltérő növekedési ütem van, ahol a kockázat hosszú távú viselkedése különbözik. Ha $\mu > r + \kappa$, akkor magas növekedési ütemről beszélünk, míg az $r + \kappa \geq \mu > r$ esetet közepes növekedési ütemnek nevezzük. Ha $\mu \leq r$, akkor a kockázat triviálisan növekvő.

A következőkben a vizsgált modellek bemutatásának sorrendjében végigvesszük és értelmezzük *Bihary és szerzőtársai* [2018] legfontosabb eredményeit.

GBM-modell

Nguyen és szerzőtársai [2012] két exponenciális Lévy-folyamatot is megvizsgált, a GBM-et és az exponenciális Poisson-folyamatot. A tanulmány szerzői bebizonyították, hogy a $h' > c > 0$ (vagyis h' alulról korlátos) elégséges feltétel mindkét növekedési ütemnél, hogy a kockázat nagy t-re negatív legyen. A magas növekedési ütem esetében h' folytonossága mellett szintén belátták ezt a viselkedést.

Bihary és szerzőtársai [2018] saját elemzési keretében újra megvizsgálta a GBM-modellt. Ehhez a szerzők feltételezték, hogy az $S(t)$ részvényárfolyamat geometriai Brown-mozgást követ, és a saját definíciójuknak megfelelően átfogalmazták *Nguyen és szerzőtársai* [2012] spektrális kockázatra felírt képletét, amely így már a diszkontálást is figyelembe veszi:

$$\rho_h\left[Y(t)\right] = S_0\left\{1 - e^{(\mu - r)t}\int_{-\infty}^{\infty} h'\left(\Phi[z]\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-1/2\left(z - \sigma\sqrt{t}\right)^2}dz\right\}. \tag{8}$$

Ezt felhasználva pedig megfogalmazzák első eredményüket.

1. TÉTEL • *Ha* $\mu > r + \frac{\sigma^2}{2}$, *akkor a GBM-részvényármodellben nagy t esetén* $\rho_h[Y(t)]$ *negatív.*

Ez tehát azt jelenti, hogy a GBM-modellben a magas növekedési ütem esetén minden spektrális kockázati mértékre (az *Expected Shortfallt* is beleérte) negatív értéket kapunk elegendően nagy t esetén.

Tetszőleges exponenciális Lévy-modell

Ezt követően *Bihary és szerzőtársai* [2018] kiterjesztette az elemzést az általános exponenciális Lévy-modellekre, ahol az $S(t)$ részvényárfolyamat dinamikája exponenciális Lévy-folyamat. Az elemzés első lépése ebben az esetben is a spektrális kockázat felírása volt:

2. TÉTEL • *Egy tetszőleges exponenciális Lévy-modellben az* $Y(t)$ *spektrális kockázatának értéke*

$$\rho_h\left[Y(t)\right] = S_0\left\{1 - e^{(\mu - r)t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{z - \kappa_X(1)t} h'\left[F_t(z)\right] f_t(z)dz\right\}, \tag{9}$$

ahol F_t *a* $\mathbb{T}$ *Lévy-triplet által meghatározott Lévy-folyamat értékének egy adott t időpontbeli eloszlásfüggvénye.*

A szerzők pedig ennek a képletnek a felhasználásával ugyanazt a hosszú távú viselkedést látták be tetszőleges Lévy-modellre, mint amelyet *Nguyen és szerzőtársai* [2012] is bizonyított, de csak a GBM-modell esetén.

3. TÉTEL • *Ha* $h'(\cdot)$ *alulról korlátos egy* $c > 0$ *konstanssal, és* $\mu > r$, *akkor egy tetszőleges exponenciális Lévy-modellben nagy t esetén* $\rho_h[Y(t)]$ *negatív.*

A kulcs tehát a Lévy-modelleknél, hogy a h' függvény alulról korlátos legyen, és ha ez teljesül, akkor elég nagy t-re mind a magas, mind a közepes növekedési ütem esetén a spektrális kockázat átlép a negatív tartományba. Természetesen ebbe a feltételbe nem fér bele az *Expected Shortfall*, csak akkor, ha az összes kimenetel sima átlagát vesszük.

FMLS-modell

Végül a kitüntetett exponenciális Lévy-modell, vagyis a Véges Momentumú Log-Stabil (FMLS) modell esetén az $S(t)$ részvényárfolyamat mozgását a szerzők FMLS-folyamatnak tekintették, és a spektrális kockázatra a következő tételt fogalmazták meg.

4. TÉTEL • *Az FMLS részvényármodellben az* $Y(t)$ *spektrális kockázatának értéke*

$$\rho_h\left[Y(t)\right] = S_0\left\{1 - e^{(\mu - r)t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{z\sigma t^{1/\alpha} - \kappa t} h'\left[\Theta_\alpha(z)\right]\Theta'_\alpha(z)dz\right\}, \tag{10}$$

ahol $\Theta_\alpha(z)$ *az* $S(\alpha, -1, 1, 0)$ *eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényének értéke a z helyen.*

Ennek segítségével pedig *Bihary és szerzőtársai* [2018] megvizsgálta a spektrális kockázat hosszú távú viselkedését, és az alábbi eredményeket kapták.

5. TÉTEL • *Ha* $h'(\cdot)$ *alulról korlátos egy* $C > 0$ *konstanssal, és* $\mu > r$, *akkor az FMLS részvényármodellben nagy t esetén* $\rho_h[Y(t)]$ *negatív.*

Vagyis nem meglepő módon itt is bizonyítható az exponenciális Lévy-modellnél látott 3. TÉTEL megfelelően átírt változata, és ugyanazon feltételek teljesülése mellett hasonló hosszú távú viselkedést tapasztalhatunk.

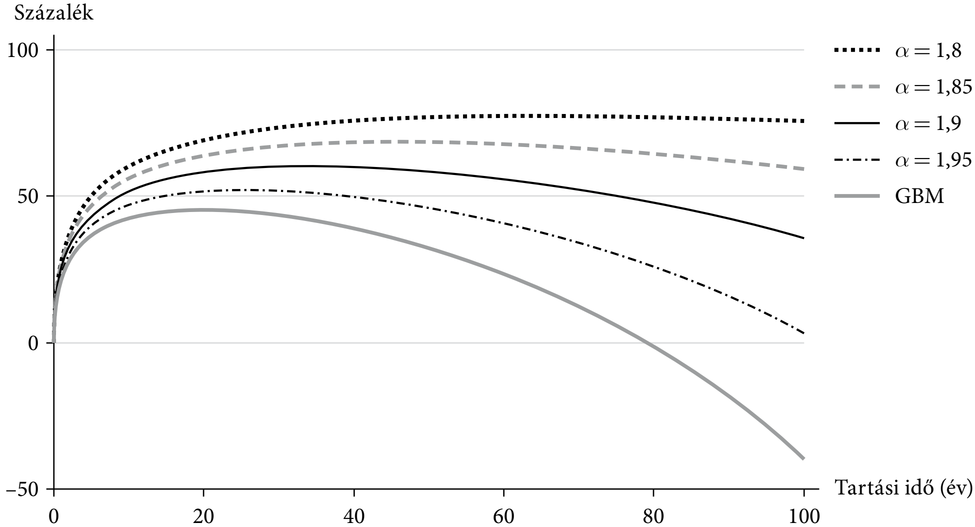
A következő eredmény pedig a GBM-modellnél látott 1. TÉTELLEL van összhangban, miszerint a magas növekedési ütemnél minden spektrális kockázati mérték negatív lesz elég nagy *t*-re.

6. TÉTEL • *Ha* $\mu > r + \kappa$, *akkor az FMLS részvényármodellben nagy t esetén* $\rho_h[Y(t)]$ *negatív.*

Numerikus eredmények

Bihary és szerzőtársai [2018] az elméleti eredményeiket gyakorlati példákon is tesztelték. Ehhez meghatározták a kockázatmentes bankbetét helyetti részvénybefektetés 90 százalékos szinten tekintett, *Expected Shortfall* szerinti kockázatát. Habár ez a relatíve alacsony percentilis nem megfelelő egy befektetési bank prudens kockázatkezeléséhez, jól tükrözi egy tőkealap kockázattűrő képességét. A számításokat különböző tartási periódusokra is elvégezték a szerzők, havi lépésközökkel haladva, egészen száz évig. A GBM-modell ($\alpha = 2$) mellett az FMLS-modellt is megvizsgálták különböző α paraméterekkel: $\alpha = 1{,}8$, $1{,}85$, $1{,}9$, $1{,}95$. A kezdeti befektetés mértékét egységnek vették. A GBM-modellben a volatilitás értékét $\sigma_{GBM} = 0{,}155$-nek választották, amely az S&P500 index historikus évesített átlagos volatilitásának felel meg. Az FMLS-modell σ_α paramétereit pedig úgy határozták meg, hogy az éves hozamok első és harmadik kvartilise közötti különbség megegyezzen a GBM esetén adódóval. Ez a módszer biztosítja a modellek konzisztenciáját a rövid távú volatilitás tekintetében. A kockázatmentes bankbetét hozama $r = 0{,}048$, amely az amerikai kincstárjegy historikus évesített átlagos rövid távú kamatlábával egyezik meg. A μ paraméter értékét $\mu = 0{,}089$-nek választották, amely az S&P500 index historikus, osztalékkal kiigazított, átlagos évesített hozamának felel meg. Ezek a paraméterezések egy jól diverzifikált, amerikai részvényportfólióba történő, hosszú távú befektetés realisztikus modelljeit eredményezik. A korábban definiáltak szerint ezek mindegyike a „magas növekedési ütembe" esik. A normális és a stabil eloszlások eloszlásfüggvényei mind megtalálhatók a MATLAB programban, a szükséges integrálásokat pedig numerikus kvadratúrák segítségével hajtották végre, amelyek szintén elérhetők MATLAB-ban. Az eredményeket az *1. ábra* mutatja.

1. ábra
A részvénytartásra vonatkozó *Expected Shortfall* (90 százalékos) kockázati mérték értéke a tartási idő függvényében



Megjegyzés: a kockázati görbék a GBM-modellre és különböző α paraméterek mellett az FMLS-modellre is megfigyelhetők.
Forrás: Bihary és szerzőtársai [2018].

A kockázati görbék 0-ban kezdődnek, ezután a maximális értékükig növekednek, majd elkezdenek csökkenni, és az analitikus eredményekkel összhangban végül átlépnek a negatív tartományba. Minden tartási periódusra a GBM-modell produkálja a legalacsonyabb kockázati szinteket, míg az FMLS-görbék, különösen azok, amelyek a kisebb α paraméternek felelnek meg, magasabb kockázati értékeket mutatnak. Ez a jelenség az FMLS-eloszlás vastag szélű veszteség oldalának köszönhető. Ahogyan azt korábban is tárgyaltuk, a kockázati görbéket úgy is értelmezhetjük, mint a különböző tartási periódusokra vonatkozó, szükséges készpénztartalék mértéke. Így elméletben, a kockázati szintek maximumának elérése után, minél hosszabb a befektető részvénytartási időtartama, annál kisebb a szükséges készpénztartalék értéke, sőt megfelelően hosszú időperiódust véve, akár tőkeáttételes pozíció is kialakítható.

Habár ezek a numerikus eredmények alátámasztják az elméleti következtetéseket, amelyeknek megfelelően a kockázati mérték valamennyi vizsgált modell esetén nulla lesz valamilyen elegendően nagy tartási periódus mellett, az *x* tengelyt megfigyelve láthatjuk, hogy ez a pont csupán száz év körül vagy akár még később következik be. A vizsgált keretek között ez pedig azt jelenti, hogy a csak részvényekből kialakított befektetési portfólió kockázata egyedül abban az esetben viselhető el, ha hajlandók vagyunk azt több mint egy évszázadon keresztül fenntartani. Másfelől, hosszú, de realisztikus időperiódust (néhány évtizedet) tekintve, meglehetősen nagy készpénztartalékra van szükségünk a kockázat mérsékléséhez. Az *1. ábrának* megfelelően a szükséges mennyiség akár a kezdeti befektetés felét is meghaladhatja. Jóllehet a tanulmányban vizsgált kockázati mértékek osztálya nem expliciten útvonalfüggő, az eredmények mégis komoly likviditási problémára világítanak rá. Még ha egy befektető hajlandó is több mint száz éven keresztül egy tisztán részvényportfólió tartására, és még a kockázat mértékét is elviselhetőnek tartja, a húszéves időpont körül még így is túlzottan nagy kockázatot fut.

Záró megjegyzések

Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy *Bihary és szerzőtársai* [2018] a GBM-részvényfolyamatra és az FMLS-modellre belátták, hogy magas növekedési ütem esetén elég magas t-re minden spektrális kockázati mérték (az *Expected Shortfallt* is beleértve) negatív lesz. Az exponenciális Lévy-modelleket vizsgálva pedig, ha a spektrális kockázati mérték minden lehetséges kimenetelhez szigorúan pozitív súlyt rendel, akkor nagy t-értékekre a spektrális kockázat mind a magas, mind a közepes növekedési ütem esetén negatív lesz. Eredményeik alapján a részvénytartás kockázata hosszú távon eltűnik. Ugyanakkor realisztikus árfolyammodelleket megvizsgálva numerikusan azt kapják, hogy a kockázat nagyjából 30 évig növekszik, és csak azután kezd el csökkenni, a 0-t pedig csupán körülbelül 100 évnél éri el. Ennek következtében a végső következtetésük, hogy a részvénytartás minden gyakorlati szempontból releváns időtávon kockázatos.

Ahogy már a bevezetőben említettük, a részvénytartás hosszú távú kockázatával összefügg, de attól némileg független az optimális portfólió-összetételnek, és azon belül a kockázatmentes bankbetét és a részvények arányának a vizsgálata. Ez a kutatási irány *Merton* [1975] cikkével indult, majd a következő jelentős lépésnek az emberi tőke szerepét is figyelembe vevő *Bodie és szerzőtársai* [1992] tekinthető. Ehhez kapcsolódóan *Szüle* [2011] a nyugdíjrendszerben részt vevő egyének optimális portfólióválasztása alapján vizsgálja a nyugdíjrendszereket. *Fagereng és szerzőtársai* [2017] egyébként nagy mintás norvég háztartási adatokon azt találta, hogy a norvég háztartások egyre kevesebb részvényt tartottak, ahogy közeledett a nyugdíjazás éve, majd nyugdíjazáskor teljesen kivonultak a részvénypiacról. Végül megemlítjük, hogy *Ang és szerzőtársai* [2014] a részvényeken belül továbbvitte a portfólióválasztási döntés vizsgálatát a likvid és nem likvid befektetések közötti választással.

Hivatkozások

Acerbi, C. [2002]: Spectral Measures of Risk: A Coherent Representation of Subjective Risk Aversion. Journal of Banking and Finance, Vol. 26. No. 7. 1505–1518. o. https://doi.org/10.1016/s0378-4266(02)00281-9.

Acerbi, C.–Scandolo, G. [2008]: Liquidity Risk Theory and Coherent Measures of Risk. Quantitative Finance, Vol. 8. No. 7. 681–692. o. https://doi.org/10.1080/14697680802373975.

Acerbi, C.–Székely Balázs [2014]: Back-Testing Expected Shortfall. Risk, 76. o.

Acerbi, C.–Tasche, D. [2002]: Expected Shortfall: A Natural Coherent Alternative to Value at Risk. Economic Notes, Vol. 31. No. 2. 379–388. o. https://doi.org/10.1111/1468-0300.00091.

Ang, A.–Papanikolaou, D.–Westerfield, M. M. [2014]: Portfolio Choice with Illiquid Assets. Management Science, Vol. 60. No. 11. 2737–2761. o. https://doi.org/10.1287/mnsc.2014.1986.

Artzner, P.–Delbaen, F.–Eber, J. M.–Heath, D. [1999]: Coherent Measures of Risk. Mathematical Finance, Vol. 9. No. 3. 203–228. o. https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068.

Avramov, D.–Cederburg, S.–Lučivjanská, K. [2017]: Are Stocks Riskier over the Long Run? Taking Cues from Economic Theory. The Review of Financial Studies, Vol. 31. No. 2. 556–594. o. https://doi.org/10.1093/rfs/hhx079.

Bennyhoff, D. G. [2009]: Time Diversification and Horizon-Based Asset Allocations. The Journal of Investing, Vol. 18. No. 1. 45–52. o. https://doi.org/10.3905/joi.2009.18.1.045.

Bertoin, J. [1996]: Lévy Processes. Cambridge University Press, Cambridge.

Bihary Zsolt–Csóka Péter–Szabó Dávid Z. [2018]: Spectral Risk Measure of Holding Stocks in the Long Run. Műhelytanulmány.

BIS [2013]: Fundamental Review of the Trading Book: A Revised Market Risk Framework. Consultative Document. Bank for International Settlements, October, https://www.bis.org/publ/bcbs265.pdf.

Bodie, Z. [1995]: On the Risk of Stocks in the Long Run. Financial Analysts Journal, Vol. 51. No. 3. 18–22. o. https://doi.org/10.2469/faj.v51.n3.1901.

Bodie, Z.–Merton, R. C.–Samuelson, W. F. [1992]: Labor Supply Flexibility and Portfolio Choice in a Life Cycle Model. Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 16. No. 3–4. 427–449. o. https://doi.org/10.1016/0165-1889(92)90044-F.

Carr, P.–Wu, L. [2003]: The Finite Moment Log Stable Process and Option Pricing. The Journal of Finance, Vol. 58. No. 2. 753–778. o. https://doi.org/10.1111/1540-6261.00544.

Choquet, G. [1954]: Theory of Capacities. Annales de l'institut Fourier, Vol. 5. 131–295. o. https://doi.org/10.5802/aif.53.

Csóka Péter [2003]: Koherens kockázatmérés és tőkeallokáció. Közgazdasági Szemle, 50. évf. 10. sz. 855–880. o.

Csóka Péter–Herings, P. J. J.–Kóczy Á. László [2007]: Coherent Measures of Risk from a General Equilibrium Perspective. Journal of Banking and Finance, Vol. 31. No. 8. 2517–2534. o. https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2006.10.026.

Fagereng, A.–Gottlieb, C.–Guiso, L. [2017]: Asset Market Participation and Portfolio Choice over the Life-Cycle. The Journal of Finance, Vol. 72. No. 2. 705–750. o. https://doi.org/10.1111/jofi.12484.

Ferguson, R.–Dean, L. [1996]: On the Risk of Stocks in the Long Run: A Comment. Financial Analysts Journal, Vol. 52. No. 2. 67–68. o. c.

Harlow, W. V. [1991]: Asset Allocation in a Downside-Risk Framework. Financial Analysts Journal, Vol. 47. No. 5. 28–40. o. https://doi.org/10.2469/faj.v47.n5.28.

Mandelbrot, B. [1963]: New Methods in Statistical Economics. Journal of Political Economy, Vol. 71. 421–440. o.

McCulloch, J. H. [1996]: Financial Applications of Stable Distributions. Handbook of Statistics, Vol. 14. 393–425. o.

Merton, R. C. [1975]: Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model. Megjelent: *Ziemba, W. T.–Vickson, R. G.* (szerk.): Stochastic Optimization Models in Finance. Elsevier, 621–661. o.

Nguyen, H. T.–Pham, U. H.–Tran, H. D. [2012]: On Some Claims Related to Choquet Integral Risk Measures. Annals of Operations Research, Vol. 195. No. 1. 5–31. o. https://doi.org/10.1007/s10479-011-0848-9.

Pástor, L.–Stambaugh, R. F. [2012]: Are Stocks Really Less Volatile in the Long Run? The Journal of Finance, Vol. 67. No. 2. 431–478. o. https://doi.org/10.1111/j.15406261.2012.01722.x.

Rockafellar, R. T.–Uryasev, S. [2002]: Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. Journal of Banking and Finance, Vol. 26. No. 7. 1443–1471. o. https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00271-6.

Samuelson, P. A. [1994]: The Long-Term Case for Equities. The Journal of Portfolio Management, Vol. 21. No. 1. 15–24. o. https://doi.org/10.3905/jpm.1994.409499.

Siegel, J. J. [1998]: Stocks for the Long Run. McGraw-Hill, New York.

Sriboonchita, S.–Wong, W. K.–Dhompongsa, S.–Nguyen, H. T. [2009]: Stochastic Dominance and Applications to Finance, Risk and Economics. Chapman and Hall/CRC Press. New York, https://doi.org/10.1201/9781420082678.

Szegö, G. [2004]: Kockázat és szabályozás. Hitelintézeti Szemle, 3. évf. 2. sz. 1–31. o. http://www.bankszovetseg.hu/Content/Hitelintezeti/42Szego.pdf.

Szüle Borbála [2011]: Portfólióelméleti modell szerinti optimális nyugdíjrendszer. Közgazdasági Szemle, 58. évf. 9. sz. 792–805. o.

Treussard, J. [2006]: The Non-Monotonicity of Value-at-Risk and the Validity of Risk Measures over Different Horizons. SSRN Electronic Journal, https://doi.org/10.2139/ssrn.776651.

Wang, S. [1996]: Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, Vol. 26. No. 1. 71–92. o. https://doi.org/10.2143/AST.26.1.563234.

Wilkie, A. D. [2001]: On the Risk of Stocks in the Long Run: A Response to Zvi Bodie. Proceedings of the 11th International AFIR Colloquium, 741–762. o. http://www.actuaries.org/AFIR/Colloquia/Toronto/Wilkie.pdf.