

FÜGGESZTETT GERENDACSALÁD SZABADREZGÉSE II.

FREKVENCIATÉRKÉP SZÁMÍTÁSA ÉS VIZSGÁLATA

NÉMETH RÓBERT KÁROLY* – GELEJI BORBÁLA**

*PhD, egyetemi docens. BME Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

Fax: (+36-1) 463-1099. E-mail: nemeth.robert@epito.bme.hu

**PhD-hallgató. BME Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

E-mail: geleji.borbala@epito.bme.hu

Cikkünkben egy újfajta szerkezeti megoldás, a kötéllel történő csigasoros felfüggesztés szabadrezgésre gyakorolt hatását vizsgáljuk meg egy hajlított gerendacsalád esetén. A gerendacsalád minden tagja szimmetrikus kéttámaszú tartó, amit egy csigasoron átvezetett, végtelen merevnek és elhanyagolható tömegűnek tekintett kötél is megtámaszt a szimmetrikusan elhelyezkedő felfüggesztési pontokban. A felfüggesztés csigáinak tehetetlenségi nyomatékát és a súrlódást elhanyagoljuk. A függesztőkötél megfeszített állapotához tartozó saját-körfrekvenciák és rezgésalakok ismerete teszi lehetővé a modálanalízis alkalmazását a szerkezet rezgésének számítása során. A rezgésalakokat és a sajátfrekvenciákat a frekvenciaparaméter és egy, a felfüggesztési pontok helyzetét meghatározó paraméter függvényében állítjuk elő. Ehhez a paraméterek segítségével írjuk fel a folytonossági és peremfeltételeket kifejező frekvenciamátrixot, melyhez a zérus determináns eredményező paramétereket numerikus letapogatással határozzuk meg. Az így kapott frekvenciatérkép alapján a rezgésalakok tipikus viselkedését és érzékenységet elemezzük. Megállapítjuk, hogy a több elmozdulás kombinációjára feltételt előíró kényszer hatására sérülhetnek egyes, a hagyományos mérnöki megszokásból származó jelenségek, így például a sajátfrekvencia szerint sorba rendezett rezgésalakok között a szimmetrikus és ferdén szimmetrikus rezgésalakok egymást felváltva követő sorrendje, és ezzel egyidejűleg a sajátfrekvencia sorszama és a rezgésalak csomópontjai, illetve inflexiós pontjai közötti egyértelmű kapcsolat.

Kulcsszavak: csigasoros függesztés, többszabadságfokú kényszer, szabadrezgés, frekvenciatérkép

1. BEVEZETÉS

A szerkezet több elmozdulásának lineáris kombinációjára valamilyen feltételt előíró kényszerek egyik hatása, hogy a statikai határozatlanság fokát és ezzel a szerkezet merevségét csak kisebb mértékben növelik meg, mintha az egyes elmozdulásokat külön-külön gátolnánk meg. A csigasorral történő felfüggesztés (Koloszváry-Kiss 2006, Hincz 2007, Hincz 2009) egy lehetséges szerkezeti megoldás az ilyen kényszer kivitelezésére. Ez a szerkezeti kialakítás egyparaméteres, egyenletes erőbevezetést eredményez. A felfüggesztett szerkezet kis keresztmetszeti mérettel alakítható ki, ezért érzékeny lehet a dinamikus hatásokra. A kialakuló rezgések nagy amplitúdója ráadásul akár a függesztőkötél meglazulását is okozhatja. A függesztőkötél megfeszített és meglazult állapota közötti váltakozás a rezgést nemlineárisá teszi, ugyanakkor két állapotváltozás között továbbra is lineáris a viselkedés. Emiatt

szakaszonként a rezgés vizsgálatának hatékony eszköze lehet a modálanalízis (Kocsis 2015, Németh 2015). Megfelelő mértékű statikus előterhelés esetén az is biztosítható, hogy a kötél nem lazul meg, így a felfüggesztés nem válik passzívva. Jelen dolgozatunk előzményében (Geleji 2018) bemutattuk, hogy egy, a csigasoros felfüggesztést alkalmazó gerendacsalád egyes elemeinek vizsgálata során milyen szisztematikus eljárással állítható elő a szerkezet frekvenciamátrixa és milyen lépésekkel egyszerűsíthető a megoldás menete. Cikkünkben azt kívánjuk megvizsgálni, hogy az egyenletesen elhelyezett felfüggesztési pontok helye hogyan befolyásolja a frekvenciaparamétert és a rezgésalakot. E paraméteres vizsgálat elvégzése érdekében előállítjuk gerendacsalád frekvenciaterképét.

Cikkünk további fejezeteiben röviden ismertetjük az előzményeket: a vizsgálni kívánt szerkezetek családját és a frekvenciamátrix számítási módját. Ezután bemutatjuk a frekvenciaterkép számítására használt eljárást, a numerikus eredményeket és az azokból levont következtetéseinket.

2. VIZSGÁLATUNK ELŐZMÉNYEI

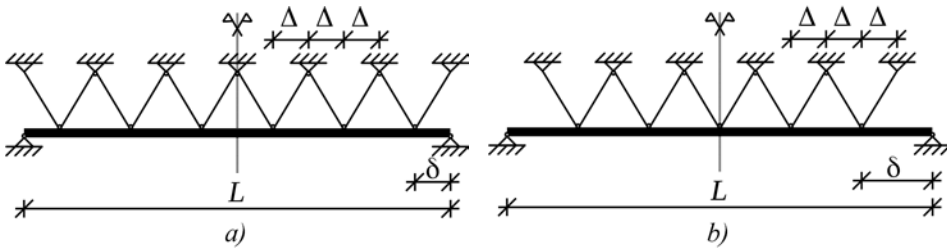
2.1. A VIZSGÁLT GERENDACSALÁD

Egy kéttámaszú gerenda hajlítórezgéseit fogjuk vizsgálni abban az esetben, ha egy szimmetrikusan elhelyezett csigasoron átvezetett kötéllal függesztjük fel. A gerenda prizmatikus, keresztmetszete a vizsgálat síkjára szimmetrikus, hajlítómerevsége állandó, tömegeloszlása egyenletes. A kötél nyújthatatlan, tömege elhanyagolható. A csigákat súrlódásmentesnek tételezzük fel, a méretüket pedig kellően kicsinynek tekintjük ahhoz, hogy a tömegüket és tehetetlenségi nyomatékukat elhanyagoljuk és az átvezetett kötélszakasz hosszának az egyenes szakaszhoz viszonyított aránya csak elhanyagolható mértékben változzon a mozgás során. A tömeg elhanyagolása miatt a kötél minden ágában ugyanakkora kötélterő lép fel. Az elmozdulások nagyságrendjéről feltételezzük, hogy érvényes marad a kis elmozdulások elve.

Két szerkezetípust fogunk vizsgálni, melyekre egy-egy példát mutat az *1. ábra*. Az első típusban a gerendát $2c$ pontban függesztjük fel szimmetrikusan egy csigákon átvezetett kötéllal (lásd az *1.a*) ábrát $c = 3$ esetén). A második típusban $2c + 1$ felfüggesztési pont kapcsolódik a gerendához szimmetrikus elrendezésben (lásd az *1.b*) ábrát $c = 2$ esetén).

Mindkét típus esetén két paraméterrel jellemezzük a család tagját: egy egyenes kötélszakasz vízszintes vetületének hosszával (Δ) és a felfüggesztési pontok számát ($2c$, illetve $2c + 1$) meghatározó c -vel. Mivel felfüggesztési pont csak a gerendán képzelhető el, ezért a $(2c - 1)\Delta \leq L/2$, illetve a $2c\Delta \leq L/2$ feltételnek teljesülni kell, de nem követeljük meg, hogy annyi felfüggesztési pont legyen, amennyi elfér.

Mindkét esetben szimmetrikus szerkezetről beszélhetünk, ezért a sajátrezgésalakok is szimmetrikus vagy ferdén szimmetrikus alakok lesznek (Ludvig 1983). (Ez alól akkor lehet kivétel, ha egy egyszerre szimmetrikus és ferdén szimmetrikus alak-



1. ábra. Páros a) és páratlan b) csigával szimmetrikusan felfüggesztett gerenda

hoz tartozó frekvenciaparaméter többszörös gyök, de az ilyen esetben is választható egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus rezgéalak bázisnak.) A ferdén szimmetrikus alakoknál a felfüggesztési pontok elmozdulásai páronként egymás ellentettjei lesznek, így ezekben a rezgéalakokban a kötéel hossza anélkül marad változatlan, hogy benne erő ébredne. Emiatt a kötéel nélküli kéttámaszú tartó ferdén szimmetrikus rezgéalakjaival megegyező alakokat kapunk (kettő, négy, hat stb. szinuszfelhullámot) a nekik megfelelő sajátfrekvenciákkal és frekvenciaparaméterekkel.

A szimmetrikus rezgéalakok esetén lehetséges eltérés a kötéel nélküli esethez képest, ezért vizsgálatunkat ezen alakok meghatározására szűkítjük. A rezgés során feltételezzük, hogy a kötéel nem válik passzívva: ez elérhető például úgy, hogy az önsúly hatására kialakuló statikus elmozduláshoz képest a rezgés amplitúdója csak akkora lehet, hogy a kötéel még húzott maradjon. Ennek megfelelően csak az aktív kötéellel, de több ponton felfüggesztett rúd rezgéalakjait és sajátfrekvenciáit keressük.

Mindkét szerkezet típus esetén a szabadrezgés differenciálegyenlete (Timoshenko 1974):

$$\mu \ddot{u}(x,t) + EI u''''(x,t) = 0, \tag{1}$$

ahol μ a gerenda fajlagos tömege, EI a gerenda hajlítómerevsége, $u(x, t)$ a gerenda lehajlása a statikus teher hatására kialakult egyensúlyi helyzethez képest, a (\cdot) szimbólum az x hely, a $(\dot{})$ szimbólum a t idő szerinti deriválást jelenti. A mértékegységeket úgy választjuk meg, hogy a rúd hossza egységnyi legyen. A szimmetria kihasználása érdekében a koordináta-rendszer kezdőpontját a gerenda középpontjába helyezzük. A szabadrezgés-feladat megoldását a változók szétválasztásával $u(x, t) = u(x) \cos(\omega_0 t - \varphi_0)$ alakban keressük, amit a differenciálegyenletbe behelyettesítve az $u(x)$ alakfüggvényre az

$$-\omega_0^2 \mu u(x) + EI u''''(x) = 0 \tag{2}$$

közönséges differenciálegyenletet kapjuk. A felfüggesztési pontokban az ottani csigán átvezetett kötéel két ágában ébredő erő eredője hat a gerendára. Mivel mindkét kapcsolódó kötéelágban azonos a kötélerő vízszintessel bezárt szöge és a kötélerő is mindkét ágban azonos, ezért a gerendára ható eredő egy függőleges erő lesz. A fel-

függéstésről átadódó erő ugrást okoz a nyíróerő függvényében, ami az elmozdulás-függvény harmadik deriváltjával arányos. Emiatt a felfüggesztési pontok szakaszokra osztják az elmozdulásfüggvényt. Az egyes szakaszokon a megoldás általános alakja

$$u(x) = A_r \cos(\lambda x) + B_r \sin(\lambda x) + C_r \cosh(\lambda x) + D_r \sinh(\lambda x) \quad (2)$$

lesz, ahol λ a frekvenciaparaméter. A saját-körfrekvencia és a frekvenciaparaméter közötti kapcsolat az egységnyi gerendahossz mellett $\omega_0 = \lambda^2 \sqrt{EI/\mu}$. Általános L gerendahossz esetén a továbbiakban bemutatott összefüggésekben λ értékét az L hosszúsággal osztani kell, így a saját-körfrekvencia képlete:

$$\omega_0 = \frac{\lambda^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}.$$

A megoldások szimmetrikus és ferdén szimmetrikus alakok lehetnek. A k -adik ferdén szimmetrikus alak esetén a frekvenciaparaméter értéke $\lambda_{f,k} = 2k\pi$ lesz, a hozzá tartozó rezgésalak pedig:

$$u_{f,k}(x) = \sqrt{2} \sin(2k\pi x),$$

ahol az f index a ferde szimmetriára utal. A továbbiakban csak a szimmetrikus alakokat keressük, az ere utaló indexet elhagyjuk.

2.2. A FREKVENCIAMÁTRIX ÉS DETERMINÁNSÁNAK ELŐÁLLÍTÁSA

A diszkrét pontokban felfüggesztett gerendák esetén a frekvenciaparamétert a frekvenciamátrix determinánsának zérushelyeinek meghatározásával találhatjuk meg. Korábban bemutatottuk (Geleji 2018), hogy a frekvenciamátrix egyes sorait milyen szisztematikus algoritmus szerint lehet előállítani az általunk vizsgált két szerkezettípus esetén, és a determináns számításához hogyan lehet egyszerűsíteni a feladatot egy kisebb méretű mátrix létrehozásával. Itt most csak a legfontosabb dolgokat ismételjük meg.

2.2.1. Páros felfüggesztési pont, középpontban nem felfüggesztett gerenda

A vizsgált fél gerenda első szakaszán a szimmetria miatt $B_1 = D_1 = 0$ adódik, ezért az ismeretleneket a $\mathbf{c} = [A_1, C_1, A_2, B_2, C_2, D_2, \dots, D_{c+1}]^T$ vektorba gyűjthetjük és a perem- és kapcsolódási feltételeket röviden $\mathbf{F}\mathbf{c} = \mathbf{0}$ alakban is írhatjuk, ahol \mathbf{F} a frekvenciamátrix. A frekvenciamátrix egyes sorai az alábbi feltételeket fejezi ki:

- a gerendavég eltolódása a csuklós megtámasztás miatt nulla,
- a gerendavég görbülete a csuklós megtámasztás miatt nulla,

- a felfüggesztési pontok eltolódásainak összege nulla a kötél nyújthatatlansága miatt,
- az eltolódás az első felfüggesztési pontot megelőző és az azt követő keresztmetszetben azonos a gerenda folytonossága miatt,
- az elfordulás az első felfüggesztési pontot megelőző és az azt követő keresztmetszetben azonos a gerenda folytonossága miatt,
- a görbület az első felfüggesztési pontot megelőző és az azt követő keresztmetszetben azonos a gerenda folytonossága miatt,

és amennyiben több felfüggesztési pont is van ($c > 1$), akkor minden további pontra:

- az eltolódás a felfüggesztési pontot megelőző és az azt követő keresztmetszetben azonos a gerenda folytonossága miatt,
- az elfordulás a felfüggesztési pontot megelőző és az azt követő keresztmetszetben azonos a gerenda folytonossága miatt,
- a görbület a felfüggesztési pontot megelőző és az azt követő keresztmetszetben azonos a gerenda folytonossága miatt,
- a harmadik derivált ugrása a felfüggesztési pontot megelőző és az azt követő keresztmetszet között azonos az első felfüggesztésnél számolhatóval az állandó kötélröböl átadódó erők azonos nagyságú eredői miatt.

A λ frekvenciaparaméterek azok az értékek, ahol ennek a homogén egyenletnek nemtriviális megoldása van, azaz az \mathbf{F} determinánsa 0. A determináns számításának feladata egyenértékű egy 6×6 -os mátrix determinánsának számításával. Ennek az átalakításnak a részletei megtalálhatóak korábbi munkánkban (Geleji 2018). Utóbbi lépéssel jelentősen csökkenthető az elvégzendő műveletek számítás igénye.

A következő lépés a frekvenciaparaméter lehetséges értékeinek keresése, amihez a mátrix determinánsának zérushelyeit kell meghatároznunk. Folytonos szerkezetről lévén szó, végtelen ilyen megoldás létezik. A k -adik λ_k frekvenciaparaméter ismeretében a feladat befejező lépése a rezgésalak számítása: a k -adik alakot megadó \mathbf{c}_k vektor lehetséges elemeinek kiszámítása, majd az $u_k(x)$ rezgésalak normálása. Utóbbira az $L^{(2)}$ normát használjuk.

2.2.2. Páratlan felfüggesztési pont, középpontban felfüggesztett gerenda

A középső felfüggesztés a szimmetriatengelyre esik, ezért az első vizsgált szakasz összes paramétere szerepelhet a perem- és kapcsolódási feltételeinkben. Így az ismeretleneket most a $\mathbf{c} = [A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, \dots, D_{c+1}]^T$ vektorba gyűjthetjük, a feltételeket pedig röviden $\mathbf{F}\mathbf{c} = 0$ alakban is írhatjuk, ahol \mathbf{F} a frekvenciamátrix. A frekvenciamátrix egyes sorai az alábbi feltételeket fejezi ki:

- a gerendavég eltolódása a csuklós megtámasztás miatt nulla,
- a gerendavég görbülete a csuklós megtámasztás miatt nulla,
- a felfüggesztési pontok eltolódásainak összege nulla a kötél nyújthatatlansága miatt,
- az elfordulás a gerenda közepén nulla a szimmetria miatt,

és amennyiben a középső ponton kívül további felfüggesztési pont is van, akkor minden további pontra:

- az eltolódás a felfüggesztési pontot megelőző és az azt követő keresztmetszetben azonos a gerenda folytonossága miatt,
- az elfordulás a felfüggesztési pontot megelőző és az azt követő keresztmetszetben azonos a gerenda folytonossága miatt,
- a görbület a felfüggesztési pontot megelőző és az azt követő keresztmetszetben azonos a gerenda folytonossága miatt,
- a harmadik derivált ugrása a felfüggesztési pontot megelőző és az azt követő keresztmetszet között azonos a középső felfüggesztésnél számolhatóval az állandó kötélteréből átadódó erők azonos nagyságú eredői miatt.

Itt is igaz, hogy azokat a λ frekvenciaparamétereket keressük, ahol az \mathbf{F} determinánsa 0. A determináns számításának feladata most egy 4×4 -es mátrix determinánsának számításával egyenértékű. Az átalakításnak a részletei megtalálhatóak korábbi munkánkban (Geleji 2018). Ezzel a lépéssel itt is jelentősen csökkenthető az elvégzendő műveletek számítás igénye.

A következő lépés a frekvenciaparaméter lehetséges értékeinek keresése, amihez a mátrix determinánsának zérushelyeit kell meghatározni. Folytonos szerkezetről lévén szó, végtelen ilyen megoldás létezik. A k -adik λ_k frekvenciaparaméter ismeretében a feladat befejező lépése most is a rezgésalak számítása: a k -adik alakot megadó \mathbf{c}_k vektor lehetséges elemeinek kiszámítása, majd az $u_k(x)$ rezgésalak normálása.

3. A FREKVENCIATÉRKÉP NUMERIKUS ELŐÁLLÍTÁSA

Az előző fejezetben láttuk, hogy egy típusával és a Δ -val adott szerkezet esetén hogyan számítható a frekvenciamátrix és annak determinánsa tetszőleges λ érték esetén. A λ frekvenciaparaméternek azok az értékei érdekesek, ahol ez a determináns nulla. Ahhoz, hogy a szerkezet rezgésének a felfüggesztések helyétől való függését vizsgálni tudjunk, két paraméter, λ és Δ függvényében határozzuk meg a determináns zérushelyeit. Megjegyezzük, hogy mindkét típus esetén a determináns az exponenciális tagok miatt nagyon nagy értékeket vehet fel, ezért numerikus szempontból célszerű a $|\mathbf{R} - \mathbf{S}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{T}|$ tagot osztani e^λ -val.

A zérushelyek meghatározására a szimplex letapogatás módszerét alkalmaztuk (Gáspár 1997). A módszerrel a paraméterek (λ, Δ) síkját szimplexekre (azaz síkban háromszögekre) bontjuk fel, és minden szimplex csúcsában kiszámoljuk egy hibafüggvény értékét (esetünkben ez a determináns). Ezután a hibafüggvényt a szimplexen belül linearizáljuk (Allgower 1990), majd a linearizált hibafüggvény zérushelyének (a síkban egy egyenes) a szimplex oldalaival való metszéspontjait meghatározzuk egy-egy lineáris egyenletrendszer megoldásával. A szimplexen belüli megoldásokat eltároljuk. A módszer használata során az egyes szimplexek külön-külön vizsgálhatók, ezért az eljárás könnyen párhuzamosítható, ahogy azt a PVM környezettel bemutatták virtuális számítógépek használatával (Domokos 2004). Az általunk

használt program a párhuzamosítást egyetlen számítógép több processzormagján valósítja meg (Németh 2014). A szimplex letapogatás eredményeként a megoldást jelentő, esetenként görbe vonalaknak a szimplexeken belüli linearizált közelítését kapjuk meg.

Mind a páros, mind a páratlan csigával történő felfüggesztés esetén két lehetőségünk van a Δ paraméter határainak kezelésére.

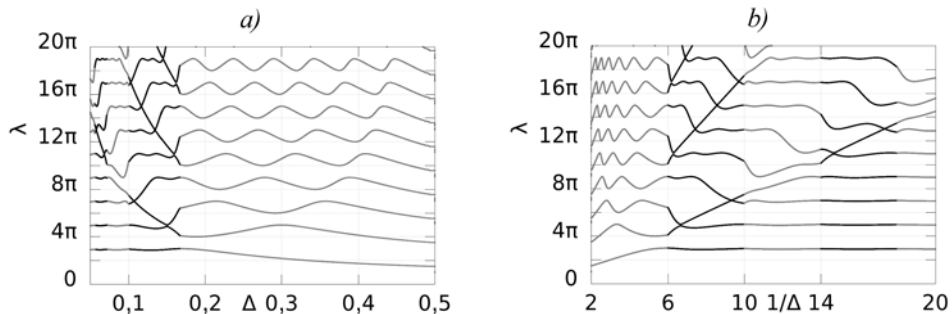
A teljes felfüggesztés esetén az adott család sajátosságainak megfelelően annyi felfüggesztési pontot alkalmazunk, amennyi elfér. Ebben az esetben tehát a Δ távolság egyben a felfüggesztések számát is meghatározza. Páros felfüggesztés esetén a $(2c-1)\Delta < 0,5$ és a $(2c+1)\Delta > 0,5$ feltételek, míg páratlan felfüggesztés esetén a $2c\Delta < 0,5$ és a $(2c+2)\Delta > 0,5$ feltételek fejezik ki, hogy elfér a kívánt számú felfüggesztési pont és nem fér el több. A Δ határai tehát

$$\text{páros felfüggesztésnél} \quad \frac{1}{4c+2} \leq \Delta \leq \frac{1}{4c-2},$$

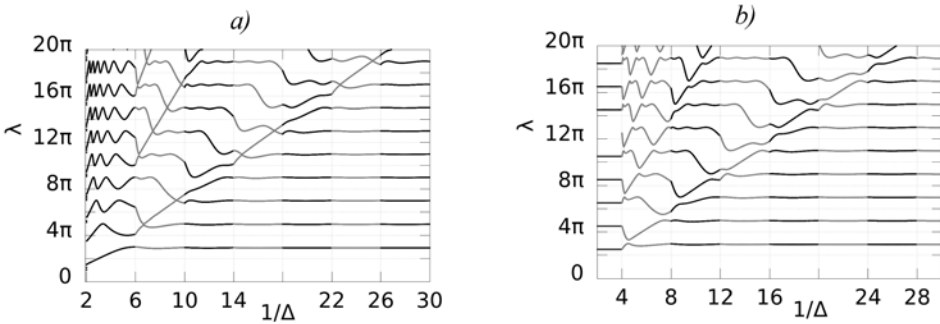
$$\text{páratlan felfüggesztésnél} \quad \frac{1}{4c+4} \leq \Delta \leq \frac{1}{4c}.$$

A részleges felfüggesztés esetén független paraméterként kezeljük a felfüggesztések számát jellemző c paramétert. Ekkor a (3) és (4) egyenlőtlenségekből rendre csak a másodikat kell figyelembe venni, azaz páros felfüggesztés esetén a $\Delta \leq 1/(4c-2)$, páratlan esetén a $\Delta \leq 1/(4c)$.

A 2. ábrán teljes felfüggesztésre elvégzett számítások eredményeit mutatjuk be két grafikonon. Mindkét ábrán a $c = 1, 2, 3, 4$ esetek megoldásait ábrázoltuk páros felfüggesztési pont esetén. A 2.a) ábrán a vízszintes tengelyen a Δ értékek szerepelnek, a 2.b) ábrán a vízszintes tengelyen az $1/\Delta$ értékek láthatók. Rögzített c esetén ugyan egyenletesebbnek mondható az egy-egy λ -hoz tartozó vonalak elhelyezkedése a bal oldali ábrán, ha azonban több, különböző c értékhez tartozó viselkedést kívánunk összehasonlítani, úgy a számunkra érdekes jelenségeket a második ábrán lehet



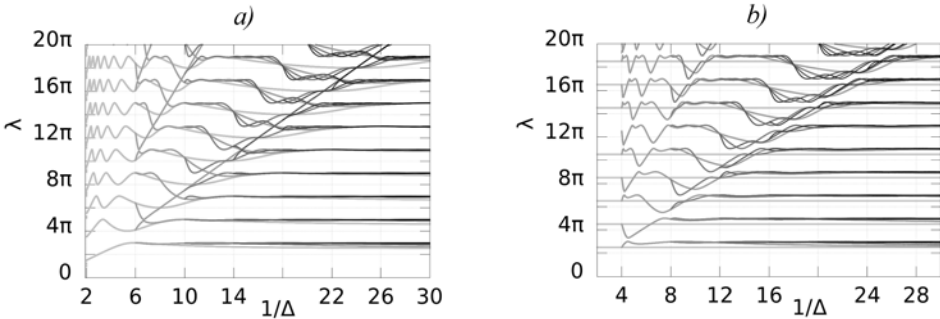
2. ábra. Teljes, páros felfüggesztésű szerkezet frekvenciáértékpei (az egyes árnyalatok a különböző c értékek elválasztására szolgálnak.). a) Kiválasztott Δ értékhez tartozó λ frekvenciaparaméterek. b) Kiválasztott $1/\Delta$ értékhez tartozó λ frekvenciaparaméterek



3. ábra. Teljes felfüggesztésű szerkezetek frekvenciatérképei páros *a)* és páratlan *b)* felfüggesztési pont esetén

megfigyelni. Ezért a további eredményeinket a $(\lambda, 1/\Delta)$ frekvenciatérképeken mutatjuk majd be.

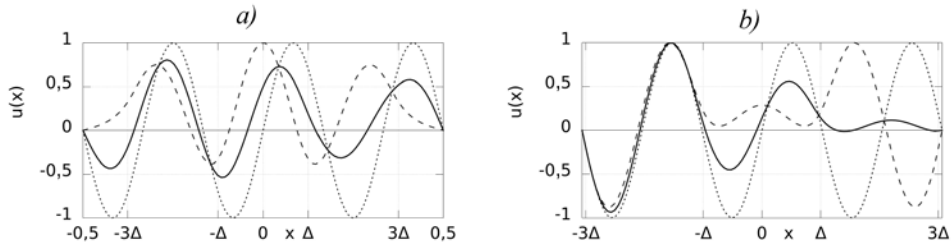
A 3. ábrán a fentieknek megfelelően két ilyen letapogatás eredményét mutatjuk be a teljes felfüggesztés esetére páros, illetve páratlan felfüggesztési pont esetén. Az egymást követő fekete és szürke szakaszok a különböző, jobbra növekvő c értékekhez tartoznak. A 4. ábrán a részleges felfüggesztésű szerkezetek térképeit mutatjuk meg egyidejűleg az összes $c \leq 6$ esetre, az alacsonyabb c értéket világosabb és vastagabb vonallal jelölve.



4. ábra. Részleges felfüggesztésű szerkezetek frekvenciatérképei páros *a)* és páratlan *b)* felfüggesztési pont esetén

4. NUMERIKUS EREDMÉNYEK, ÉSZREVÉTELEK

Mind egyik ábra közös jellemzőjeként megállapíthatjuk, hogy vannak meredek szakaszok, amik az adott tartományban érzékeny szerkezetet jelentenek. Ez azt jelenti, hogy a Δ kis megváltozása az adott frekvenciaparaméter és így a kapcsolódó saját-körfrekvencia viszonylag nagy változását eredményezheti, ami akár oda vezethet,

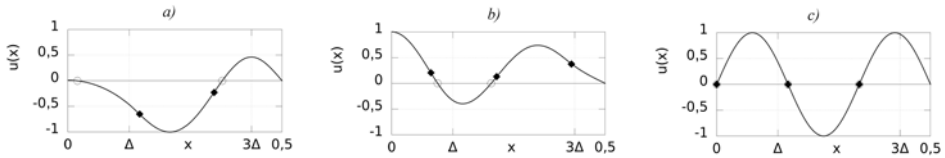


5. ábra. Teljes szerkezet azonos frekvenciaparaméterhez tartozó rezgésalakjai (szaggatott: szimmetrikus és ferdén szimmetrikus, folytonos: általános) $c = 2$, $\lambda = 6\pi$; a) $1/\Delta = 7,999$; b) $1/\Delta = 6,132$

hogy egy rezonanciától távolabbi harmonikus gerjesztés rezonancia-közeli gerjesztéssé alakul.

Az is kiolvasható, hogy a ferdén szimmetrikus rezgésalakokhoz tartozó páros π -nek megfelelő vízszintes egyeneseket a görbék többször is metszik. Egy-egy ilyen metszéspont azt jelenti, hogy az adott Δ esetén a kérdéses frekvenciához egy páros és egy páratlan alak is tartozik, vagyis ezek szimetriatulajdonsággal nem rendelkező kombinációi is sajátrezgésalakok lesznek. Ilyen például $c = 2$ esetén az $1/\Delta = 7,999$, illetve $1/\Delta = 6,132$ értékek: mindegyikhez a $\lambda = 6\pi$ megoldás tartozik. Ha a frekvenciamátrixot a szimmetriafeltételek figyelembevétele nélkül, azaz a teljes szerkezetre írjuk fel és ennek determinánsát fejtjük ki, akkor a kapott egyenletnek az ilyen λ értékek kétszeres gyökei lesznek. Az 5. ábrán bemutatjuk a példaként megadott két gyökhöz tartozó három-három rezgésalakot: egy szimmetrikust egy ferdén szimmetrikust és egy általánost, ami az előző kettő lineáris kombinációjaként adódott. Ez utóbbi alak tehát nem független a másik kettőtől, de önmagában is egy sajátrezgésalak. Az általunk alkalmazott számítási módszer szétválasztotta a szimmetrikus és ferdén szimmetrikus megoldásokat, így abban a többszörös gyökök is elkülönülten jelennek meg, a szimetriaviszonnyal nem rendelkező alakot pedig csak a két alak kombinációjaként állíthatjuk elő.

A páros π egyenesekkel való metszéspontok másik következménye, hogy bizonyos Δ -értékek mellett sérül a hagyományos gerendaszerkezeteknél megszokott jelenség, miszerint a szimmetrikus szerkezeteknél a növekvő sajátfrekvencia szerint sorba rendezett alakoknál a szimmetrikus és ferdén szimmetrikus rezgésalakok felváltva következnek egymás után. Például a $c = 2$ esetben az $1/\Delta = 7$ -nél a szimmetrikus alakok első négy frekvenciaparamétere rendre $2,90\pi$, $4,74\pi$, $5,23\pi$ és $8,97\pi$, míg a ferdén szimmetrikus alakok első négy frekvenciaparamétere 2π , 4π , 6π és 8π , azaz a harmadik szimmetrikus alak „megelőzi” a harmadik ferdén szimmetrikus alakot. Az ilyen rezgésalakoknál is igaz marad, hogy a sajátértékek növekvő sorrendjében a rezgésalakok csomópontjainak száma monoton növekszik, ugyanez azonban nem igaz a rezgésalakok inflexiós pontjainak számára. Ezt szemlélteti a 6. ábra, ahol a három egymást követő rezgésalak csomópontjainak száma rendre 4, 4 és 5, míg az inflexiós pontok száma 4, 6 és 5.



6. ábra. A $c = 2$ páros felfüggesztésű szerkezet $1/\Delta = 7$ -hez tartozó, fél tartóra eső 4., 5. és 6. rezgésalakja a fél gerendán. Körökkel és négyzetekkel jelöltük rendre a csomópontokat és az inflexióspontokat

Fentiekén túlmenően öt jelenségre hívjuk fel a figyelmet.

4.1. A HATÁROK MAGYARÁZATA

Először vizsgáljuk meg a Δ értékek szélsőértékeihez tartozó frekvenciaparaméter-értékeket. Részleges felfüggesztés esetén a nullához tartó Δ (azaz végtelenhez tartó $1/\Delta$) hatása a felfüggesztési pontok számától függetlenül az, hogy a tartó középő pontjának közelében levő pontok eltolódásai egyaránt nullához tartanak. Ennek magyarázata, hogy tetszőleges véges eltolódáshoz vagy elforduláshoz az elemien kicsiny szakaszon végtelen nagyságú elfordulás vagy görbület lenne szükséges, ami viszont a folytonossági feltételeket sértené. Ebben a határhelyzetben tehát a középő pontok nem tolódnak el és az elfordulás is 0 lesz az általunk keresett szimmetrikus alakok esetén, vagyis a háromtámaszú tartó rezgésalakjaihoz és frekvenciaparamétereikhez jutunk. Ezek a frekvenciaparaméterek a $[2k + (1/2)]\pi$ értékek környezetében vannak, ahol k tetszőleges pozitív egész szám (Timoshenko 1974). A 4. ábrán jobbra haladva tehát minden görbe egy ilyen határértékhez tart aszimptotikusan.

Teljes felfüggesztés esetén a nullához tartó mellett a felfüggesztési pontok egymáshoz végtelen közel kerülnek és a számuk a végtelenhez tart. Határátmenetben a felfüggesztés egy olyan folytonos megtámasztássá válna, ahol a megoszló erőként átadódó felfüggesztőerő miatt módosulna a rezgés differenciálegyenlete. A megoldásban a (2) szerinti rezgésalakhoz egy olyan polinomiális elmozdulásfüggvény adódna, hogy az egyes alakok elmozdulásainak a hossz menti integrálja éppen nullák legyen. Ezt a határhelyzetet jelen dolgozat keretében nem vizsgáljuk.

Páros felfüggesztési pont esetén a legnagyobb érték 0,5. Ezt megelőzően egyetlen felfüggesztés sincsen a tartón, azaz a szimmetrikus alakokhoz tartozó frekvenciaparaméterek π páratlanszorosai lennének. Ahogy Δ belép az értelmezési tartományba, ez az érték hirtelen, ugrásszerűen megnövekszik. Ezt a növekedést numerikus okokból csak szaggatott vonalakkal látjuk a 3.a) és 4.a) ábrák bal oldalán. Az ugrásszerű növekedés fizikai oka az, hogy a határértéknél csak kicsit kisebb Δ érték a támasztól végtelen kis távolságban jelent egy olyan felfüggesztési pontot, aminek szimmetrikus rezgésalakok esetén az eltolódása 0 kell legyen (hiszen nincsen másik pont, amelynek eltolódása ellensúlyozná a kötélhossz e pont miatti változását). A végtelen

kis távolság miatt a két pontban megtámasztott rúdvég egy befogásként fog viselkedni. A mindkét végén befogott rúd szimmetrikus rezgéseivel tartozó, $(4k-1)\pi/2$ -nél rendre valamivel nagyobb értékek lesznek a frekvenciaparaméter azon értékei, ahonnan ezek a vonalak elindulnak jobbra a 3. ábrán. A további felfüggesztési pontok megjelenésekor ez a jelenség nem következik be, hiszen akkor már van olyan közbelső pont, ami el tud mozdulni a kötél nyúlásmentességét biztosítandó, így az újonnan megjelenő felfüggesztés nem okoz zérus eltolódást a támasz melletti pontban.

Páratlan felfüggesztési pont esetén a tartó közepén levő pont miatt mindig lesz elmozdulásra képes felfüggesztés a tartón, így amikor a $\Delta = 1/4$ határértéknél először megjelenik a tartó végén egy felfüggesztés, az sem okozza a támasz befogássá válását. Ugyanakkor itt értelmezhető a $c = 0$ eset is. Ez mindig ugyanakkora frekvenciaparamétert eredményez, így annak az esetnek egy-egy vízszintes vonal felel meg, ami kivételesen nem aszimptotikusan tart a $[2k+(1/4)]\pi$ környezetében levő értékhez csökkenő Δ mellett, hanem bármilyen Δ mellett ugyanakkora marad.

4.2. TISZTÁN SZINUSZHULLÁM ALAKÚ REZGÉSALAKOK PÁROS FELFÜGGESZTÉSÉNÉL

Még a felfüggesztett szerkezetek esetén is található tisztán szinuszhullámként jellemezhető rezgésalak. Ezeknek az alakoknak közös jellemzője, hogy a $\lambda = (2k+1)\pi$ frekvenciaparaméterek tartoznak hozzájuk, ahol k pozitív egész szám. A megoldásokat (azaz azokat a Δ értékeket, ahol a görbék éppen érintik a páratlan π -nek megfelelő vízszintes vonalakat) három csoportba sorolhatjuk:

a) A legegyszerűbb eset az, amikor az összes felfüggesztési pont a szinuszhullám csomópontjára esik, azaz amiatt nem nyúlik meg a kábel, hogy egyik pontja sem mozdul el. Részleges megtámasztás esetén ezeket a konfigurációkat úgy kaphatjuk meg, hogy leszámoljuk, hogy egy adott k által meghatározott alakon hogyan férnek el a felfüggesztési pontok. A szinuszhullám zérushelyei rendre mindig az

$$x = \frac{2r-1}{2(2k+1)}$$

helyeken fordulnak elő, ahol $r = 1, \dots, k+1$. Ha az első felfüggesztési pont az r_1 -edik zéruspontra esik, akkor az utolsó helye az

$$x_{r_1}^{\max} = (2c-1) \frac{2r_1-1}{2(2k+1)}.$$

Ennek a pontnak még a gerendára kell esnie, ezért nem lehet nagyobb 0,5-nél. Ebből a feltételből kifejezhető, hogy adott c és k esetén mekkora lehet maximális értéke, azaz hány ilyen megoldás létezik:

$$r_1^{\max} \leq \frac{k+c}{2c-1}.$$

Az ilyen rezgésalakra képes szerkezeteknél Δ értéke a fent megadott x lehet:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{4k+2}{2r-1}, \quad \text{ahol } r=1, \dots, r_1^{\max}.$$

A képletből kiolvasható, hogy a

$$\Delta = \frac{1}{(4k+2)}$$

és $r=1$ paraméterekkel az összes $c \leq k+1$ felfüggesztési szám mellett ugyanazt a rezgésalakot eredményezi a $\lambda = (2k+1)\pi$ érték. Ez éppen a $c=1$ -hez tartozó legkisebb Δ -jú megoldás, ahonnan kezdve a $c=k+1$ görbe is elkezdődik.

Megfigyelhető, hogy a páratlan π nagyságú λ értékek csökkenő Δ értékek mellett különböző helyeken lépnek fel különböző c -k esetén, és két érték között tipikusan kisebb λ látható. Ez azzal jár, hogy részleges felfüggesztés esetén egy bizonyos $1/\Delta$ fölött már beáll a $c=1, 2, 3, 4, \dots$ sorrendje a görbéknek (lásd a 4.a) ábra jobb oldalát). Ez a határ, vagyis az utolsó „érintési pont”, ahol a legnagyobb vizsgált c értékű görbe érinti a $\lambda = (2k+1)\pi$ vízszintes egyenest:

$$\Delta = \frac{1}{c(4k+2)} \quad \text{úgy, hogy} \quad \Delta < \frac{1}{4c-2}.$$

Ezen Δ alatt ($1/\Delta$ fölött) a különböző sötétséggel és vastagsággal ábrázolt szerkezetek ábrái már csak egymás mellett haladva közelítenek a 4.1. pontban említett határértékhez.

b) Páros felfüggesztésű szerkezeteken $c > 1$ esetén a felfüggesztési pontok olyan elrendezése is elképzelhető a tisztán szinuszos rezgésalakokon, hogy a felfüggesztési pontok a hullám egy csomópontjára szimmetrikusan helyezkednek el, így a hozzájuk tartozó elmozdulások rendre egymás ellentettjei, ezzel teljesítve azt a követelményt, hogy az összegük zérus legyen. Az ilyen szimmetrikus elrendezés feltétele, hogy a fél gerendára eső felfüggesztési pontok közül az első és az utolsó helye közötti felezőpont essen egy zéruspontra. Az ilyen megoldásokat az a) ponthoz hasonlóan tudjuk leszámolni egy adott k által meghatározott alakon. Ha az első és az utolsó felfüggesztés közötti felezőpont az r_f -edik zéruspontra esik, akkor az utolsó felfüggesztés helye

$$x_{r_f}^{\max} = \frac{(2c-1)(2r_f-1)}{2(2k+1)c}$$

lesz, aminek még a gerendára kell esnie, ezért nem lehet nagyobb 0,5-nél. Ebből a feltételből kifejezhető, hogy adott c és k esetén mekkora lehet maximális értéke:

$$r_f^{\max} \leq \frac{c(2k+1)}{2(2c-1)} + \frac{1}{2},$$

azaz hány ilyen megoldás létezik. Az ezekhez tartozó Δ értékekre

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{(4k+2)c}{2r-1}, \quad \text{ahol } r=1, \dots, r_f^{\max}.$$

(Az r_f maximumára levezetett összefüggés egyébként $c = 1$ -re is működik, és azokat az eseteket adja vissza, amikor az egyetlen felfüggesztés a jobb oldali támasz fölé kerül, ami természetesen egy csomópontja a rezgésalaknak.)

c) Elegendő számú felfüggesztési pont esetén olyan megoldások is előfordulhatnak, ahol az elmozdulások összege nem amiatt lesz zérus, mert minden ponthoz rendelhetünk egy olyat, amelyiknek az elmozdulása éppen az ellentettje. Ilyen megoldást csak akkor találtunk, ha páratlan c mellett a középső pont éppen a hullám egyik szélsőértéke fölött helyezkedik el, a többi pont pedig ennek megfelelően azonos távolságokban. Az r -edik szélsőérték helye

$$x_r = \frac{2r}{2(2k+1)}.$$

Ha a felfüggesztési pontok számát $c = 2l-1$ alakban fejezzük ki, akkor az x_r helyen az l -edik felfüggesztésnek kell lennie, amiből

$$\Delta = \frac{r}{(2k+1)(2l-1)}.$$

Az utolsó felfüggesztés helyére vonatkozó feltételből adódik most is az index felső határa:

$$r_l^{\max} \leq \frac{c(2k+1)}{2(2c-1)}.$$

A Δ lehetséges értékeit az alábbi kifejezésből számíthatjuk:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{(2k+1)c}{r}, \quad \text{ahol } r=1, \dots, r_l^{\max},$$

de r nem lehet c egész-szerese.

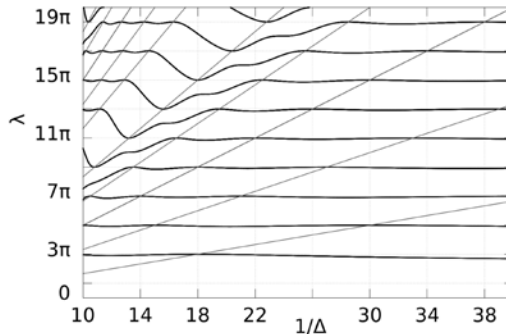
A c) típusú megoldások esetén talán nem látszik közvetlenül, hogy a felfüggesztési pontok elmozdulásainak összege éppen 0. Ennek bizonyításához az alábbi dolgokat kell szem előtt tartanunk. Az egyik, hogy a pontok rendre egy szinuszhullámon, egymástól azonos távolságra helyezkednek el, a másik pedig az, hogy az első felfüggesztési pont távolsága a szakasz felétől, azaz a hullám egyik szélsőértékétől éppen feleakkora, mint a pontok egymástól való távolsága. Ha egy körív mentén pontokat helyezünk el úgy, hogy azok függőleges koordinátái éppen a felfüggesztési pontok elmozdulásai legyenek, akkor ezek a pontok ugyanakkora elfordulási szöggel

követik egymást a körív mentén (akár többször is megkerülve azt). Az l -edik, azaz a középső pont valamelyik szélsőértéknek megfelelően legfelülre vagy legalulra kerül, a megelőző, illetve követő pontok pedig egymással ellentétes irányban körbe haladva, egymást φ -vel követve helyezkednek el. Az első pont helye valamelyik (alsó vagy felső) szélsőérték előtt $\varphi/2$ -vel lesz, azaz az utolsóé ugyanezen szélsőérték előtt lesz $\varphi/2$ -vel. A ponthalmazt képzeletben kiegészítve a nulladik és a $c + 1$ -edik pontokkal azok éppen a c -edik és az első ponttal esnének egybe, vagyis az eredeti c pont együtt egy diszkrét forgási szimmetriával rendelkezik. Ennek megfelelően a ponthalmaz súlypontja általában a kör középpontja, így a statikai nyomatéka, azaz a függőleges koordináták összege is zérus. Fentiek alól kivételt képez az az eset, amikor az első és az utolsó pont egymással fedésbe kerül. Ez az elrendezés felborítaná a c darab pont ciklikusságát, így nem teljesülne az összeg zérus értéke sem. Ez az eset akkor fordulhat elő, ha a $\varphi/2$ szögelfordulás π egész számú többszöröse, ami megegyezik azzal a feltétellel, hogy az r nem lehet c egész számú többszöröse.

Az eddig ismertetett három típusmegoldást összevetve megállapíthatjuk, hogy minden $a)$ típusú megoldás egyben $b)$, vagy $c)$ típusú, mégpedig ha c páratlan, akkor $b)$, ha c páros, akkor $c)$ típusú.

$d)$ A $b)$ és $c)$ pontban látott megoldások (azaz a felfüggesztési pontok elrendezése) ismétlődésével szintén zérus összegeket kaphatunk, ezek azonban nem új alakok lennének. A $b)$ pontban kapott egyik megoldás Δ távolságát a c érték $2m$ -szeresével használva egy $c)$ típusú megoldást kapunk, a c érték $(2m + 1)$ -szeresével használva egy $b)$ típusú megoldást kapunk. Hasonló módon a $c)$ pontban kapott egyik megoldás Δ távolságát a c érték m -szeresét használva egy $c)$ típusú megoldást kapunk. (Az ismétlések számát meghatározó m mindenhol egy tetszőleges pozitív egész szám.)

A fentiek szerint kapott megoldások közös jellemzője, hogy az $1/\Delta$ érték mindig lineárisan függ a szinuszhullámot meghatározó k értéktől, ezért az azonos r és c értékhez kapott pontok a 4.a) ábrán egy-egy egyenesre esnek. (Paraméterként Δ -t használva hiperbolák mentén helyezkednének el ezek a pontok, ami kevésbé szembevető.) A 7. ábrán berajzoltuk a $c = 3$ eset térképére az egyes esetekhez tartozó



7. ábra. A páros felfüggesztésű szerkezet ($c = 3$) szinuszhullám alakú rezgésalakhoz tartozó megoldásainak lineáris elhelyezkedése

egyeneseket. Ezek a növekvő meredekség szerint b, c, b (és a), c, b, b, c, b (és a), c és b típusúak.

Megjegyezzük, hogy teljes felfüggesztés esetén a fentiek szerint kapott egyenesek tipikusan szakaszonként szétesnek. Ez alól csak az a) típusú egyenesek jelentenek kivételt.

4.3. TISZTÁN SZINUSZHULLÁM ALAKÚ REZGÉSALAKOK PÁRATLAN FELFÜGGESZTÉSÉNÉL

A páratlan pontban felfüggesztett szerkezetek esetén is található tisztán szinuszhullámként jellemezhető rezgésalak. Ezeknek az alakoknak is közös jellemzője, hogy a $\lambda = (2k+1)\pi$ frekvenciaparaméterek tartoznak hozzájuk, ahol k pozitív egész szám. A megoldásokat (azaz azokat a Δ értékeket, ahol a görbék éppen érintik a páratlan π -nek megfelelő vízszintes vonalakat) itt csupán egy csoportba sorolhatjuk:

a) Ez a páros felfüggesztési pontoknál látott c) megoldásokhoz hasonló elrendezés azzal a különbséggel, hogy nem csak a fél szerkezetet kell néznünk, hanem az egész szerkezet felfüggesztési pontjait. Ezeknek a pontoknak egy szinuszhullámon ugyanolyan rendben kell elhelyezkedniük, csak a korábbi c helyett $2c+1$ felfüggesztési pontnak kell lennie. Az 4.2.c. pontban bemutatott geometriai elv alapján a pontoknak ugyanúgy egy ciklikus elrendezésnek kell megfelelni ahhoz, hogy a kötélnyúlása nulla legyen. A páros felfüggesztésű félszerkezetben a $c = 2l-1$ összefüggést felhasználva a felfüggesztések zérus összegéhez a kábel vetületére a

$$\Delta = \frac{r}{(2k+1)(2l-1)}$$

értéket kapjuk. Ebben az elrendezésben a középső ponttól jobbra, illetve balra rendre $l-1$ pont van, a páratlan szerkezeten tehát ennyi a felfüggesztést jellemző c . Ezt felhasználva

$$\Delta = \frac{r}{(2k+1)(2c+1)}$$

adódik, amiből az utolsó felfüggesztési pont helyére vonatkozó feltétel most $c \cdot 2\Delta \leq 0,5$ lesz.

Ebből tudjuk meghatározni r_c maximumát, ami

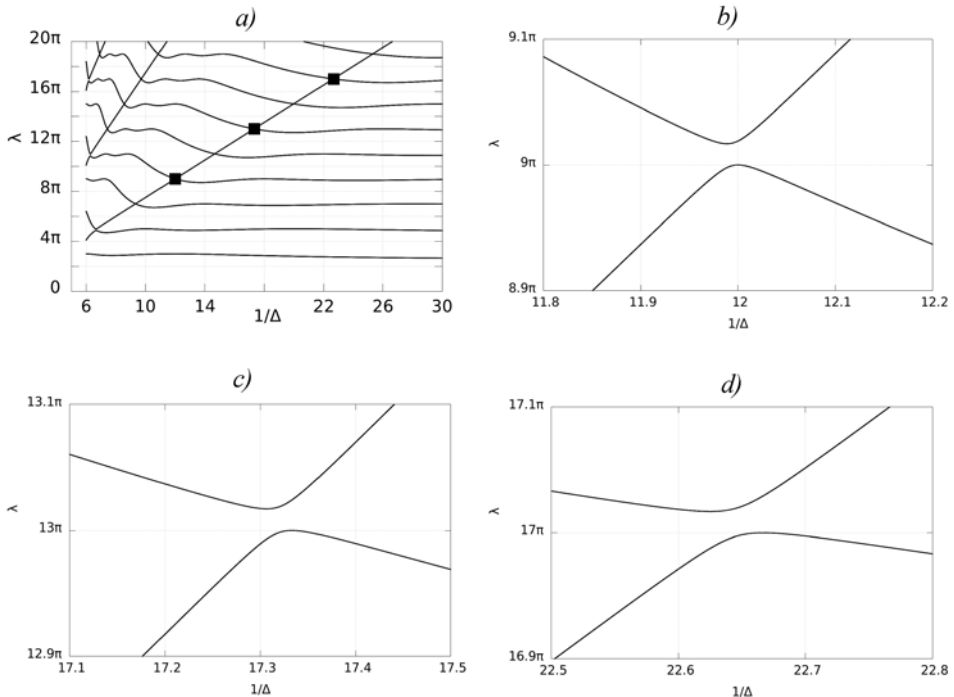
$$r_c^{\max} \leq \frac{(2k+1)(2c+1)}{4c},$$

de r most nem lehet $(2c+1)$ egész-szerese.

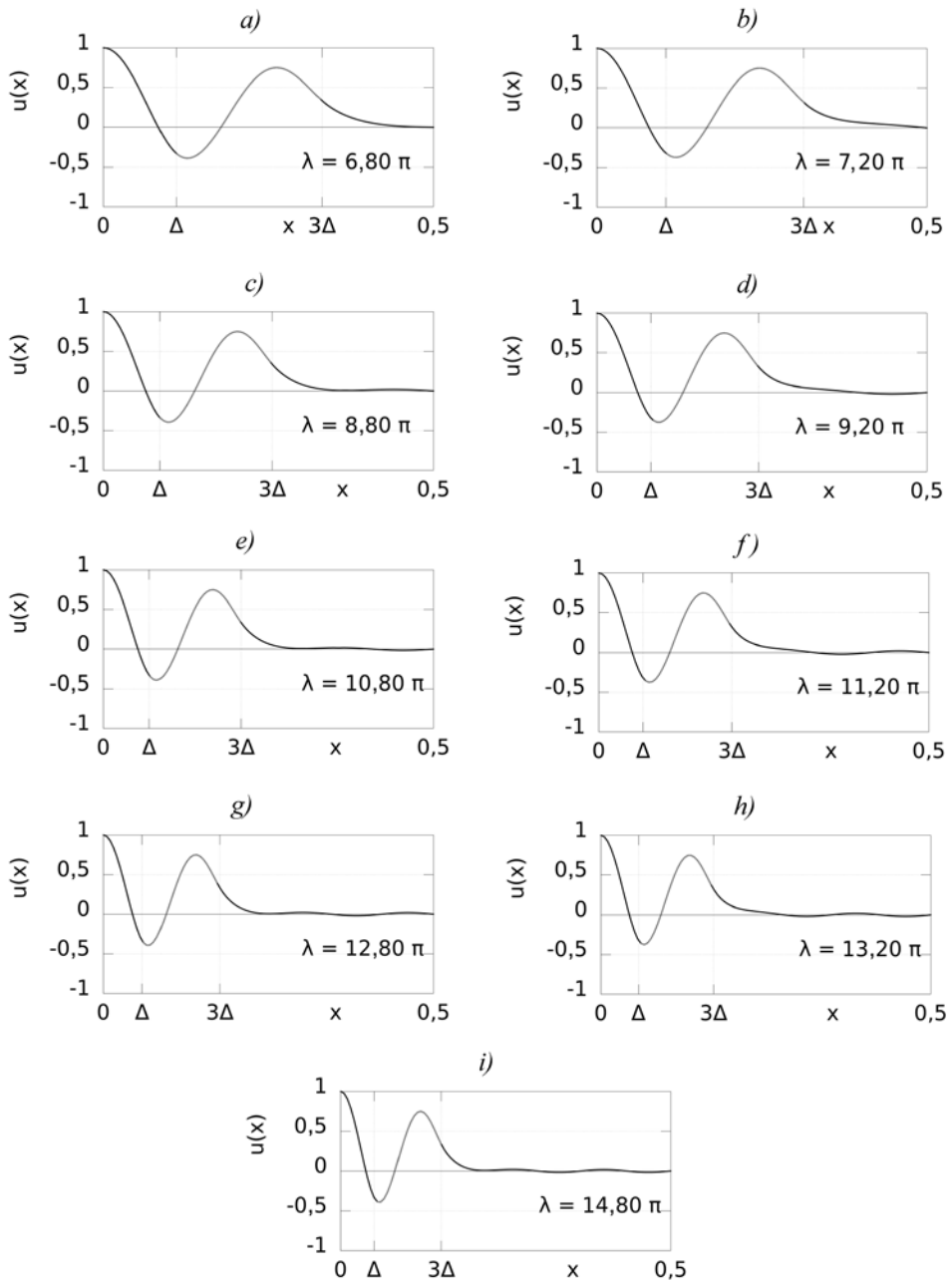
4.4. A PÁROS FELFÜGGESZTÉS NÉL LÉTREJÖVŐ KÖZEL EGYENES VONAL

A 4.a) ábra $c = 2$ részét emeltük ki a 8.a) ábrán. Itt az látható, hogy $\lambda = 5\pi$ környezetéből elindul egy szinte egyenes vonal. Közelebről megnézve azonban látható, hogy ez a vonal nem folytonos (az elágazások helyett szétesik két-két ágra) és nem egyenes (hiszen a páratlan π -k környezetében van egy-egy vízszintes érintő). Ennek szemléltetésére sűrűbb felbontásokkal is elvégeztük a letapogatást egy-egy kisebb tartományban, melyeket a három fekete négyzet jelöl. E letapogatások eredményeit a 8.b)–d) ábrákon mutatjuk. Ezek alapján egyértelműen kijelenthetjük a fentieket.

Érdeemes azonban megvizsgálni a közel egyenes, szakaszokból álló vonal mentén kialakuló alakokat. Erre mutatunk néhány példát a 9. ábrán, ahol az ábrázolt alakok a 8.a) ábra azon egyenesnek tűnő szakaszáról kiválogatott pontokhoz tartozó alakok, mely vonalon a 8.b)–d) ábrán már vizsgált környezeteket is bejelöltük. A pontokat egy-egy „metszéspon” előtt és után választottuk ki, az első alaknál $|\Delta| = 0,1103$ és $\lambda = 6,8\pi$, míg az utolsó alaknál $\Delta = 0,0507$ és $\lambda = 14,8\pi$. Azt találtuk, hogy a kiala-



8. ábra. A páros felfüggesztésű $c = 2$ szerkezet frekvenciaterképei. a) Teljes nézet, a közel egyenes szakaszok bemutatására b)–d) Néhány elágazásnak látszó pont környezetében végzett letapogatás eredménye



9. ábra. Rezgésalakok a közel egyenes vonal mentén. A felfüggesztési pontok helye a jelölt $x = \Delta$ és $x = 3\Delta$ pontok

külő rezgésalakok egy jól látható mintázatot követnek: a teljes tartó középső szakasza, ahol a tényleges felfüggesztések vannak, viszonylag nagyobb elmozdulásokkal rendelkeznek, míg a gerenda felfüggesztetlen vége kisebb amplitúdóval rezeg.

4.5. METSZÉSPONTOK VIZSGÁLATA

A frekvenciatérképen a görbék látszólag több helyen is metszik egymást. Ezeket a metszéspontokat négy csoportba sorolhatjuk. Ezek vizsgálata azért lényeges, mert a tényleges elágazásoknál a frekvenciaparaméter többszörös gyök, így a rezgésalakot is két alak kombinációjaként állíthatnánk csak elő, ahogyan azt az 5. ábrán is tettük.

a) Az első típus az, amikor a Δ határértékeinél részleges felfüggesztés esetén megjelenik egy újabb felfüggesztési pont. Ez tényleges elágazás, hiszen a határhelyzetben az utolsó, támasz fölé eső felfüggesztést akár figyelembe vesszük, akár nem, az a rezgést fizikailag nem befolyásolja. Ugyanakkor az elágazáshoz közeledve minden rezgésalak ugyanahhoz a határhoz tart, így az elágazás szempontjából nem foglalkozunk vele.

b) A második típust is csak részleges felfüggesztés esetén figyelhetjük meg, amikor ugyancsak két különböző felfüggesztési pontszámhoz (c) tartozó görbe metszi egymást. Ekkor a metszésponthoz tartozó alakok lényegesen eltérhetnek, a görbék csak a paraméterek síkjába történő vetítés miatt kerülnek egymás fölé, nem valódi elágazási pontok. Ezt abból láthatjuk be, hogy e rezgésalakok olyanok, ahol a kötélrő nem zérus, ezért az újonnan figyelembe vett felfüggesztési pont véges mértékben megváltoztatná az erőjátékot és ezáltal a követő szakasz alakját, ezzel a teljes rezgésalakot is. Ez a hirtelen átmenet nem létezhet, vagyis a metszésponthoz két különböző, egymásba simán átalakulni nem tudó alak tartozik.

c) Fenti b) pont alól kivételt képeznek azok a pontok, ahol a kötélrő zérus, így a többletpontok hozzáadása sem befolyásolja az alakot. Ezek a pontok mind a korábban már ismertetett szinuszhullám rezgésalakokhoz tartozó pontjai a térképnek, azaz a metszésponthoz közelítve most is minden szakaszon azonos lesz határértékben a rezgésalak.

d) A negyedik típus az előző pontban már említett, közel egyenesnek tűnő vonalak mentén elhelyezkedő pontok. A paramétertér finomabb felbontásával csak egy-egy metszéspont környezetét vizsgálva azonban már megállapítottuk, hogy ezekben a tartományokban a két irányból érkező görbéknek csak látszólag van közös pontjuk, a valóságban nincsen.

4.6. A FREKVENCIATÉRKÉP HASZNÁLATA

A numerikusan előállított frekvenciatérképet egy tetszőleges szerkezet esetén használhatjuk a saját-körfrekvenciák meghatározására. A kiválasztott típus és felfüggesztési pontok számát megadó c érték mellett ki kell keresnünk a kiválasztott Δ

értékhez tartozó frekvenciaparaméter-értékeket, amikből a saját-körfrekvenciákat számíthatjuk. Az ábrából leolvasott λ -értékek az egységnyi hosszúságú gerendához tartoznak, ezeket a páros π -hez tartozó ferdén szimmetrikus alakokhoz tartozó értékekkel kell kiegészíteni és sorba rendezni (mint láttuk, ez csak az értékek összevetésével végezhető). A k -adik saját-körfrekvenciát az

$$\omega_{0,k} = \frac{\lambda_k^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$$

képlettel számíthatjuk, a rezgésalakot a (2) függvény szakaszonkénti alakjából kaphatjuk meg, de a $\lambda_k x$ szorzat helyére mindenhol a $\lambda_k(x-x_0)/L$ értéke írandó.

A frekvenciaparaméterek leolvasása mellett a térkép arra is módot nyújt, hogy az egyes frekvenciáknak a Δ értékre való érzékenységet is megbecsüljük. Minél laposabb egy leolvasott érték környezetében a görbe, annál kisebb változást okoz a frekvenciában a érték kis megváltozása.

5. ÖSSZEFOGLALÁS

Cikkünkben elemeztük a csigasorral felfüggesztett tartók egy családjának az aktív felfüggesztéshez tartozó sajátrezgéseit a felfüggesztési pontok egymástól való távolságának a függvényében. Numerikusan előállítottuk a gerendacsalád frekvenciaterképét, melyből a felfüggesztés paraméterének függvényében leolvasható a frekvenciaparaméter értéke. A frekvenciaterkép alapján megállapítottuk, hogy szélsőséges esetekben milyen szerkezetnek felel meg a nyújthatatlan függesztőkötél által képviselt kényszer. Kimutattuk, hogy milyen felfüggesztési pontok mellett alakulhatnak ki tisztán szinuszos rezgésalakok, melyre formulát adtunk meg. A frekvenciaterkép alapján megállapítottuk, hogy bizonyos felfüggesztési paraméterek mellett a sajátrezgésalakok páros-páratlan sorrendje kismértékű zavart szenved és a csomópontok, illetve inflexiós pontok száma nem adja meg egyértelműen a rezgésalak sorszámát. Bemutattuk, hogy a frekvenciaterképen megfigyelhető közel egyenes, közel folytonos vonal milyen rezgésalakokhoz tartozik. A frekvenciaterkép alkalmazása segíthet a frekvenciaparaméternek a felfüggesztési paraméter változására való érzékenységeinek megállapításában.

IRODALOM

- Allgower, Eugene L. – Georg, Kurt: Numerical Continuation Methods: An Introduction. In: *Series in Computational Mathematics 13*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1990.
- Domokos, Gábor – Szeberényi, Imre: A Hybrid Parallel Approach To One-Parameter Nonlinear Boundary Value Problems. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences* 11 (2004) 1. 15–34.

- Gáspár, Zsolt – Domokos, Gábor – Szeberényi, Imre: A Parallel Algorithm For The Global Computation Of Elastic Bar Structures. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences* 4 (1997) 1. 55–68.
- Geleji Borbála – Németh Róbert K.: Függesztett gerendacsalád szabadrezgése I. Sajátfrekvenciák és rezgésalakok számítása. *Építés – Építészettudomány* 46 (2018) 1–2.
- Hincz, Krisztián: Arch-supported tensile structures with very long clear spans. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures* 48 (2007) 2. 89–98.
- Hincz, Krisztián: Nonlinear analysis of cable net structures suspended from arches with block and tackle suspension system, taking into account the friction of the pulleys. *International Journal of Space Structures* 24 (2009) 3. 143–152.
- Kocsis, Attila – Németh, Róbert K. – Turmunkh, Baigalimaa: Dynamic analysis of a beam on block-and-tackle suspension system: A continuum approach. *Engineering Structures* 101 (2015) 412–426.
- Kolozsváry-Kiss, Árpád: Roof arches without bending moments. Patent, WO/2006/136867; 2006.
- Ludvig Győző: *Gépek dinamikája*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1983.
- Németh, Róbert K.: Parallel scanning of implicit surfaces with the simplex algorithm. *Periodica Polytechnica – Civil Engineering* 58 (2014) 1. 23–31.
- Németh Róbert K. – Kocsis Attila: Csigasorral függesztett gerenda szabadrezgése modálanalízissel. In: *XII. Magyar Mechanikai Konferencia*. Szerk.: Baksa Attila – Bertóti Edgár – Szírbik Sándor. Miskolci Egyetem Gépészmérnöki és Informatikai Kar Műszaki Mechanikai Intézet, Miskolc 2015. 1–9.
- Timoshenko, Stephen – Young, Donovan H. – Weaver, W.: *Vibration problems in engineering*. John Wiley & Sons, New York 1974.

FREE VIBRATION OF A FAMILY OF SUSPENDED BEAMS II.

CALCULATION AND ANALYSIS OF THE FREQUENCY MAP

Summary

In this paper the effects of a new kind of structure, the block-and-tackle suspension system is investigated on the free vibration of a beam family subjected to bending. The beam family consists of symmetric pinned-pinned beams that are supported by an infinitely stiff cable with neglectable mass connected symmetrically by the block-and-tackle system. The inertia of the pulleys and their friction is neglected. In view of the natural frequencies and vibration modes corresponding to the tightened state of the cable, the use of modal analysis in the examination of the vibrations of the structure is possible. The vibration modes and natural frequencies are determined as a function of the frequency parameter and a parameter characterizing the position of the suspension points. This is obtained through the frequency matrix expressing the continuity and boundary conditions, where parameters that eventuate a zero determinant are calculated by simplex algorithm. The resulting frequency map gives information about the typical behavior and sensitivity of the vibration modes. It has been found that under the effect of a multi-freedom-constraint the original engineering approach becomes obsolete. For example the symmetric and skew-symmetric modes alternately following each other when put in the order of raising natural frequencies, and simultaneously the unequivocal connection between the index of vibration modes and the number of their nodes or inflection points is no longer valid.

Keywords: block-and-tackle suspension, multi-freedom-constraint, free vibration, frequency map