DIMENZIÓK
Matematikai Közlemények
VI. kötet, 2018

doi:10.20312/dim.2018.05

Kettős Awrami függvény alkalmazása

Csanády Viktória
SOE Matematikai Intézet
csanady.viktoria@uni-sopron.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. Az időbeli folyamatok, összefüggő fizikai, biológiai jellemzők kapcsolatának regressziós vizsgálata során a statisztikai programok adta lehetőségek végett, számos bonyolult matematikai modell alkalmazására nyílik mód. Az alábbiakban egy speciális modell kerül bemutatásra, annak sokoldalúságát kiemelve, példákkal illusztrálva.

ABSTRACT. Statistical programs enabled us to apply several complex mathematical models for regression analysis in the investigation of the relationships of physical and biological properties in time processes. In what follows, we present a special model and emphasize its versatility by introducing examples.

1. Bevezetés

A regressziós elemzések esetén a számítógépes statisztikai programok lehetőséget kínálnak arra, hogy viszonylag bonyolult modellek kerüljenek alkalmazásra, melyek a folyamatot nemcsak megfelelő pontossággal írják le, hanem számos feltételnek is eleget tesznek. Érdekes talán megemlíteni, hogy az úgynevezett exponenciális görbék alkalmazásával – és itt nem a hagyományos értelemben vett exponenciális függvényről van szó – már a XIX században is foglalkoztak, például különböző biológiai folyamatok leírásánál. Ezeket a függvényeket lehetne az Awrami függvény elődjeinek nevezni, amely függvények kezdetleges telítési modelleknek tekinthetők. Mivel illesztésük meglehetősen számolásigényes és bonyolult művelet volt, alkalmazásuk nem igazán terjedt el. Napjainkban viszont újra felfedezték a telítési modelleket és egyre gyakoribb a használatuk a már említett kedvező tulajdonságaik végett – a teljesség igényétől eltekintve csak néhány ezek közül - zérusból indítható, korlátos, aszimptotikus. Az említett függvénytípusok kedvező felhasználhatósága további modellfejlesztésekre ösztönöz, így került sor egy olyan modell létrehozására, ami két eltolt helyzetű Awrami függvény szuperponáltja. Az alábbiakban bemutatásra kerül az alkalmazott modell, valamint néhány konkrét alkalmazás, melyhez a vizsgált adatsor a Központi Statisztikai Hivatal adatbázisából került kiválasztásra.

A vizsgálat az 1995-2017 éves időszak egyes éveiben felmért teljes juh, sertés és szarvasmarha állomány adatainak statisztikai regressziós elemzésére terjedt ki. Az adatok az 1. táblázat: Állatlétszám tartalmazza.

A vizsgált adathalmaz és az alkalmazott modell. A lehetséges kutatás végett, törekedve a teljességre az alábbiakban bemutatásra kerül a vizsgált adatsor. A táblázat első oszlopában az évek, első sorában a sorszámozott vizsgálati adatsorok kerültek feltüntetésre. Így:

1: Juh állomány.
2: Sertés állomány.
3: Szarvasmarha állomány.

KULCSSZAVAK. Regresszió, speciális Awram függvény, nem lineáris regresszió.
KEYWORDS. Regression, special Awrami function, nonlinear regression.

	1 Év	2 Juh (ezer)	3 Sertés (ezer)	4 Szarvasmarha (ezer)
1	1995	977	5032	421
2	1996	872	5289	414
3	1997	858	4931	403
4	1998	909	5479	407
5	1999	934	5335	399
6	2000	1129	4834	380
7	2001	1136	4822	368
8	2002	1103	5082	362
9	2003	1296	4913	350
10	2004	1397	4059	345
11	2005	1405	3853	334
12	2006	1298	3987	322
13	2007	1232	3871	322
14	2008	1236	3383	324
15	2009	1223	3247	312
16	2010	1181	3169	309
17	2011	1120	3044	329
18	2012	1185	2989	339
19	2013	1214	3004	345
20	2014	1185	3135	359
21	2015	1190	3124	368
22	2016	1141	2907	383
23	2017	1146	2870	395

1. táblázat. Állatlétszám

Az alkalmazott regressziós modell

- hagyományos matematikai alakja:

$$y = b_8 - b_7 \cdot e^{\left(-1\cdot\left(b_6\cdot(x-b_5)\right)^{b_4}\right)} - b_3 \cdot e^{\left(-1\cdot\left(-1\cdot b_2\cdot(x-b_1)\right)^{b_0}\right)}$$

- a számítógépes alak:

var2=b8-b7*exp(-1*(b6*(var1-1*b5))^b4)-b3*exp(-1*(-1*b2*(var1-1*b1))^b0).

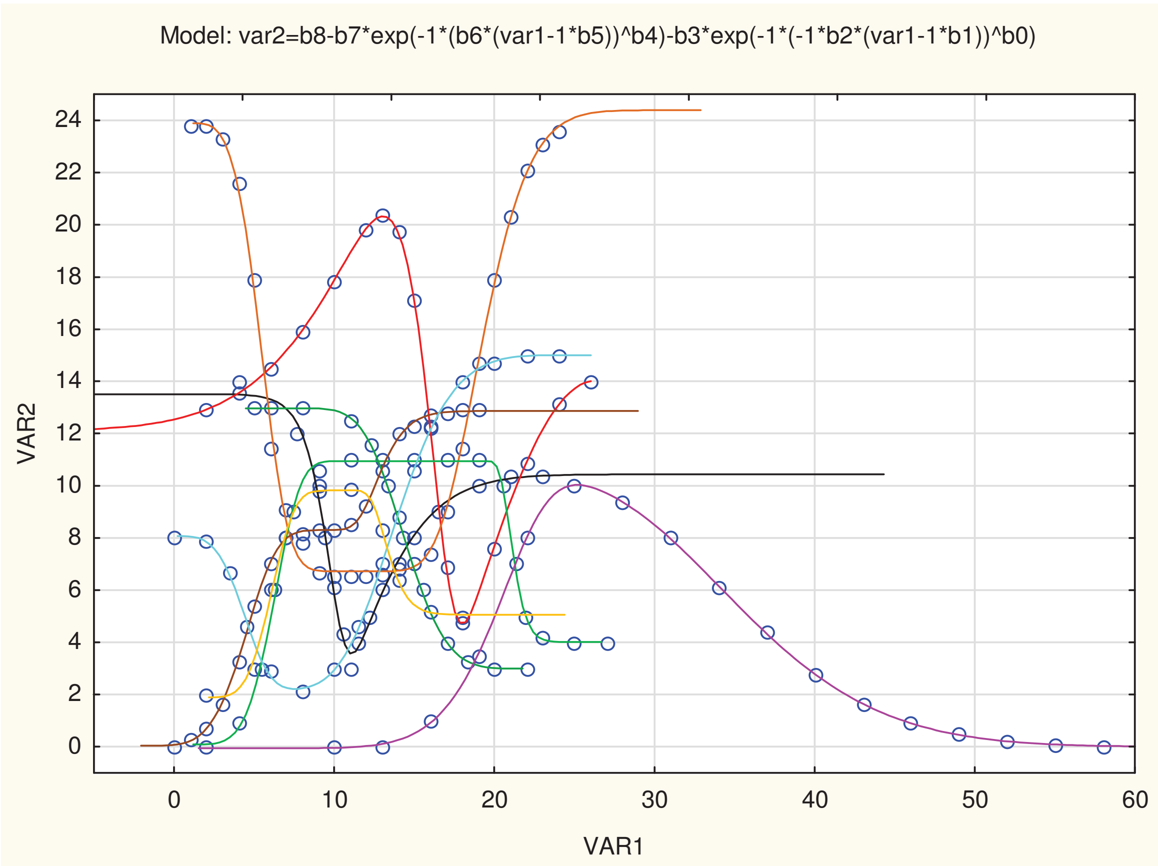
Kezdőértékek meghatározása.

b8=a maximális vagy minimális var2 érték,
b7=a maximális vagy minimális var2 érték mínusz a kezdő var2 érték,
b6=a var1 nagyságrend reciproka, az esetek többségében 0,1 (0,05),
b5=a var1 kezdőértéke, vagy annál relatív kisebb,
b4=az esetek többségében 3 (5),
b3=a maximális vagy minimális var2 érték mínusz a végső var2 érték,
b2=a var1 nagyságrend reciproka, az esetek többségében 0,1 (0,05),
b1=a var1 végsőértéke, vagy annál relatív nagyobb,
b0=az esetek többségében 3 (5).

A modell levezetése.

Az alkalmazott függvény egy normál helyzetű transzformált és egy y-tengelyre tükrözött megfelelően transzformált Awrami függvény összegéből került kialakításra, zárt értelmezési tartomány feltételével. A modell levezetése megtalálható Csanády V.: Gazdasági változások regressziós vizsgálata c. cikkében (Dimenziók 2017).

Az alkalmazott modell rendkívüli rugalmasságát néhány kísérleti adatsorra történő illesztés igazolja. Az illesztéseknél alkalmazott adatsorok nem kerülnek feltüntetésre, ahogy a kapott paraméterek értékeinek táblázata sem. A korrelációs együttható minden esetben meghaladta a 0,995-ös értéket, ami szoros korrelációra utal. A már említett rugalmasságot legszemléletesebben a kapott regressziós modellek ábrája mutatja. Az alábbi 1. ábra: Modellek kilenc különböző adatsorra történt illesztés regressziós modelljének grafikonját mutatja. Az ábra önmagáért beszél, igazolva a modell hihetetlen rugalmasságát, amit a kilenc paraméter értékének változatossága okozza.

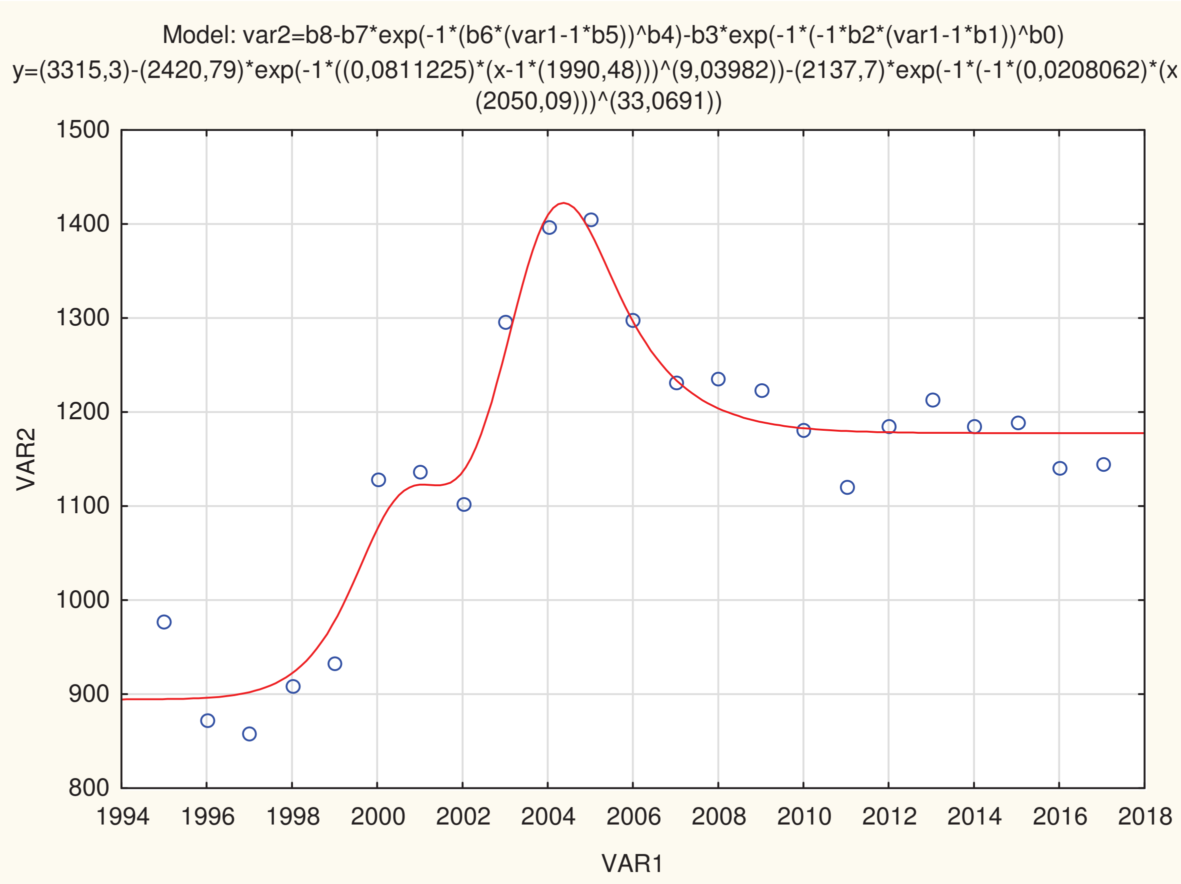


1. ábra. Modellek

2. Számított eredmények, kiértékelés

2.1. A regressziós eljárással nyert eredmények

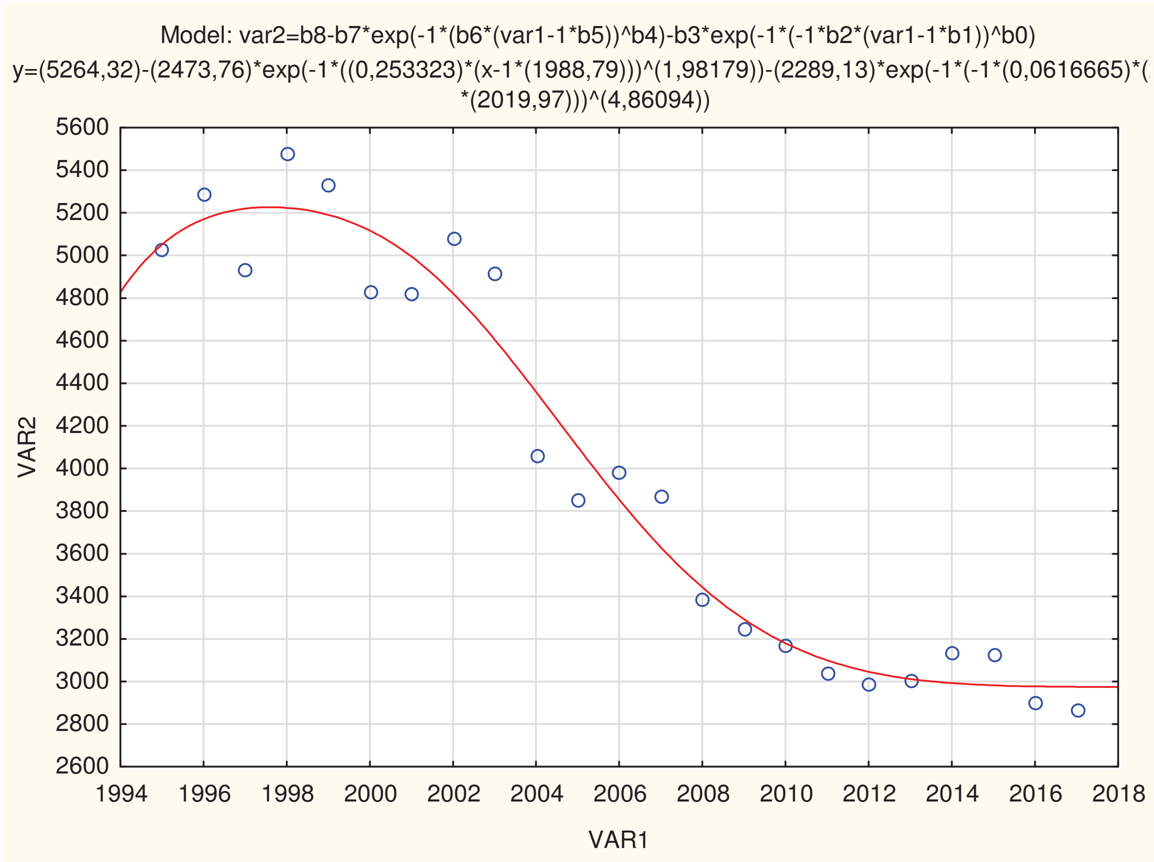
A már említett Központi Statisztikai Hivatal adatbázisából letöltött adatokra történő illesztés eredményét és azok grafikonjait az alábbiak mutatják.



2. ábra. Juh állomány

	Model: var2=b8-b7*exp(-1*(b6*(var1-1*b5))^b4)-b3*exp(-1*(-... (Juhok száma) Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 26453,852404 R= ,97311 Variance explained: 94,694%							
N=23	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1
Estimate	3315,29	2420,78	0,08112	1990,47	9,03982	2137,70	0,02080	2050,09

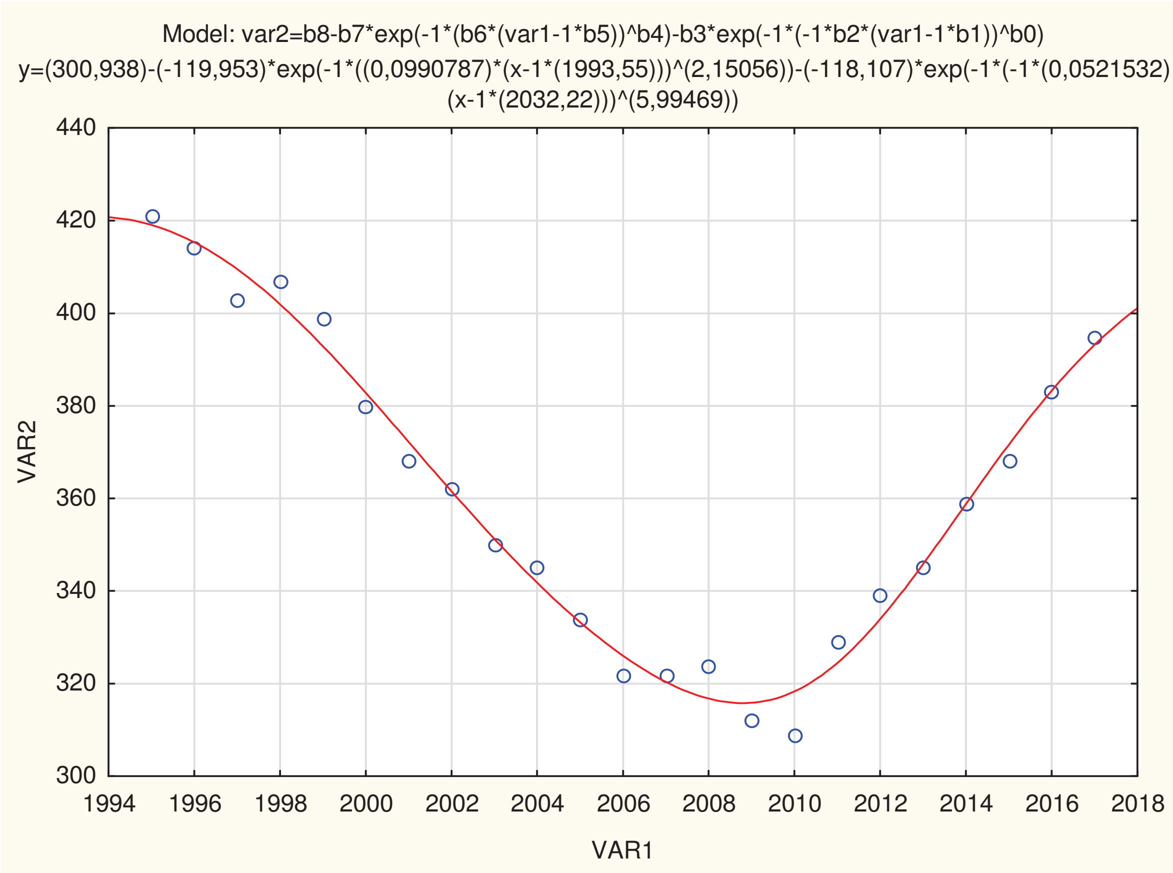
2. táblázat. Juh állomány



3. ábra. Sertés állomány

	Model: var2=b8-b7*exp(-1*(b6*(var1-1*b5))^b4)-b3*exp(-1*(-... (Sertések száma) Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 751274,14209 R= ,98058 Variance explained: 96,153%							
N=23	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1
Estimate	5264,32	2473,75	0,25332	1988,79	1,98179	2289,12	0,06166	2019,97

3. táblázat. Sertés állomány



4. ábra. Szarvasmarha állomány

	Model: var2=b8-b7*exp(-1*(b6*(var1-1*b5))^b4)-b3*exp(-1*(-... (Szarvasmarhák száma) Dep. var: VAR2 Loss: (OBS-PRED)**2 Final loss: 386,33192451 R= ,99260 Variance explained: 98,526%							
N=23	b8	b7	b6	b5	b4	b3	b2	b1
Estimate	300,937	-119,95	0,09907	1993,54	2,15055	-118,10	0,05215	2032,21

5. táblázat. Szarvasmarha állomány

2.2. Elemzés, értékelés

A regressziós vizsgálat elemzése és kiértékelése állományonként a következő:

Juh állomány

Az illesztés eredményéből a következő alapvető megállapítások tehetők:

1.) A kapott R=0,97311 érték jelzi az időbeli folyamat bizonyos időszakonként ingadozó jellegét.

2.) A függvénygörbe három alapvetően eltérő jellegű időbeli folyamatot mutat.

3.) Az első tartomány az 1995-2001 év időszaka, jól jelzett erősödő növekedéssel, az inflexió elérésével.

4.) A második tartomány a 2001-2005 év intenzív növekedéssel és, maximum elérésével.
5.) A harmadik tartomány a 2005-2017 év erősen ingadozó gyengülő csökkenéssel , a végső érték továbbiakban maradandó előjelzésével.

Értékelés:

A fentiek igazolják, hogy az alkalmazott függvény, hasonló jellegű adatsorok vizsgálatára egyszerűen alkalmazható, és teljes körű pontos, részletes tájékoztatást ad.

Sertés állomány

Mivel a nyert paraméterek között a b4=1,9818 jóval kisebb mint 3, ezért a fentebb bemutatott értékek alapján elsősorban a görbe részletes elemzése segítségével tehetők a következő megállapítások:
1.) Az 1995-2017 időszakban legnagyobb sertéslétszám időpontja var1max=1998 év, mértéke var2max=5240 ezer fő.
2.) Az 1995-2017 időszakban a kezdőlétszám időpontja var1kez=1995 év, mértéke var2kez=5030 ezer fő.
3.) Az 1995-2017 időszakban a végsőlétszám időpontja var1vég=2017 év, mértéke var2vég=2960 ezer fő.
4.) Az 1995-1998 időszakban kismértékű létszámnövekedés mutatkozik 5240-5030=210 ezer fővel.
5.) Az 1998-2013 időszakban monoton létszámcsökkenés mutatkozik 5240-3000=2240 ezer fővel.
6.) A 2013-2017 időszakot bizonytalan kisebb mérték létszámingadozás jellemez 130 ezer fővel.
7.) A korrelációs együttható értéke szoros kapcsolatra utal R=0,98058.

Értékelés:

A választott függvény kiemelkedő pontosságú illeszkedése a vizsgált folyamatról részletes tájékoztatást ad. A felsorolt megállapítások összefoglalóan jelzik a sertésállomány nagymértékű csökkenését az 1995-2017 évi időszakban.

Szarvasmarha állomány

A nyert görbe és paraméterek részletes értékelése alapján a következő alapvető meghatározások tehetők:
1.) A R=0,9926 érték a görbeillesztés kiemelkedő pontosságát jelzi.
2.) Az 1995-2009 éves időszakban az állomány létszáma 419 ezerről 316 ezerre csökkent ingadozás nélküli folyamattal.
3.) A tehénállomány létszáma a minimumot a 2009-2010-es évben érte el 316 ezer értékkel ingadozás jelleggel.
4.) A 2010-2017 éves időszakban az állomány létszáma 316 ezerről 392 ezerre növekedett ingadozás nélküli folyamattal.
5.) A kapott b1=2032 paraméter a függvény matematikai jellege miatt 2017 utáni időszakra még növekedést jelez.
6.) A b6*b4 és b2*b0 kapott paraméter értékek alapján megállapítható, hogy a létszámnövekedés az intenzívebb.
7.) A korrelációs együttható értéke szoros kapcsolatra utal R=0,99260.

Értékelés:

A fentiek igazolják, hogy az alkalmazott függvény, különböző jellegű adatsorokra egyszerűen, kedvezően és nagy pontossággal illeszthető, kiemelkedő rugalmassága miatt.

3. Összefoglaló

A bemutatásra került adatsorok különbözősége jól mutatja az összegzett Awrami függvény sokoldalú használhatóságát, annak rugalmassága végett. A magas korrelációs együttható érték jelzi az illesztés pontosságát. A paraméter értékek alapján fontos jellemzők számíthatók, a függvény jól mutatja az adathalmaz egyes szakaszainak menetét, a szélsőértékek esetleges inflexiós pontok behatárolhatok megfelelő pontossággal. Mindezen ismeretek arra utalnak, hogy a függvény alkalmazása szélsőséges adatsorok esetén is indokolt.

Irodalomjegyzék

[1] **Csanády V., Horváth–Szováti E., Szalay L.**, Alkalmazott statisztika, Sopron, Nyugat-Magyarországi Egyetem Kiadó (2013), 175p.

[2] **Csanády V.**, Gazdasági változások regressziós vizsgálata, Dimenziók V. (2017), 39–49. doi:10.20312/dim.2017.06

[3] Központi Statisztikai Hivatal. https://www.ksh.hu/stadat