

## A T-043080 OTKA pályázat 2006. évi zárójelentése

Témavezető neve: DR. DARÓCZY ZOLTÁN, az MTA rendes tagja, egyetemi tanár

Téma címe: *Függvényegyenletek és egyenlőtlenségek*

Kutatás időtartama: 2003.01.01–2006.12.31

A szakmai jelentés a következő részekből áll:

I. A kutatási témában 2003.01.01–2006.12.31 között végzett munka ismertetése

II. Publikációk listája

A kutatási tervben szereplő témakörökben elért új tudományos eredményeket lényegében a témakörök szerinti bontásban ismertetjük.

A publikációs lista a kutatócsoport tagjainak 2003.01.01-óta megjelent és megjelenés alatt lévő publikációinak listáját tartalmazza. A beszámolóban szereplő hivatkozások ezekre a listákra vonatkoznak.

A kutatásban 19 fő vett részt. A kutatócsoport tagjai

—2003-ban

24 referált tudományos dolgozatot (nemzetközi folyóiratban, vagy konferenciakiadványban),  
3 PhD értekezést (Győry Máté, Hajdu Gabriella, Kocsis Imre) és  
1 habilitációs értekezést (Boros Zoltán) készítettek, továbbá  
46 tudományos előadást tartottak.

—2004-ben

32 referált tudományos (nemzetközi folyóiratban, vagy konferenciakiadványban) dolgozatot,  
2 MTA doktori értekezést (Molnár Lajos, Maksa Gyula) készítettek, továbbá  
57 tudományos előadást tartottak.

—2005-ben

1 könyvet,  
27 referált tudományos (nemzetközi folyóiratban, vagy konferenciakiadványban) dolgozatot,  
1 egyetemi jegyzetet  
3 PhD értekezést (Bessenyei Mihály, Házy Attila, Kaiser Zoltán) készítettek, továbbá  
64 tudományos előadást tartottak.

—2006-ben

1 könyvet,  
20 referált tudományos (nemzetközi folyóiratban, vagy konferenciakiadványban) dolgozatot  
készítettek, továbbá  
41 tudományos előadást tartottak.

—2007-ben

1 könyvet,  
15 referált tudományos (nemzetközi folyóiratban, vagy konferenciakiadványban megjelent, vagy  
már megjelenés alatt álló) dolgozatot készítettek.

— 2003. januárjában Numbers, Functions, Equations '03 címmel, 40 hazai és külföldi kutató részvételével konferenciát rendeztünk Karl-Heinz Indlekofer 60. születésnapja tiszteletére.

— A kutatócsoport, a jelen pályázat, továbbá az MKM-FKFP 0215/2001 pályázatok eszközeinek felhasználásával megrendezte a függvényegyenletek elméletének legrangosabb tudományos találkozóját a 41. Nemzetközi Függvényegyenletek Szimpóziumot 2003-ban Noszvajon. Ezen a konferencián 75 hazai és külföldi kutató vett részt.

— 2004. februárjában Mátraházán és 2006. februárjában Berekfürdön megrendeztük a 4., illetve 6. Debrecen–Katowice Téli Szemináriumot, amelyen mindkét alkalommal 12-12 debreceni, illetve katowicei kutató vett részt.

— 2004. júniusában Debrecenben megrendeztük az 5. Joint Conference on Mathematics and Computer Science konferenciát, amelyen több mint 100 romániai és magyarországi kutató vett részt.

— A fenti rendezvényeken túl számos külföldi kutatóhelyről látogattak el Debrecenbe és tartottak (nem ritkán több) előadást. Ezeknek, és a debreceni kutatók hasonló látogatásainak köszönhetően a debreceni kutatócsoport széleskörű tudományos együttműködést épített ki a következő kutatóhelyekkel: Waterloo (Kanada), Katowice, Bielsko-Biala (Lengyelország). A kutatási időszak eddigi időszaka alatt több társszerzős dolgozat készült ezen egyetemek kutatóival.

Az alábbiakban kutatási irányonként csoportosítva és részletezve ismertetjük a kutatócsoport eddigi tevékenységét.

**1. Általános megoldási módszerek.** A térlátás pszichofizikai elméletének axiomatikus megalapozásakor merült fel az a probléma, hogy keresendők olyan, korlátos tartományon értelmezett kétváltozós függvények, amelyek mindkét változójukban eleget tesznek egy-egy általánosított transláció-egyenletnek. Boros Zoltán [14] 2003-as habilitációs értekezésének első fejezete ezt a függvényegyenlet-rendszert az ismeretlen függvényre tett differenciálhatósági, illetve folytonossági és monotonitási feltevések mellett oldja meg. Az eredmények Boros 2004-ben megjelent [15] dolgozatában lettek publikálva.

Ramanujan által felfedezett polinomazonosságokhoz kapcsolódó egyenleteket vizsgál a Hajdu Gabriella 2003-as [56] disszertációja, amely egész számok gyűrűje felett vett Ramanujan-féle függvényegyenlet összes megoldását leírja, továbbá a megoldástér egy bázisát számítógépes módszerekkel is meghatározza. Hajdu és Hajdu 2006-os [57] cikke végesen generált struktúrák feletti Ramanujan identitásokat vizsgál.

A lineáris kétváltozós függvényegyenletek számítógépes megoldásának Pálestől származó algoritmusát tovább finomította és Maple V-ben számítógépre is implementálta Házy Attila. Erről két 2004-es [59], [58] dolgozata és az [60] 2005-ös PhD értekezése egyaránt beszámol.

Chung, Sahoo és Székelyhidi 2004-es [26] dolgozata kvadratikus differenciákkal kapcsolatos függvényegyenletekkel foglalkozik.

Ebanks és Székelyhidi 2005-ös [47] cikkének fő eredménye additív és multiplikatív polinomok összegeinek egy karakterizációja.

W. Benz egy 15-éves sejtését pozitívan megválaszolva, Boros és Erdei 2005-ben megjelent [17] dolgozatukban kimutatták, hogy az egységkör egyenletét jól deriváló additív függvények szükségképpen derivációk.

Glavosits és Lajkó, 2005-ben megjelent [51] dolgozatukban egy, a kétváltozós eloszlások karakterizációjában szerepet játszó függvényegyenlet általános megoldását adták meg. Az általános megoldásból speciálisan a mérhető megoldások is meghatározhatók, s azok segítségével megadható az együttes sűrűségfüggvény.

Transzlatív és kvázikommutatív műveletek leírását adta Daróczy 2004-es [33] munkája.

A nemnegatív Shannon-típusú információ-függvényeket írta le Brindza és Maksa 2003-as [21] cikkében.

**2. Spektrálszintézis és alkalmazásai.** A spektrálszintézis és spektrálanalízis kutatásában döntő áttörést hoztak Székelyhidi László 2004-ben megjelent [125] és [126] dolgozatai. Kiderült, hogy bizonyos diszkrét Abel-csoportokon a spektrálszintézis nem teljesülhet, ezzel egy több évtizede fennálló sejtés is megdőlt. Egy 2004-ben megjelent [124] cikk a differencia-egyenletek spektrálszintézissel való tárgyalását mutatja be. Székelyhidi 2005-ben megjelent [127] dolgozata szükséges feltételt vezet le a spektrálszintézis teljesülésére. Bereczky és Székelyhidi 2005-ös [5] dolgozatában igazolta, hogy Abel-féle torziós csoportokon érvényes a spektrálszintézis. A spektrálszintézis és spektrálanalízis

elméletének alapvető eredményeit és a Székelyhidi által elért, a problémakört lezáró eredményeket tartalmazó [130] monográfia 2006-ban a Springer kiadó gondozásában jelent meg.

Függvényegyenletek hipercsoportokra való értelmezését, vizsgálatát kezdeményezte Székelyhidi 2003-as [123] cikkében. A spektrálanalízis és spektrálszintézis polinomiális hipercsoportokon való teljesülését Székelyhidi 2004-es [126] dolgozatában igazolta. A polinomiális hipercsoportokon értelmezett momentum függvényeket Orosz és Székelyhidi írták le 2004-es [116] és 2005-ös [117] cikkeikben. A polinomiális hipercsoportokra kidolgozott spektrálszintézis segítségével a diszkrét polinomiális hipercsoportokon teljesülő differencia, valamint szinusz és koszinusz egyenletek megoldásait Orosz határozta meg 2006-ban megjelent [114] és [115] dolgozataiban. Sturm-Liouville hipercsoportokon teljesülő függvényegyenleteket vizsgált Székelyhidi 2006-os [131] dolgozatában.

Abel-csoportokon értelmezett polinomfüggvényeket tanulmányoz Székelyhidi 2005-ben megjelent [128] dolgozatában. A cikk fő eredménye véges torziómentes rangú Abel-csoportoknak egy polinomfüggvények segítségével adható karakterizációja. A polinomiális ideálok egy spektrálszintézis teljesülésével való karakterizációját találta Székelyhidi 2005-ben megjelent [129] cikkében.

**3. Öszetett függvényeket tartalmazó egyenletek.** A függvényiterációt, illetve függvényösszetételeket tartalmazó függvényegyenletek regularitáselméletének kidolgozásának egy lényeges fejleménye Páles 2003-ban megjelent [119] dolgozatának eredménye. Ez lehetővé teszi, hogy monotonitási feltételek mellett ilyen egyenletekben az ismeretlen függvényekre és azok inverzeire lokális Lipschitz tulajdonságot vezessünk le.

Az ún. Matkowski-Sutô probléma (amely azt kérdezi, hogy két kváziaritmetikai közép összege mikor lehet a számtani közép kétszerese) végső (minden további regularitási feltételeket nélkülöző) megoldását Daróczy és Páles [42] magyar nyelvű dolgozatában értük el (amelynek angol nyelvű változata már 2002-ben megjelent). A dolgozat fő eredményeiben azt igazoltuk, hogy a problémában fellépő ismeretlen függvények rendre lokálisan Lipschitz, egy részintervallumon differenciálható, illetve egy részintervallumon folytonosan differenciálható függvények. A bizonyítások Lebesgue differenciálhatósági tételén és Baire-nak a Baire-1 függvények folytonossági helyeire vonatkozó tételén alapszanak.

A súlyozott közepekre vonatkozó Matkowski-Sutô probléma megoldását differenciálhatósági feltevések mellett, illetve regularitási feltevések nélkül Daróczy és Páles 2003-ban megjelent [44] és [43] dolgozataiban sikerült meghatározni. A probléma megoldásához szükséges alapvető kiterjesztési tételt Daróczy, Hajdu és Ng 2003-as [38] dolgozata tartalmazza. Burai 2006-ban és 2007-ben megjelent [22], [23] dolgozataiban a súlyozott kváziaritmetikai közepekre teljesülő invariancia-egyenlet reguláris megoldásait határozta meg, illetve egy a megoldáshoz szükséges kiterjesztési tételt igazolt.

A különböző középértékosztályok kváziaritmetikai elemeinek leírásával foglalkozik Daróczy 2004-ben [34] megjelent dolgozata. A súlyfüggvénnyel súlyozott számtani közepek közül a kváziaritmetikai közepként is előálló közepeket Daróczy, Maksa és Páles határozták meg 2004-es [40] dolgozatukban. Súlyozott kváziaritmetikai közepek lineáris kombinációinak vizsgálatával foglalkozik Daróczy és Hajdu 2005-ben közölt [37] cikke.

Közepeket és azok Gauss-kompozícióját tartalmazó függvényegyenletek vizsgálata Daróczy, valamint Daróczy, Maksa és Páles 2005-ben, illetve 2006-ban megjelent [36], [45] és [41] dolgozatainak témája. Súlyozott számtani közepeket és azok Gauss-kompozícióját tartalmazó függvényegyenletek ekvivalenciáját a súly-paraméterek algebrai tulajdonságaival jellemezni Daróczy, Lajkó, Lovas, Maksa és Páles 2007-ben megjelenő [39] dolgozatában.

2004-ben készült el és 2005-ben lett megvédve Maksa Gyula [89] MTA-doktori disszertációja, amely az asszociativitási és biszimmetria egyenletekkel kapcsolatban az elmúlt két évtizedben a szerző által elért eredményeknek egy teljes összefoglalását adja. Az asszociativitás és a kváziösszegek kapcsolatával kapcsolatos újabb eredményeket ért el Maksa 2004-ben és 2005-ben megjelent [90], illetve [91] dolgozataiban, valamint Maksa és Nizsalóczki 2006-os [92] cikkében.

A hasznosság-függvények karakterizációjához jelent hozzájárulást Maksa és Páles 2004-es [93] dolgozata.

Egy régóta vizsgált összetett függvényegyenletet a korábbiaktól eltérő regularitási feltételek mellett megoldva egy – szintén a haszonelméletből származó – reprezentációk egyértelműségére vonatkozó tételt tartalmaz Gilányi, Aczél és Ng 2005-ös [49] dolgozata.

2006-os [16] dolgozatában Boros és Daróczy egy függvényösszetételt tartalmazó egyenlet megoldásairól (regularitási feltevések nélkül) kimutatta, hogy additívak és megadta a megoldások pontos leírását Hamel-bázisok segítségével.

**4. Stabilitáselmélet.** A függvényegyenletek stabilitáselméletének alapproblémája annak igazolása, hogy ha egy egyenlet jobb és baloldala valamilyen értelemben kicsit tér el egymástól, akkor az ismeretlen függvények közel vannak a pontos egyenlet valamilyen megoldásához. A témakör alaperedménye a Cauchy-függvényegyenlet Hyers–Ulam-féle stabilitási tétele. Ennek a tételnek számos más függvényegyenletre vonatkozó általánosítása ismert.

A Badora, Ger és Páles 2003-as [4] dolgozatában vektorértékű invariáns közepek alkalmazásával a Cauchy egyenlet új stabilitási tételét nyertük. Alkalmazásként a Tabor-féle kváziadditív függvények jellemzését is megkaptuk.

Kocsis Imre [72] PhD értekezése, valamint ehhez kapcsolódó három 2003-2005-ben megjelent [73], [74], [75] dolgozatai az információelméletben fontossá vált összegformájú egyenletek stabilitáselméletével foglalkoznak és adnak a felvetett problémákra pozitív választ.

Boros [14] értekezésének második fejezete az additív és a multiplikatív Cauchy-féle alapegyenlet stabilitási problémájának különféle interpretációit mutatja be rendezett testbe képező függvények esetén. Boros és Kaiser 2004-es [18] cikkében értékelt testek feletti gyűrű homomorfizmusok stabilitását vizsgálta. Kaiser 2004-es és 2006-os [68], [70] dolgozataiban a Cauchy és a monom egyenlet stabilitását igazolta értékelt testek feletti normált terek esetén. Kaiser és Páles 2005-ös [71] cikkében egy olyan függvényegyenletet konstruált meg, amely Hyers–Ulam értelemben stabil, de a szokásos Hyers-féle iteráció segítségével nem igazolható a stabilitása. Gilányi, Kaiser és Páles a Cauchy-féle függvényegyenlet stabilitásával kapcsolatos különféle becsléseket hasonlították össze 2007-ben megjelenő [48] dolgozatukban. Kaiser általános halmazokon értelmezett függvényegyenletekre vonatkozó stabilitási eredményeit foglalja össze 2005-ben megvédett [69] PhD értekezésében.

A szendvics tételeknek egy közelítőleg additív függvényekre vonatkozó változatát találta meg Páles és Székelyhidi 2004-es [122] cikkében.

Ternáris homomorfizmusok egyfajta stabilitását igazolta Moslehian és Székelyhidi 2006-os [110] dolgozatában.

**5. Függvényegyenletek regularitáselmélete.** Járai 2003-as [64] dolgozatában  $n$ -változós ismeretlen függvényekre vonatkozó  $n + 1$  változós, iterációt nem tartalmazó nemlineáris egyenletekre bizonyít „mérhetőségből következik a folytonosság” típusú tételeket. A bizonyítások ezekben az esetben a mérhetőség és a folytonosság közé eső fogalmak bevezetésén múlnak, amelyeket szintén megvizsgálunk. Lie csoportokon értelmezett függvényegyenletekre vonatkozó regularitási tételeket nyert Járai egy 2004-es [65] cikkben.

A nem-iteratív függvényegyenletek (jelentős részben a szerzőtől eredő) regularitáselméletét foglalja össze Járai 2005-ben megjelent [66] monográfiája. Ez a könyv a korábbi OTKA pályázatokban elért eredményeket egységes szemléletmódban tárgyalja és számos új (önállóan még nem publikált) alkalmazást is bemutat.

Lebesgue differenciálhatósági tételének az iteratív függvényegyenletek megoldásainak regularitási vizsgálataira való alkalmazását tartalmazza Páles 2003-es [118] dolgozata. Az iteratív függvényegyenletek regularitáselméletének a legfontosabb eredményeit összefoglaló [120] Páles által írt cikk 2006-ban jelent meg.

Az iteratív és nem-iteratív függvényegyenletek regularitáselméletének teljes eszköztárát mozgósítva, Járai, Maksa és Páles 2004-es [67] dolgozatukban teljes általánosságban meghatározták azokat a kétváltozós függvényeket, amelyek egyidejűleg előállnak Cauchy-differenciaként és kváziösszegként is.

Boros [14] értekezésének harmadik fejezetében az ún.  $Q$ -regularitási tulajdonságokra vonatkozó műveleti szabályok, példák, középérték- és reprezentációs tételek kerültek ismertetésre.

**6. Egyenlőtlenségek, középértékek elmélete.** Losonczi 2003-as [84] dolgozatában az ún. Cauchy-közepekre vonatkozó egyenlőség problémát az ismeretlen függvények 7-szeri differenciálhatóságának feltételezésével oldotta meg. A dolgozat fő eredménye szerint az egyenlőség teljesülésének 1 kanonikus és további 32-féle alapesete van. A Cauchy- és Bajraktarević-közepék egyenlőségi problémája megoldásának egy egységesítést adja Losonczi 2006-os [86] cikke. Homogén szimmetrikus és nemszimmetrikus kétváltozós közepék meghatározását végezte el Losonczi a közlésre elfogadott [83] és [82] dolgozatokban. Szub- és szuper-additív integrálközepék jellemzését adta Losonczi a 2005-ös [85] cikkében.

A három darab különböző paraméterű kétváltozós Stolarsky-közepekre fennálló Minkowski-típusú egyenlőtlenség szükséges és elegendő feltételét találta meg Czinder és Páles 2003-as [27] dolgozatában. Ezeknek a vizsgálatoknak lényeges része a Stolarsky-közepék aszimptotikus tulajdonságainak feltárása. Az ún. vegyes összehasonlítás problémáját, azaz a Gini és Stolarsky közepék összehasonlításának feltételeit nyerték Neuman és Páles 2003-as [111] dolgozatukban. A vegyes összehasonlításra vonatkozó lényegesen élesebb eredményeket adott Czinder és Páles [30]-ban. A Gini-közepék lokális monotonitási tulajdonságainak vizsgálatával a Gini-közepék összehasonlításának egy új bizonyítását találta Czinder és Páles 2005-ös [29] cikkében.

A Hardy–Carleman–Knopp egyenlőtlenségnek eltérés- és Gini-közepekre való általánosítását találta Páles és Persson 2004-es [121] dolgozatában. Carlson-típusú egyenlőtlenségeket igazoltak Larsson, Páles és Persson 2005-ben megjelent [81] cikkükben.

Burai és Száz 2005-ös [25], [24] dolgozataikban vektortéren értelmezett valósértékű függvények különféle homogenitási, szubadditivitási és konvexitási tulajdonságait vizsgálják.

Daróczy és Páles 2005-ben megjelent [46] cikkükben a Jensen- és a Wright-konvexitás fogalmának általánosításaként vezetnek be egy – tetszőleges szigorú közepekre definiálható – új konvexitási fogalmat, s igazolják, hogy folytonossági feltételek mellett ez az általános konvexitás a hagyományos értelemben vett konvexitással egyenértékű.

**7. Konvexitás és általánosításai.** Bessenyei és Páles 2003-as [9] dolgozatában az ún.  $(\omega_1, \omega_2)$ -konvex függvények regularitási tulajdonságait, jellemzéseit vizsgáltuk, valamint megtaláltuk az ilyen függvényekre teljesülő Hermite-Hadamard egyenlőtlenséget is. Bessenyei 2004-es [6] dolgozatában a 3-konvex függvényekre talált a klasszikus középértéktételek alkalmazásával Hermite-Hadamard-típusú egyenlőtlenségeket. A magasabb rendű esetben, az ún. Krein–Markov-féle elmélet segítségével sikerült Bessenyeinek és Pálesnek 2004-ben és 2005-ben megjelent [10], [11] dolgozataikban az Hermite-Hadamard-típusú egyenlőtlenségeket leírniuk. A folytonos függvények konvexitásának, illetve egy Hermita-Hadamard-típusú egyenlőtlenség teljesülésének ekvivalenciáját igazolta Bessenyei és Páles 2006-ban közölt [12] dolgozatában. A fenti eredményeket összefoglalóan tartalmazza Bessenyei 2004-es [7] PhD disszertációja. A szimplexeken teljesülő Hermite-Hadamard egyenlőtlenségeket igazolt Bessenyei közlésre elfogadott [8] cikkében.

Czinder és Páles 2004-es [28] dolgozatában a Hermite-Hadamard egyenlőtlenséget szimmetria tulajdonságokkal rendelkező konkáv-konvex függvényekre általánosította, és ezt a kétváltozós Gini- és Stolarsky-közepék összehasonlítási problémájának vizsgálatára alkalmazta 2005-ös [29] cikkében.

A közelítőleg konvex függvények Hyers-Ulam féle felbontási tételét általánosította Páles 2003-as [118] dolgozatában olyan függvényekre, amelyek előállnak egy konvex, egy korlátos és egy Lipschitz-folytonos függvény összegeként. Házy és Páles 2004-es [62] cikkében a közelítőleg Jensen és közelítőleg konvex függvények kapcsolatát tárta fel és ebben az ún. Takagi-függvény szerepét (ami egy közismert folytonos, de sehohsem differenciálható függvény). Eredményük  $t$ -konvex függvényekre való általánosítása található Házy, illetve Házy és Páles 2005-ös [61] [63] dolgozataiban. Ezek az eredmények alkották Házy 2005-ben megvédett [60] PhD értekezésének is a jelentős részét.

A  $t$ -konvexitás vizsgálatánál fellépő hibabecslés élességének igazolásához a Takagi, vagy más néven Van der Waerden-féle függvény Páles által 2003-ban megsejtett közelítő-konvexitási tulajdonságait Boros [13] közlésre elfogadott dolgozatában igazolta.

A monoton függvények Lipschitz-perturbációit jellemezte Makó és Páles 2006-os [88] dolgozata.

Gilányi, Nikodem és Páles a Bernstein–Doetsch-tételt kvázikonvex függvényekre általánosította 2004-es [50] dolgozatában.

Nikodem és Páles a  $t$ -konvexitás alkalmas másodrendű deriválttal való jellemzését nyerte 2004-ben megjelent [112] cikkében.

A Beckenbach-féle konvexitásra nyert Hahn–Banach-típusú elválasztási tételeket Nikodem és Páles 2007-ben megjelent [113] cikkében. A kétdimenziós konvex halmazok feletti Beckenbach-családok szerint vett konvex függvények regularitási tulajdonságát Adamek, Gilányi, Nikodem és Páles vizsgálta a 2007-ben megjelenő [3] munkában.

A  $Q$ -szubdifferenciálhatóság fogalmát vezette be és a Jensen-konvex függvényeket ezzel a tulajdonsággal jellemezte Boros és Páles 2006-os [19] cikke.

**8. Operátoralgebrák.** Az ebbe a kutatási irányba tartozó eredményeink elsősorban operátoralgebrák különböző leképezéseivel, úgymint automorfizmusokkal, derivációival, Jordan  $*$ -derivációival és izometriáival kapcsolatosak. Az eredmények döntő részét Molnár érte el. Az adott időszakban elsősorban operátorstruktúrák megőrzési transzformációit vizsgáltuk. A tekintett struktúrák között kiemelten foglalkoztunk kvantumstruktúrák leképezéseivel. Meghatároztuk a kvantumállapotok halmazának bizonyos fontos izometriáit, valamint a kompatibilitás mértékét, a konkurenciát és az ún.  $\Theta$ -fidelitást (külön-külön) megőrző transzformációit. Leírtuk az obszervábilisek terének maximális várhatóértéket, illetve maximális szórást megőrző lineáris bijekcióit, illetve a kompatibilitást megőrző nem-lineáris transzformációit. Az effektalgebrákkal kapcsolatban többek között eredményeket nyertünk a Hilbert-tér effekt halmazának rendezés-tartó automorfizmusai, valamint Neumann-algebra effekt terének szekvenciális izomorfizmusai és mixture-automorfizmusai struktúrájára vonatkozóan.

Molnár 2003-as [95] dolgozatában megoldja Šemrl egy problémáját egyszerű bizonyítást adva azon állításra, mely szerint mátrixalgebra minden 2-lokális automorfizmus automorfizmus. A bizonyítás gondolatmenete alapján sikerül Šemrl-nek eredetileg Hilbert-tér teljes operátoralgebrájának 2-lokális automorfizmusaira vonatkozó eredményét Banach-tér standard operátoralgebráira kiterjeszteni.

Molnár másik 2003-as [96] dolgozatában a Hilbert terek effekt algebrájának rendezést és zérószorzatot megőrző transzformációit írta le. Következésképpen fontos automorfizmusok ismert leírására kaptunk új bizonyításokat.

Neumann-algebrák effektjeinek szekvenciális izomorfizmusait írta le Molnár 2003-as [97] cikkében.

Molnár és Kovács 2003-as [103] cikkében kevert kvantum állapotokra terjeszti ki egy korábbi dolgozatnak a tiszta kvantum állapotokra vonatkozó valószínűséget megőrző leképezéseinek vizsgálatát és eredményeit. Kovács és Molnár 2004-es [76] dolgozata ezeket a vizsgálatokat folytatja.

Molnár és Timmermann két 2003-as [107] és [108] dolgozatában meghatározza a kevert kvantum állapotok halmazának a Bures-féle és a trace-normából származó metrikára nézve a szurjektív (nem lineáris) izometriákat, illetve egy olyan Wigner típusú tételt igazolt, amely meghatározza a kvantum állapotok halmazának olyan transzformációit, amelyek egy általános kompatibilitási mennyiséget megőriznek. Molnár és Timmermann egy 2006-os, illetve egy megjelenés alatt álló [109] és [106] dolgozatokban a sűrűségi operátorok állapotainak, illetve a Neumann algebrák effektjeinek keverés-tartó transzformációit vizsgálta.

Molnár és Šemrl két 2005-ös, illetve 2007-es közös [104], [105] dolgozataikban önadjungált operátorok elemi operátorait, illetve nemlineáris kummutativitás-tartó leképezéseit határozták meg.

Strukturális eredményeket kaptunk operátoralgebrák önadjungált illetve pozitív részének multiplikatív (nem-lineáris) Jordan triple izomorfizmusokkal kapcsolatban és az önadjungált operátorok terének nem-lineáris Jordan elemi leképezéseire vonatkozóan a 2006-ban megjelent [99], [100] cikkekben.

Egy 2006-os [101] dolgozatban további jellemzéseit adtuk a determináns függvénynek az önadjungált mátrixok és a pozitív szemidefinit illetve pozitív definit mátrixok struktúráján. Egy megjelenés alatt álló [94] cikkünkben leírtuk a mátrixalgebra azon lineáris bijekcióit, melyek megőrzik a faktor erejéig kommutálás relációját.

A fenti és korábbi eredményeknek egy szintézisét adja Molnár 2004-ben elkészült és benyújtott 240 oldalas [98] disszertációja, amit 2005 tavaszán sikeresen megvédett. Ez a disszertáció volt az alapja a Springer Lecture Notes sorozatában 2007-ben megjelentetett [102] könyvnek is.

Győry 2003-as [52] PhD disszertációja a szerző által a függvény algebrák és operátor algebrák elméletében a megőrzési és reflexivitási problémákkal kapcsolatban korábban elért eredményeit foglalja össze. Wigner Jenő híres tételének teljesen új megközelítéssel, elemi úton történő bizonyítását adja Győry 2004-es [53] dolgozatában; az – ugyancsak 2004-ben megjelent – [54] publikációjában pedig kiterjeszti azt egy Hilbert-tér összes  $n$ -dimenziós alterének halmazán értelmezett, az alterek közötti ortogonalitást megőrző transzformációkra nyerve eredményeket. Győry 2005-ös [55] cikkében meghatározza a  $B(H)$  szuszpenziója automorfizmus- és izometria-csoportjának topologikus reflexív lezártját.

**9. Egyéb kutatások.** Ezalatt a címszó alatt olyan kutatásokról és eredményekről számolunk be, amelyek nem szerepeltek az eredeti pályázati tervben, de amelyeket a pályázat eszközei segítettek a megvalósulásukban.

Lajkó 2005-ben megjelent [78] munkája olyan oktatás- és kutatás-módszertani jegyzet, amely konkrét feladatokon keresztül mutat be és elemez bizonyos függvényegyenlet-típusok esetén használható megoldási módszereket. A függvényegyenletek tanításának, feladatmegoldásban való alkalmazhatóságának kérdéseit Lajkó 2005-ös [77] dolgozata tartalmazza. Aczél János egy régi problémájával kapcsolatos struktúrált függvényegyenletekre vonatkozó feladatrendszereket, illetve általánosításokat tartalmaz a Ádám, Lajkó, Maksa és Mészáros 2006-os [1] és közlésre elfogadott [2] dolgozatai.

Daróczy 2003-as [31] dolgozata a  $\sqrt{2}$  Gauss-féle iteráción alapuló bevezetését tárgyalja.

Lakatos és Losonczy szelfinverzív polinom zérushelyeire nyert becsléseket, illetve a zérushelyek körkörös “interlacing” tulajdonságát igazolta 2004-es, 2006-os és közlésre elfogadott [80], [87], [79] dolgozataiban.

Boros és Száz 2005-ös [20] dolgozatukban G. Birkhoff egyik alaptételének általánosítását bizonyítják.

Aczél János matematikusi pályájáról készített interjút tartalmaz Daróczy 2004-es [32] cikke. Daróczy [35] dolgozatában Orosz István 70. születésnapjára tiszteletére fogalmazta meg vallomásait a történelemről.

Debrecen, 2007. február 28.

(A témavezető aláírása)

A KUTATÓCSOPORT ÁLTAL 2003–2007-BEN MEGJELENTETETT TUDOMÁNYOS DOLGOZATOK,  
DISSZERTÁCIÓK

- [1] Zs. Ádám, K. Lajkó, Gy. Maksa, and F. Mészáros. Sequenced problems for functional equations. *Teaching Math. Comp. Sci.*, 4(1):179–192, 2006.
- [2] Zs. Ádám, K. Lajkó, Gy. Maksa, and F. Mészáros. Two functional equations on groups. *Ann. Math. Sil.*, 2007. közlésre elfogadva.
- [3] M. Adamek, A. Gilányi, K. Nikodem, and Zs. Páles. A note on three-parameter families and generalized convex functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 2007.
- [4] R. Badora, R. Ger, and Zs. Páles. Additive selections and the stability of the Cauchy functional equation. *ANZIAM J.*, 44(3):323–337, 2003.
- [5] Á. Bereczky and L. Székelyhidi. Spectral synthesis on torsion groups. *J. Math. Anal. Appl.*, 304(2):607–613, 2005.
- [6] M. Bessenyei. Hermite–Hadamard-type inequalities for generalized 3-convex functions. *Publ. Math. Debrecen*, 65(1-2):223–232, 2004.
- [7] M. Bessenyei. *Hermite–Hadamard-type inequalities for generalized convex functions*. PhD értekezés, Matematikai Intézet, Debreceni Egyetem, Debrecen, 2005.
- [8] M. Bessenyei. Hadamard’s inequality on simplices. *Amer. Math. Monthly*, 2008. közlésre elfogadva.
- [9] M. Bessenyei and Zs. Páles. Hadamard-type inequalities for generalized convex functions. *Math. Inequal. Appl.*, 6(3):379–392, 2003.
- [10] M. Bessenyei and Zs. Páles. On generalized higher-order convexity and Hermite–Hadamard-type inequalities. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 70(1-2):13–24, 2004.
- [11] M. Bessenyei and Zs. Páles. Hermite–Hadamard inequalities for generalized convex functions. *Aequationes Math.*, 69(1-2):32–40, 2005.
- [12] M. Bessenyei and Zs. Páles. Characterizations of convexity via Hadamard’s inequality. *Math. Inequal. Appl.*, 9(1):53–62, 2006.
- [13] Z. Boros. An inequality for the Takagi function. *Math. Inequal. Appl.* közlésre elfogadva.
- [14] Z. Boros. *Két komponensű függvénycsaládok karakterizációi*. Habilitációs értekezés, Matematikai és Informatikai Intézet, Debreceni Egyetem, Debrecen, 2003.
- [15] Z. Boros. Systems of generalized translation equations on a restricted domain. *Aequationes Math.*, 67:106–116, 2004.
- [16] Z. Boros and Z. Daróczy. A composite functional equation with additive solutions. *Publ. Math. Debrecen*, 69(1-2):245–253, 2006.
- [17] Z. Boros and P. Erdei. A conditional equation for additive functions. *Aequationes Math.*, 70(3):309–313, 2005.
- [18] Z. Boros and Z. Kaiser. Note on approximate ring homomorphisms in algebras over fields with valuations. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 24:119–124, 2004.
- [19] Z. Boros and Zs. Páles.  $\mathbb{Q}$ -subdifferential of Jensen-convex functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 321(1):99–113, 2006.
- [20] Z. Boros and Á. Szász. Finite and conditional completeness properties of generalized ordered sets. *Rostock. Math. Kolloq.*, 59:75–86, 2005.
- [21] B. Brindza and Gy. Maksa. A note on non-negative information functions. *Acta Acad. Paedagog. Agriensis, Sect. Mat. (N. S.)*, 30:31–36, 2003.
- [22] P. Burai. Extension theorem for a functional equation. *J. Appl. Anal.*, 12(2):293–299, 2006.
- [23] P. Burai. A Matkowski–Sutô type equation. *Publ. Math. Debrecen*, 70(1-2):233–247, 2007.
- [24] P. Burai and Á. Szász. Coincidence theorems for subadditive and superadditive functions. *Carpathian J. Math.*, 21(1-2):21–26, 2005.
- [25] P. Burai and Á. Szász. Relationships between homogeneity, subadditivity and convexity properties. *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.*, 16:77–87, 2005.
- [26] J. K. Chung, P. K. Sahoo, and L. Székelyhidi. On quadratic differences that depend on the product of arguments – revisited. *Aequationes Math.*, 67(3):216–224, 2004.
- [27] P. Czinder and Zs. Páles. Minkowski-type inequalities for two variable Stolarsky means. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 69(1-2):27–47, 2003.
- [28] P. Czinder and Zs. Páles. An extension of the Hermite–Hadamard inequality and an application for Gini and Stolarsky means. *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 5(2):Article 42, pp. 8 (electronic), 2004.
- [29] P. Czinder and Zs. Páles. Local monotonicity properties of two-variable Gini means and the comparison theorem revisited. *J. Math. Anal. Appl.*, 301(2):427–438, 2005.
- [30] P. Czinder and Zs. Páles. Some comparison inequalities for Gini and Stolarsky means. *Math. Inequal. Appl.*, 9(4):607–616, 2006.
- [31] Z. Daróczy. Gaussian iteration of mean values and the existence of  $\sqrt{2}$ . *Teaching Math. Comp. Sci.*, 1(1):35–42, 2003.
- [32] Z. Daróczy. Beszélgetés Aczél Jánossal. *Debreceni Szemle*, XII(3):465–481, 2004.
- [33] Z. Daróczy. On translative and quasi-commutative operations. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 24:15–28, 2004.



- [34] Z. Daróczy. Quasi-arithmetic elements of a given class of means. *Publ. Math. Debrecen*, 65(3-4):317–322, 2004. Dedicated to the memory of Béla Brindza and Jenő Erdős.
- [35] Z. Daróczy. Egy matematikus vallomása a történelemről. In *Emlékkönyv Orosz István 70. születésnapjára*, pages 389–395, 2005.
- [36] Z. Daróczy. Functional equations involving means and Gauss compositions of means. *Nonlinear Anal.*, 63(5-7):e417–e425, 2005.
- [37] Z. Daróczy and G. Hajdu. On linear combinations of weighted quasi-arithmetic means. *Aequationes Math.*, 69(1-2):58–67, 2005.
- [38] Z. Daróczy, G. Hajdu, and C. T. Ng. An extension theorem for a Matkowski-Sutó problem. *Colloq. Math.*, 95(2):153–161, 2003.
- [39] Z. Daróczy, K. Lajkó, R. L. Lovas, Gy. Maksa, and Zs. Páles. Functional equations involving means. *Acta Math. Hungar.*, 2007.
- [40] Z. Daróczy, Gy. Maksa, and Zs. Páles. On two-variable means with variable weights. *Aequationes Math.*, 67(1-2):154–159, 2004.
- [41] Z. Daróczy, Gy. Maksa, and Zs. Páles. Functional equations involving means and their Gauss composition. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 134(2):521–530, 2006.
- [42] Z. Daróczy and Zs. Páles. Közéértékek Gauss-féle kompozíciója és a Matkowski–Sutó probléma megoldása. *Mat. Lapok*, (3-4):1–53, 1998-99 (2003).
- [43] Z. Daróczy and Zs. Páles. The Matkowski–Sutó problem for weighted quasi-arithmetic means. *Acta Math. Hungar.*, 100(3):237–243, 2003.
- [44] Z. Daróczy and Zs. Páles. A Matkowski–Sutó-type problem for weighted quasi-arithmetic means. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 22:69–81, 2003. Dedicated to the 60th birthday of Professor Karl-Heinz Indlekofer.
- [45] Z. Daróczy and Zs. Páles. On functional equations involving means. *Publ. Math. Debrecen*, 62(3-4):363–377, 2003. Dedicated to Professor Lajos Tamássy on the occasion of his 80th birthday.
- [46] Z. Daróczy and Zs. Páles. Generalized convexity and comparison of mean values. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 71(1-2):105–116, 2005.
- [47] B. Ebanks and L. Székelyhidi. On multiplicative and additive differences. *Aequationes Math.*, 69(1-2):97–113, 2005.
- [48] A. Gilányi, Z. Kaiser, and Zs. Páles. Estimates to the stability of the Cauchy equation. *Aequationes Math.*, 2007.
- [49] A. Gilányi, C. T. Ng, and J. Aczél. On a functional equation arising from comparison of utility representations. *J. Math. Anal. Appl.*, 304(2):572–583, 2005.
- [50] A. Gilányi, K. Nikodem, and Zs. Páles. Bernstein-Doetsch type results for quasiconvex functions. *Math. Inequal. Appl.*, 7(2):169–175, 2004.
- [51] T. Glavosits and K. Lajkó. The general solution of a functional equation related to the characterizations of bivariate distributions. *Aequationes Math.*, 70(1-2):88–100, 2005.
- [52] M. Györy. *Preserver problems and reflexivity problems on operator algebras and on function algebras*. PhD értekezés, Matematikai Intézet, Debreceni Egyetem, Debrecen, 2003.
- [53] M. Györy. A new proof of Wigner’s theorem. *Rep. Math. Phys.*, 54(2):159–167, 2004.
- [54] M. Györy. Transformations on the set of all  $n$ -dimensional subspaces of a Hilbert space preserving orthogonality. *Publ. Math. Debrecen*, 65(1-2):233–242, 2004.
- [55] M. Györy. On the topological reflexivity of the isometry group of the suspension of  $B(H)$ . *Studia Math.*, 166(3):287–303, 2005.
- [56] G. Hajdu. *Investigations in the theory of functional equations*. PhD értekezés, Matematikai Intézet, Debreceni Egyetem, Debrecen, 2003.
- [57] G. Hajdu and L. Hajdu. On an identity of Ramanujan over finitely generated domains. *Acta Math. Hungar.*, 112(1-2):143–155, 2006.
- [58] A. Házy. Solving functional equations with computer. In *MicroCAD 2004 International Scientific Conference, vol. Section E*, pages 35–39. Miskolci Egyetem, Miskolc, 2004.
- [59] A. Házy. Solving linear two variable functional equations with computer. *Aequationes Math.*, 67:47–62, 2004.
- [60] A. Házy. *Lineáris függvényegyenletek megoldási módszerei és  $t$ -konvex függvények stabilitása*. PhD értekezés, Matematikai Intézet, Debreceni Egyetem, Debrecen, 2005.
- [61] A. Házy. On approximate  $t$ -convexity. *Math. Inequal. Appl.*, 8(3):389–402, 2005.
- [62] A. Házy and Zs. Páles. On approximately midconvex functions. *Bull. London Math. Soc.*, 36(3):339–350, 2004.
- [63] A. Házy and Zs. Páles. On approximately  $t$ -convex functions. *Publ. Math. Debrecen*, 66(3-4):489–501, 2005. Dedicated to the 75th birthday of Professor Heinz König.
- [64] A. Járai. Measurability implies continuity for solutions of functional equations — even with few variables. *Aequationes Math.*, 65(3):236–266, 2003.
- [65] A. Járai. Regularity of solutions of a functional equation on Lie groups. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 24:239–246, 2004.
- [66] A. Járai. *Regularity Properties of Functional Equations in Several Variables*, volume 8 of *Adv. Math. (Dordrecht)*. Springer, Berlin–Heidelberg, 2005.
- [67] A. Járai, Gy. Maksa, and Zs. Páles. On Cauchy-differences that are also quasiums. *Publ. Math. Debrecen*, 65(3-4):381–398, 2004. Dedicated to the memory of Professors Béla Brindza and Jenő Erdős.

- [68] Z. Kaiser. On stability of the Cauchy equation in normed spaces over fields with valuation. *Publ. Math. Debrecen*, 64(1-2):189–200, 2004.
- [69] Z. Kaiser. *Függvényegyenletek stabilitása absztrakt struktúrákon*. PhD értekezés, Matematikai Intézet, Debreceni Egyetem, Debrecen, 2005.
- [70] Z. Kaiser. On stability of the monomial functional equation in normed spaces over fields with valuation. *J. Math. Anal. Appl.*, 322(2):1188–1198, 2006.
- [71] Z. Kaiser and Zs. Páles. An example of a stable functional equation when the Hyers iteration does not work. *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 6(1):Article 14, pp. 12 (electronic), 2005.
- [72] I. Kocsis. *Összeg alakú függvényegyenletek stabilitása*. PhD értekezés, Matematikai Intézet, Debreceni Egyetem, Debrecen, 2003.
- [73] I. Kocsis. On functional equations in several variables arising in information theory. *Debreceni Műszaki Közlemények*, 1:37–52, 2003.
- [74] I. Kocsis. On the stability of a sum form equation in several variables. *Comment. Math. Prace Mat.*, 44(1):67–92, 2004.
- [75] I. Kocsis. Solution of a sum form equation in the two dimensional closed domain case. *Ann. Math. Inform.*, 32:61–78, 2005.
- [76] E. Kovács and L. Molnár. Preserving some numerical correspondences between Hilbert space effects. *Rep. Math. Phys.*, 54(2):201–209, 2004.
- [77] K. Lajkó. Függvényegyenletek feladatokban. *Pont Társadalomtudományi folyóirat, Matematika Szakmódszertani különszám*, 1, 2005.
- [78] K. Lajkó. *Függvényegyenletek feladatokban, egyetemi jegyzet*. Institute of Mathematics, University of Debrecen, Debrecen, Hungary, 2005.
- [79] P. Lakatos and L. Losonczi. Circular interlacing with reciprocal polynomials. *Math. Inequal. Appl.* közlésre elfogadva.
- [80] P. Lakatos and L. Losonczi. Self-inversive polynomials whose zeros are on the unit circle. *Publ. Math. Debrecen*, 65(3-4):409–420, 2004.
- [81] L. Larsson, Zs. Páles, and L.-E. Persson. Carlson type inequalities for finite sums and integrals on bounded intervals. *Bull. Austr. Math. Soc.*, 71(2):275–284, 2005.
- [82] L. Losonczi. Homogeneous non-symmetric means of two variables. *Demonstratio Math.* közlésre elfogadva.
- [83] L. Losonczi. Homogeneous symmetric means of two variables. *Aequationes Math.* közlésre elfogadva.
- [84] L. Losonczi. Equality of two variable Cauchy mean values. *Aequationes Math.*, 65(1-2):61–81, 2003.
- [85] L. Losonczi. Sub- and superadditive integral means. *J. Math. Anal. Appl.*, 307(2):444–454, 2005.
- [86] L. Losonczi. Equality of two variable means revisited. *Aequationes Math.*, 71(3):228–245, 2006.
- [87] L. Losonczi. On reciprocal polynomials with zeros of modulus one. *Math. Inequal. Appl.*, 9(2):289–298, 2006.
- [88] Z. Makó and Zs. Páles. On Lipschitz perturbation of monotonic functions. *Acta Math. Hungar.*, 113(1-2):1–18, 2006.
- [89] Gy. Maksa. *Asszociativitási és biszimmetria egyenletek*. MTA Doktori értekezés, Matematikai Intézet, Debreceni Egyetem, Debrecen, 2004.
- [90] Gy. Maksa. CM solutions of some functional equations of associative type. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 24:125–132, 2004.
- [91] Gy. Maksa. Quasiums and generalized associativity. *Aequationes Math.*, 69(1-2):6–27, 2005.
- [92] Gy. Maksa and E. Nizsalóczki. Quasi-sums in several variables. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.)*, 22(2):193–207 (electronic), 2006.
- [93] Gy. Maksa and Zs. Páles. On a composite functional equation arising in utility theory. *Publ. Math. Debrecen*, 65(1-2):215–220, 2004.
- [94] L. Molnár. Linear maps on matrices preserving commutativity up to a factor. *Linear Multilinear Algebra*. közlésre elfogadva.
- [95] L. Molnár. Local automorphisms of operator algebras on Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131(6):1867–1874 (electronic), 2003.
- [96] L. Molnár. Preservers on Hilbert space effects. *Linear Algebra Appl.*, 370:287–300, 2003.
- [97] L. Molnár. Sequential isomorphisms between the sets of von Neumann algebra effects. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 69(3-4):755–772, 2003.
- [98] L. Molnár. *Preserver Problems on Algebraic Structures of Linear Operators and on Function Spaces*. MTA Doktori értekezés, Matematikai Intézet, Debreceni Egyetem, Debrecen, 2004.
- [99] L. Molnár. Multiplicative Jordan triple isomorphisms on the self-adjoint elements of von Neumann algebras. *Linear Algebra Appl.*, 419:586–600, 2006.
- [100] L. Molnár. Non-linear Jordan triple automorphisms of sets of self-adjoint matrices and operators. *Studia Math.*, 173(1):39–48, 2006.
- [101] L. Molnár. A remark on the Kochen-Specker theorem and some characterizations of the determinant on sets of Hermitian matrices. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 134(10):2839–2848 (electronic), 2006.
- [102] L. Molnár. *Selected Preserver Problems on Algebraic Structures of Linear Operators and on Function Spaces*, volume 1895 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

- [103] L. Molnár and E. Kovács. An extension of a characterization of the automorphisms of Hilbert space effect algebras. *Rep. Math. Phys.*, 52(1):141–149, 2003.
- [104] L. Molnár and P. Šemrl. Nonlinear commutativity preserving maps on self-adjoint operators. *Q. J. Math.*, 56(4):589–595, 2005.
- [105] L. Molnár and P. Šemrl. Elementary operators on self-adjoint operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 327:302–309, 2007.
- [106] L. Molnár and W. Timmermann. Mixture preserving maps on von Neumann algebra effects. *Lett. Math. Phys.* közlésre elfogadva.
- [107] L. Molnár and W. Timmermann. Isometries of quantum states. *J. Phys. A*, 36(1):267–273, 2003.
- [108] L. Molnár and W. Timmermann. Preserving the measure of compatibility between quantum states. *J. Math. Phys.*, 44(3):969–973, 2003.
- [109] L. Molnár and W. Timmermann. Transformations on the sets of states and density operators. *Linear Algebra Appl.*, 418(1):75–84, 2006.
- [110] M. S. Moslehian and L. Székelyhidi. Stability of ternary homomorphisms via generalized Jensen equation. *Result. Math.*, 49:289–300, 2006.
- [111] E. Neuman and Zs. Páles. On comparison of Stolarsky and Gini means. *J. Math. Anal. Appl.*, 278(2):274–284, 2003.
- [112] K. Nikodem and Zs. Páles. On  $t$ -convex functions. *Real Anal. Exchange*, 29(1):219–228, 2003/2004.
- [113] K. Nikodem and Zs. Páles. Generalized convexity and separation theorems. *J. Convex Anal.*, 14(2):239–248, 2007.
- [114] Á. Orosz. Difference equations on discrete polynomial hypergroups. *Adv. Difference Equ.*, pages Art. 51427, 1–10, 2006.
- [115] Á. Orosz. Sine and cosine equation on discrete polynomial hypergroups. *Aequationes Math.*, 72:225–233, 2006.
- [116] Á. Orosz and L. Székelyhidi. Moment functions on polynomial hypergroups in several variables. *Publ. Math. Debrecen*, 65(3-4):429–438, 2004. Dedicated to the memory of Béla Brindza.
- [117] Á. Orosz and L. Székelyhidi. Moment functions on polynomial hypergroups. *Arch. Math. (Basel)*, 85(2):141–150, 2005.
- [118] Zs. Páles. On approximately convex functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131(1):243–252, 2003.
- [119] Zs. Páles. A regularity theorem for composite functional equations. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 69:591–604, 2003.
- [120] Zs. Páles. Regularity problems and results concerning composite functional equations in several variables. *Tatra Mt. Math. Publ.*, 34(2):289–306, 2006.
- [121] Zs. Páles and L.-E. Persson. Hardy type inequalities for means. *Bull. Austr. Math. Soc.*, 70(3):521–528, 2004.
- [122] Zs. Páles and L. Székelyhidi. On approximate sandwich and decomposition theorems. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 23:59–70, 2004.
- [123] L. Székelyhidi. Functional equations on hypergroups. In Th. M. Rassias, editor, *Functional equations, inequalities and applications*, pages 167–181. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003.
- [124] L. Székelyhidi. Difference equations via spectral synthesis. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 24:3–14, 2004.
- [125] L. Székelyhidi. The failure of spectral synthesis on some types of discrete abelian groups. *J. Math. Anal. Appl.*, 291(2):757–763, 2004.
- [126] L. Székelyhidi. Spectral analysis and spectral synthesis on polynomial hypergroups. *Monatshefte Math.*, 141(1):33–43, 2004.
- [127] L. Székelyhidi. Discrete spectral synthesis. *Ann. Math. Inform.*, 32:141–152, 2005.
- [128] L. Székelyhidi. Polynomial functions and spectral synthesis. *Aequationes Math.*, 70(1-2):122–130, 2005.
- [129] L. Székelyhidi. Spectral synthesis and a characterization of polynomial ideals. *Publ. Math. Debrecen*, 66(1-2):183–195, 2005. Dedicated to the memory of Jenő Erdős.
- [130] L. Székelyhidi. *Discrete Spectral Synthesis and Its Applications*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Dordrecht, 2006.
- [131] L. Székelyhidi. Functional equations on Sturm-Liouville hypergroups. *Math. Pannon.*, 17(2):169–182, 2006.