MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont

MTA KRTK KTI

Centre for Economic and Regional Studies
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

MŰHELYTANULMÁNYOK DISCUSSION PAPERS

MT-DP – 2019/3

Matematikai közgazdaságtani modellek középiskolás fokon

SIMONOVITS ANDRÁS

MTA KÖZGAZDASÁG- ÉS REGIONÁLIS TUDOMÁNYI KUTATÓKÖZPONT
KÖZGAZDASÁG-TUDOMÁNYI INTÉZET - BUDAPEST, 2019

Műhelytanulmányok
MT-DP – 2019/3

MTA Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont
Közgazdaság-tudományi Intézet

Matematikai közgazdaságtani modellek középiskolás fokon

Szerző:

Simonovits András
emeritus kutató, ny. tudományos tanácsadó
Magyar Tudományos Akadémia
Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont
Közgazdaság-tudományi Intézet
E-mail: simonovits.andras@krtk.mta.hu

2019. február

Kiadó:
Magyar Tudományos Akadémia Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont
Közgazdaság-tudományi Intézet

Matematikai közgazdaságtani modellek középiskolás fokon

Simonovits András

Összefoglaló

A 150 oldalas jegyzet 18 fejezetében többtucat matematikai-közgazdaságtani modellt mutatok be. A modellek egy része jól ismert, de másik része a szerző (főleg nyugdíj-gazdaságtani) kutatásából származik. Olyan olvasókra számítok, akik középiskolás fokon állnak matematikából vagy középiskolásokat oktatna – azaz nem használok kalkulust, mátrixszámítást; és a könyv végén tárgyalt valószínűségszámítást és matematikai statisztikát elmagyarázom. Feltételezem viszont, hogy képesek önálló gondolkodásra, és számítógépükkel olykor hosszabb számításokat is elvégeznek.

Tárgyszavak: matematikai-közgazdasági modellek, tanítás középiskolásoknak

JEL kódok: A21, C02

Mathematical-economic models at high-school level

András Simonovits

Abstract

This 150-page long book consists of 18 chapters and presents several dozens mathematical-economic models. One part consists of well-known models but the other models come from the author's research, mainly on pension economics. The book is written for readers who have a high-school education from mathematics; i.e. neither calculus nor matrix theory is applied. Though some probability and mathematical statistics are used at the end of the book, they are explained. It is presumed that the readers are ready for autonomous thinking and are capable to make calculations on their personal computers.

Keywords: mathematical economics, pre-college

JEL codes: A21, C02

kozep3

Simonovits András:

Matematikai közgazdaságtani modellek középiskolás fokon

2019. február 6.

Előszó

Ebben a jegyzetben a matematikai közgazdaságtani modellek világába vezetem be az igényes középiskolásokat, tanáraikat és egyéb érdeklődőket. A 19. században a közgazdaságtan zöme nélkülözte a matematikai modelleket, azóta viszont egyre növekszik a szerepük. Ez a folyamat egyrészt szabatosabbá és számszerűsíthetővé teszi a közgazdaságtant, másrészt öncélú matematikai ujjgyakorlattá silányíthatja azt. Remélem, az előadandó modellek valóban segítenek a valóság jobb megértésében és a matematika viszonylag új alkalmazásainak elsajátításában.

A témák kiválasztásakor legfontosabb szempontom az volt, hogy lehetőleg középiskolás szinten érthető, ugyanakkor érdekes és fontos modelleket mutassak be. Kis részüket a KöMaLban (Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok) már publikáltam, s bonyolultabb változatban előfordultak társszerzőkkel írott cikkeimben. Ehelyütt mondok köszönetet ábécé sorrendben Czeglédi Tibornak, Eső Péternek, Garay Barnabásnak, Király Balázsnak, Király Júliának, Molnár Györgynek, Szabó Endrének, Tir Melindának és Tóth Jánosnak. Mérő László könyvét (Mérő, 1996) szabadon használtam a játékelméleti bevezetőben, és Eső Péter is segített kigyomlálni néhány bántó pongyolaságot. Hálával tartozom Halpern Lászlónak, Király Júliának, Oblath Gábornak és Rázmovits Ádámnak egy-egy adatsorért, Ferenczi Miklósnak a valószínűség-számítási, Kőrösi Gábornak a statisztikai rész bírálatáért. Különleges köszönet illeti Király Júliát, Rácz Andrást és Szabó Juditot, akik egy korábbi változatot részletesen átnéztek. Sokat tanultam Tóth Attilától, (Fazekas Mihály Gyakorló Iskola 11. évfolyamos diákja), akivel hetente 1–1 órában átbeszéltük az anyagot. Hálás vagyok Drága Balázs középiskolai tanárnak, aki figyelmeztetett arra, hogy milyen nehézségekkel találja szembe magát egy közgazdaságban járatlan önálló olvasó: például mi egy absztrakt dinamikus rendszer, mi az árszabályozás? Sajnos, csak részben sikerült eleget tenni kritikai észrevételeinek. A megmaradó hibákért kizárólag a szerzőt terheli a felelősség.

Számos hazai és külföldi egyetemen tanítottam és tanultam a diákjaimtól. Köszönet illeti a jelenlegi Budapesti Corvinus Egyetemet, a Rajk László Szakkollégiumot, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemet és a Közép-Európai Egyetemet a tanítási és tanulási lehetőségekért. Egyes fejezetek írásánál az K 108668 számú pályázatban szereplő kutatásra támaszkodtam.

A könyv számos példát és feladatot tartalmaz, ez utóbbiak megoldása a könyv végén található. Kérem az Olvasót, hogy először próbálja meg a feladatokat saját maga megoldani, és csak kellő mennyiségű próbálkozás után forduljon a feladatmegoldásokhoz. Néhány feladat megoldásához számítógépes programra van szükség, ezek megírását nyomatékosan javaslom. A 17. fejezet statisztikai feladatainak megoldásához ingyen szoftverek is rendelkezésre állnak.

A nehezebb fogalmakat a jegyzet végén összefoglalom.

Mivel ismeretterjesztő jegyzetről van szó, feleslegesnek tartottam részletes hivatkozásjegyzékkel terhelni az Olvasót. Csak néhány esetben tüntettem föl a forrást, például a társszerzős vagy a KöMaLban megjelent cikkeimet. De nem fukarkodtam a nevekkel és az évszámokkal, ezek alapján az Olvasó a világhálón tovább érdeklődhet, és láthatja a fejlődés kanyargós útját.

Mivel elsősorban érdeklődő középiskolásoknak (vagy hozzájuk hasonló tudásszintű egyéneknek) szánom ezt a jegyzetet, néhány mondatban kitérek saját idevágó középiskolai élményeimre. 1962 és 1965 között a Radnóti Miklós Gyakorló Iskolában Kugler Sándorné tanított nekünk fizikát. Akkor még a szombat rendes iskolai nap volt, és a fizikaszakkört du. 1 és 2 óra között tartotta Györgyi néni. Ez volt a hét csúcspontja. Minden alkalommal a szakkör tagjai (Patkós András, azóta akadémikus, Vadász István vezető mérnök és én) megoldottuk a Györgyi néni által gondosan kiválasztott fizikafeladatokat, és közben megtanultunk logikusan gondolkodni. Györgyi néni tíz év alatt további két fizikusakadémikust adott a hazának, és számos egyéb kutatót.

Ugyanebben az időben rendszeresen részt vettem a Reiman István által szervezett „Fiatal Matematikusok Körében", ahol sok elgondolkodtató feladatot oldottunk meg együtt, és sok érdekes matematikai témából hallgattam előadásokat, és közben megismertem későbbi egyetemi társaimat és egyben barátaimat is. Egy központi fizikaszakkörön pedig Wiedemann László tartott különlegesen érdekes és egyetemi szintű előadásokat.

Meggyőződésem, hogy az itt közreadott jegyzetet – részben vagy egészben – érdemes lenne középiskolás matematikai szakkörökön feldolgozni. Bár az itt előadott témák gyakran nélkülözik a tiszta matematika eleganciáját, elősegíthetik az alkalmazott matematika újabb lehetőségeinek megismerését. De egyáltalán nem biztos, hogy a közeljövőben lesznek ilyen szakkörök, ezért nem mondhatunk le a jegyzet önálló elsajátításáról.

Két megjegyzést tennénk a matematika fizikai és közgazdasági alkalmazásának középiskolás fokon adódó különbségéről: *1.* mindenki tanul fizikát, nagyon kevesen tanulnak közgazdaságtant (ez utóbbi egyébként kiküszöbölendő hiba); *2.* bizonyos fizikai fogalmak (tehetetlenség, munka stb.) ellentmondanak a hétköznapi tapasztalatoknak, míg a zsebpénzét beosztó és pályát választó középiskolásnak nehéz közgazdasági feladatokat kell megoldania.

A tartalomjegyzékben *-gal jelölt fejezetek vagy alfejezetek viszonylag nehezek, első olvasásra kihagyhatók.

Egyes témák vetítéses kidolgozása megtalálható a honlapomon:
https://kozgazmodellek.wordpress.com/

kedvcsináló: komal1, 3. fejezet: jatek1, 8. fejezet: moral, 9. fejezet: nep-sl, 10. fejezet: nyug-sl és csebisev, 11. fejezet: onkent, 12. fejezet: valind-szirak, 13. fejezet: jelzalog1, 14. fejezet: karrow.

Kérem az olvasókat, hogy megjegyzéseiket jutassák el a következő címre:
simonov@econ.core.hu

Köszönettel

Simonovits András

TARTALOMJEGYZÉK

Görög betűk

A jegyzetben sokszor használunk görög betűket, főleg együtthatók jelölésére. Igyekszünk úgy megválasztani őket, hogy „rímeljenek” a megfelelő latin betűre: például x és ξ. A középiskolások egy része nem ismeri az összes görög kisbetűt, ezért a görög ábécé sorrendjében sorfolytonosan felsoroljuk őket.

Görög betűk listája

$\alpha =$ alfa	$\beta =$ béta	$\gamma =$ gamma	$\delta =$ delta	$\varepsilon =$ epszilon
$\zeta =$ dzéta	$\eta =$ éta	$\theta =$ teta	$\iota =$ jóta	$\kappa =$ kappa
$\lambda =$ lambda	$\mu =$ mű	$\nu =$ nű	$\xi =$ kszi	$\vartheta =$ omikron
$\pi =$ pi	$\rho =$ ró	$\sigma =$ szigma	$\tau =$ tau	$\varphi =$ fi
$\xi =$ kszi	$\psi =$ pszi	$\omega =$ omega		

Fontosabb jelölések jegyzéke

Memorizálást megkönnyítendő, alkalmanként az angol nevet is megadjuk

t = időszak (time) indexe	x_t = t-edik állapot
i = szereplő (típus) indexe	f_i = i-edik típus részaránya
a, b, c, d = együtthatók	p, q = valószínűségek
$^{\mathrm{o}}$ = optimális/egyensúlyi	* = normális
$\hat{x} = x - x^*$ = különbség	P = periódus
x = független változó	y = függő változó
x, y = fogyasztási pár	m = jövedelem
p, q = árak (price)	α = preferenciasúly
u = hasznosságfüggvény	P = ár
D = kereslet (demand)	S = kínálat (supply)
w = szuperbruttó bér (wage)	u = bruttó bér
v = nettó bér	ν = létszám növekedési eh
τ = nyugdíjjárulék-kulcs	θ = adókulcs
b = nyugdíj (benefit)	β = járadékszorzó
L = alacsony típus indexe (low)	H = magas típus indexe (high)
$\mathbf{E}$ = várható érték	$\mathbf{D}$ = szórás
ε = relatív hatékonyság	f = függvény

3. fejezet

s = stratégia	S = stratégiahalmaz

4. fejezet

D = adósság (debt)	r = kamatláb (rate)
B = költségvetési egyenleg	E = elsődleges egyenleg
$R = 1 + r$ = kamategyüttható	Y = kibocsátás
d = adósságráta	e = egyenlegráta
G = növekedési (growth) együttható	$\rho = R/G$ = relatív kamategyüttható
I = beruházás (investment)	C = fogyasztás (consumption)
β = akcelerátor	γ = fogyasztái hajlandóság

5. fejezet

c = jelen fogyasztás	d = jövő fogyasztás
δ = leszámítolási együttható	s = megtakarítás (save)
W_i = vagyon az i-edik időszak végén	φ = hiperbolikus leszámítolási eh.

6. fejezet

F = termelési függvény	Q = kibocsátás (quantity)
K = tőke (capital)	L = munka (labor)
α, β = együtthatók	G_x = x növekedési eh-ja
$k = K/L$ = tőkeellátottság	$l = L/Y$ = munkaigény
C = költség (cost)	π = profit

7. fejezet

f, g = függvény	L = tágulási korlát
φ, ψ = szögsebesség	$\mathbf{p}$ = tervezett (planned)

8. fejezet

i = típusok indexe	I = típusok száma
γ = alapjövedelem	e = jövedelem-eltitkolás
μ = adómorál	
w_m = minimális bér	w_M = maximális bér

9. fejezet

N = népességszám	B = születésszám (birth)
D = halálozási szám (death)	K_t = gyermekszám (kid)
$b = B/N$ = születési arány	$d = D/N$ = halálozási arány
M = dolgozók száma	P = nagyszülők száma (pensioner)
$k = K/M$ = fiatalkori fh	$p = P/M$ = időskori fh
$d = (K + P)/M$ =teljes fh	
U = fiatal szülők száma	V = idős szülők száma

10. fejezet

R nyugdíjba vonulási életkor (retirement)	L = munkába lépési életkor
D = halálozási életkor (death)	z = életpálya- egyenleg
a_i = 1. tényező	b_i = 2. tényező

11. fejezet

α = támogatási arány	γ = megtakarítási hajlandóság
ε_I = belső szórás (internal)	ε_E = külső szórás (external)

12. fejezet

$\mathbf{b}_t$ = folyóáras nyugdíj	$\mathbf{v}_t$ folyóáras nettó bér
T = nyugdíjban töltött idő	S = szolgálati idő
γ = általános helyettesítési arány	ι = bérindex súlya

13. fejezet

R = nominális kamategyüttható	B = nominális törlesztőrészlet
T = futamidő	D_t = tartozás (debt)a t-edik időszak végén
P_t = halmozott árindex	p = inflációs eh
E = árfolyam (exchange)	F = reálárfolyam
$r = R/p$ = reálkamat eh.	d = reáltartozás
b = reáltörlesztés	$e = E/E_{-1}$ = árfolyam-változás
$\tilde{x}$ = forintosított frank...	

14. fejezet

v_i = v termék az i-edik szereplőnél	w_i = w termék az i-edik szereplőnél
x_i = v termék cseréje az i-edik szereplőnél	y_i = w termék cseréje az i-edik szereplőnél
c_i = tb-költség az i-edik szereplőnél	d_i = magánköltség az i-edik szereplőnél
f_i = az $i - 1$-ediknél rosszabbak magánköltsége	

15. fejezet

y_1 = fiatalkori jövedelem

y_2 = időskori jövedelem

s_1 = fiatalkori megtakarítás

s_2 = időskori megtakarítás

ρ = kamat eh.

16. fejezet

ω_i = i-edik elemi esemény

p_i = i-edik elemi valószínűség

A, B = események

Ω = biztos esemény

q_j = másik valószínűségsor

$r_{i,j}$ = együttes eloszlás

μ = várható érték

σ = szórás

$\mathbf{P}()$ = valószínűség (probability)

d = kár (damage)

π = haszonkulcs

p = kárvalószínűség

e = biztosítási díj

s = önrészesedés

ρ = morális kár eh.

17. fejezet

m = tömeg (mass)

h = magasság (height)

β = regressziós eh.

α = regressziós állandó

e = hiba

r = korrelációs eh.

1. Közgazdasági modellekről

Bevezető fejezetünk két alfejezetből áll: az 1.1. alfejezet általános bevezetést nyújt a közgazdasági modellekről, az 1.2. alfejezet pedig röviden áttekinti az egyes fejezetek tartalmát.

1.1. Általános bevezető

A modern világban minden felnőttnek gyakran kell gazdasági döntéseket hoznia: milyen foglalkozást választ, hol telepedik le, milyen valutában adósodik el, és sorolhatnánk az előttünk álló kérdéseket. Persze, az emberek többsége világszerte tájékozatlan, még a részvényt és a kötvényt sem tudja megkülönböztetni, zavarba jön a kamatos kamattól stb. Ennek ellenére valamilyen elképzelésük van a világról, és ez alapján döntenek a fenti kérdésekről. A népességben törpe kisebbséget alkotnak a közgazdászok; ők azok, akik azzal dicsekszenek, hogy értenek a közgazdaságtanhoz. A hozzáértés egyik (de nem szükséges és nem is elégséges) jele, hogy elképzeléseiket nyilvánosságra hozzák, sőt következtetéseiket modellek segítségével vonják le. Mivel a kormányok és a közírók gyakran hivatkoznak olyan tanulmányokra, amelyek közgazdaságtani modelleken alapulnak, minden érett és érdeklődő állampolgárnak érdekes lehet betekinteniük a közgazdasági modellezés kérdéseibe. A jövő matematikusainak pedig hasznos egy új alkalmazási területtel megismerkedniük.

De mi a modell? A valóságos folyamatok és összefüggések leegyszerűsített képe. Induljunk ki egy egyszerű modellből, a londoni metróvonalak sémájából, amely a világon elsőként ábrázolt metróhálózatot áttekinthetően, de leegyszerűsítve és torzítva. Állítólag két évig vitatkoztak a sorsán, amíg 1931-ben be nem vezették. Olyan sikeres lett, hogy azóta a világ számos metrótérképét (a mienkét is) hasonlóan készítik. A metrótérkép csak a megállókra és a csatlakozásokra koncentrál, a valódi távolságokat nem mutatja. Ezért marad áttekinthető. Amikor azonban első londoni utamon e séma alapján terveztem meg külvárosi látogatásom, félórát késtem – hibáztam.

Ahogyan a térképek a földrajzi valóság egyszerűsített képei, a fizikai (például Galilei lejtője, 1638 előtt), kémiai (például Dalton atomelmélete, 1802), közgazdaságtani (Walras piaci ármechanizmusa, 1874–1877) stb. modellek a megfelelő tárgykör egyszerűsítései. A térképhez hasonlóan a jó modell segít, a rossz modell akadályoz a tájékozódásban. Már az ókorban is voltak elméleti és gyakorlati modellek (a kozmológiában, a statikában), de széles körben csak az utóbbi évszázadokban terjedtek el a természet-, majd a társadalomtudományban.

Mindenképpen különbséget kell tennünk a természet- és a társadalomtudományi modellek között. Egyrészt a természettudományban tipikusan sokkal egyszerűbb jelenségeket és folyamatokat modelleznek, mint a társadalomtudományban. (A Naprendszer bolygóinak mozgása sokkal egyszerűbb, mint egy piac áraié!) Másrészt a természetben általában sokkal könnyebb és olcsóbb kísérleteket végezni, mint a társadalomban. Harmadrészt, míg a természettudományban az elmélet nincs befolyással a vizsgálat tárgyára, addig a társadalomtudományban erős a befolyás. (Például a Föld ugyanúgy keringett a Nap körül Kopernikusz előtt, mint utána; de a kellő felügyelet nélkül hagyott jelzálog-piacok az elméleti tisztázatlanság miatt komoly válságot okoztak napjainkban.)

A társadalomtudományi modelleknél maradva, a 18. század francia közgazdászai (a fiziokraták) modellezték először a gazdasági ágazatok (főleg a mezőgazdaság és az ipar) közti kölcsönhatásokat, a 19. század elején pedig az angol David Ricardo széles körben alkalmazott matematika nélküli közgazdasági modelleket. Mégis megfelelő feltevések mellett logikai érveléssel bizonyítható állításokat tett. Talán legismertebb és legsikeresebb modellje a komparatív előnyökről szólt. Eszerint Angliának akkor is érdemes textilgyártásra, és Portugáliának bortermelésre specializálódnia, ha Portugália mindkét területen termelékenyebb, mint Anglia, de bortermelésben Angliához képest még termelékenyebb, mint textilgyártásban. (Tehát ha nem a relatív, hanem az abszolút előnyök számítanának, akkor a közjót az szolgálná, ha Portugália látná el mindkét országot textillel is és a borral is!) Nyilvánvaló, hogy Ricardo pontosan tudta, hogy Portugáliának nincs előnye Angliával szemben a textiltermelésben. De a poén kedvéért ezt a szélsőséges példát választotta és jól választott. Sokan ricardói bűnnek nevezik a modellszerű gondolkodást, amely túlhajtva valóban kártékony.

A közgazdaságtanban igazából a 20. század második felében váltak dominánssá a modellek. Korábban a közgazdasági írások nagyrészt „szövegesek" voltak, a modellek megjelenésével párhuzamosan viszont egyre inkább megjelentek a matematikai képletek és egyenletek, tételek és bizonyítások. Ha megnézzük a közgazdasági Nobel-díjasok 1969-ben kezdődő listáját, akkor láthatjuk, hogy a díjazottak jelentős részben matematikai modelljeikért nyerték el e kitüntetést. A jegyzetben közülük Nash, Hicks, Modigliani, Arrow és Samuelson modelljeivel találkozunk.

A jó közgazdasági modellek is elvonatkoztatnak a vizsgált jelenségek lényegtelen részleteitől. A lényeges összetevőkre és kapcsolatokra egyszerűsítve a problémát, tömör magyarázatot adnak egy jelenségre. Például, ha a klasszikus pénzmodellben adottnak vesszük a pénz forgási sebességét és a termelés mennyiségét, akkor a pénz mennyiségével arányos az árszínvonal. Ez viszonylag jól megmagyarázza a 16. századi árforradalmat: az Újvilágból hirtelen beáramló nemesfémek mennyisége miatt általános árszínvonal körülbelül a négyszeresére nőtt.

A rossz közgazdasági modell viszont a lényeget hagyja figyelmen kívül, és leragad a másodlagos jelenségeknél. Például a modern közgazdaságtan egyik ikonja, Robert Lucas 1987-ben „kiszámította", hogy a II. világháború utáni amerikai recessziók társadalmi költsége minimális, azaz ha lenne egy tökéletes jövedelembiztosítás (vö. 16.2. alfejezet), akkor szinte ingyen ki lehetne simítani a gazdasági hullámokat (vö. 4.3. alfejezet). Az „egyszerűség kedvéért" (hogy számolása elférjen egy boríték hátán) eltekintett attól, hogy a társadalom nem homogén, és egy csődbe menő iparág munkása egészen másképpen éli át az időleges visszaesést, mint a Chicagói Egyetem Nobel-díjas professzora. Ha ezt a bonyodalmat figyelembe vesszük, akkor a társadalmi költség biztosan számottevő (vö. 16.2. táblázat).

Megismételjük: minden modellkészítőnek egyensúlyoznia kell az egyszerűség és a realizmus között. Például az elméleti nyugdíjmodellek zömében az egyszerűség kedvéért eltekintünk a férfiak és a nők közti különbségtől. S valóban, ha általában vizsgáljuk a népességöregedés hatását a nyugdíjrendszerre, akkor felesleges felbontani a népességet férfi és női nemre. De ha az özvegyi nyugdíjrendszert vizsgáljuk, akkor nem tekinthetünk el attól, hogy a nők általában kevesebbet keresnek, korábban mennek nyugdíjba és tovább élnek, mint a férfiak.

Honnan lehet tudni, hogy egy modell jó-e vagy rossz? Szükséges-e, hogy valósághűek legyenek a feltevései, vagy elegendő, ha az előrejelzései jók? A 20. század sztárközgazdásza, Milton Friedman nevezetes 1953-as cikkében amellett érvelt, hogy felesleges a feltevések realizmusára törekedni; elegendő, ha a modell jól jelzi előre a magyarázandó jelenségeket. (Mivel Friedman kivételes közgazdász volt, konkrét modelljeiben ritkán tévedett.) Koopmans (1957) és Kornai (1971) nem fogadták el Friedman álláspontját, és hangsúlyozták, hogy a közgazdaságtan nemcsak előrejelzésre szolgál, hanem a valóság megértését is elősegíti. Márpedig ha a valóságtól idegenek a feltevések, akkor a modell akadályozhatja a megértést, és az esetleges sikeres előrejelzés lehet véletlen is.

Elvben végtelen sok közgazdaságtani modell készíthető, és a modellkészítő azzal büszkélkedhet, hogy milyen kifinomult leírást képes kitalálni. Nagyon gyakori a közgazdaságtanban, hogy valaki általánosít egy korábbi modellt, és megmutatja, hogy a korábbi modell mondanivalója általánosabb feltételek mellett is igaz vagy hamis. Bizonyos értelemben az elméleti közgazdaságtan egyre inkább hasonlít a matematikára, ahol a logikus következtetés az egyetlen kívánalom. Bár nem vagyok hivatásos matematikus, azt azért megkockáztatom, hogy nem minden matematikai modell kelt egyforma érdeklődést. Természetesen a matematikusok között is vannak éles viták, hogy ez vagy az az elmélet érdekesebb, de azért előbb-utóbb kialakul egy közmegegyezés, hogy ez érdekes, az meg nem. (Például a valóban korszakalkotó Bolyai–Lobacsevszkij-féle nemeuklideszi geometria 1830 és 1860 között észrevétlenmaradt, hogy aztán elinduljon világhódító útjára.)

A közgazdaságtanban azonban sokkal nehezebb kiválasztani a megfelelő modellt. Eleve nagyon nehéz megbízható adatokat találni. (Például hányan tudják, hogyan függ a magyar államadósság nagysága a forint árfolyamától, az 1998 és 2010 között létező kötelező magánnyugdíj-pénztár méretétől stb.?) Azt sem könnyű eldönteni, hogy egy nagyon bonyolult kérdés modellezésekor mit lehet elhanyagolni és mit nem (lásd az említett példákat). Végül, inkább művészet, mint tudomány annak eldöntése, hogy a gazdaságpolitikai következtetések mennyire érzékenyek a modellválasztásra.

Nem szabad hallgatni a közgazdasági eredmények publikációs ösztönzési rendszeréről sem. Elvben a tudományos verseny biztosítja, hogy a jobb elmélet legyőzi a rosszabbat. A matematikai megközelítés elvben megkönnyíti az összehasonlítást: a jobb modell kevesebb feltevésből ugyanannyit ér el. Pontosabban fogalmazva: ugyanannyi feltevésből többet, vagy kevesebb feltevésből ugyanannyit ér el (Occam borotvája, 14. század). A kopernikuszi modell ebből a szempontból is jobb, mint a ptolemaioszi: egyszerűbb és pontosabb. De a közgazdaságtanban túlzottan nagy szerep jut az ízlésnek és az ideológiának, amikor a folyóiratok szerkesztői publikációkról döntenek.

Ennek kapcsán szólnom kell a modern közgazdaságtan egy különlegességéről: 1950 és 2000 között közgazdászok egyre nagyobb része tette fel, hogy a szereplők – kisebb-nagyobb statisztikai hibáktól eltekintve – jól értik a helyzetüket és optimálisan döntenek.

Nemcsak jól, hanem optimálisan! (Azóta némileg változott a helyzet.) Hőseink bonyolult matematikai feladatot oldanak meg, hogy megtalálják a legjobb gazdasági döntést. Például ha egy lakótelepi lakás előtt luxusautó, vagy egy luxusvilla előtt tragacs áll, akkor ezen nem kell meglepődni, a tulajdonosnak ez a preferenciája.

De túlbuzgó közgazdászok még az alkoholizmust is próbálják optimalizálással megmagyarázni. (Az alkoholista aránytalanul jobban szereti a bort, mint a süteményt.) És ha egy közgazdász nem hajlandó követni az „egyedül helyes tudományos megközelítést", és nem optimalizál, akkor könnyen a szakma peremére szorulhat; még ha jobb is a modellje, mint azoké, akiknek a szereplői „optimalizálnak". Ezt a következő hasonlattal lehet érzékeltetni: az elegáns étterembe be lehet menni gyűrött zakóban és pecsétes nyakkendőben (mert a gyűröttség és a pecsételtség ellenőrizhetetlen), de a tiszta ing önmagában nem elegendő (a zakó és a nyakkendő hiánya ellenőrizhető). Pedig a tisztaság fontosabb az „eleganciánál"! És a reális modell fontosabb az optimalizálónál!

Irodalmi vonatkozásai miatt is érdemes szólni a modern közgazdasági modellek további sajátosságáról, az önbeteljesítő jóslatokról, vagy hivatalosabban, a racionális várakozásokról. A görög mitológiából ismert Oidipusz tragédiája, akinek a születésekor a vak jós megjövendölte, hogy felnővén megöli apját, a királyt. Hogy elkerüljék az apagyilkosságot, Oidipuszt az apja elküldte a háztól. Aztán Oidipusz felcseperedett, összetalálkozott az apjával, ismeretlenül összevesztek, és a végén a fiú megölte az apját. Íme, az önbeteljesítő jóslat. Ha nem hittek volna benne, akkor az apa és a fia békében élhettek volna együtt. Ezzel ellentétes jellegű Jézus nevezetes jóslata. Elfogatásakor azt mondta Péternek, hogy mielőtt a kakas megszólal, Péter háromszor megtagadja őt. És valóban, a kakas megszólalásáig Péter éppen háromszor árulta el Jézust. Itt csak Jézus előrelátását mutatja a történet, de nem a jóslat okozta az árulást.

A modern közgazdaságtan (a már említett Lucas-szal az élen) beleszeretett az önbeteljesedő jóslatokba. Felkent képviselői gyakran felteszik, hogy amennyiben a mai cselekedet függ a jövőre irányuló várakozástól, és míg a jövő függ a mai cselekedettől, akkor a szereplő olyan előrejelzést választ, amely mellett a gerjesztett cselekedet éppen az előrejelzett állapothoz vezet. Például, ha 2008 nyarán elhiszem, hogy egy hordó olaj ára 130-ról hamarosan 140 dollárra emelkedik, akkor háromhavi készletemet kiegészítem még egy havival, és ha sokan cselekednek hasonlóan, akkor emiatt valóban 140 dollár lesz az új olajár. De aztán hirtelen vége szakad a varázslatnak, és az olajár összeomlott. Ugyanez történt az amerikai, a brit és a spanyol lakásárakkal. Persze, a feltevés hívei is tisztában vannak ezzel a problémával, és védekezésként a véletlen hatások mögé bújnak. De talán elfogadja az Olvasó, hogy számos várakozás mégsem racionális.

Némi leegyszerűsítéssel azt mondhatjuk, hogy a 2007-ben Amerikában kezdődött pénzügyi válság, és a 2008-ban a világ nagy részére átterjedő gazdasági válság részben a modellekben hívő szakemberek és politikusok felelőssége. Ha a politikusok bizalmatlanabbak lettek volna a közgazdászokkal szemben, és a közgazdászok kétkedőbbek saját modelljeikkel szemben, akkor talán óvatosabb gazdaságpolitikát folytattak volna, és nem kellett volna évekig a válság következményeitől szenvedni.

De ma is nagy vita dúl világszerte, hogy mennyire kell szigorú gazdaságpolitikát folytatni, hogy ne szabaduljon el az infláció, vagy ellenkezőleg, mennyire kell laza gazdaságpolitikát folytatni, hogy elkerüljék a deflációt. (A defláció több évtizedig csak a tankönyvek rémálma volt, de az utóbbi két évtizedben Japánban sok kárt okozott: nem volt érdemes beruházni, mert mire a beruházás drága pénzből megvalósult, az eladott termék túl olcsóvá vált.) Különböző modellek különböző eredményeket adnak, és sokszor még utólag sem könnyű kiigazodni azon, hogy melyik közgazdásznak volt igaza. Például az 1929-ben kezdődött Nagy Válság értelmezéséről még ma is folyik a tudományos vita.

Zárszó helyett: a jó modell segít a tájékozódásban, a rossz akadályoz. De sokszor csak utólag tudjuk meg, hogy mi volt a jó, és mi volt a rossz modell. A közgazdaságtanban külön nehézséget jelent a modellezendő kérdések bonyolultsága és a tanácsadók, illetve a politikusok magánérdekei. Türelmesnek kell lennünk a közgazdasági modellezőkkel, de nem szabad bennük vakon bíznunk.

1.2. Tartalmi előzetes

A jegyzet a bevezetésen (és a zárszón) kívül 16 fejezetből áll, amelyek egymástól jelentős részben függetlenül olvashatók. Nem próbáltam meg a hagyományos közgazdaságtani bevezetéseket követni, inkább a növekvő matematikai nehézség szerint haladtam. Igyekeztem minden modellt számokkal kitölthetően megadni, viszont egyetlenegy ábrát sem szerepeltettem. Kényelmi szempontok miatt aránytalanul nagy a saját források aránya.

Ebben az alfejezetben rövid tartalmi előzetest adok a jegyzetről.

A *Matematikai segédeszközök* c. fejezetet a legegyszerűbb dinamikus rendszerek ismertetésével kezdjük: diszkrét idejű lineáris differenciaegyenletekről lesz szó, amelyek speciális eseteivel már a középiskolában is találkoztunk: számtani és mértani sorozat, Fibonacci- számok. Ezeknek a rendszereknek egy viszonylag egyszerű megoldási módszerét mutatjuk be. A folytatásban a másodfokú görbe maximum- és minimumhelyét határozzuk meg.

Játékelméleti bevezetőnkben a többszereplős stratégiai döntések elméletét vázoljuk: legalább két játékos verseng vagy működik együtt, néha többlépéses döntéseket alkalmazva. A racionális játékokban (fogolydilemma, nemek harca stb.) a játékosok világos és ésszerű célokat követnek, de rendellenességek is felléphetnek.

A *Három lineáris dinamikus közgazdasági modell* c. fejezet a piaci árigazodással kezdődik, ahol különféle feltevések mellett az ár tart az egyensúlyhoz, illetve ingadozik az egyensúly körül. Az államadósság dinamikája a kamatláb, a növekedési ütem és a költségvetési hiány függvényében alakul. A beruházási ciklus Hicks brit közgazdászról elnevezett modellje a fogyasztás és a beruházás kölcsönhatásából vezeti le a piacgazdaságokban rendszeresen megismétlődő folyamatokat, amelyeket a fizikából a tompítás nélküli rezgésekként ismerünk.

A *fogyasztói döntéseket* a modern közgazdaságtan a következőképp származtatja: a piaci árak és a jövedelem függvényében a fogyasztó különféle árukombinációkat választhat. Az elmélet szerint végül is azt választja, amely maximalizálja az ún. *hasznosságfüggvényét*. Érdekes speciális eset, amikor a két áru a fiatal- és az időskori fogyasztás, és a megtakarítás simítja ki a fogyasztási pályát. Más esetben tücsök módjára csak elhalasztja a megtakarítást.

A gazdaságban nemcsak cserélnek, hanem termelnek is. Modellvilágunkba belép *a kibocsátás, a költség és a profit*. A termelésben a tőke és a munka egymással részben helyettesíthető, az optimális kombináció az áraktól (kamatláb és munkabér) függ. Egyes vállalatfajtákban a nagyobb kibocsátás előnyös, másutt előnytelen. Külön hangsúlyt kap, hogy a monopolistának kevesebbet érdemes termelnie mint két független termelőnek.

A korábban tárgyalt lineáris dinamikai rendszerek csak közelítései a valóságban érvényesülő *nemlineáris dinamikai rendszereknek*. Ez utóbbiakban a stabil egyensúly mellett gyakrabban alakulnak ki stabil ciklusok, sőt, előrejelezhetetlen kaotikus pályák.

Az *Adómorál és adózás* c. fejezet azt tárgyalja, hogy az állam a személyi jövedelemadóból fedezett támogatásokkal az állampolgárok közti jövedelmi különbségeket hogyan tompítsa. Olyan állampolgárokat tételezünk fel, akik adómoráljuk függvényében az állam által kirótt személyi jövedelemadónak (szjá-nak) csak egy bizonyos részét fizetik be. Emiatt az államnak kisebb adókulcsot érdemes kirónia, mint amilyent egy teljesen erkölcsös társadalomban tehetne.

A *Három népességdinamikai modell* c. fejezet első alfejezete a születési és a halálozási száma különbségével magyarázza a népességszám alakulását. A második alfejezet a népesség koreloszlását is vizsgálja, míg a harmadik alfejezet megkülönbözteti a fiatalabb és az idősebb anyákat. A matematikai segédeszközöknél szereplő másodrendű differenciaegyenlet segítségével elemezhető a korosztályok létszámának stabilitása, azaz, hogy állandó termékenység és halandóság mellett hosszú távon a létszámarányok stabilizálódnak.

Az *Elemi nyugdíjmodellek* c. fejezet először nagyon egyszerű makromodell segítségével vizsgálja a korosztályi arányok (idős vagy dolgozókorú), a helyettesítés (nyugdíj vagy kereset) és a járulékkulcs kapcsolatát. A mikroökonómiáról szóló alfejezet megmutatja, hogyan hat a nyugdíjba vonulási kor az éves nyugdíjra, végül kitér a keresetek és a várható élettartamok közti kapcsolat bonyolító hatására.

Az *Önkéntes nyugdíjrendszer* c. fejezetben azt tanulmányozzuk, amikor a kötelezően befizetendő nyugdíjjárulékon túl a dolgozó önként is megtakaríthat időskorára. Ezt az állam támogatással egészíti ki, amelyet különadóval fedez. Mivel a „tücsök” csak részben él e lehetőséggel, a „hangya” zsebre vágja a tücsök által befizetett különadó egy részét is.

A *Nyugdíjindexálás* c. fejezetben a korábbi kortalan dolgozót és nyugdíjast kicseréljük 40 évjáratnyi dolgozóra, illetve 20 évjárat nyugdíjasra. Mivel az infláció kiszűrése után maradó reálbérek is időben erősen ingadoznak, nem egyszerű az újonnan nyugdíjba vonulók és a már nyugdíjban lévők nyugdíjának kiszámítása. Bemutatjuk, hogy ilyenkor milyen indokolatlan egyenlőtlenségeket okoz az egymás utáni korosztályok között a Magyarországon jelenleg érvényes értéktartó nyugdíj.

A *Jelzáloghitel elemi modelljei* c. fejezet szintén nagyon fontos kérdésekkel foglalkozik: hogyan működik a jelzáloghitel inflációs környezetben, ahol nagyok a kamatlábak? A nominálisan állandó törlesztőrészletek kezdetben túl nagy terhet rónak a hitelfelvevőre, érdemesebb a törlesztőrészlet reálértékét állandónak venni. Külön bonyodalmat okoz a devizaalapú-hitel, amely a kiszámíthatatlanul változó devizaárfolyam segítségével forintosítja a devizahitelt.

Az *Általános egyensúlyelmélet legegyszerűbb modellje* a korábbi egyszereplős piaci modellt megkettőzi: két szereplő áll egymással szemben. Továbbra is két áru szerepel a piacon, és a két szereplő kölcsönös igazodásából alakul ki a piaci egyensúlyi ár. Bizonyos feltevések mellett belátható, hogy a létező világok közül ez a lehető legjobb, nélkülük viszont nem.

Az *Együtt élő nemzedékekről* szóló fejezet végletesen leegyszerűsíti azt a helyzetet, amikor a *korosztályok* cserélődnek: negyed évszázadonként minden távozó *nemzedék* helyére egy újabb nemzedék lép. Ez a csere meghatározza a kamategyüttható állandósult állapotát, és felborítja az általános egyensúly optimalitását. Speciális hasznosságfüggvény esetén meghatározható a kamatláb dinamikája; növekvő népesség és racionális várakozás esetén lokálisan aszimptotikusan stabil. A stacioner népesség határesetében viszont 2-ciklus adódik.

A *Valószínűség-számítás és biztosítás* c. fejezet első alfejezete tulajdonképpen a 2.5. alfejezet lehetett volna tiszta matematikai természete miatt, de nehézsége miatt a jegyzet végére tettem). Az itt nyert ismeretek alapján tárgyalhatjuk a biztosítás három alapmodelljét: *a)* klasszikus modellt, *b)* morális kockázatot (a biztosítás léte növeli a kár valószínűségét) és *c)* a kontraszelekciót, amikor a kockázatos típus léte miatt a kisebbik kockázati típus csak önrészesedés vállalásával tudja magát megkülönböztetni.

A jegyzet utolsó előtti fejezete *Regresszió és korreláció* címet viseli. A matematikai statisztika legegyszerűbb eszközeit mutatjuk be az Olvasónak: hogyan lehet például az emberi test tömegét a magasság lineáris függvényével előrejelezni. Közben megismerkedünk két valószínűségi változó közti korrelációs együtthatóval, s ennek segítségével elemezzük a Berkson-pradoxont, ahol egy rossz mechanizmus negatív korrelációt hoz létre független változók között (például Nők40 és merev nyugdíjkorhatár).

A *Zárszó helyett* c. fejezetben röviden leírom azt a személyes hátteret, amely néhány itt előadott modellhez fűz. Például a Csebisev-féle öszegegyenlőtlenséget még középiskolás koromban alkalmaztam egy közgazdasági tétel (újra)bizonyítására, míg a nyugdíjdinamika fejezet igazát csak a jövő dönti el.

A jegyzet végén szereplő *fogalomtár* a legfontosabb fogalmakat ábécé sorrendben, nem teljesen szabatosan körvonalazza.

A következő három legfontosabb dimenzió szerint sorolhatjuk be modelljeink: *1)* optimalizáló vagy nem, *2)* statikus vagy dinamikus, *3)* homogén vagy heterogén szereplők. A jegyzet modelljeit az 1.1. táblázatban e három dimenzió mentén soroljuk be.

1.1. táblázat. *Fontosabb modellek és főbb tulajdonságaik*

Modell	Optimalizál	Dinamikus	Heterogén
Játékelmélet	+	−	+
Sertésciklus	−	+	−
Államadósság	−	+	−
Beruházási ciklusok	−	+	−
Fogyasztás	±	±	−
Termelés	+	−	±
Adómorál	±	−	+
Népességdinamika	−	+	+
Elemi nyugdíjmodellek	−	±	±
Önkéntes nyugdíj	+	−	+
Nyugdíjdinamika	−	+	+
Jelzáloghitel	−	+	−
Általános egyensúly	+	−	+
Együtt élő nemzedékek	+	+	+
Biztosítás	+	−	+
Regressziószámítás	+	x	+
Berkson paradoxona	+	−	+

2. Matematikai segédeszközök

A jegyzetben felhasznált legfontosabb matematikai segédeszközök tárgyalását előre hoztuk. Az eszközöket három alfejezetben tárgyaljuk: 1) A középiskolából ismert számtani és mértani sorozat közös általánosítása az állandó együtthatós elsőrendű lineáris differenciaegyenlet, ahol az új állapot az előző állapot inhomogén lineáris függvénye. Ennek is van zárt alakú megoldása. 2) Az elsőrendű differenciaegyenletet követi másodrendű differencia-egyenlet, ahol nem egy, hanem két korábbi állapot szerepel. 3) Végül az elemi optimalizálásban a lefelé/felfelé nyitott parabola legnagyobb/legkisebb értékét határozzuk meg.

2.1. Elsőrendű lineáris differenciaegyenletek

Több fejezetben szükségünk lesz néhány dinamikai fogalomra és tételre, amelyet még többször alkalmazunk. Bár a hétköznapi időfogalom folytonos, a közgazdaságtanban inkább a *diszkrét* (szakaszos) megközelítés gyümölcsöző: havonta fizetik a bért, évente takarítják be a termést, fogadják el a költségvetést. Technikailag is egyszerűbb a diszkrét idő alkalmazása.

Dinamikus rendszerről beszélünk, ha a rendszer korábbi időszakbeli állapotai befolyásolják a következő időszak *állapotát.* Például mechanikai dinamikus rendszer a kerékpár, amelyet a kerékpáros a pedál taposásával, a kormány forgatásával és fékezéssel irányít, egyik helyről (állapotból) a másikba (állapotba) juttat. Gazdasági dinamikus rendszer állapota az egyén bankszámlája, amelynek mindenkori értéke az egy hónappal korábbi számlaegyenleg, és a havi befizetések és a kifizetések eredője.

A dinamikus rendszer *egyensúlyi helyzetben* van, ha onnan nem mozdul ki. A függőhinta a mélypontján (nulla sebességnél) egyensúlyban van, de magasabb ponton vagy nem nulla sebességnél tovább halad. 2019. januárjában a 320-as forint–euró-árfolyam pillanatnyilag egyensúlyinak nevezhető, mert ezen az áron az eladók kínálata és a vevők kereslete egyenlő.

Stabil az egyensúlyi helyzet, ha kisebb kilengés után a rendszer állapota visszatér az egyensúly közelébe. Például a súrlódás és a közegellenállás miatt a hinta mélypontja stabil. A 2004–2008. évek 240 forint körüli euróárfolyam instabilnak bizonyult, mert 2008 szeptembere óta kimozdul onnan, és azóta sem tért vissza a közelébe.

Lineárisnak nevezünk egy f skalár-skalár függvényt, amelyre igaz a következő azonosság:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

minden x, y-ra és α, β-ra. Mértanilag: bármely két függvénypont között húzott egyenes maga a függvény.

Ilyen függvényekkel nagyon egyszerű számolni, de vannak nemlineáris függvények is. Például a szabad esés út–idő képlete négyzetes, ezért nem igaz, hogy 2 másodperc alatt kétszer annyi utat tesz meg a szabadon eső test, mint 1 másodperc alatt. Ehhez hasonlóan, nem lineáris a kiadás— mennyiség függvény árukapcsolásnál, mert egyet fizet, kettőt kap.

Rátérünk a formális kifejtésre. Legyen $t = 0, 1, 2, \ldots$, a megfelelő időszak (nap, hét, hónap, év) indexe. A legegyszerűbb diszkrét (nem folytonos) idejű dinamikus rendszer alakja

$$x_{t+1} = Ax_t + B, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.1}$$

ahol x_0 kezdeti állapot és A, B együttható adott. Ez speciális esetként egyaránt tartalmazza a számtani sorozatot ($A = 1$) és a mértani sorozatot ($B = 0$).

2.1. példa. A számtani sorozat rekurzióját új jelölésben írjuk föl: $x_{t+1} = x_t + B$, ennek explicit alakja: $x_t = x_0 + tB$.

A mértani sorozat rekurzióját is új jelölésben írjuk föl: $x_{t+1} = Ax_t$, ennek explicit alakja: $x_t = A^t x_0$.

A továbbiakban $A \neq 1$. A rendszer *egyensúlyi helyzete vagy állandósult állapota vagy fix pontja* x^o, amelyből indítva a rendszert, az állapot helyben marad:

$$x^o = Ax^o + B. \tag{2.1°}$$

Informálisan azt mondjuk, hogy az egyensúlyi állapot *stabil*, ha a közeléből induló pályák közel maradnak hozzá; *aszimptotikusan stabil*, ha a stabilitáson túl a állapot hosszú távon az egyensúlyhoz tart.

2.2. példa. Próbálgatással keressük az általános (2.1) rendszer explicit megoldását:

$$x_2 = Ax_1 + B = A^2 x_0 + (A + 1)B, \qquad x_3 = Ax_2 + B = A^3 x_0 + (A^2 + A + 1)B.$$

Ez alapján megfogalmazhatjuk az indukciós feltevést (a mértani sor összegképletével)

$$x_t = A^t x_0 + (A^{t-1} + \cdots + A^2 + A + 1)B = A^t x_0 + \frac{A^t - 1}{A - 1}B. \tag{2.2}$$

Behelyettesítve (2.1)-be és rendezve igazolódik az indukciós feltevés:

$$x_{t+1} = A\{A^t x_0 + [A^{t-1} + \cdots + A^2 + A + 1]B\} + B = A^{t+1} x_0 + (A^t + A^{t-1} + \cdots + A^2 + A + 1)B.$$

Érdemes egy általánosabban alkalmazható megoldást is bemutatni.

2.1. tétel. *A (2.1) lineáris rendszer egyensúlyi helyzete (állandósult állapota)*

$$x^o = \frac{B}{1-A}, \tag{2.3}$$

és (2.1) explicit megoldása

$$x_t = x^o + A^t(x_0 - x^o). \tag{2.4}$$

Az egyensúly akkor és csak akkor stabil, illetve aszimptotikusan stabil, ha $-1 \le A < 1$, *illetve* $-1 < A < 1$.

Megjegyzés. Lineáris rendszer esetén csak hajszálnyi különbség van a stabil és az aszimptotikusan stabil rendszer között: a korábban kizárt $A = 1$-hez tartozó rendszeren túl a ciklust adó $A = -1$ paraméterű rendszer stabil, de nem aszimptotikusan stabil.

Bizonyítás. (2.3) adódik (2.1°)-ből.

Kivonva a (2.1) rendszeregyenletből a (2.1°) egyensúlyi egyenletet, kiesik az állandó tag, és egy mértani sorozathoz jutunk:

$$x_{t+1} - x^o = A(x_t - x^o).$$

Matematikailag ez egy alapvető fogás: új változó bevezetésével az inhomogén egyenletet visszavezettük az egyszerűbb homogén egyenletre: $B = 0$. Innen már adódik a (2.4) explicit képlet és a kétféle stabilitási feltétel. ∎

2.1. feladat. (2.2) és (2.4) összehasonlításából adódik a a mértani sor összegképlete is:

$$S_t = 1 + A + \cdots + A^{t-1} = \frac{A^t - 1}{A - 1}, \qquad A \neq 1.$$

2.2. Másodrendű lineáris differenciaegyenletek

A beruházási ciklussal (4.), a népességdinamikával (9.) stb. foglalkozó fejezetben szükségünk lesz az elsőrendű (állandó együtthatós) lineáris differenciaegyenlet továbbfejlesztésére, amelyet másodrendűnek nevezünk ($A_2 \neq 0$):

$$x_{t+1} = A_1 x_t + A_2 x_{t-1} + B, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.5}$$

ahol x_0 és x_{-1} kezdeti állapotpár, valamint A_1, A_2, B adott.

Az egyensúlyi állapot ismét könnyen meghatározható:

$$x^o = A_1 x^o + A_2 x^o + B, \tag{2.5°}$$

azaz

$$x^o = \frac{B}{1 - A_1 - A_2}, \tag{2.6}$$

feltéve, hogy $A_1 + A_2 \neq 1$. (A kizárt esetben nincs egyensúly.) Bevezetve az $\hat{x}_t = x_t - x^o$ eltérésváltozókat, ezek már egy homogén lineáris egyenletet elégítenek ki:

$$\hat{x}_{t+1} = A_1 \hat{x}_t + A_2 \hat{x}_{t-1}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.7}$$

Az elsőrendű egyenlethez hasonlóan most is mértani sorozat alakjában keressük a megoldást: $\hat{x}_t = \xi\lambda^t$, ahol $\xi \neq 0$ és λ valós számok. Behelyettesítjük a feltételezett megoldást a (2.7) rekurzióba:

$$\lambda^t = A_1\lambda^{t-1} + A_2\lambda^{t-2}.$$

Egyszerűsítés után a

$$\lambda^2 = A_1\lambda + A_2, \qquad \text{azaz} \qquad \lambda^2 - A_1\lambda - A_2 = 0 \tag{2.8}$$

másodfokú, ún. *karakterisztikus egyenlethez* jutunk. A továbbiakban három részre tagoljuk a tárgyalást, a $D^2 = A_1^2 + 4A_2$ előjele szerint.

a) Pozitív diszkrimináns

Feltesszük, hogy $A_1^2 > -4A_2$ diszkriminánsfeltétel teljesül, ekkor a (2.8) egyenletnek két különböző valós gyöke van, és ezek hatványainak lineáris kombinációjaként adódik a megoldás. Pontosabban a következő igaz.

2.2. tétel. *a) Pozitív diszkrimináns mellett a másodrendű lineáris differenciaegyenlet általános (kezdeti értéktől független) megoldása*

$$\hat{x}_t = \xi_1\lambda_1^t + \xi_2\lambda_2^t \tag{2.9}$$

alakú, ahol $\lambda_{1,2}$ a (2.8) másodfokú egyenlet két különböző valós megoldása, valamint ξ_1 és ξ_2 tetszőleges valós szám.

b) Adott kezdeti feltételek mellett a (ξ_1, ξ_2) együtthatópár egyértelműen meghatározható a következő lineáris egyenletrendszerből:

$$\hat{x}_0 = \xi_1 + \xi_2 \qquad \text{és} \qquad \hat{x}_{-1} = \xi_1\lambda_1^{-1} + \xi_2\lambda_2^{-1}. \tag{2.10}$$

Bizonyítás. *a)* Ha a λ_1^t és a λ_2^t megoldás kielégíti a (2.7) rekurziót, ekkor tetszőleges lineáris kombinációjuk is kielégíti. *b)* Konstrukciója miatt a választott együtthatójú kombináció kielégíti a két kezdeti feltételt. A probléma természetéből adódik, hogy más megoldás nincs. ∎

2.3. példa. Ilyen feladatot először Fibonacci pisai matematikus vizsgált 1202-ben: $F_t = F_{t-1} + F_{t-2}$, $F_1 = 1 = F_0$, de ő nem még tudta a megoldást zárt alakban előállítani. Szerencsére 1740 körül Leonhard Euler talált egy viszonylag egyszerű módszert az ún. *magasabb rendű homogén lineáris rekurzió* megoldására, ezt ismertettük másodrendű esetben. (Egyébként Euler volt a valaha élt egyik legnagyobb és legtermékenyebb matematikus.) Ez a másodrendű lineáris rekurzió a természetben és művészetben is fontos szerepet játszik.
Karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 = \lambda + 1,$$

gyökei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Általános megoldás:

$$F_t = \eta_1 \lambda_1^t + \eta_2 \lambda_2^t,$$

ahol a kezdeti feltételek:

$$F_0 = \eta_1 + \eta_2 \qquad \text{és} \qquad F_1 = \eta_1 \lambda_1 + \eta_2 \lambda_2.$$

Innen $\eta_{1,2}$ meghatározható: $\eta_2 = 1 - \eta_1$, $1 = \eta_1 \lambda_1 + (1 - \eta_1)\lambda_2$: $\eta_1 = (1 - \lambda_2)/(\lambda_1 - \lambda_2)$.

Mi van, ha nem teljesül a diszkriminánsfeltétel?

b) Negatív diszkrimináns

Negatív diszkrimináns ($A_1^2 < -4A_2$) esetén trigonometrikus alakban adódik a megoldás. De mindenekelőtt célszerű lesz bevezetni a következő definíciót.

Legyen $P > 1$ egy természetes szám. Egy $(x_1, x_2, \ldots)$ sorozatot P*-ciklusnak* nevezünk, ha P időszakonként ismétlődik, de rövidebb szakaszra nem ismétlődik:

$$x_{kP+r} = x_r, \qquad r = 0, 1, \ldots, P-1, \qquad k = 1, 2 \ldots.$$

Azaz P a legkisebb ilyen szám – a *periódus.*

Bemelegítésül bemutatjuk a két legegyszerűbb ilyen esetet.

2.4. példa. 4-fázisú inga: $x_{t+1} = -x_{t-1}$, $x_0 = 1$, $x_{-1} = 0$. Helyettesítéssel belátható, hogy az állapotsorozat $1, 0, -1, 0, \ldots$, tehát 4-ciklus.

2.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $x_{t+1} = x_t - x_{t-1}$ másodrendű differenciaegyenlet bármely megoldása 6- ciklus.

Kimondjuk az általános tételt, amely a fizikából ismert rezgést írja le.

2.3. tétel. *a) Ha* $A_1^2 < -4A_2$ *(tehát* $A_2 < 0$*), akkor (2.5) pályája*

$$\hat{x}_t = r a^t \cos(\varphi t + \delta), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.11}$$

alakú, és

$$a = \sqrt{-A_2}, \qquad \text{és} \qquad \cos\varphi = \frac{-A_1}{2\sqrt{-A_2}} \in (-1, 1). \tag{2.12}$$

b) A további paraméterek a kezdeti feltételekből adódnak:

$$\hat{x}_0 = r \cos\delta \qquad \text{és} \qquad \hat{x}_{-1} = r a^{-1} \cos(\delta - \varphi). \tag{2.13}$$

c) Csillapítás nélküli rezgés feltétele és a hozzá tartozó periódusidő:

$$a = 1 = -A_2, \qquad \cos\varphi = \frac{-A_1}{2} \qquad \text{és} \qquad T = \frac{2\pi}{\varphi}. \tag{2.14}$$

Megjegyzések. *a)* A fizikusok a-t csillapítási együtthatónak, φ-t szögsebességnek, r-t kezdő amplitúdónak és δ-t fázisszögnek nevezik.

b) Bár az idő diszkrét, a képletek könnyen értelmezhetők tetszőleges pozitív valós t-re, kézenfekvővé téve a grafikus ábrázolást.

c) A periódus hossza általában nem természetes szám, ezért még állandó amplitúdójú ($a = 1$) rezgés esetén sem beszélhetünk szigorú ciklusról. Ha $P > 1$ racionális szám, például egyszerűsített alakban p/q, akkor q körforgás után $x_p = x_0$, és onnan ismétlődik a pálya. Emiatt van szükség a szökőévek bonyolult rendszerére. (Például Julius Caesar i.e. 45-ben minden negyedik évet szökőévnek nyilvánított, és ezekben az években a 365 naphoz hozzátett egy 366.-at.) Ha azonban P irracionális szám, akkor szigorúan véve sohasem tér vissza a rendszer az eredeti állapotába. (Valami ilyesmi okozta, hogy 1582-ben Gergely pápának módosítani kellett ezt a rendszert is.)

d) Külön meggondolást igényel, hogy a nemlineáris (2.13) egyenletnek mindig van (r, δ) megoldása.

e) Aki ismeri a komplex számokat, az felismerheti, hogy a (2.11) megoldás a 2.2. tétel kiterjesztése komplex számokra. Sőt, így lehet rájönni a képletre.

Bizonyítás. Bevezetjük a $\psi_t = \varphi t + \delta$jelölést és behelyettesítjük a feltételezett (2.11) megoldást a (2.7) másodrendű homogén lineáris differenciaegyenletbe:

$$ra^{t+1}\cos(\psi_t + \varphi) = A_1 ra^t \cos\psi_t + A_2 ra^{t-1}\cos(\psi_t - \varphi).$$

Elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát ra^{t-1}-nel, és alkalmazzuk a koszinuszfüggvény addíciós képletét:

$$a^2[\cos\psi_t \cos\varphi - \sin\psi_t \sin\varphi] = A_1 a \cos\psi_t + A_2[\cos\psi_t \cos\varphi + \sin\psi_t \sin\varphi].$$

Két részre bontjuk az egyenletet, és mindkét részre megköveteljük az egyenlőséget. (Belátható, hogy ez nem csak elégséges, de szükséges is.) A $\sin\psi_t$ együtthatója két oldalon: $-a^2\sin\varphi = A_2\sin\varphi$, amely teljesül (2.12a) miatt. A $\cos\psi_t$ együtthatója a két oldalon: $a^2\cos\varphi = A_1 a + A_2\cos\varphi$, amely teljesül (2.12b) miatt. ∎

Végére marad az elfajult *c)* eset.

c) Nulla diszkrimináns

Ezt az esetet pédaként taglaljuk.

2.5. példa. $A_1^2 = -4A_2 \neq 0$ esetén $\lambda = \lambda_{1,2} = A_1/2$ és (2.9) helyett keresünk a mértani sorozattól független másik megoldást (amely nem skalárszorosa λ^t-nek), $t\lambda^t$-t:

$$\hat{x}_t = \xi_1\lambda^t + \xi_2 t\lambda^t \tag{2.9*}$$

kombinációval kísérletezünk (minden t-re). Ellenőrzésként behelyettesítünk (2.7)-be és egyszerűsítve λ^{t-2}- nal adódik az új karakterisztikus egyenlet:

$$[\xi_1 + \xi_2(t+1)]\lambda^2 = A_1\lambda[\xi_1 + \xi_2 t] + A_2[\xi_1 + \xi_2(t-1)].$$

Az A_1, A_2 együtthatók miatt mind az ξ_1, mind az ξ_2 tagokra áll az egyenlőség, tehát jó volt a (2.9*) ötlet. A kezdeti értékfeltételből egyszerűen

$$\hat{x}_0 = \xi_1 \qquad \text{és} \qquad \hat{x}_{-1} = (\xi_1 - \xi_2)/\lambda.$$

2.3. Maximalizálás elemi módszerrel

A modern közgazdaságtanban alapvető szerepet játszik, hogy a szereplők korlátok (feltételek) mellett maximalizálják a célfüggvényüket: például a fogyasztók a hasznosságfüggvényüket (5. fejezet), a vállalatok pedig a profitfüggvényüket (6. fejezet). Középiskolából ismert legegyszerűbb feltételes maximumfeladat: adott kerületű téglalapok közül melyik területe a maximális? A válasz közismert: a négyzeté.

A középiskolásokra való tekintettel általában elkerüljük azilyenkor alkalmazott függvényderiválást, és helyette csak a konkáv kvadratikus vagy ahhoz hasonló függvény maximalizálásra szorítkozunk. – Egy függvényt akkor nevezünk *szigorúan konkávnak*, ha bármely két pontját összekötő egyenes, a húr a függvény alatt halad. Közönséges konkavitás esetén a húr részben egybeeshet a függvénnyel. - - (Ha mégis deriválunk, akkor ilyenkor *-gal jelezzük a határsértést.) Kezdjük a konkáv kvadratikus függvénnyel:

$$y = Bx - Ax^2, \qquad A, B > 0. \tag{2.15}$$

2.4. tétel. *Az $y = Bx - Ax^2$ függvény maximumhelye $x^o = B/(2A)$ és a maximum értéke $y^o = B^2/(4A)$.*

Fontossága és érdekessége miatt két bizonyítást adunk a tételre. Ha beszorozzuk a maximalizálandó függvényt –1-gyel, akkor az $y = -Bx + Ax^2$ konkáv függvény minimumát kapjuk.

1. bizonyítás. A másodfokú egyenlet megoldó képletének levezetésekor teljes négyzetté alakítottuk (2.15)-öt (illetve ellentettjét), most is ezt tesszük:

$$Ax^2 - Bx = A\left(x - \frac{B}{2A}\right)^2 - \frac{B^2}{4A^2}.$$

A jobb oldal második tagja állandó, első tagja akkor minimális, ha 0, azaz a 2.4. tétel áll. ∎

A 2., általánosítható bizonyítás előtt egy speciális esetet vizsgálunk, ahol $A = B = 1$.

2.6. példa. Elegendő az $x \in [0, 1]$-ra szorítkozni. A $y = x - x^2 = x(1 - x)$ függvény maximumát a négyzetre emelt mértani és a számtani közép közti egyenlőtlenség szolgáltatja:

$$x(1 - x) \leq \frac{(x + 1 - x)^2}{2^2} = \frac{1}{4},$$

s a maximumot adó egyenlőséget $x = 1 - x$, azaz $x^o = 1/2$ adja.

Megemlítjük, hogy ha kicsit eltérünk az optimumhelytől, akkor az optimum értéke alig változik: például $x = 0{,}4$ 20%-kal tér el az optimumhelytől, de a hozzátartozó függvényérték ($y = 0{,}24$) csak 2,5%-kal kisebb, mint az optimum értéke.

2. bizonyítás. Az ötletet a 2.6. példa adja. Az általános esetben $y = x(B - Ax)$, de erre még nem lehet alkalmazni a mértani és a számtani közép közti egyenlőtlenséget.

Ha $x < 0$ vagy $B - Ax \leq 0$, akkor $y \leq 0$, ezért feltehetjük, hogy $x, B - Ax > 0$. Ha még beszorozzuk A-val, akkor már rendben vagyunk:

$$Ay = Ax(B - Ax) \leq \frac{B^2}{4};$$

és a bal, illetve a jobb oldal egyenlősége csak a két tényező egyenlősége esetén teljesül: $Ax = B - Ax$, azaz $x = x^{\text{o}}$. ∎

Hasonlóan járhatunk el a következő általánosabb szorzatfüggvény feltételes maximalizálásánál.

2.5. tétel. *Legyen $\alpha < 1$, p, q, x, y és m pozitív valós szám! Tekintsük a következő feltételes maximumfeladatot:*

$$z = x^{\alpha} y^{1-\alpha} \to \max, \tag{2.16}$$

feltéve, hogy

$$px + qy = m. \tag{2.17}$$

A feltételes maximumhely

$$x^{\text{o}} = \frac{\alpha m}{p} \qquad \text{és} \qquad y^{\text{o}} = \frac{(1-\alpha)m}{q}. \tag{2.18}$$

Bizonyítás. Először tegyük föl, hogy α racionális szám, például $\alpha = r/s$, r és $s > r$ természetes szám; azaz $1-\alpha = (s-r)/s$. Ekkor $z^s = x^r y^{s-r}$ feltételes maximumát keressük. Az s darab pozitív szám mértani és számtani közepe közti egyenlőtlenség miatti

$$x^r y^{s-r} \leq \frac{[rx + (s-r)y]^s}{s^s}$$

egyenlőtlenség csak akkor segítene, ha $rx + (s-r)y$ állandó lenne, de általában nem az.

E helyett r, illetve $s - r$ darab

$$\frac{px}{r} \qquad \text{és} \qquad \frac{qy}{s-r}$$

értékű számot veszünk, amelyek szorzata konstansszorosa az eredetinek, összege viszont m állandó. Egyenlőség, azaz maximum akkor és csak akkor valósul meg, ha

$$\frac{px}{r} = \frac{qy}{s-r},$$

azaz (2.17) folytán a (2.18)-beli értékek.

Megjegyzés. * A matematikai analízis eszközeivel belátható, hogy ha α irracionális valós szám, akkor r_n/s_n racionális számok sorozatával közelítve α-t, a megfelelő (x_n, y_n) számok tartanak az eredeti maximumhelyhez. ∎

Az alkalmazásokban szükségünk lesz a 2.5. tétel három következményére. A lényeg, hogy a célfüggvény monoton növekvő transzformációja változatlanul hagyja a maximumhelyeket.

1. következmény. *Legyen* $\gamma, \beta > 0$. *Ha (2.16) helyett a némileg általánosabb*

$$z = x^\gamma y^\beta \tag{2.19}$$

célfüggvénynek a (2.17) feltétel melletti maximumát keressük, akkor az az

$$\alpha = \frac{\gamma}{\gamma + \beta} \tag{2.20}$$

helyettesítéssel visszavezethető (2.18)-ra.

2. következmény. *Ha (2.16)-ot logaritmizáljuk, akkor a log-ban additív*

$$\alpha \log x + (1 - \alpha) \log y \tag{2.21}$$

célfüggvényt maximalizáljuk, a feltételes maximumhely változatlanul (2.18).

3. következmény. *Ha (2.19)-et logaritmizáljuk, akkor a log-ban additív*

$$\gamma \log x + \beta \log y \tag{2.21}$$

célfüggvényt maximalizáljuk, akkor a (2.20) helyettesítéssel a feltételes maximumhely változatlanul (2.18).

A fejezet végén kimondjuk egy konkáv skalár–skalár függvény maximumának a kalkulusból ismert elégséges feltételét. Az intuitív megértéshez nem kell tudni deriválni. Elegendő, ha az Olvasó elfogadja, hogy az $f'(x)$ szám az f függvény érintőjének a meredeksége az x pontban. Belátható, hogy a konkáv függvény érintőjének a meredeksége monoton csökken. Igaz továbbá a

2.6.* tétel. *Egy sima konkáv f függvény a korlátos $[a, b]$ szakaszon felvett maximumára három lehetőség létezik:*

$$\textit{vagy} \quad a < x^\circ < b, \quad \textit{ha} \quad f'(x^\circ) = 0; \tag{2.23 – 1}$$

$$\textit{vagy} \quad x^\circ = a, \quad \textit{ha} \quad f'(a) \le 0; \tag{2.23 – 2}$$

$$\textit{vagy} \quad x^\circ = b, \quad \textit{ha} \quad f'(b) \ge 0. \tag{2.23 – 3}$$

3. Játékelméleti bevezető

Ebben a fejezetben néhány bevezető példát mutatunk be, amelyen szemléltethetők a nemkooperatív játékelmélet alapvető kérdései (Mérő, 1996). Az alaphelyzet: van két játékos, bármelyikük koordinálatlan döntése érinti a másik játékos jólétét. Létezik egy egyensúlyi fogalom, amelyet mindkét játékosnak célszerű követnie. Az itt adott meghatározások szükségképpen vázlatosak. A 3.1. alfejezetben a hagyományos racionális játékokkal foglalkozunk, a 3.2 alfejezetben teret adunk a rendellenességeknek is.

3.1. Racionális játékok

Legyen S_1 és S_2 a két játékos *stratégiáinak* véges halmaza; általános elemük s_1 és s_2: a két játékos stratégiái. (Döntés helyett stratégiát írunk, mert általában többlépéses döntéseket is megengedünk.) A két játékos egymástól függetlenül dönt (nem kooperál), s hasznuk (hasznosságuk, profitjuk, nyereségük, nyereményük, kifizetésük) rendre $u_1(s_1,s_2)$ és $u_2(s_1,s_2)$ valós szám. Mindkét játékos saját hasznosságfüggvényét akarja maximalizálni, de a függvényérték, s így a maximum függ a másik játékos stratégiájától is. Föltesszük, hogy mindkét játékos mindent tud a másik lehetőségeiről (S_j) és érdekeiről (u_j), csupán annak konkrét s_j stratégiáját nem ismeri előre, $j = 1, 2$. Neumann–Morgenstern (1944) foglalkozott először rendszeresen ilyen játékelméleti feladatokkal, bár Neumann első játékelméleti cikke 1928-ból származik.

3.1. példa. *A fogolydilemma* (Raiffa, 1951). Az amerikai rendőrség letartóztat két gyanúsítottat, akik feltehetőleg együtt követtek el egy bűnt, de nincs rá elegendő bizonyíték. A két foglyot elkülönítik egymástól, és elkezdik őket vallatni. Amerikai szokás szerint, ha valamelyik gyanúsított vall (és a másik nem), akkor az „éneklő" enyhébb büntetést kap, esetleg szabadlábra kerül, sőt jutalmat is kap. A nyereménypár az 1. fogoly egyedüli közreműködése esetén $(3, -3)$, a 2. fogolyé esetén $(-3, 3)$. Ha mindkettő tagad (kooperál a másikkal), akkor szabadlábra kerülnek, jutalom nélkül, a nyereménypár: $(2, 2)$. Ha mindkettő „köp", akkor mindketten börtönbe kerülnek, de a csökkentett büntetést $(-2, -2)$ jelöli.

Érdemes a fenti adatokat az ún. *kifizetési táblázatba* rendezni:

3.1. táblázat. *Fogolydilemma*

1. bűnöző \ 2. bűnöző	Köp	Tagad
Köp	$(-2,-2)$	$(3,-3)$
Tagad	$(-3,3)$	$(2,2)$

Mi lesz a játék egyensúlya, ahonnan egyik félnek sem érdeke másképp döntenie? Erre általában nehéz válaszolni, de ebben a speciális esetben nincs probléma. Valóban, akármit lép a másik játékos, az egyik játékos mindig jobban jár, ha köp, mint ha tagad: a köpés *dominálja* a tagadást: pl. az 1. játékos szempontjából, ha 2. köp, az 1. tagadása rosszabb a köpésénél ($-3 < -2$); ha 2. tagad, az 1. tagadása ismét rosszabb a köpésénél ($2 < 3$). Az már más kérdés, hogy a (köp, köp) egyensúly kettőjüknek *együttesen* nem optimális, hiszen mindkét játékos veszít ahhoz képest, mint ha mindkettő tagadna.

Példánk végére érve, megjegyezzük, hogy a játékelmélet művelői általában szeretik ilyen játékos példákon megfogalmazni a problémákat, de ez nem zárja ki azt, hogy a modellek fontos kérdések megválaszolására is alkalmasak.

A fogolydilemma esetében gondoljunk az OPEC-re, s az egyszerűség kedvéért legyen az egyik játékos Szaúdi-Arábia, a másik pedig a többi tagország. Két stratégiapár van: együttműködnek a termelés visszafogásában (s akkor magas olajárat érhetnek el) vagy sem. Az igazi OPEC-optimum az lenne, ha mindkét fél visszafogná a termelését. Mivel nem bíznak meg egymásban, mindkét fél abban reménykedik, hogy a másik visszafogja a termelését és ő pedig kihasználja az így adódó nagyobb keresletet. A valódi helyzet jóval bonyolultabb, de az elmélet mégis ad valamilyen magyarázatot a tényleges folyamatokra (lásd még 6.4. tétel).

Következő példánkban egyik játékosnak sincs domináns stratégiája, ezért most nehezebb egyensúlyt találni. Példánk a mobiltelefon korszak előtt született, és egyesek érzékenységét sérheti a nemi megkülönböztetés.

3.2. példa. *A nemek harca.* A Fiú és a Lány szeret együtt lenni, de a Fiú inkább meccsre menne, a Lány inkább moziba. Előre nem egyeztették a programot. A kifizetési táblázat most legyen a következő:

3.2. táblázat. *Nemek harca*

Fiú \ Lány	meccs	mozi
meccs	$(3,2)$	$(1,1)$
mozi	$(1,1)$	$(2,3)$

Valóban, a Fiú számára „a meccs” stratégia jobb, mint a „mozi”, ha a lány is meccsre megy ($3 > 1$), de rosszabb, ha a lány moziba megy ($1 < 2$). A Lány számára éppen fordítva. Vegyük észre azonban, hogy a (meccs, meccs) stratégiapárnak a következő vonzó tulajdonsága van: mindkét játékos számára optimális az ún. *egyensúlyi stratégia*, ha a másik játékos is a párban szereplő stratégiát választja. (Ezt a stratégiapárt fogjuk felfedezőjéről (1951) *Nash-egyensúlynak* nevezni.) Valóban, ha a lány meccsre megy, akkor a fiú számára is a meccs optimális ($3 > 1$); és ha a fiú meccsre megy, akkor a lány számára is a meccs az optimális választás ($2 > 1$).

Hasonló érveléssel belátható, hogy a (meccs, meccs) pár mellett a (mozi, mozi) pár is Nash-egyensúly. Felvetődik a kérdés: a résztvevők melyiket válasszák a két egyensúly közül? Hogyan koordinálja a szerelmespár a választást? (Hogy ne a lány menjen a meccsre és a fiú a moziba!)

Még nehezebb a helyzet a következő példában, ahol még Nash- egyensúly sem létezik, legalábbis közönséges értelemben nem.

3.3. példa. *Érempárosítás.* Két játékos egyidejűleg elhelyez 5–5 Ft-ot Fejre vagy +rásra. Ha azonos állásút választanak, akkor az 1. játékos elnyeri a 2. pénzét is; ha különbözőt, akkor a 2. játékos nyeri el az 1.-jét. Feltesszük, hogy a játékosok haszna azonos a pénzbeli haszonnal.

3.3. táblázat. *Érempárosítás*

2. („oszlop") játékos 1. („sor") játékos	Fej	+rás
Fej	$(5, -5)$	$(-5, 5)$
+rás	$(-5, 5)$	$(5, -5)$

3.1. feladat. Fogalmazza át a feladatot a tizenegyesrúgásra, ahol F a balra rúgásnak, illetve vetődésnek, I a jobbra rúgásnak, illetve a vetődésnek felel meg!

1700 körül keletkezett elképzeléseket újra felfedezve, 1920 után Emile Borel francia matematikustól és Neumann Jánostól származik az ötlet, hogy az eddigi *tiszta* stratégiák mellé *kevert* stratégiákat kell bevezetni, ahol a tiszta stratégia kiválasztása a véletlenen alapszik. Ekkor egyik játékos sem tudja kiismerni a másik döntését.

3.3. példa. *Az érempárosítás folytatása a véletlen bevezetésével.* Könnyen belátható, hogy a Forintpárosításban egyensúlyi megoldás, ha mindkét játékos egymástól függetlenül 1/2–1/2 valószínűséggel választja a Fejet vagy az +rást. Valóban, legyen rendre ξ és η a két játékos F választásának a valószínűsége, azaz $1-\xi$ és $1-\eta$ a két játékos I választásának a valószínűsége. Ekkor az 1. játékos *várható* nyeresége a négy elemi esemény nyereségének a várható értéke, azaz

$$u_1(\xi,\eta) = \xi\eta - \xi(1-\eta) - (1-\xi)\eta + (1-\xi)(1-\eta) = 2(2\eta-1)\xi - 2\eta + 1.$$

Adott η esetén ξ optimumára három eset van: *a)* $2\eta > 1$, amikor $\xi_\eta = 0$, *b)* $2\eta < 1$, amikor $\xi_\eta = 1$ és *c)* $2\eta = 1$, amikor ξ_η határozatlan. A tiszta stratégiákat kizártuk, marad tehát c): $\eta^* = 1/2$. Szimmetria miatt $\xi^* = 1/2$.

Azaz mindkét játékos földobja a saját pénzét, és ahogy esik, úgy puffan. Ekkor mindkét játékos várható nyeresége 0. Ha azonban az 1. játékos eltér e szabálytól, pl. $\xi > 1/2$, akkor a 2. játékos ezt hosszú távon kihasználhatja, s mindig I-t tesz: $\eta = 0$, tehát az érmék különbözőségének valószínűsége 1/2 fölé kerül, s a 2. játékos nyer.

A kevert stratégiák bevezetésével nulla összegű játékokra és tetszőleges számú tiszta stratégiára Neumann látta be az egyensúly létezését 1928-ban.

Mielőtt tovább mennénk, három feladatot tűzünk ki.

3.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a 3.2. példában, a *nemek harcában* a Fiú $(2/3, 1/3)$ és a Lány $(1/3, 2/3)$ kevert stratégiája az egyetlen teljesen $(0 < \xi, \eta < 1)$ kevert Nash-egyensúly.

3.3. feladat. *Gyáva nyúl.* Két autós a következő életveszélyes játékkal szórakozik. Egy keskeny híd két végéről indulnak egymással szembe – és sokan nézik őket. Két döntés lehetséges: Kitérni vagy Hajtani. Ha mindkettő Hajt, akkor egymásnak ütköznek a hídon, a „nyereségpár” $(-3, -3)$. Ha mindkettő Kitér, akkor leégnek a nézők előtt: a „nyereségpár” $(1, 1)$. Ha az első Kitér, s a második Hajt, akkor az 1. pofára esik, a második sikert arat: a „nyereségpár” $(0, 2)$, és hasonlóan a szimmetrikus esetben $(2, 0)$.

a) Van-e a játéknak tiszta Nash-egyensúlya?

b) Határozzuk meg a játék kevert Nash-egyensúlyát!

c) Mi a valószínűsége, hogy a kevert Nash- egyensúlyban a versenyzők életben maradnak?

d) Melyik egyensúly adja a legnagyobb hasznot az 1. játékosnak?

Egy játékot *szimmetrikusnak* nevezünk, ha azonos a stratégiák halmaza, és a két játékos kifizetési táblázata az ÉNY–DK átlóra vett tükörképe. A felsorolt játékok közül szimmetrikus *a fogolydilemma* (3.1. példa), *a gyáva nyúl* (3.2. feladat). Azt várnánk, hogy *minden* egyensúlyi stratégiapár elemei is azonosak, ez azonban általánosan nem igaz (lásd 3.2. feladat): a két tiszta stratégiapár antiszimmetrikus, csak a kevert pár szimmetrikus.

3.4. feladat. *Koordinációs játék.* Szimmetrikus játékban elegendő az 1. játékos nyereségtáblázatát feltüntetni.

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lássuk be, hogy két szigorú tiszta Nash-egyensúly és egy kevert szimmetrikus Nash-egyensúly létezik!

Eddig olyan játékokat mutattunk be, ahol a játékosok egyszer és egy időben lépnek. Most olyan játékra hozunk példát, ahol a két játékos egymást követve lép.

3.4. példa. *Ragadozó játék.* Egy piacot egy bent lévő (I = incumbent) vállalat monopolizál, de egy másik vállalat (E = entrant) próbál belépni. Ha E belép, akkor I kétféleképpen válaszolhat: vagy *alkalmazkodhat* a belépőhöz, visszafogva kibocsátását, hogy megőrizhesse a piaci árat; vagy felveheti a harcot a belépővel: *ragadozó magatartást tanúsít*, leengedi az árat, hogy kiszorítsa a belépőt. A játék kifizetési táblázata (más néven, stratégiai alakja, amelyet eddig elemeztünk) a következő:

3.4. táblázat. *Ragadozó játék*

Bent levő vállalat (I) Belépő vállalat (E)	harcol	alkalmazkodik
kint marad	$(0, 2)$	$(0, 2)$
belép	$(-3, -1)$	$(2, 1)$

A stratégiai alak elemzése két Nash-egyensúlyt ad: (E kint marad; I harcol, ha E belép) és (E belép; I alkalmazkodik, ha E belép). Logikailag szinte ránézésre látható, hogy az első egyensúly elfogadhatatlan (E kint marad, de I mégis arra készül, hogy E belép) és nem is hiteles I fenyegetése, hogy harcol (nyeresége –1), míg alkalmazkodásnál a nyereség 1. Itt a (belép, harcol) stratégiapár időben következetlen. Dinamikus játékot nem mindig lehet a kifizetési mátrixszal leírni.

3.2. Játékelméleti rendellenességek

Játékelméleti rendellenességekkel folytatjuk áttekintésünket. Ezek olyan esetek, amelyek nem jól illeszkednek a klasszikus játékelméletbe.

3.5. példa. *Dollárárverés.* Az asztalra ki van téve egy 1 dolláros érme. Két játékos 200 darab egycentessel kezdi a játékot. Felváltva licitálhatnak a dollárra, lépésenként legalább 1 érmével emelve a tétet. Az nyeri el az 1 dollárost, aki utoljára tudja vagy hajlandó emelni a tétet, de mindkét végleges licitet a játékvezető nyeri el, aki nem részese a játéknak.

Nem szabványos játék, de jól jellemzi a konfliktusok fokozatos kiterjedését (eszkalációját). A játékosok annyira azért racionálisak, hogy ellenfelüket minél olcsóbban akarják legyőzni, ezért lépésenként csak 1 c-tel emelik a másik tétjét. Tegyük föl, hogy a kezdő játékos következik, és eddig $x - 1$ darab érmét tett az asztalra, s ellenfele x darabot. Az $(x - 1, x)$ ajánlatpárt most az $(x + 1, x)$ pár követi. Ugyanis így költsége csak 2 c-tel, viszont remélt nyereménye 0-ról 1 \$-ra növekszik. Ugyanakkor a két játékos összköltsége $(2x + 1)$ c, azaz $(51\ c, 50\ c)$-tól kezdve az együttes költség több, mint 1 \$, tehát társasági szinten irracionálissá válik a részvétel. Ennek ellenére lehetséges, hogy a játék csak $(199\ c, 200\ c)$-n áll meg, amikor az együttes költség már majdnem 4 \$.

Korabeli történeti példa a vietnami háború, amelyben a két fél: az USA és Észak-Vietnam fokozatosan emelte a tétet. Mindketten hatalmas veszteségeket szenvedtek, végül az USA lépett ki.

3.6. példa. Tisztességes osztozkodás. 100 Ft-ot kell elosztani két fél között. Az 1. játékos Ft-ban egész értékű (x) ajánlatot tesz a 2. játékosnak, és megtartaná magának a $100 - x$-et. A 2. játékos vagy elfogadja ezt az ajánlatot és akkor hozzájut x forinthoz, vagy elutasítja, és akkor egyik játékos sem kap semmit sem. A (99, 1) pár az egyedüli logikus Nash-egyensúly: a 2. játékos 1 Ft-tal is beéri (az is több, mint 0), de a játékelméleti kísérletekben 30–40 Ft-nál kevesebbel nem szokták beérni. Ebben a játékban a játékosok nem követik a dinamizált (szakszóval: végjáték tökéletes) Nash-egyensúlyt. Ha a játékot sokszor megismételnék, akkor lenne remény a kiegyezésre, de ennek elemzése meghaladná a fejezet kereteit. A fejezet végén az egyszerűbb fogolydilemmát azért dinamizáljuk!

3.7. példa. Hogyan befolyásolja a megfogalmazás (a „csomagolás") a játékot? Induljunk ki a fogolydilemma következő változatából:

3.5. táblázat. *Fogolydilemma*

2. játékos 1. játékos	Együttműködik	Verseng
Együttműködik	$(3,3)$	$(1,4)$
Verseng	$(4,1)$	$(2,2)$

Ismert, hogy az egyensúlyi megoldás a (Versengés, Versengés).
Fogalmazzuk át a feladatot a következőképpen:

3.6. táblázat. *Átfogalmazott fogolydilemma*

	Magadnak	Másiknak
Együttműködik	1	2
Verseng	2	0

Ha az *együttműködés* gombot nyomod meg, akkor magadnak 1-et adsz, a másiknak 2-t; ha a *verseng* gombot nyomod meg, akkor magadnak 2-t adsz, a másiknak 0-át. Belátható, hogy az eredő az előző táblázatban leírt nyereménypárok táblázata. Ennek ellenére ezt a játékot a kísérletekben sokkal kooperatívabban játsszák, mint az eredetit, mert nyilvánvaló benne, hogy csak a másiktól jöhet az igazi nyereség.

A következő példa az igazmondásra ösztönzésről szól (vö. 16.2. alfejezet érdekeltségi feltételeivel).

3.8. példa. Salamoni ítélet (Biblia). Két asszony egyszerre szült egy helyen. Az egyiknek azonnal meghalt a gyereke, és magáénak követelte a másikét. Külső szemlélő utólag már nem tudta megállapítani, hogy valójában kié a gyerek. Salamon izraeli király (i.e. 1000. körül) a következő bölcs ítéletet hozta: „kettévágom a gyereket, és mindketten megkapják a gyerek felét". Az igazi anya rögtön lemondott a gyerekről (neki a gyerek élete a legfontosabb), s ebből Salamon megtudta, hogy ki az igazi anya, és annak ítélte a gyermeket.

A következő példa a függetlenül hozott döntések összehangolásáról szól.

3.9. példa. Férjek és feleségek (vö. Shakespeare: A makrancos hölgy). A brit tv-ben nagy sikerrel játszottak a következő játékot. Több házaspárt behívnak, elkülönítik a férjeket és a feleségeket. Egy sor kérdést tesznek föl nekik: el akar-e menni rockkoncertre vagy sem; részt vesz-e egy tüntetésen vagy sem stb. Minél több válasz egyezik egy házaspárnál, annál nagyobb a nyereményük. Hogy ne állapodhassanak meg a párok előre az i-edik kérdésre adandó válaszról, a kérdéseket a két félnek egymástól független sorrendben adják föl. Mi az optimális stratégia? Előre megállapodnak abban, hogy a férj mindig azt válaszolja, amit gondol, és a feleség látatlanban igazodik a férje ismert ízléséhez – vagy mindig fordítva. A lényeg: az ügyes koordináció.

A következő példa egy szokatlan, de elgondolkodtató játékot ismertet.

3.10. példa. Az egyszám-játék. A játéknak sok résztvevőjevan. Mindenkinek gondolnia kell egy természetes számot, amelyet beküld a játékvezetőhöz. Az nyer, aki a legkisebb olyan számot gondolta, amelyet más nem gondolt. (Ha nincs ilyen szám, akkor nincs nyertes!) Ha $2n+1$ részvevő van, akik közül legrosszabb esetben éppen ketten választják az 1-et, a 2-t, $\ldots, n$-et, akkor $n+1$ lesz a legkisebb lehetséges nyerőszám. Minden más esetben kisebb a nyerőszám. A Mérő-féle Füles-pályázaton több mint 8 000 részvevő indult, több mint 2 000 különböző számot küldtek be, és a legkisebb „egyedi" szám a 120 volt.

A következő példa egy izgalmas kísérletről számol be, amely azt vizsgálta: kialakulhat-e kooperáció egy olyan világban, ahol mindenki önző?

3.11. példa. Stratégiák kísérleti versenye a fogolydilemma ismételt lejátszásánál. Axelrod 1979-ben versenyre hívott fel sok ismert tudóst. Minden részvevőnek be kellett küldenie egy számítógépes programmal leírt stratégiát, amelytől a maximális nyereményt remélheti egy körversenyben, ahol a fogolydilemmát sok menetben lejátsszák, de a részvevők előre nem ismerik a játék hosszát. A beérkező 14 program közül Rapoport szerezte a legnagyobb nyereséget a *Tit for Tat* nevű stratégiájával (szemet szemért). Mindössze két sorból állt a program: 1. Az első lépésben kooperál. 2. Ezután azt lépi, amit a partnere az előző lépésben lépett. Axelrod két közös vonást fedezett fel a sikeres programokban: barátságosságot és megbocsátást (részleteket Mérő 1996 tartalmazza).

Miután széles körben közölte a verseny eredményeit, Axelrod 1982-ben egy második versenyt is kiírt. Ezúttal sokkal több részvevő indult, de ismét csak Rapoport nyert, ugyanazzal a programmal. Most Axelrod három újabb jegyet is fölfedezett a sikeres programok között: provokálhatóságot, reakcióképességet és kiismerhetőséget. Érdekes, hogy Rapoport programja mind az öt tulajdonságot maximálisan tartalmazta, és utólag megállapítható, hogy ez volt ismételt sikerének a kulcsa.

4. Három lineáris dinamikus közgazdasági modell

Bár vannak statikus gazdasági jelenségek (például a napi piaci áregyensúly a Lehel-téren), a legtöbb gazdasági jelenség dinamikus: például növekedés, infláció, eladósodás. Ebben a fejezetben három lineáris dinamikus közgazdasági modellt mutatunk be.

1) A piaci árigazodásét, ahol minden lépésben az ár arányosan növekszik a túlkereslettel (vagy csökken a túlkínálattal). Talán a legfontosabb termékpár a kőolaj és a földgáz. A nemzetközi piacon harc folyik a különböző olaj- és gáztermelő országok között (lásd 3. fejezet), és ennek hatása alatt bonyolult módon reagál a piac a kereslet és a kínálat különbségére. A magyar fogyasztó minden nap láthatja a benzinárak változását, de az árat módosítja az egyes benzinkutak földrajzi helyzete és a kormány adópolitikája.

A 2. és a 3. modell elemzése előtt röviden el kell magyaráznunk a GDP (gross domestic product, bruttó hazai termék) fogalmát. Első közelítésben egy ország éves terméktömegét méri, levonva belőle a termelőfelhasználást. Például az autógyárból kigördülő autó értékéből le kell vonnunk a beszállítók által gyártott alkatrészek értékét, mert azt már a beszállítók kibocsátásánál figyelembe vettük, ... és így tovább. Nettó fogalomról van szó, leszámítva azt, hogy a tőke értékcsökkenését nem vonjuk le belőle, erre utal a gross jelző. A hazai jelző arra utal, hogy nem fontos, hogy a kibocsátó egység melyik nemzet tulajdonában van; az a lényeg, hogy itthon gyártják. (Például +rországban a kibocsátás jelentős részét külföldi tulajdonú vállalatok állítják elő, és jövedelemkivonás miatt az ún. bruttó nemzeti termék jóval kisebb. Rátérünk a 2. modellre.

2) A modern államokban az adó- és járulékbevételek általában (de nem mindig) elmaradnak a kiadásoktól (amelynek jelentős része lehet az adósság után fizetendő kamat). Az így keletkező költségvetési hiány évről évre emeli az államadósságot, de a GDP-hez viszonyított értéke akkor is csökkenhet, ha hiány van.

3) Egy ország termelése alapvetően két részből áll: fogyasztásból és beruházásból. Az előbbi sokkal nagyobb mint az utóbbi, de az utóbbi sokkal ingadozóbb, mint az előbbi.

Rátérünk az egyes modellek kifejtésére. (A 7. és a 15. fejezetben nemlineáris dinamikát is tanulmányozunk.)

4.1. A piaci árigazodás modelljei

Ebben az alfejezetben a piaci árigazodás különféle modelljeit mutatjuk be. Az egytermékes piacon feltesszük, hogy a kínálat és a kereslet az ár növekvő, illetve csökkenő függvénye, egyelőre időtlenül:

$$S(P) = a + bP \qquad \text{és} \qquad D(p) = c - dP, \qquad a, b, c, d > 0.$$

(Az 5. fejezetben részletesebben foglalkozunk a keresleti és kínálati függvényekkel.) Egyensúly esetén a kereslet és a kínálat megegyezik: $D(P) = S(P)$, azaz az *egyensúlyi ár*

$$P^{\mathrm{o}} = \frac{c-a}{b+d} > 0, \qquad \text{ha} \qquad c > a.$$

Két változatban dinamizáljuk a statikus modellt.

Piaci árigazodás alapmodellje

Lemondunk a kereslet és a kínálat azonnali egyensúlyáról, helyette a kínálat és a kereslet az időben változó P_t ár függvényében változik:

$$S(P_t) = a + bP_t \qquad \text{és} \qquad D(p_t) = c - dP_t, \qquad P_0 \qquad \text{adott.}$$

Egyensúlyi ár változatlanul P^{o}, de ennek fokozatos elérését a piacra bízzuk. Ésszerű a következő árszabályozási mechanizmus. Az ár időszakról időszakra növekszik/csökken, ha túlkereslet/túlkínálat van, és az árváltozás arányos ($\kappa > 0$) a túlkereslettel:

$$P_{t+1} = P_t + \kappa(D_t - S_t), \qquad t = 0, 1, \ldots,$$

P_0 kezdeti ár adott.

4.1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy a piaci árigazoldás (P_t) ársorozata pontosan akkor tart az egyensúlyi árhoz, ha

$$0 < \kappa < \frac{2}{b+d}.$$

A túlzott reakció destabilizálja a rendszert.

Sertésciklus modellje

A sertésciklus modellje a sertésárak ciklikus ingadozását magyarázza. Nagyon elemi és divatjamúlt, mert *nem a racionális,* hanem a *naiv* várakozásokra épül (vö. Bevezetés). Ennek ellenére gyakran reális. Az S_t sertéskínálat egyidőszakos késéssel pozitívan ($b > 0$) reagál a P_{t-1} sertésárra: $S_t = a + bP_{t-1}$, míg a D_t sertéskereslet késés nélkül, negatívan reagál ($d > 0$): $D_t = c - dP_t$. A kereslet minden időszakban (gyakorlatban egy évben) egyenlő a kínálattal: $c - dP_t = a + bP_{t-1}$. Rendezve: az idei ár a tavalyi ár csökkenő lineáris függvénye:

$$P_t = \frac{c - a - bP_{t-1}}{d}, \qquad t = 0, 1, \ldots. \tag{4.1}$$

4.1. tétel. *a) Megfelelő feltétel mellett a sertésciklus modelljében létezik pozitív egyensúlyi ár, a fenti P^o.*

b) Az egyensúlyi ár aszimptotikusan stabil, ha a kínálati egyenes lassabban emelkedik, mint ahogy a keresleti egyenes lejt:

$$0 < b < d. \tag{4.2}$$

Megjegyzések. *1. Aszimptotikusan stabil esetben, ha a (P_t, P_{t+1})-fázissíkban felrajzoljuk a dinamikát, pókhálószerű képet kapunk (pókhálómodell).*

2. Instabil esetben ($b > d > 0$) a rendszer fölrobban, a lineáris közelítés alkalmatlanná válik, ezért nemlineáris általánosításra lenne szükség.

4.1. példa. Könnyű belátni, hogy a $b = d$ esetben a sertésciklus 2-ciklus (vö. a 2.1. tétel, 1. megjegyzés), de ennek előfordulása nagyon valószínűtlen.

4.2. Az államadósság dinamikája

Ebben az alfejezetben az államadóssággal kapcsolatos azonosságokat vezetünk le. Bár tautológiák, mégis hasznosak.

A legtöbb országban az állami bevételek és kiadások éves szinten nincsenek egyensúlyban, általában (de nem mindig) az állam többet költ, mint amennyit adóból beszed. Ezért kialakul az államadósság, amely az állam által felhalmozott és még nem törlesztett tartozását mutatja. Legyen a t-edik év végén az *államadósság értéke* D_t és legyen a *költségvetési egyenleg*, azaz az állami bevételek és kiadások különbsége, B_t. Definíció szerint az adósságváltozás az egyenleg ellentettje:

$$D_t = D_{t-1} - B_t. \tag{4.3}$$

A t-edik év kamatlábát r_t-vel jelölve, az egyenleg felbontható az E_t *elsődleges egyenleg* és az államadósság utáni járó $r_t D_{t-1}$ *kamat* különbségére:

$$B_t = E_t - r_t D_{t-1}. \tag{4.4}$$

Behelyettesítve (4.4)-et (4.3)-ba, adódik

$$D_t = (1 + r_t) D_{t-1} - E_t. \tag{4.5}$$

Abszolút számok helyett sokkal értelmesebb relatív számokkal dolgozni, például a magyar költségvetési hiány ezer milliárd forint fölötti értéke helyett azt mondani, hogy a hiány a GDP 2,5%-a. Ezért célszerű bevezetni az $R_t = 1 + r_t$ kamategyütthatót és az $Y_t = G_t Y_{t-1}$ GDP- növekedési egyenletet, ahol G_t a növekedési együttható (= 1 + növekedési ütem). Ekkor (4.5) helyett a GDP-arányos adósságdinamikát írhatjuk föl:

$$\frac{D_t}{Y_t} = \frac{R_t D_{t-1}}{G_t Y_{t-1}} - \frac{E_t}{Y_t}. \tag{4.6}$$

Bevezetjük a GDP-arányos államadósságot (d_t), a relatív kamategyütthatót (ρ_t) és a GDP-arányos egyenleget (e_t):

$$d_t = \frac{D_t}{Y_t}, \qquad \rho_t = \frac{R_t}{G_t} \qquad \text{és} \qquad e_t = \frac{E_t}{Y_t}. \tag{4.7}$$

Ekkor (4.7) segítségével (4.6) tömörebben felírható:

$$d_t = \rho_t d_{t-1} - e_t. \tag{4.8}$$

Szóban: az idei államadósság-ráta = relatív kamategyüttható × tavalyi államadósság-ráta mínusz a GDP-arányos egyenleg. Igaz a

4.2. tétel. *Állandó $\rho_t = \rho$ és $e_t = e$ paraméterértékek esetén a d_t államadósság-ráta egyensúlyi értéke*

$$d^o = \frac{e}{\rho - 1}, \tag{4.9}$$

amely a következő két tartományban pozitív:

$$\rho < 1 \quad \text{és} \quad e < 0, \quad \text{vagy} \quad \rho > 1 \quad \text{és} \quad e > 0. \tag{4.10}$$

A normális eset (4.10) első alesete, amikor (4.8) stabil. Történelmi példa: a II. világháború után a angolszász országok tartósan gyors növekedése és alacsony kamatlába jelentősen csökkentette a háborús államadósság-rátákat. Ellentétes tartalmú példa a 2007-ben induló nemzetközi pénzügyi és gazdasági válság, amikor a dél-európai országokban a termelés hanyatlása miatt az államadósság- ráta elszabadult. Az EU-ra érvényes maastrichti kritériumok (ismérvek) szerint az államadósság GDP-hányada nem lehet 60% fölött, míg a költségvetési hiány GDP-hányada nem lehet 3% fölött.

A teljesség kedvéért közöljük a modellből kihagyott fizetési mérleg egyenlegét és külső adósságot. Szokás szerint csillaggal különböztetjük meg őket hazai társaiktól. Legyen a GDP külső árfolyamon mért értéke Y_t^*, t-edik év végén az *ország külső adósságának értéke* D_t^* és legyen a *fizetési mérleg egyenlege*, azaz az export és az import különbsége, B_t^*. Definíció szerint fennáll a következő azonosság:

$$D_t^* = D_{t-1}^* - B_t^*. \tag{4.3*}$$

Jelölje R_t^* a t-edik év külső adósság kamategyütthatóját, E_t^* az elsődleges fizetési mérleget, stb. Bevezetjük a GDP-arányos külső adósságot (d_t^*), a relatív külső kamategyütthatót (ρ_t^*) és a GDP-arányos külső egyenleget (e_t^*):

$$d_t^* = \frac{D_t^*}{Y_t^*}, \qquad \rho_t^* = \frac{R_t^*}{G_t^*} \qquad \text{és} \qquad e_t^* = \frac{E_t^*}{Y_t}. \tag{4.7*}$$

Ekkor (4.7) segítségével (4.6) tömörebben felírható:

$$d_t^* = \rho_t^* d_{t-1}^* - e_t^*. \tag{4.8*}$$

Szóban: az idei évvégi külső adósságráta = relatív külső kamategyüttható × tavaly évvégi külső adósságráta - GDP-arányos külső egyenleg.

Az alfejezet végén két táblázatot közlünk.

Több helyen is szükségünk lesz a magyar költségvetés szerkezetére, amelyet a 4.1. táblázat mutat be. 2017-ben a GDP értéke 38 355 mrd Ft volt. (A továbbiak miatt érdekes lehet e mutató euróban kétféleképp kifejezett értéke: 124 mrd EUR piaci árfolyamon, és 199 mrd EUR vásárlóértékkel korrigálva.) Sajnálatos módon az önkormányzati kiadások egyes tételei többször vannak figyelembe véve. Érdekes még az elsődleges egyenleg: –332 mrd Ft, és a nettó kamatkiadások: 983 mrd Ft, algebrai különbségük a költségvetési egyenleg: –1 314 mrd Ft, magyarul hiány.

4.1. táblázat. *2017. évi magyar költségvetés teljesítése*

Tétel	Bevétel mrd Ft	Kiadás mrd Ft	Bevétel GDP%-a	Kiadás GDP%-a
Központi költségvetés	13 178	14 941	19,8	22,4
Egészségbiztosítási Alap	2 125	2 263	5,5	5,9
Nyugdíjbiztosítási Alap	3 200	3 205	8,3	8,3
Helyi önkormányzatok	3 013	2 494	7,9	6,5
Elkülönített alapok	7 20	647	1,9	1,7
Államháztartás	22 236	23 551	58,0	61,4

Ezt egészíti ki a 4.2. táblázat, amely az IMF (2018) augusztusi jelentése szerint válogatott magyar makroadatokat közöl a 2018 előttről (tény) és 2018-tól (előrejelzés), a modellben szereplő változókról. Néhány mondatban az adatokról. A GDP növekedési ütemének idősora azt mutatja, hogy még kedvező nemzetközi környezetben is 2 és 4 százalék között ingadozik a növekedés. A beruházás hányad is ingadozik, és a 2016-os mélypont egybe esett a GDP növekedés lassulásával. A költségvetési egyenleg két idősora mutatja a köztük levő különbség, a kamatkiadás jelentőségét. Az államadósság ugyan csökken, de jó években jobban kellene csökkennie, és fel kellene készülni a népességöregedés költségvetést fenyegető időzített bombájára. A fizetési mérleg pozitív értéke (2016-ban 6%-os csúcsot ért el) miatt csökken látványosan a bruttó külső adósság (a 2013-as 118%-ról 2019-re 71%-ra). De nem szabad megfeledkezni az EU-támogatásoknak a fizetési mérleghez mérhető arányáról és a külföldi tőke kivonásáról.

4.2. táblázat. *Válogatott magyar makroadatok, a GDP százalékában*

Évek Mutatók	2013	2014	2015	2016	2017	2018*	2019*
GDP növekedési ütem	2,1	4,2	3,4	2,2	4,0	4,0	3,3
Beruházás	20,9	22,2	21,9	19,2	21,5	23,1	23,3
Költségvetési egyenleg	–2,6	–2,6	–1,9	–1,7	–2,0	–2,4	–2,0
Elsődleges egyenleg	1,6	1,2	1,5	1,5	0,8	0,1	0,2
Államadósság	77,1	76,6	76,7	76,0	73,6	71,3	69,1
Fizetési mérleg	3,8	1,5	3,5	6,0	3,1	2,3	2,1
Bruttó külső adósság	117,8	114,7	107,7	97,2	84,6	76,2	70,7

Megjegyzés: * előrejelzés

4.3. Beruházási ciklusok

A Nobel-díjas brit közgazdász, Hicks (1950) beruházási ciklusmodellje az egyik legérdekesebb és leghasznosabb közgazdasági modell. Módszertani szempontból az adja az érdekességét, hogy mindössze két független változóval képes a gazdaság ciklusait modellezni. A lineáris mag csak előkészítés, az igazi modellt a nemlineáris burok adja

(7.2. alfejezet). Makroökonómiában megszokott módon változatlan áras értékekkel dolgozunk, és itt eltekintünk a hosszú távú növekedéstől. Hasznos megkülönböztetni a beruházásokat a fogyasztástól: az előbbi csak közvetve segíti az utóbbit. Legyen Y_t a *termelés* (GDP), I_t a *beruházás* és C_t a *fogyasztás* volumene a t- edik időszakban. Zárt gazdaságot feltételezünk, ahol nincs se export, se import.

Zárt gazdaságban a három változó között egy azonosság áll fenn;
GDP azonosság: termelés = beruházás+fogyasztás, azaz teljesül

$$Y_t = I_t + C_t. \tag{4.11}$$

Clark 1917-ben vezette be a *beruházási akcelerátor*t, amely szerint minden időszakban az indukált beruházás arányos a következő időszak termelésváltozásával. Előretekintés helyett visszatekintve, az indukált beruházás az előző időszak termelésváltozásával arányos. A szóban forgó egyenletet Hicks kiegészítette az *autonóm beruházással*, amely független a gazdaság helyzetétől: I^{A}. Például a gazdaság időleges növekedése beruházást igényel, de az esedékes útfelújításokat a válságban is végre kell hajtani.
Lineáris beruházási függvény

$$I_t = I^{\mathrm{A}} + \beta(Y_{t-1} - Y_{t-2}). \tag{4.12}$$

Keynes (1936) óta a fogyasztást gyakran az előző időszaki jövedelem (azaz termelés) lineáris függvényeként írják le, amelyet még egy C^{A} autonóm taggal módosítanak.
Lineáris fogyasztási függvény

$$C_t = C^{\mathrm{A}} + \gamma Y_{t-1}, \tag{4.13}$$

ahol γ a *fogyasztási határhajlandóság* mutatja, hogy a fogyasztás milyen mértékben követi az előző időszaki jövedelmet, $0 < \gamma < 1$; és $\mu = 1/(1-\gamma)$ a híres *multiplikátor*. (Keynes volt az, aki a Nagy Válság idején bátran érvelt amellett, hogy minden állami kiadás megtöbbszörözi, μ-szörösére növeli a kibocsátást – a költségvetési hiány majd megszűnik.)

Adott I^{A}, C^{A}, β és γ együttható, valamint adott Y_{-1}, Y_0 kezdeti érték mellett az (I_t), (C_t) és (Y_t) pályát (4.11)– (4.13) egyértelműen meghatározza.

Három egyenletünk van, három változóval. Érdemes azonban megszabadulni a nélkülözhető változóktól és egyenletektől. Két lehetőségünk van, hogy a szokatlan alakú egyenletrendszert szokásos alakra hozzuk: visszavezetni *a)* két elsőrendű többváltozós differencia egyenletre, vagy *b)* egy másodrendű egyváltozósdifferenciaegyenletre. A másodikat választva, helyettesítsük be (4.12)-t és (4.13)-t (4.11)-be, s rendezéssel eljutunk egy másodrendű, egyváltozós
*alapegyenlet-rendszer*hez:

$$Y_t = I^{\mathrm{A}} + C^{\mathrm{A}} + (\beta + \gamma)Y_{t-1} - \beta Y_{t-2}, \qquad t = 1, 2, \ldots, \tag{4.14}$$

ahol Y_{-2} és $Y-1$ adott kezdeti értékek. Az Y_t *alapváltozó* dinamikájának ismeretében a többi változó (I_t és C_t) dinamikája egyszerűen kiszámítható a (4.12) és a (4.13) egyenletből (2.2. alfejezet).

Oszcillációról (rezgésről) beszélünk, ha a modell változóinak eltérése az egyensúlyi értéktől szabályos időközükben előjelet vált, de a kilengés nagysága (amplitúdója) változhat. A 2.2. és 2.3. tétel speciális esete a következő két tétel: egyik az egyensúlyra, a másik a stabilitásra és oszcillációra vonatkozik.

4.3. tétel. *A hicksi rendszer Y^o egyensúlya létezik és egyértelmű:*

$$Y^o = \frac{I^A + C^A}{1-\gamma}, \quad I^o = I^A \quad \text{és} \quad C^o = C^A + \gamma Y^o, \quad \text{ahol} \quad 0 < \gamma < 1. \tag{4.15}$$

4.4. tétel. *a) A hicksi rendszer akkor és csak akkor oszcillál, ha*

$$\gamma < 2\sqrt{\beta} - \beta. \tag{4.16}$$

b) A rendszer akkor és csak akkor aszimptotikusan stabil, ha

$$\beta < 1. \tag{4.17}$$

c) A (4.16)-os oszcilláció amplitúdója akkor és csak akkor állandó, azaz a rendszer ciklikus, ha

$$\beta = 1. \tag{4.18}$$

Megjegyzés. (4.18) esetén (4.16) eleve teljesül.

Egy számpéldán mutatunk be egy viszonylag rövid, 8- periódusú pályát. A 2.3. tételben szereplő (2.14) alapján $\beta = 1$, $\gamma = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}4142$, $I^A = (1-\gamma)/3$, $C^A = 2I^A$: $T = 8$. Ekkor az egyensúlyi pálya $Y^o = 1$. Kezdeti feltétel $Y_{-1} = 1$ és $Y_0 = 1{,}02$. Ekkor a 4.3. táblázat tartalmazza az első 10 időszaki eredményt.

4.3. táblázat. *A hicksi 8-ciklus*

Időszak t	Kibocsátás Y_t	Fogyasztás C_t	Beruházás I_t
–1	1,000		
0	1,020		
1	1,028	0,813	0,215
2	1,020	0,816	0,204
3	1,000	0,813	0,187
4	0,980	0,805	0,175
5	0,972	0,796	0,175
6	0,980	0,793	0,187
7	1,000	0,796	0,204
8	1,020	0,805	0,215
9	1,028	0,813	0,215

Ha reálisabb paraméterértékeket választunk, akkor γ- nak sokkal közelebb kell lennie 1-hez, de ekkor hosszabb lenne a periódus, s ezzel nem foglalkozunk.

A lineáris ciklusmodellek súlyos hibája, hogy nagyon érzékenyek néhány alapparaméterértékre, és a kilengés értéke a kezdőértéktől függ. Például $\beta = 1$-re ciklus adódik, de $\beta = 0{,}999$-re már stabil oszcilláció, míg $\beta = 1{,}001$-re pedig robbanás – igaz, az első időszakokban alig térve el a ciklustól.

A 7.2. alfejezet végén bemutatjuk a beruházási ciklus nemlineáris általánosítását.

5. Fogyasztói döntések és hasznosságmaximum

A modern közgazdaságtan talán legalapvetőbb kérdése: hogyan döntenek a fogyasztók? Már a 4.1. alfejezetben feltételeztük, hogy minél drágább egy termék, annál kevesebbet vásárolnak belőle a vevők. Az 5.1. alfejezetben heurisztikusan vezetünk le egy egytermékes keresleti függvényt. Az 5.2. alfejezetben kiterjesztjük a választást két termékre, és kétféle magyarázatot is adunk a fogyasztói magatartásra: egy okságit és egy optimalizálót. Az 5.3 és 5.4. alfejezetben az időbeni választást tárgyaljuk, 2, iletve 3 időszakra.

5.1. Egy egyszerű keresleti függvény

Adott áru iránti *keresleti függvénynek* nevezzük azt a függvényt, amely minden ár esetén megadja, hogy a fogyasztók hány egységnyi terméket vásárolnak egyadott időszakban a szóban forgó termékből. Ebben az alfejezetben egyetlen, nagy értékű tartós fogyasztási cikk, például a villanyhűtőszekrény, és azt vizsgáljuk, hogyan döntött az 1960-as évek magyar fogyasztója: vásárol-e vagy nem hűtőszekrényt. Az 1960-as évek említésével kizártuk, hogy a lehetséges vásárlóknak korábban már volt hűtőszekrénye, amelyet csere helyett esetleg meg is javíttathat. Lényeges, hogy a termék ára (p pozitív valós szám) akkoriban többhavi átlagjövedelem volt.

Tegyük föl, hogy a több millió magyar háztartást éves jövedelmük (w) szerint a $[0,1]$ intervallum pontjai képviselik. Legyen a folytonos és monoton növekvő $F(w)$ a jövedelem-eloszlásfüggvény, amely megmondja, hogy a háztartások hányad részének a jövedelme kisebb mint w. Természetesen $F(0) = 0$ és $F(1) = 1$. A legegyszerűbb eset az egyenletes eloszlás: $F(w) = w$, de az eloszlás lehet sokkal bonyolultabb is.

Eléggé reális feltevés szerint minden háztartásnak van egy $P(w)$ *rezervációs* (küszöb) ára: ha az ár kisebb, mint a rezervációs ár, akkor megveszi élete első hűtőszekrényét; ha viszont nagyobb vagy egyenlő, akkor nem. Feltehetjük, hogy minél nagyobb a háztartás jövedelme, annál nagyobb a rezervációs ár: $P(w)$ monoton növekvő függvény. Jelölje e függvény inverzét $w = P^{-1}(p)$. Azok veszik meg a hűtőt, akiknek a jövedelmére teljesül $w > P^{-1}(p)$. Tehát a termék keresleti függvénye (egységnyi népességre vetítve)

$$D(p) = 1 - F(P^{-1}(p)). \tag{5.1}$$

5.1. feladat. Számolja ki a keresleti függvényt, ha a jövedelemeloszlás a $[w_{\mathrm{m}}, 1]$ szakaszon egyenletes ($0 < w_{\mathrm{m}} < 1$) és a rezervációsár–jövedelem függvény lineáris: $P(w) = a + bw$, ($a > 0$, $b > 0$).

5.2. Két termék közti választás

Most az egyén két, egymást helyettesíthető terméket fogyaszt: X és Y, amelyek bármilyen kicsi vagy nagy mennyiségben vásárolhatók. Legegyszerűbb példa az étel és az ital. Egységáruk rendre p és q, és a vásárolt mennyiség x és y. Az egyén (havi) jövedelme m, mind nemnegatív valós számok. Az egyén az élelemre szánt pénzét ételre és italra költi, ezért érvényes az ún. *költségvetési feltétel:*

$$px + qy = m. \tag{5.2}$$

Látható, hogy minél többet vesz az egyén x-ből, annál kevesebbet vehet y-ból:

$$y = \frac{m - px}{q}, \qquad \text{ahol} \qquad 0 \le x \le \frac{m}{p} \tag{5.3}$$

– ez a költségvetési egyenes. (A magyar nyelvben a költségvetés elsősorban állami vagy önkormányzati költségvetést jelent, míg itt egyéni vagy családi költségvetésről van szó.)

Az egyén gyakran dönt a következő egyszerű, ún. *hüvelykujj-szabály* szerint: például jövedelme adott hányadát X-re, a maradékot pedig Y-ra költi; a részarány α és $1 - \alpha$, $0 \le \alpha \le 1$. Képletben:

$$x(p, q, m) = \frac{\alpha m}{p} \qquad \text{és} \qquad y(p, q, m) = \frac{(1 - \alpha)m}{q}. \tag{5.4}$$

A modern elmélet feltételezi, hogy az egyén az (5.2) költségvetési feltétel mellett egy alkalmas $U(x, y)$ konkáv hasznosságfüggvényt maximalizál. (A kétváltozós függvényt akkor nevezzük konkávnak, ha bármelyik változó tetszőleges rögzítése esetén a kapott egyváltozós függvény konkáv. A konkavitásból következik, hogy ha van lokális maximum, akkor az globális is.) Grafikusan belátható, hogy a maximális hasznosságot adó (x^*, y^*) pár a sík olyan pontja, amelyben alkalmas c valós számra az $U(x, y) = c$ *szintvonalat* – közömbösségi görbét – éppen érinti az (5.3) költségvetési egyenes. (A domborzati térképről ismert magassági szintvonalak olyan pontok mértani helye, ahol a tengerszint feletti magasság adott.)

Mi egy olyan speciális hasznosságfüggvényt vizsgálunk, amelyet maximalizálva, a fogyasztó optimális választása ugyanaz, mint ha az (5.4) hüvelykujjszabályt követné. Azt is mondhatjuk, hogy a hasznosságfüggvény *racionalizálja*, értelmessé teszi az (5.4) hüvelykujjszabályt:

$$U(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{5.5}$$

Ez a hasznosságfüggvény önmagában is jól értelmezhető: a két fogyasztott mennyiség súlyozott mértani közepét maximalizáljuk.

A 2.5. tételt alkalmazva adódik az

5.1. tétel. *Az (5.5) hasznossági függvény az (5.2) egyéni költségvetési feltétel melletti maximumát az (5.4) pontban veszi fel.*

Végül következik az

5.2. feladat. $n > 1$ természetes szám számtani és a mértani közepe közti egyenlőtlenségét ügyesen alkalmazva bizonyítsuk be, hogy ha a fogyasztó hasznosságfüggvénye

$$U(x_1, \ldots, x_n) = x_1^{1/n} \cdots x_n^{1/n},$$

jövedelme 1, és az i-edik áru egységára $p_i > 0$, akkor optimális fogyasztása

$$x_i = \frac{1}{np_i}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Az (5.4) szabály nagyon egyszerű, ezért szívesen alkalmazzuk. De vannak esetek, amikor nem alkalmazható. Például amikor az X áru kereslete Y áru árától is függ: ha a narancslé ára drágul, akkor nő a narancs iránti kereslet. Másik példa – rögzített árak mellett a jövedelem emelkedésével csökken bizonyos termékek iránti kereslet: a jövedelem növekedésével a burgonyát részben a sokkal drágább, de ízletesebb hússal helyettesítjük.

5.1. példa. Végletessége ellenére érdekes a helyettesítést kizáró hasznosságfüggvény (amely a későbbi 6.2. példában szereplő specifikációból kapta a Leontief nevet):

$$U(x, y) = \min(ax, by), \qquad a, b > 0. \tag{5.6}$$

Ilyenkor az optimum $ax = by$, azaz az (5.2) költségvetési feltétel miatt

$$px + q\frac{ax}{b} = m, \qquad \text{azaz} \qquad x^{\mathrm{o}} = \frac{mb}{pb + qa} \qquad \text{és} \qquad y^{\mathrm{o}} = \frac{ma}{pb + qa}.$$

Megjegyezzük, hogy a helyettesítés nélküli hasznosságfüggvény végletesen leegyszerűsíti a valóságos helyettesítés korlátait, hiszen még a folyadék és az étel is valamennyire helyettesíti egymást: a narancslé csökkenti az éhséget is, a narancs pedig oltja a szomjat is. De ez a szélsőséges feltevés számunkra több modellben is értékes, mert nagyon megkönnyíti a számolást.

Legszemléletesebb példa az (5.6) hasznosságfüggvényre $a = b = 1$ esetén: x, illetve y rendre az egyforma bal és jobb kesztyűk száma. Gyakorlatilag csak a pároknak van haszna, és ezek számát éppen (5.6) adja.

5.3. Jelen és jövő idejű fogyasztás: két időszak

Az elvont elmélet egyik előnye, hogy ugyanazt a modellt többféle közgazdasági probléma megértésére is alkalmazhatjuk. Az 5.2. alfejezet modelljét most a jelen és a jövő közti választásra alkalmazzuk.

Két időszakot mérlegelünk: a jelent (amikor dolgozunk), és a jövőt (amikor már nem dolgozunk). Keresetünk w, amelyből s mennyiséget takarítunk meg, s ez $R > 1$ kamategyüttható szerint gyarapodva járul hozzá időskori fogyasztásunkhoz, a változók pozitív valós számok.

A két időszak fogyasztása rendre

$$c = w - s \qquad \text{és} \qquad d = Rs. \tag{5.7}$$

Kérdés: mekkora megtakarítás maximalizálja a hasznosságfüggvényt?

A hasznosságfüggvényt most additív alakban írjuk föl[(2.21)]:

$$U(c, d) = \log c + \delta \log d, \tag{5.8}$$

ahol δ egy 0 és 1 közötti valós szám, az ún. *leszámítolási együttható*. (Az elnevezés hibás, mert ekkor minél nagyobb a leszámítolási együttható értéke, annál kisebb a leszámítolás; de több kárt okozna, ha δ helyett $1/\delta$-t írnánk, ezért nem tesszük.) Általános érvényű megfigyelés, hogy a jövőbeli fogyasztást kevesebbre értékeljük, mint a jelen idejűt: „jobb ma egy veréb, mint holnap egy túzok.” Aki az optimálisnál kevesebbet takarít meg (gyakori eset), az időskorára nélkülözni fog. Aki az optimálisnál többet takarít meg (ritka eset), az felesleges áldozatot hoz a jövöbeli fogyasztásért.

Közömbös, hogy milyen alapú logaritmussal számolunk, mert az áttérés az egyik alapról a másikra csak egy konstans szorzóval módosítja a hasznosságfüggvényt. A logaritmusfüggvénynek többek között az az előnye, hogy konkáv, és a fogyasztás növekedésével csökken a többlethasznosság.

5.2. tétel. *Az (5.8) hasznosságfüggvény esetén az optimális megtakarítás*

$$s^{\mathrm{o}} = \frac{\delta w}{1+\delta}. \tag{5.9a}$$

Az optimális fogyasztási pár pedig

$$c^{\mathrm{o}} = \frac{w}{1+\delta} \qquad \text{és} \qquad d^{\mathrm{o}} = \frac{R\delta w}{1+\delta}. \tag{5.9b}$$

Két bizonyítást is adunk a tételre, de a kiindulópont közös.

1. bizonyítás. Behelyettesítve (5.7)-et (5.8)-ba, adódik a *származtatott hasznosságfüggvény*:

$$U[s] = \log(w-s) + \delta\log(Rs). \tag{5.10}$$

Az elemi megoldáshoz transzformálni kell a hasznosságfüggvényt. Mivel a logaritmusfüggvény monoton növekvő, $U[s]$ helyett a transzformált és ekvivalens

$$V[s] = (w-s)s^{\delta}$$

hasznosságfüggvényt maximalizáljuk. A 2.5. tétel 1. változatából némi számolással kapjuk (5.9)-et. ∎

2. bizonyítás.* Aki tanult kalkulust, az transzformáció nélkül, egyszerű deriválással meghatározhatja az optimális megtakarítást. Természetes alapú logaritmusfüggvénnyel számolva, az optimumban (5.10) deriváltja nullává válik:

$$0 = U'[s] = -\frac{1}{w-s} + \frac{\delta}{s}.$$

Rendezve adódik az (5.9) optimum. ∎

5.2. példa. Leszámítolás nélkül ($\delta = 1$) az optimális megtakarítás, és a két fogyasztás a munkajövedelem fele: $s^{\mathrm{o}} = c^{\mathrm{o}} = d^{\mathrm{o}} = w/2$.

Mielőtt számszerűsítenénk a képletet, megjegyezzük, hogy legfontosabb alkalmazását a Modigliani-féle (1954) ún. *életciklusmodell* adja. Csak fiatalkorban van elsődleges jövedelmünk: $w > 0$, ezért akkor takarékoskodunk, idős korban feléljük a megtakarítást. Emiatt mindkét időszak hossza $T = 25$ év, tehát mind az éves kamategyütthatót $R[1]$, mind az éves leszámítolási együtthatót $\delta[1]$ T-edik hatványra kell emelni, hogy megkapjuk a hosszú időszakra vonatkozó együtthatókat:

$$R = R[1]^T \qquad \text{és} \qquad \delta = \delta[1]^T.$$

Csak az éves szinten megadott értékeknek van közgazdasági jelentése. Az 5.1. táblázatban a sorokban az $R[1] = 1$; 1,02 és 1,04 kamategyütthatók szerepelnek, és a 2. oszlopban a leszámítolástól független fiatalkori fogyasztás: c, amely a leszámítolás erősödésével 0,5-ről 0,735-re emelkedik. A 3–5. oszlopban pedig a $\delta[1] = 1$, 0,98 és 0,96-os leszámítolási együtthatókhoz tartozó időskori fogyasztások: $d(j)$. A kamategyüttható emelkedésével növekszik az érték (maximum 1,333, a leszámítolás erősödésével gyengül (minimum 0,265).

5.1. táblázat. *Kamategyüttható, leszámítolás, fogyasztási pár*

Kamategyüttható $R[1]$ Leszámítolási eh. $\delta[1]$	 c	1 $d(1)$	1,02 $d(2)$	1,04 $d(3)$
1,00	0,500	0,500	0,820	1,333
0,98	0,624	0,376	0,617	1,003
0,96	0,735	0,265	0,435	0,706

5.3. feladat. *a)* Igazoljuk, hogy (5.8) esetén az időskori fogyasztás pontosan akkor egyenlő a fiatalkorival, ha a leszámítolási együttható a kamategyüttható reciproka: $\delta = 1/R$! *b)* Igazoljuk, hogy az időskori fogyasztás pontosan akkor kisebb, mint a fiatalkori, ha a leszámítolási együttható kisebb, mint a kamategyüttható reciproka: $\delta < 1/R$!

Mennyiben használható ez a modell? Arra jó, hogy a fogyasztói türelmetlenséget egy számmal, a leszámítolási együtthatóval jellemezze: minél kisebb a δ, a fogyasztó annál kevesebbet tesz félre időskori fogyasztásra. Az is kiderül, hogy minél hatékonyabb a megtakarítás (minél nagyobb az R kamategyüttható), annál nagyobb lesz az időskori fogyasztás. Furcsa viszont, hogy az optimális megtakarítási hányad, s^o/w független a w keresettől: a valóságban ez növekvő függvény. Súlyosabb problémák jelentkeznek a többidőszakos általánosításnál (5.4. alfejezet).

Eddig nagyon egyszerű, paraméteres hasznosságfüggvényt alkalmaztunk. Mennyiben maradnak érvényesek eredményeink, ha tetszőleges hasznosságfüggvénnyel dolgozunk? Legegyszerűbb ilyen általánosítás a következő:

$$U(c, d) = u(c) + \delta u(d), \tag{5.11}$$

ahol $u(x)$ szigorúan növekvő és szigorúan konkáv skalár– skalár függvény, amelynek érintője $x = 0$-ban nagyon meredek, akár függőleges.

Az 5.3. feladat eredménye például érvényes marad.

5.3.* tétel. *Az (5.11) általános hasznosságfüggvény esetén az időskori fogyasztás pontosan akkor kisebb, mint a fiatalkori, ha a leszámítolási együttható és a kamategyütt-ható szorzata kisebb, mint 1:*

$$d^{\text{o}} < c^{\text{o}}, \qquad \text{ha} \qquad \delta R < 1.$$

Bizonyítás. A kalkulus segítségével könnyen adódik az állítás, de ekkor fel kell tenni, hogy u differenciálható függvény a $[0, w]$ szakaszon. Tekintsük a származtatott

$$U[s] = u(w - s) + \delta u(Rs)$$

függvényt. Deriváljuk $U[s]$-t, és a derivált gyökeként határozzuk meg a belső optimumot (2.6.* tétel):

$$U'[s] = -u'(w - s) + \delta Ru'(Rs) = 0.$$

Visszahelyettesítve az implicit optimumfeltételbe $(c^{\text{o}}, d^{\text{o}})$-t:

$$u'(c^{\text{o}}) = \delta Ru'(d^{\text{o}}).$$

Mivel u' csökkenő, ezért ha $c^{\text{o}} > d^{\text{o}}$, akkor

$$u'(d^{\text{o}}) > u'(c^{\text{o}}) = \delta Ru'(d^{\text{o}}),$$

s egyszerűsítve $u'(d^{\text{o}})$-vel, $\delta R < 1$ és viszont. ∎

Megjegyezzük, hogy ez az elegáns eredmény a valóságban gyakran nem érvényes. Elegendő, ha arra gondolunk, hogy milyen sokan vásárolnak nagyon magas (reál)kamatláb mellett, például a mostani 0 körüli infláció mellett évi 10–20%-os hitelre. Nehéz elhinni, hogy egy ilyen fogyasztó ilyen mértékben leszámítolná a jövő hasznosságát, inkább egyszerűen arról van szó, hogy a fogyasztó nagyon türelmetlen.

5.4. Három időszak, halasztás*

Mi történik, ha 2- helyett 3-időszakos pályát tanulmányozunk? A leszámítolás eredeti modelljében az egymást követő időszakok hasznosságaránya változatlan: exponenciális leszámítolás [(5.13)]. A valóságban azonban ez a feltevés gyakran sérül, s emiatt a döntéshozó az 1. időszak végén újraszámolja az optimális pályát: csak a 2. időszakban akarja elkezdeni az igazi takarékosságot, a fogyókúrát, stb. (Strotz, 1955 és Phelps–Pollak, 1968). Ezt az újratervezést az ún. *hiperbolikus leszámítolással* [(5.13H)] modellezzük (Laibson, 1997).

A képleteket egyszerűsítendő a kamatmentes esetet vizsgáljuk ($R = 1$): kereset helyett pozitív kezdővagyont vezetünk be W_0, a záró vagyon $W_3 = 0$. Akármilyen (c_1, c_2, c_3) fogyasztási pályára teljesül

$$W_1 = W_0 - c_1, \qquad W_2 = W_1 - c_2 \qquad \text{és} \qquad 0 = W_3 = W_2 - c_3.$$

Összeadva az egyenleteket, kiesnek az átmeneti vagyonok, az életpálya költségvetési feltétel egyszerűen

$$W_0 = c_1 + c_2 + c_3. \tag{5.12}$$

Kiindulásként az exponenciális leszámítolás esetét vizsgáljuk:

$$U(c_1, c_2, c_3) = \log c_1 + \delta \log c_2 + \delta^2 \log c_3, \qquad \text{ahol} \qquad \delta < 1. \tag{5.13}$$

Viszonylag egyszerűen belátható az

5.4. tétel. *a) Exponenciális leszámítolás és nulla kamatláb* ($R = 1$) *esetén az optimális fogyasztási pálya*

$$c_1^{\circ} = \frac{W_0}{1+\delta+\delta^2}, \qquad c_2^{\circ} = \delta c_1^{\circ} \qquad \text{és} \qquad c_3^{\circ} = \delta^2 c_1^{\circ}. \tag{5.14}$$

b) Ha az egyén az 1. időszak végén újraszámolná a pályát a $W_1 = W_0 - c_1^{\circ}$ *vagyonra és az*

$$U_1(c_2, c_3) = \log c_2 + \delta \log c_3 \tag{5.15}$$

maradék hasznosságfüggvényre, akkor a maradék optimum változatlan maradna: (5.14).

Bizonyítás. *a)* Az 5.2. tétel szerint ha rögzítjük a c_1 kezdő fogyasztást, akkor a maradék optimális pályára igaz, hogy $c_3(c_1) = \delta c_2(c_1)$. Hasonlóan, ha rögzítjük a c_3 záró fogyasztást, akkor a kezdő optimális pályára igaz, hogy $c_2(c_3) = \delta c_1(c_3)$. Összefűzve a két egyenlőséget:

$$c_2 = \delta c_1 \qquad \text{és} \qquad c_3 = \delta c_2 = \delta^2 c_1. \tag{5.16}$$

Az (5.12) életpálya-költségvetési feltételbe behelyettesítve (5.16)-ot, adódik (5.14).

b) Magától értetődő, de azért kiszámoljuk.

$$W_1^{\circ} = W_0 - c_1^{\circ} = \frac{\delta(1+\delta)W_0}{1+\delta+\delta}.$$

(5.14) szerint a „kezdő” optimális fogyasztás most

$$\tilde{c}_2 = \frac{W_1^{\circ}}{1+\delta} = \frac{\delta W_0}{1+\delta+\delta^2} = c_2^{\circ}$$

stb. ∎

Laibson (1997) vezette be a hiperbolikus leszámítolást, ahol a szokásos exponenciális leszámítolást a jövőben még egy $\varphi < 1$ második leszámítolási együttható fokozza. Tekintsük a $t = 1$-edik időszakban kezdődő optimalizálási feladatot:

$$U_H(c_1, c_2, c_3) = \log c_1 + \varphi[\delta \log c_2 + \delta^2 \log c_3], \qquad \text{ahol} \qquad \delta, \varphi < 1. \tag{5.13H}$$

Először a kezdeti terv optimumát számítjuk ki.

5.5. tétel. *Hipebolikus leszámítolásnál a kezdeti terv optimális fogyasztási pályája*

$$c_1^* = \frac{W_0}{1+\varphi\delta+\varphi\delta^2}, \qquad c_2^* = \varphi\delta c_1^* \qquad \text{és} \qquad c_3^* = \varphi\delta^2 c_1^*. \tag{5.17}$$

Bizonyítás. (5.15) értelmében időlegesen rögzítve c_1-t, a $c_3^* = \delta c_2^*$. Visszahelyettesítve (5.13H)-ba és elhagyva az érdektelen állandó tagot a második tagból:

$$V(c_1) = U_1(c_2^*, c_3^*) = \log c_2^* + \delta(\log c_2^* + \log \delta) \approx (1+\delta)\log c_2^*.$$

Visszatérünk (5.13H)-hoz:

$$U_H(c_1, c_2^*, c_3^*) \approx \log c_1 + \varphi(1+\delta) \log c_2^* \to \max\,,$$

feltéve, hogy

$$c_1 + (1+\delta)c_2^* = W_0$$

A 2.5. tétel 3. következményét $\gamma = 1$, $\beta = \varphi(1+\delta)$, $\alpha = 1/(1+\varphi(1+\delta))$, $p = 1$, $q = 1+\delta$ és $m = W_0$ szereposztásban alkalmazva, adódik (5.17). ∎

Rátérünk az újraszámolásra, s látni fogjuk, változik a tervezett optimum. Valóban, a $t = 1$-ben kezdődő célfüggvény már nem U_H 2. és 3. tagjának összege, hanem

$$\tilde{U}_2(c_2, c_3) = \log c_2 + \varphi\delta \log c_3,$$

s a költségvetési feltételből c_3-t „eltüntettük":

5.6. tétel. *Az újraszámolt maradék optimális pálya*

$$c_2^{**} = \frac{W_0\varphi(\delta+\delta^2)}{1+\varphi(\delta+\delta^2)(1+\varphi\delta)} \qquad \text{és} \qquad c_3^{**} = \varphi\delta c_2^{**}. \tag{5.18}$$

Bizonyítás.

$$W_0 = \frac{W_0}{1+\varphi\delta+\varphi\delta^2} + c_2^{**} + \varphi\delta c_2^{**}.$$

Rendezve c_2^{**}-ra, adódik (5.18). ∎

Az 5.5. és az 5.6. tétel összehasonlításából kimondható az

5.7. tétel. *Ha $\varphi < 1$, akkor az újratervezésnél a maradék két fogyasztás csökken az 5.5. tételbeli értékekhez képest:*

$$c_2^{**} < c_2^* \qquad \text{és} \qquad c_3^{**} < c_3^*.$$

Számpélda. $\delta = 0{,}5$, $W_0 = 1$. Az 5.2. táblázat 1. sora tartalmazza az exponenciális leszámítolásnál ($\varphi = 1$) a tervezett és a tényleges pályát, amelyek egybeesnek. A 2. sorban a hiperbolikus leszámítolás ($\varphi = 0{,}8$) miatt a két pálya elválik. A két sor összehasonlításából látható, hogy az 5.5. tétel érvényes.

5.2. táblázat. *Fogyasztási pályák exponenciális és hiperbolikus leszámítolásnál*

Leszámítolás	Kezdő	T e r v e z e t t		T é n y l e g e s	
		f o g y a s z t á s o k			
	c_1^*	c_2^*	c_3^*	c_2^{**}	c_3^{**}
Exponenciális	0,571	0,286	0,143	0,286	0,143
Hiperbolikus	0,625	0,250	0,125	0,268	0,100

6. Termelés, költség és profit

A közgazdaságtan központi fogalmai a termelés, a költség és a profit. 1. A termelésnek két alaptényezője van: a tőke és a munka. 2. Adott mennyiségű kibocsátást általában nagyon sok tőke–munka-kombinációval előállíthatunk, de minimális költségre törekedve általában egyértelmű az optimum. 3. A vállalkozó célja a bevétel és a kiadás közti különbség, a profit maximalizálása. Ha a piacon csak egy termelő tevékenykedik, akkor monopóliumról beszélünk, s ekkor a vevők ki vannak szolgáltatva a monopolistának. Ha nagyon sok kis termelő versenyez egymással, akkor a tökéletes verseny miatt eltűnnek a profitok. Néhány termelő versengése esetén oligopólium alakul ki, s ekkor a 3. fejezet Nash-egyensúlya adja a kimenetelt.

6.1. Termelés

A közgazdaságtan hagyományos módon megkülönböztet két termelési tényezőt: a tőkét és a munkát, jelük K és L. A termelési függvény a kibocsátást a két termelési tényező függvényében adja meg:

$$Q = F(K, L), \tag{6.1}$$

ahol az F függvény pozitív, és mindkét változójában növekvő. A mai megfigyelőnek talán a legszemléletesebb példa, ha összehasonlítja egy kis bolt napi forgalmát egy szupermarketéval: a jóval nagyobb tőkeellátottság miatt a szupermarketben 10 alkalmazott 100-szor nagyobb forgalmat bonyolít le, mint a kis boltban 3 alkalmazott. Ugyanakkor két egyforma berendezésű szupermarket forgalma is különbözhet attól függően, hogy hány hasonló bolt van a környéken: a rossz ellátottságú körzetben zsúfolásig telt a bolt, a jó ellátottságú körzetben viszont alig lézengenek a vásárlók.

Skálahozadék szempontjából háromféle termelési függvényt különböztetünk meg, aszerint, hogy miképp változik a kibocsátás, ha mindkét tényezőt egyforma mértékben ($\mu > 1$) bővítjük.

Állandó skálahozadékról beszélünk, ha a kibocsátás minden (K, L, μ) hármasra arányosan bővül:

$$F(\mu K, \mu L) = \mu F(K, L). \tag{6.2a}$$

Csökkenő skálahozadékról beszélünk, ha a kibocsátás minden (K, L, μ) hármasra az arányosnál kevésbé bővül:

$$F(\mu K, \mu L) < \mu F(K, L). \tag{6.2b}$$

Növekvő skálahozadékról beszélünk, ha a kibocsátás minden (K, L, μ) hármasra az arányosnál jobban bővül:

$$F(\mu K, \mu L) > \mu F(K, L). \tag{6.2c}$$

A legtöbb termelési függvény skálahozadék-típusa pontról pontra változhat. De vannak robusztus helyzetek. Például a kézműves termékek esetén a terjeszkedésnél könnyen nőhetnek aránytalanul a költségek, ezért nem érdemes növelni a vállalat méretét. Az autógyártásban viszont növekvő skálahozadék érvényes: a ma is talpon maradó, tömegautókat cégek egyenként évente több millió autót termelnek – hatékonyan.

A termelési függvény egyik általános jellegzetessége, hogy adott tartományban van *helyettesítés* a tőke és a munka között: lehet sok munkával és kevés tőkével; illetve kevés munkával és sok tőkével ugyanannyi terméket előállítani: e szintvonal latin neve izokvant. Most bemutatunk egy fontos speciális termelési függvényt.

6.1. példa. Cobb–Douglas-termelési függvény esetén K és L változóval

$$Q = AK^{\alpha}L^{\beta}, \tag{6.3}$$

ahol $A, \alpha, \beta > 0$.

6.1. feladat. Igazoljuk, hogy a Cobb–Douglas-termelési függvény állandó skálahozadékú, ha $\alpha + \beta = 1$, csökkenő; illetve növekvő skálahozadékú, ha $\alpha + \beta < 1$ vagy $\alpha + \beta > 1$.

A 6.1. példa és a 6.1. feladat alapján röviden vázolhatjuk a növekedéselmélet keretét (1957), amelyet megalkotójáról, Solow Nobel-díjas amerikai közgazdászról neveztek el. Q helyett Y-t írva, dinamizáljuk a (6.3) egyenletet:

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} L_t^{\beta}, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots. \tag{6.3'}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy mindhárom tényező egyenletes ütemben növekszik:

$$A_t = G_A^t, \qquad K_t = K_0 G_K^t, \qquad L_t = L_0 G_L^t, \tag{6.4}$$

ahol $G_A > 1$, $G_K > 1$ és $G_L > 1$ rendre a műszaki haladás, a tőke és a munka növekedési együtthatója.

6.1. tétel. *A Solow-keretben a kibocsátás növekedési együtthatója a három együttható súlyozott szorzata:*

$$G_Y = G_A G_K^{\alpha} G_L^{1-\alpha}, \qquad Y_t = Y_0 G_Y^t. \tag{6.5}$$

Bizonyítás. Helyettesítsük be (6.3′)-ba (6.4)-et:

$$Y_t = G_A^t (K_0 G_K^t)^{\alpha} (L_0 G_L^t)^{1-\alpha}. \tag{6.6}$$

Bevezetve az $Y_0 = K_0^{\alpha} L_0^{1-\alpha}$ jelölést, (6.6)-ból adódik (6.5). ∎

Gyorsan változó létszámú népesség esetén vizgálni kell az egy főre jutó termelés alakulását is. Ehhez a következő jelöléseket vezetjük be:

$$y_t = \frac{Y_t}{L_t} \qquad \text{és} \qquad k_t = \frac{K_t}{L_t}.$$

Ekkor (6.5) segítségével igazolható a 6.1. tétel következménye.

Következmény. *A Solow-modellben az egy főre jutó tőke növekedési együtthatója a tőke és a munka növekedési együtthatójának a hányadosa; az egy főre jutó termelés növekedési együtthatója a műszaki haladás és az egy főre jutó tőke α-adik hatványának a szorzata:*

$$G_k = \frac{G_K}{G_L}, \qquad G_y = G_A G_k^{\alpha}, \qquad y_t = y_0 G_y^t.$$

A modell elég jól leírja a fejlett országok hosszabb távú fejlődését. Jó közelítéssel a teljes gazdagságra összesítve $\alpha \approx 1/3$ és $\beta \approx 2/3$. Az USA-ban 1909 és 1949 között az egy főre jutó kibocsátás körülbelül megkétszereződött, azaz $G_y = 2^{1/40} = 1{,}017$, azaz a munkatermelékenység növekedési üteme 1,7% volt. Ugyanakkor $G_k \approx G_A/7$ volt, azaz a műszaki haladás hétszer annyit hozott a konyhára mint a gépesítés (feltéve, hogy el lehet a két dolgot választani egymástól).

A közgazdaságtanban, különösen éves adatoknál, a növekedési együtthatók helyett gyakrabban számolnak növekedési ütemekkel: $g = G - 1$, vagy esetünkben

$$g_Y = G_Y - 1, \qquad g_K = G_K - 1, \qquad g_L = G_L - 1, \qquad g_A = G_A - 1$$

és

$$g_y = G_y - 1, \qquad g_k = G_k - 1, \qquad g_l = G_l - 1.$$

Szerény éves növekedés esetén a együtthatókra érvényes (6.5) szorzategyenlőség helyett a növekedési ütemekre közelítő összegegyenlőségeket kapunk. Ennek heurisztikus levezetéséhez azonban egy segédtételre és annak következményére van szükség.

6.1. segédtétel. *Kicsiny növekedési ütemek esetén a szorzat növekedési üteme közelítőleg a növekedési ütemek összege:*

$$g_{AB} \approx g_A + g_B, \qquad \text{ha} \qquad g_A, g_B \approx 0.$$

Bizonyítás. A szorzat növekedési üteme

$$\frac{A_t B_t}{A_{t-1}B_{t-1}} - 1 = \frac{A_t B_t - A_{t-1}B_{t-1}}{A_{t-1}B_{t-1}}.$$

Kivonva a számlálóból és hozzáadva a számlálóhoz $A_{t-1}B_t$-et, majd rendezve:

$$\frac{A_t B_t - A_{t-1}B_t + A_{t-1}B_t - A_{t-1}B_{t-1}}{A_{t-1}B_{t-1}} = \frac{B_t}{B_{t-1}} \frac{A_t - A_{t-1}}{A_{t-1}} + \frac{B_t - B_{t-1}}{B_{t-1}} = \frac{B_t}{B_{t-1}} g_A + g_B.$$

Ha $B_t \approx B_{t-1}$, akkor érvényes a közelítő egyenlőség. ∎

Számpélda: $G_A = 1{,}02$ és $G_B = 1{,}01$ esetén $G_{AB} = 1{,}0302 \approx 1 + 0{,}02 + 0{,}01$.

Következmény. *Kicsiny növekedési ütemek esetén egy (egész vagy törtkitevős) hatvány növekedési üteme közelítőleg a kitevő szorozva az alap növekedési üteme:* $g_{A^\alpha} \approx \alpha g_A$.

Bizonyítás. A 6.1. segédtétel teljes indukcióval tetszőleges számú tényezőre igazolható:

$$g_{AB\cdots Z} \approx g_A + g_B + \cdots + g_Z.$$

Legyen először α racionális szám: $\alpha = p/q$, ahol p és q természetes számok. Ekkor $B = A^{1/q}$ jelöléssel $A = B^q$, azaz $A^\alpha = B^p$, a segédtétel szerint

$$g_A \approx q\, g_B, \qquad \text{és} \qquad g_{A^\alpha} \approx p\, g_B \approx \frac{p}{q} g_A.$$

Ha α irracionális, akkor racionális számok sorozatával közelítve az állítás érvényben marad. ∎

Az előző két állításból következnek az alábbi Solow-féle közelítések: $g_Y \approx g_A + \alpha g_K + (1-\alpha) g_L$, $g_k \approx g_K - g_L$ és $g_y \approx g_A + \alpha g_k$.

Egy másik fontos példa következik.

6.2. példa. A Leontief-féle termelési függvény:

$$Q = \min(aK, bL),$$

ahol $a, b > 0$. Ránézésre megállapíthatjuk, hogy a Leontief-féle termelési függvény állandó skálahozadékú és az optimumban ($aK = bL$) nincs helyettesítés a tőke és munka között. Például első közelítésben 100 egyforma buszhoz egy műszakban 100 sofőrre van szükség.

6.2. Költségfüggvény

Tekintsünk egy vállalatot, amely egy órára egységnyi tőkét r kamatlábért és egységnyi munkát w órabérért tud bérelni. Ekkor a Q mennyiség előállítási költsége (6.1) mellett

$$C(K, L) = rK + wL. \tag{6.7}$$

A vállalkozó olyan (K, L) kombinációt keres, amelyre a költség minimális:

$$C(Q) = \min[rK + wL|\ Q = F(K, L)]. \tag{6.8}$$

A $C(Q)$ függvényt *költségfüggvénynek* nevezzük.

Érdemes megemlíteni, hogy a síkban ábrázolva az adott kibocsátást nyújtó (K, L) párokat, az ún. *isocost* görbét kapjuk, a költségegyenes a minimum pontban érinti a görbét.

6.2. feladat. Határozzuk meg a Leontief-féle termelési függvényre a költségfüggvényt!

Bonyolultabb a (6.3) Cobb–Douglas termelési függvény költségfüggvénye. Először két elemileg könnyen kezelhető esetet mutatunk be.

6.3. példa. $\alpha = 1/2$ és $\beta = 1/2$, $A = 1$. Ekkor$K = Q^2/L$, azaz $c(L) = rQ^2/L + wL$. A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget alkalmazzuk:

$$\frac{rQ^2}{L} + wL \geq 2Q\sqrt{rw},$$

(a jobb oldal fix), és két oldal egyenlősége éppen a két tag egyenlősége esetén valósul meg:

$$\frac{rQ^2}{L} = wL,$$

azaz

$$L(Q) = \sqrt{\frac{r}{w}}Q \qquad \text{és} \qquad K(Q) = \sqrt{\frac{w}{r}}Q.$$

Második példánkat, amely empirikusan releváns, feladatként fogalmazzuk meg:

6.3. feladat. $\alpha = 1/3$ és $\beta = 2/3$, $A = 1$. Igazoljuk, hogy az optimális munka–tőke-pár

$$L(Q) = \sqrt[3]{\frac{2r}{w}}Q \qquad \text{és} \qquad K(Q) = \sqrt[3]{\frac{w^2}{4r^2}}Q.$$

Most a kalkulus alkalmazásával kimondjuk az általános tételt.

6.2.* tétel. *Állandó hozadékú Cobb–Douglas termelési függvény esetén ($\alpha+\beta = 1$), az optimális tőke– munka kombináció*

$$L^{\text{o}} = \left(\frac{(1-\alpha)r}{\alpha w}\right)^{\alpha} Q \qquad \text{és} \qquad K^{\text{o}} = \left(\frac{\alpha w}{(1-\alpha)r}\right)^{1-\alpha} Q. \tag{6.9}$$

Bizonyítás. Fejezzük ki (6.3)-ból az adott Q-hoz és L- hez tartozó K-t:

$$K(Q, L) = Q^{1/\alpha}L^{-\beta/\alpha}. \tag{6.10}$$

Behelyettesítve a kapott képletet (6.8)-ba:

$$C(Q) = \min_L c(L) \qquad \text{ahol} \qquad c(L) = rQ^{1/\alpha}L^{-\beta/\alpha} + wL.$$

A lokális minimumot a származtatott költségfüggvény deriváltjának a gyöke adja:

$$0 = c'(L) = -r(\beta/\alpha)Q^{1/\alpha}L^{-\beta/\alpha-1} + w.$$

Rendezve $L(Q)$-ra,

$$L^{1/\alpha} = \frac{r\beta}{w\alpha}Q^{1/\alpha},$$

ahonnan (6.10) segítségével (6.9) két képlete adódik. ∎

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy optimális esetben adott r kamatláb esetén minél nagyobb a w órabér, annál kevesebb munkát alkalmaznak, és adott w órabér esetén minél nagyobb az r kamatláb, annál kevesebb tőkét alkalmaznak. A fejlődés a kevesebb munka és a több tőke felé mutat. Gyakorlati fontossága miatt kitérünk a következő kvadratikus költségfüggvényre:

$$C(Q) = a + bQ + cQ^2, \tag{6.11}$$

ahol $a > 0$ a fixköltség, $b > 0$ az arányos költségegyüttható és $c > 0$ az emelkedő költségek együtthatója.

6.3. tétel. *A (6.11) kvadratikus költségfüggvény mellett a $C(Q)/Q$ átlagköltség a minimumát a*

$$Q^{\mathrm{o}} = \sqrt{\frac{a}{c}}. \tag{6.12}$$

pontban veszi föl.

Megjegyzés. Minél nagyobb az a fix költség, illetve minél kisebb a c emelkedő költség-együttható, annál nagyobb az optimális kibocsátás.

Bizonyítás. (6.11) esetén

$$\frac{C(Q)}{Q} = \frac{a}{Q} + b + cQ.$$

A számtani és a mértani közép egyenlőtlensége miatt

$$\frac{a}{Q} + cQ \geq 2\sqrt{ac},$$

és az egyenlőség csak a két tag egyenlősége esetén valósul meg:

$$\frac{a}{Q} = cQ,$$

azaz (6.12) teljesül. ∎

6.3. Profit

A tőkés *profitja* a bevétel és a költség különbsége:

$$\pi(K, L, Q) = pQ - rK - wL, \tag{6.13}$$

ahol p a termék egységára. Első látásra paradox módon a 6.2.* tétel optimumát behelyettesítve határozatlan az optimum.

Másfelé vizsgálódunk. Homogén lineáris költségfüggvényt tételezünk föl: $C(Q) = cQ$. Adott a $P(Q) = a - bQ$ inverz keresleti görbe (5. fejezet), és $c < a$, a a 0 keresletehez tartozó maximális árat mutatja, míg b az inverz keresleti egyenes meredeksége, az a szám, amennyivel az ár csökken, ha a fogyasztás egy termékegységgel növekszik. Mekkora kibocsátást választ egy monopolista?

6.4. tétel. *Lineáris inverz-keresleti függvény esetén a monopolista számára az optimális kibocsátás*

$$Q_M = \frac{a - c}{2b}. \tag{6.14}$$

Megjegyzés. Minél nagyobb a maximális ár és az egységköltség $a - c$ különbsége, illetve minél kisebb a b meredekség, annál nagyobb az optimális monopoltermelés, tehát annál kevésbé ártalmas a monopólium.

Bizonyítás. A profitfüggvény a bevétel és a költség különbsége:

$$\pi(Q) = [P(Q) - c]Q = (a - c - bQ)Q. \tag{6.15}$$

A 2.4. tétel szerint a maximumot (6.14) adja. ∎

Visszakanyarodunk a 3. fejezetbeli játékelmélethez. Feltesszük, hogy adott piacon két vállalat verseng egymással, és egyfajta duopolista egyensúlyt keressük (Cournot, 1838). Felírjuk az inverz-keresleti függvényt: $P(Q_1, Q_2) = a - b(Q_1 + Q_2)$ és behelyettesítjük mindkét vállalat profitfüggvényébe:

$$\pi_1(Q_1, Q_2) = [a - c - b(Q_1 + Q_2)]Q_1 \qquad \text{és} \qquad \pi_2(Q_1, Q_2) = [a - c - b(Q_1 + Q_2)]Q_2.$$

Mivel nincs összejátszás, *duopolista egyensúlynak* ($n = 2$) nevezzük a (Q_1^*, Q_2^*) kibocsátáspárt, ha tetszőleges (Q_1, Q_2) kibocsátáspár esetén teljesül

$$\pi_1(Q_1^*, Q_2)^* \geq \pi_1(Q_1, Q_2^*) \qquad \text{és} \qquad \pi_2(Q_1^*, Q_2^*) \geq \pi_2(Q_1^*, Q_2).$$

Lineáris inverz keresleti és azonos költségfüggvények (szimmetrikus duopólium) esetén az egyensúly explicite meghatározható.

6.5. tétel. *A Cournot-féle szimmetrikus duopóliumban a két vállalat egyensúlyi kibocsátása*

$$Q_1^* = Q_2^* = \frac{a - c}{3b}. \tag{6.16}$$

Megjegyzés. Vannak másféle duopóliumok is, például a Stackelberg-duopólium, de azzal majd a 8. fejezetben foglalkozunk.

Bizonyítás. Az 1. vállalat Q_2-t adottnak véve maximalizálja profitját, és a 2. vállalat Q_1-t adottnak véve maximalizálja profitját. Ismét a 2.4. tétel szerint

$$Q_1(Q_2) = \frac{a - c - bQ_2}{2b} \qquad \text{és} \qquad Q_2(Q_1) = \frac{a - c - bQ_1}{2b}. \tag{6.17}$$

A szimmetria miatt $Q_1 = Q_2$, azaz (6.17)-ből rendezéssel (6.16). ∎

Következmény. *Mivel a duopolisták együttes termelése nagyobb, mint a monopolistáé: $Q_D = Q_1^* + Q_2^* > Q_M$, ezért a piaci ár alacsonyabb: $P(Q_D) < P(Q_M)$; tehát a duopólium jobb a társadalomnak, mint a monopólium.*

Érdekes, hogy nagyon egyszerű modellünkben egy duopolista vállalat termelése 2/3-a a monopolistáénak, de kettőjük össztermelése 4/3-szorosa.

Újabb két feladat következik.

6.4. feladat. Határozzuk meg az aszimmetrikus duopolista egyensúlyt, azaz, amikor a költségegyütthatók különbözők: $c_1 > c_2$.

6.5. feladat. * Képzeljünk el (6.17) alapján egy időben zajló alkalmazkodási folyamatot. Az egyik vállalat $t + 1$- edik időszakos kibocsátása a másik vállalat t-edik időszakos kibocsátására adott *legjobb válasz*:

$$Q_{1,t+1} = \frac{a - c - bQ_{2,t}}{2b} \qquad \text{és} \qquad Q_{2,t+1} = \frac{a - c - bQ_{1,t}}{2b}, \quad t = 1, 2, \ldots \tag{6.17'}$$

A kétidőszakos késleltetésű $\hat{Q}_{i,t+1} = f_i(\hat{Q}_{i,t-1})$ rekurzió segítségével igazoljuk, hogy a folyamat tart (6.16)-beli Nash-egyensúlyhoz!

Zárásul két vállalatról n vállalatra, oligopóliumra általánosítjuk a 6.5. tételt (ugyanaz a görög szógyök, az oligó, amely az „oligarchákban" szerepel). Mindenekelőtt meg kell fogalmaznunk az oligopól egyensúlyt, a felfedezőjéről Nash-egyensúlynak nevezett fogalmat. Ehhez célszerű bevezetni az i-edik vállalat ellenfeleinek össztermelését:

$$Q_{-i} = Q_1 + \cdots + Q_{i-1} + Q_{i+1} + \cdots + Q_n.$$

Szerencsére lényegtelen az n vállalat kibocsátási vektora: $(Q_1, \ldots, Q_i, \ldots, Q_n)$, az i-edik vállalat profitja egyszerűen $\pi_i(Q_i, Q_{-i})$. Az oligopolista egyensúly definíciója: (Q_i^*, Q_{-i}^*), ha tetszőleges (Q_i, Q_{-i}) kibocsátáspár esetén teljesül

$$\pi_i(Q_i^*, Q_{-i}^*) \geq \pi_i(Q_i, Q_{-i}^*), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Lineáris inverz-keresleti és költségfüggvény esetén az egyensúly explicite meghatározható.

6.6. tétel. *A szimmetrikus n-szereplős oligopolista egyensúlyban mindegyik vállalat egyensúlyi kibocsátása azonos:*

$$Q_i^*(n) = \frac{a-c}{(n+1)b}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.18}$$

Bizonyítás. Felírjuk az inverz-keresleti függvényt: $P(Q_i, Q_{-i}) = a - b(Q_i + Q_{-i})$ és behelyettesítjük az i-edik vállalat profitfüggvényébe:

$$\pi_i(Q_i, Q_{-i}) = [a - c - b(Q_1 + Q_{-i})]Q_i.$$

Az i-edik vállalat Q_{-i}-t adottnak véve maximalizálja profitját. Ismét a 2.4. tétel szerint

$$Q_i(Q_{-i}) = \frac{a - c - bQ_{-i}}{2b}. \tag{6.19}$$

A szimmetria miatt $Q_{-i} = (n-1)Q_i$, azaz (6.19)-ből rendezéssel adódik (6.18). ∎

Megjegyezzük, hogy (6.18) értelmében az összkibocsátás

$$Q^*(n) = nQ_1^*(n) = \frac{(a-c)n}{(n+1)b}$$

a vállalatok számával monoton növekvően tart a

$$Q_C^* = \frac{a-c}{b}$$

versenyegyensúlyhoz, ahol a megfelelő ár maga az egységköltség, és a profitok eltűnnek:

$$P_C = a - bQ_C^* = c \qquad \text{és} \qquad \pi_1 = \cdots = \pi_n = \cdots = 0.$$

Ez a közgazdaságtan egyik legfontosabb eredménye: lineáris költségfüggvények esetén minél több szimmetrikus vállalat verseng egymással, összességében annál többet termelnek, és annál inkább megközelítik a tökéletes versenyegyensúlyt.

6.6. feladat. * *a)* Képzeljünk el (6.19) alapján egy időben zajló alkalmazkodási folyamatot:

$$Q_{i,t+1} = \frac{a - c - bQ_{-i,t}}{2b}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 1, 2, \dots \tag{6.19$'$}$$

A $\hat{Q}_{t+1} = f_i(\hat{Q}_{t-1})$ aggregált rekurzió segítségével igazoljuk, hogy a folyamat már $n = 3$ esetén sem tart (6.18)-beli Nash-egyensúlyhoz, kivéve azt az irreális esetet, amikor a kezdeti eltérések összege 0!

b) Ha a vállalatok korrekciós tényezőt építenek be a reakcióikban, például az eltérésváltozókban $1/2$-es szorzó helyett $2/n$-est alkalmaz:

$$\hat{Q}_{i,t+1} = \frac{2\hat{Q}_{-i,t}}{n}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 1, 2, \dots \tag{6.19$''$}$$

akkor a rendszer aggregáltan (de vállalatonként is) tart az egyensúlyhoz.

7. Stabilitás, ciklus és káosz*

Dinamikus rendszerről beszélünk, ha az időben változó állapot a korábbi állapotoktól *függ*. A lineáris dinamikus rendszerek elmélete viszonylag egyszerű, különösen a skalár (azaz egyváltozós) esetben (vö. 2.1– 2.2. alfejezet és 4. fejezet). A linearitás azonban legtöbbször csak közelítés. Nemlineáris rendszerekben általában nem tudjuk megadni explicite a pályát, s a stabilitás mellett természetesen jelenik meg a ciklus, sőt a káosz: ez utóbbi esetben egymáshoz közelről induló korlátos pályák eltávolodnák egymástól. Közgazdasági alkalmazásként a lineáris ciklusmodellt általánosítjuk nemlineárisra.

7.1. Nemlineáris dinamikus rendszerek

Egyszerűségük miatt a lineáris rendszerek modelljei sokszor nagyon hasznosak, de máskor túl kell lépnünk rajtuk. Például amikor olyan korlátos rendszert vizsgálunk, amely nem stabil. Ehhez szükségünk van egy f függvényre, amely a $[0, 1]$ szakaszt önmagába képezi le. A dinamikus rendszer mozgását, az állapotváltozást az állapotegyenlet írja le:

$$x_{t+1} = f(x_t), \qquad t = 0, 1, 2, \dots, \qquad x_0 \qquad \text{adott.} \tag{7.1}$$

7.1. példa. Az egyik legegyszerűbb nemlineáris függvény az ún. logisztikus függvény (a logisztikus görbével való kapcsolatát mellőzzük), és az általa létrehozott dinamikus rendszer:

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t), \qquad t = 0, 1, 2, \dots, \qquad x_0 \qquad \text{adott.} \tag{7.2}$$

Könnyű belátni, hogy $0 < a \leq 4$ esetén a logisztikus leképezés a $[0, 1]$ szakaszt a $[0, 1]$ szakaszba képezi le.

Feltehetjük, hogy az f függvény folytonos, szemléletesen szólva a görbét le tudjuk rajzolni a ceruza felemelése nélkül. Ezért közeli kezdőállapotokból induló pályák az 1. időszakban is közel maradnak egymáshoz. A folytonosságnak egy speciális alesetét választva, feltesszük, hogy van olyan $L > 0$ állandó, amelyre a képpontok távolsága legfeljebb L-szerese a tárgypontokénak:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \qquad \text{minden} \qquad (x, y) \qquad \text{párra.} \tag{7.3}$$

A (2.1) $f(x) = Ax + B$ lineáris leképezésnél (7.3)-ban $L = |A|$ elegendő.

A következő példa mutatja, hogy ez a feltevés nem minden folytonos függvényre teljesül.

7.2. példa. A $[0,1]$ szakaszon definiált $f(x) = \sqrt{x}$ négyzetgyök-függvényre $x \approx 0$-ra (7.3) nem teljesül.

(7.1)-ben egymás után elvégezve a behelyettesítéseket, a t-edik időszak állapota elvileg egyszerű függvénye marad a kezdőállapotnak, de a lineáris esettel ellentétben, általában nincs explicit megoldás, képlettel megadható pálya. Teljes indukcióval (7.3)-ból könnyen levezethető, hogy a szomszédos pályákra teljesül

$$|y_t - x_t| \le L^t |y_0 - x_0|, \qquad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{7.4}$$

Ha csak adott T-ig vagyunk kíváncsiak az eltérésre, akkor akármilyen nagy L, (7.4) jobb oldala is korlátos marad, ha y_0 elég közel van x_0-hoz. Például $L = 2$ és $T = 10$ esetén a (7.4)-es szorzó már 1024, de ez még ellensúlyozható! Ahhoz viszont, hogy akármekkora T-re korlátos maradjon az eltérés, (7.4) értelmében az $L \le 1$ egyenlőtlenséget kellene feltennünk. Megelégszünk egy lazább definícióval.

Előrejelezhetőségről beszélünk vagy azt mondjuk, hogy a rendszer *érzéketlen* az x_0 kezdőértékre, ha egymáshoz megfelelően közeli kezdőállapotból induló pályák mindvégig megfelelően közel maradnak. Például még ha 1 perc hibával mérjük a delet, akkor sem veszítjük szem elől a Nap pályáját az égbolton vagy a Föld pályáját a Nap körül. Ugyanilyen jól előrejelezhetjük az ágyúból kilőtt golyó pályáját.

Egyensúly és stabilitás

A lineáris rendszerekben bevezetett egyensúlyi helyzet általánosítható a nemlineáris rendszerekre. Képletben: x^{o} egyensúlyi helyzet, ha $x^{\mathrm{o}} = f(x^{\mathrm{o}})$: azaz x^{o} az $f(\cdot)$-nak fix pontja. Szemléletesen belátjuk, hogyha egy folytonos leképezés például a $[0,1]$ szakaszt önmagába képzi le, akkor létezik legalább egy fix pontja. Hamarosan látni fogjuk, hogy adott rendszernek létezhet több egyensúlyi helyzete is (7.2.* tétel).

Már a lineáris rendszer (2.1–2.2. alfejezetbeli) tárgyalásakor láttuk, hogy egy egyensúlyi helyzet vagy (aszimptotikusan) stabil vagy instabil. Nemlineáris rendszerben az aszimptotikus stbilitáson belül meg kell különböztetnünk a lokális és a globális stabilitást. Matematikai szabatosságról lemondva, azt mondjuk, hogy az x^o egyensúlyi helyzet *lokálisan stabil*, ha minden, hozzá elég közeli kezdőállapotból induló pálya közel marad az egyensúlyhoz. *Lokális aszimptotikus stabilitás* rendszerben a közeli kezdőállapotból induló pályák nemcsak közel maradnak, hanem aszimptotikusan tartanak az egyensúlyi helyzethez. *Globálisan* aszimptotikusan stabilnak nevezzük a rendszert, ha az aszimptotikus közelítés tetszőleges kezdeti állapotra igaz. (Például a pincér tálcáján billegő pohár helyzete csak lokálisan stabil, de globálisan nem.)

Könnyű belátni, hogy a lineáris rendszerekhez hasonlóan a nemlineáris rendszerekben is igaz a következő állítás:

7.1. tétel. *Ha egy egyensúlyi állapot stabil, akkor a (7.1) rendszer pályái érzéketlenek az egyensúlyhoz közeli kezdeti állapotra.*

Bizonyítás. Valóban, a két pálya, (x_t) és (y_t) távolsága

$$y_t - x_t = y_t - x^{\mathrm{o}} + x^{\mathrm{o}} - x_t$$

alapján becsülhető:

$$|y_t - x_t| \le |y_t - x^{\mathrm{o}}| + |x^{\mathrm{o}} - x_t|. \tag{7.5}$$

A stabilitás miatt (7.5) jobb oldalán mindkét tag kicsi, tehát összegük is az. ∎

A következőkben e logisztikus leképezés paraméter- intervallumát leszűkítjük: $1 < a \le 4$, s az itt definiált dinamika egyensúlyi helyzetét és stabilitását, illetve annak hiányát elemezzük. ($0 < a \le 1$ érdektelen, mert minden pálya a 0-hoz tart.) Helykímélés céljából közös táblázatban mutatjuk be a négy különböző paraméterértékre, de azonos kezdőértékre vonatkozó dinamikát. Az $x_t(a)$ jelölésben a a paraméter értéke. A pályák elnevezése csak később válik világosabbá.

7.1. táblázat. *Különböző paraméterű logisztikus pályák*

	A s z i m p t o t i k u s a n			
Idő	stabil	2-ciklikus	3-ciklikus	Kaotikus
t	$x_t(2)$	$x_t(3{,}2)$	$x_t(3{,}839)$	$x_t(4)$
0	0,140	0,140	0,140	0,140
1	0,241	0,385	0,462	0,482
2	0,366	0,758	0,954	0,999
3	0,464	0,587	0,168	0,005
4	0,497	0,776	0,535	0,022
5	0,500	0,557	0,955	0,084
6	0,500	0,790	0,165	0,309
7	0,500	0,531	0,529	0,853
8	0,500	0,797	0,956	0,500
9	0,500	0,518	0,160	1,000
10	0,500	0,799	0,516	0,000
11	0,500	0,514	0,959	0,000
12	0,500	0,799	0,152	0,000
13	0,500	0,513	0,494	0,000
14	0,500	0,799	0,960	0,001
15	0,500	0,513	0,149	0,003

Először egy elemi tételt mondunk ki, amelynek szabatos bizonyításához azonban magasabb matematikára lenne szükség.

7.2. tétel. *a) Ha egy f függvény folytonos, és a $[0,1]$ szakaszt önmagába képzi le, akkor létezik legalább egy fix pontja: $x^o = f(x^o) \in [0,1]$.*

b) Ha egy f függvény emellett még szigorúan növekvő és szigorúan konkáv, akkor pontosan egy fix pont létezik, és a (7.1) iteráció tart ehhez a fix ponthoz.

Bizonyítás. *a)* Ha $f(0) = 0$ vagy $f(1) = 1$, akkor $x^o = 0$ vagy 1 fix pont. A továbbiakban kizárjuk őket. Ekkor szemléletesen magától értetődő az állítás: az $y = f(x)$ görbe az $y = x$ átló fölött indul: $f(0) > 0$, alatta végződik: $f(1) < 1$, közben legalább egy helyen metszi az átlót: $f(x^o) = x^o$.

b) Ha a leképezésnek legalább két különböző fix pontja lenne, akkor két szomszédos fix pont közti szakaszon a szigorú konkavitás nem állhatna fenn.

A szigorú konkavitás miatt igaz a következő egyenlőtlenség-rendszer:

$$\text{ha} \quad x < x^{\text{o}}, \quad \text{akkor} \quad x < f(x) < x^{\text{o}}; \tag{7.6a}$$

$$\text{ha} \quad x > x^{\text{o}}, \quad \text{akkor} \quad x > f(x) > x^{\text{o}}. \tag{7.6b}$$

Feltevés szerint igaz, hogy

$$\text{ha} \quad x_t < x^{\text{o}}, \quad \text{akkor} \quad x_t < x_{t+1} < x^{\text{o}}; \tag{7.7a}$$

$$\text{ha} \quad x_t > x^{\text{o}}, \quad \text{akkor} \quad x^{\text{o}} < x_{t+1} < x_t. \tag{7.7b}$$

Az *a)* esetben egy felülről korlátos monoton növekvő sorozatunk van, a *b)* esetben pedig egy alulról korlátos monoton csökkenő sorozatunk van – mindkettő konvergens. A folytonosság miatt a határérték a fix pont. ∎

Egy példát mutatunk a 7.2. tétel alkalmazásra.

7.2. példa. (folytatás) Az $f(x) = \sqrt{x}$ egyenlet fixpontja $x^{\text{o}} = 1$, és ez globálisan aszimptotikusan stabil.

A következő példa csak szellemében kapcsolódik a 7.2. tételhez.

7.3. példa. Már az ókori babilóniaiak is egy (7.1) alakú iterációs eljárással közelítették meg a $\sqrt{2}$-t a következő eljárással – tetszőleges $x_0 > \sqrt{2}$ kezdőértékkel:

$$x_{t+1} = \frac{1}{2}\left(x_t + \frac{2}{x_t}\right), \qquad t = 0, 1, \ldots. \tag{7.8}$$

7.1. feladat. Alkalmazzuk a 7.2. tétel gondolatmenetét a (7.8) iterációra!

Mit mondhatunk, ha f nem mindenütt növekszik?

Következmény. *Tegyük föl, hogy a 7.2.a tételbeli függvény csak a fixpontot tartalmazó $[0, x^*]$ szakaszon ($0 < x^{\text{o}} < x^*$) növekszik, utána csökken. Az x^{o} pont ekkor is globálisan aszimptotikusan stabil.*

Bizonyítás. Elegendő az $x^* \le x_0 \le 1$ kezdőállapotokra szorítkozni. Mivel f itt csökken, $x_1 = f(x_0) < f(x^*) < x^*$, azaz $x_1 < x^*$, a folyamat visszatér a növekvő tartományba. ∎

Alkalmazzuk a 7.2. tétel következményét a logisztikus függvényre, ahol $x^* = 1/2$. (A 7.1. táblázat 1. pályája aszimptotikusan stabil, már a $t = 5$ időszakban eléri az egyensúlyi helyzetet – legalábbis az első 3 tizedes jegyben).

7.3. tétel. *a)* $1 < a \le 4$ *esetén a (7.2) logisztikus rendszer egyensúlyi helyzete*

$$x^{\mathrm{o}} = \frac{a-1}{a} \in (0,1).$$

b) $1 < a \le 2$ *esetén az* $x^{\mathrm{o}} \le 1/2$ *egyensúlyi helyzet – kivételes kezdőállapotoktól* ($x_0 = 0$ *és 1) eltekintve – globálisan aszimptotikusan stabil.*

Valójában a logisztikus leképezésnek még egy egyensúlyi helyzete van, a triviális 0 pont, ettől azonban eltekintünk. Nemcsak az onnan, de az 1-ből (illetve 0,5-ből stb.) induló pálya is a 0-ba ugrik, és ott is marad.

Nehezebb a stabilitási elemzés, ha f a fix pont mindkét oldalán csökkenő (például a logisztikus függvénynél $2 < a < 3$). Ekkor újabb fogalmat vezetünk be. Ha (7.3)-ban $L < 1$ áll, akkor a leképezést *kontrakciónak* (zsugorításnak) nevezik, ez szavatolja az egyensúlyi helyzet egyértelműségét és globális aszimptotikus stabilitását. Pontosabban, csak heurisztikus bizonyítást adunk a 2.1. tétel nemlineáris általánosítására:

7.4.* tétel. *Ha a* $[0,1]$ *szakaszt az* f *leképezés önmagába képzi le, és zsugorít, azaz alkalmas* $0 < q < 1$*-re*

$$|f(x) - f(y)| \le q|x-y| \qquad \text{minden} \qquad (x,y) \qquad \text{párra,} \tag{7.3q}$$

akkor az egyensúlyi helyzet létezik, egyértelmű és globális aszimptotikus stabil.

Megjegyzés. A 7.4.* tétel feltételei bizonyos mértékben szükségesek is. Például az $f(x) = 0{,}5(x+3)$ leképezés a $[0,1]$ szakaszt az $[1{,}5;\, 2]$ szakaszba képezi le, és természetesen nincs fix pontja. A zsugorítás már a lineáris leképezésnél is szükséges a stabilitáshoz. Az a meglepő, hogy ezek a feltételek elégségesek.

Bizonyítás. Az egyensúly létezését már a 7.2. tételben beláttuk. Az egyértelműséget ismét indirekt igazoljuk: legyen $x^{\mathrm{o}} \ne y^{\mathrm{o}}$ két fix pont: $x^{\mathrm{o}} = f(x^{\mathrm{o}})$ és $y^{\mathrm{o}} = f(y^{\mathrm{o}})$. Felírva rájuk a zsugorítási feltételt:

$$|y^{\mathrm{o}} - x^{\mathrm{o}}| = |f(y^{\mathrm{o}}) - f(x^{\mathrm{o}})| \le q|y^{\mathrm{o}} - x^{\mathrm{o}}|.$$

Egyszerűsítve $|y^{\mathrm{o}} - x^{\mathrm{o}}|$-vel: $1 \le q < 1$ – ellentmondás.

A globális stabilitást heurisztikusan igazoljuk:

$$|x_{t+1} - x^{\mathrm{o}}| = |f(x_t) - f(x^{\mathrm{o}})| \le q|x_t - x^{\mathrm{o}}|.$$

Teljes indukcióval: $|x_t - x^{\mathrm{o}}| \le q^t|x_0 - x^{\mathrm{o}}|$ aszimptotikusan tart 0-hoz. ∎

A 7.4.* tétel alkalmazásaként adódik a

7.5. tétel. *a)* $2 < a \le 3$ *esetén az* x^{o} *egyensúlyi helyzet – kivételes kezdőállapotoktól eltekintve – globálisan aszimptotikusan stabil, b)* $3 < a \le 4$ *esetén instabil.*

Bizonyítás. *a)* Vonjuk ki egymásból az

$$x_{t+1} = ax_t - ax_t^2 \qquad \text{és} \qquad x^o = ax^o - a(x^o)^2$$

egyenletet, és vezessük be az $\hat{x}_t = x_t - x^o$ eltérésváltozót. Ekkor

$$\hat{x}_{t+1} = a\hat{x}_t - a(x_t + x^o)\hat{x}_t = (1 - ax_t)\hat{x}_t.$$

Ha $-1 < 1 - ax_t < 1$ teljesül, akkor a 7.4.* tétel értelmében igazoltuk a stabilitást. Ehhez csak azt kell feltennünk, hogy $x_0 < 2/a$, mert ebből már következik $x_{t+1} < 2/a$. A befejezést az Olvasóra hagyjuk.

b) Ha $3 \le a \le 4$, akkor a fix pont körül induló pályák széttartanak, hiszen $\hat{x}_t$ együtthatója kisebb mint –1. ∎

Ciklusok

A természetben számos dinamikus rendszer pályája ismétlődik, azaz ciklikus (4. fejezet). Például a Nap körül keringő Föld (kerekítve) 365 naponként visszatér eredeti helyzetébe. A szívverés és a légzés is periodikus. Diszkrét idejű rendszerben egy $P > 1$ természetes szám esetén P-ciklusról beszélünk, ha az f leképezés hatására keletkező (x_t) pálya P időszakonként *ismétlődik*, de korábban nem. Formálisan: az $(x_1, x_2, \ldots, x_P)$ vektort P-ciklusnak nevezzük, ha teljesül a következő egyenlőségsorozat:

$$x_2 = f(x_1), \qquad \ldots, \qquad x_P = f(x_{P-1}) \qquad \text{és} \qquad x_1 = f(x_P).$$

Ebből következik, hogy tetszőleges természetes k-ra $x_{Pk+r} = x_r$, $r = 1, 2, \ldots, P$. Elfajult eseteket kizárandó feltesszük, hogy a nevezett vektor minden eleme különböző.

A lineáris esetben a 2.2.–2.3. és a 4.1. alfejezetben már találkoztunk a fűrészfog-ciklussal, amely azonban szinte triviális: a kezdőállapot ismétlődik. Annál érdekesebb viszont a 7.1. táblázat 2. pályája, mert az független a kezdőállapottól, egyébként a $t = 12$. időszakban közelítőleg visszatér a 2 időszakkal korábbi helyzetébe, és ez rendületlenül ismétlődik. Ezt fejezi ki általánosabban is a

7.6. tétel. *A (7.2) logisztikus leképezésnek pontosan egy 2-ciklusa van, ha* $3 < a \le 4$.

Bizonyítás. Egyelőre tegyük föl, hogy valóban van 2- ciklus, jele (x_1, x_2). Ekkor igaz, hogy

$$x_2 = ax_1(1 - x_1) \qquad \text{és} \qquad x_1 = ax_2(1 - x_2).$$

Behelyettesítve a második egyenletet az elsőbe (vagyfordítva):

$$x_r = a[ax_r(1 - x_r)][1 - ax_r(1 - x_r)], \qquad r = 1, 2.$$

x_r-ben negyedfokú egyenletet kaptunk, amelynek egyik gyöke $x_3 = 0$, a másik gyöke a 7.4a. tételbeli fix pont: $x_4 = (a-1)/a$. Elhagyva az indexet, végrehajtjuk a szorzásokat, majd elosztjuk az egyenletet x-szel:

$$a^3x^3 - 2a^3x^2 + a^2(1 + a)x + 1 - a^2 = 0.$$

A kapott harmadfokú egyenletet $(x-x_4)$-gyel osztva, egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$a^2x^2 - a(a+1)x + a + 1 = 0.$$

Az ismert megoldóképletet alkalmazva megkapjuk a feltételezett 2-ciklust:

$$x_{1,2} = \frac{(a+1) \pm \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}. \tag{7.9}$$

A megadott paraméterszakaszon $0 < x_{1,2} < 1$.

Figyeljük meg, hogy ha az a paraméterrel felülről közelítjük $a = 3$-at, akkor a 2-ciklus mindkét eleme az eltűnő diszkrimináns miatt az éppen instabillá váló egyensúlyi helyzethez tart. Fordítva haladva, azt mondjuk, hogy az egyensúlyi helyzet a változásakor kettéágazik. ∎

Megjegyzések. 1. Magasabb matematikai eszközökkel belátható, hogy $3 < a < 1 + \sqrt{6} = 3{,}44...$ esetén a kivételektől eltekintve, akármilyen kezdőállapotból indítjuk e rendszert, a pálya aszimptotikusan tart a (7.9)-ben megadott 2-ciklushoz. Az egyensúlyi állapot azonban instabil, és a pályák nagyon érzékenyen függnek az x_0 kezdőértéktől.

2. Persze, figyelembe kell venni, hogy (x_2, x_1) is geometriailag ugyanezt a 2-ciklust adja meg, mint (x_1, x_2).

7.4. példa. Ha az a paraméterérték növelése miatt a (7.9)-beli 2-ciklus instabillá válik, akkor (7.2)-nek még létezik más ciklusa is, csak nincs rá explicit képletünk. A 7.1. táblázat 3. pályája egy 3-ciklushoz tart, amelynek pontjai 6 tizedes jegyre kerekítve:

$$x_1 = 0{,}149888; \qquad x_2 = 0{,}489172 \qquad \text{és} \qquad x_3 = 0{,}959299.$$

(A 7.1. táblázatban a 3-ciklus az első 15 időszakban még nem jött létre.) Sőt, ez a ciklus globálisan aszimptotikusan stabil: kivételes kezdőértékektől eltekintve, az összes pálya rátekeredik e ciklusra.

Egy meglepő tétel (Sarkovszkij, 1963) szerint a 3-ciklus létezéséből következik, hogy akármilyen $P > 1$ egészre P-ciklus is létezik. Persze, a 7.2. példában ezek a ciklusok a 3-ciklus kivételével instabilak.

Csak megemlítjük, a kaotikus dinamikában fellépő bonyolult,látványos halmazokat nevezte el 1975 körül Mandelbrot *fraktálnak* (magyarul törtnek, ti. a dimenziója(!) tört szám), de már 1830 körül megjelentek a matematikában, csak sokáig búvópatakként csordogáltak.

7.2. Kaotikus viselkedés matematikája

Van olyan szerző, aki már a 7.3. példát is kaotikusnak nevezi (erre utal a „3-ciklus káoszt implikál” elnevezésű Li–Yorke-tétel (1973)). Mi azonban szigorúbbak vagyunk, ebben az esetben csak *átmeneti* káoszról beszélünk, hiszen véges időn belül a stabil ciklus környékére érve a további út már előrejelezhető.

A következőkben már valóban megérkezünk a címben szereplő kaotikus viselkedés világába. Nemcsak azt látjuk be, hogy $a = 4$-re a logisztikus rendszer majdnem mindenütt érzékeny a kezdőfeltételre, azaz előrejelezhetetlen, hanem tovább is lépünk:

akármennyi idő eltelte után megmarad a határozatlanság, azaz a további pálya érzékenyen függ az x_t állapottól. A 7.1. táblázat 4. pályája valóban szeszélyesen viselkedik: 3 tizedes jegyre kerekítve (de több tizedes jeggyel számolva), a pálya a $t = 9$ időszakban 1, utána 4 időszakon keresztül a triviális egyensúlyi helyzetben (legalábbis annak nagyon közeli környezetében) rejtőzik, majd a 14. és a 15. időszakban újra nőni kezd. Ez is a kezdeti értéktől való érzékeny függőséget mutatja!

7.7. tétel. *Az $x_{t+1} = 4x_t(1-x_t)$ leképezés esetén a dinamika majdnem mindenütt érzékeny a kezdőfeltételre.*

Bizonyítás. A dinamikát az $x_t = \sin^2 \varphi_t$ transzformáció segítségével vizsgáljuk meg. Felhasználva a $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ képletet, egyszerű számolással adódik $\sin^2 \varphi_{t+1} = \sin^2 2\varphi_t$, azaz elhagyva a $2\pi k$ eltéréseket ($k = 1, 2, \ldots$),

$$\varphi_{t+1} \equiv 2\varphi_t.$$

Legyen a szomszédos pálya $y_{t+1} = 4y_t(1 - y_t)$. Az $y_t = \sin^2 \psi_t$ jelöléssel,

$$\psi_{t+1} \equiv 2\psi_t.$$

A két szögdinamika eltérése $0 < \psi_t - \varphi_t < \pi$ esetén $\psi_{t+1} - \varphi_{t+1} = 2(\psi_t - \varphi_t)$ stb. az $L = 2$ korlát élessége miatt a dinamika kaotikus. ∎

Azt, hogy általában milyen bonyolult kérdésről van szó, jól mutatja, hogy nem tudjuk megmondani, hogy $a = 4$-en kívül mikor kapunk még kaotikus viselkedést. Csak az ismert, hogy a kaotikus pályát adó a paraméterek „sokan" vannak, és a $[3{,}57.., 4]$ szakaszon helyezkednek el.

Természetesen sok más kaotikus rendszer létezik, például az ún. *sátorleképezés*, ahol

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 \le x \le 1/2; \\ 2 - 2x, & \text{ha } 1/2 < x \le 1. \end{cases}$$

7.2. feladat. Határozzuk meg a sátorleképezés 2-ciklusát!

7.3. Határciklus és kaotikus beruházási ingadozások

Csak vázoljuk a 4.3. beruházási modell nemlineáris általánosítását, amely határciklust és kaotikus pályákat is ad.

Az az alapötlet, hogy a (4.12) és (4.13) egyenlet csak terv, (p felső index utal rá – a latin betű utal arra, hogy nem kitevőről van szó):

$$I_t^{\mathrm{p}} = I^{\mathrm{A}} + \beta(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \tag{7.10}$$

és

$$C_t^{\mathrm{p}} = C^{\mathrm{A}} + \gamma Y_{t-1}. \tag{7.11}$$

Feltesszük, hogy ez a lineáris rendszer robban, s csak a beruházási terv alsó (I^{L}), és a fogyasztás felső (Y^{F}) korlátja tartja kordában a valóságos rendszert, amelyet a teljes foglalkoztatás Y^{F} felső korlátja mínusz a tényleges I_t beruházás ad. Képletben:

$$I_t = \begin{cases} I_t^{\mathrm{p}}, & \text{ha } I_t^{\mathrm{p}} > I^{\mathrm{L}}; \\ 0, & \text{ha } I_t^{\mathrm{p}} < I^{\mathrm{L}}; \end{cases}$$

és

$$C_t = \begin{cases} C_t^{\mathrm{p}}, & \text{ha } C_t^{\mathrm{p}} < Y^{\mathrm{F}} - I_t^{\mathrm{p}}; \\ Y^{\mathrm{F}} - I_t^{\mathrm{p}}, & \text{ha } C_t^{\mathrm{p}} \geq Y^{\mathrm{F}} - I_t^{\mathrm{p}}; \end{cases}$$

7.5. példa. Határciklus. A 4.3. alfejezet lineáris ciklusmodelljében a kilengés nagyságát a kezdeti feltétel dönti el. Most egy olyan beruházási ciklust mutatunk be, amelyben a kilengés független a kezdeti feltételtől – határciklus.

A 4.3. táblázat adataiban β-t 1-ről 1,5-re növeljük, $I^L = 0$ alsó korlátot és $Y^{\mathrm{F}} = 1{,}1$ felső korlátot alkalmazzuk, $Y_0 = 1$ és $Y_1 = 1{,}06$ kezdeti feltételekkel. Azonnal a felső korlátba ütközve a kibocsátás csak 2 időszakot tölt ott, majd egészen 7. időszakig folyamatosan csökken, stb.

7.2. táblázat. *Beruházási határciklus*

Év t	GDP Y_t	Fogyasztás C_t	Beruházás I_t
0	1,00		
1	1,06		
2	1,100	0,815	0,285
3	1,100	0,845	0,255
4	1,041	0,846	0,195
5	0,929	0,822	0,107
6	0,803	0,775	0,027
7	0,728	0,723	0,005
8	0,776	0,692	0,084
9	0,978	0,712	0,267
10	1,100	0,600	0,500
11	1,100	0,722	0,378
12	1,041	0,846	0,195

7.6. példa. Káosz. Ahhoz, hogy káoszt kapjunk, a (7.11) fogyasztási egyenletbe még két késleltetést beleteszünk:

$$C_t^{\mathrm{p}} = C^{\mathrm{A}} + \gamma_1 Y_{t-1} + \gamma_2 Y_{t-2} + \gamma_3 Y_{t-3}. \tag{7.12}$$

Az $Y^{\mathrm{F}} = 1{,}5$; $I^{\mathrm{A}} = 0{,}2$; $C^{\mathrm{A}} = 0$; $\gamma_1 = 0{,}1$; $\gamma_2 = 0{,}3$; $\gamma_3 = 0{,}4$; $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0{,}8$; $\gamma^{\mathrm{A}} = 1 - \gamma$; $I^{\mathrm{L}} = -0{,}1$; $\beta = 2{,}25$ rendszer, 1-es indulóállapot: $Y_{-1}(1) = Y^{\mathrm{F}}$, $Y_{-2}(1) = Y^{\mathrm{F}}$ és $Y_{-2}(1) = Y^{\mathrm{F}}$, és csak $Y_{-1}(2) = Y^{\mathrm{F}} - 0{,}001$ különbözik, minimálisan. A két szomszédos pálya nagyon gyorsan távolodik egymástól, de korlátosak maradnak, néha majdnem találkoznak – kaotikusan viselkedik a rendszer.

7.3. táblázat. *Kaotikus beruházási ciklus*

Év t	GDP(1) $Y_t(1)$	GDP(2) $Y_t(2)$	Év t	GDP(1) $Y_t(1)$	GDP(2) $Y_t(2)$
0	1,300	1,298	10	0,898	0,905
1	1,280	1,279	11	0,888	0,894
2	1,273	1,276	12	0,906	0,910
3	1,216	1,223	13	0,958	0,957
4	1,115	1,117	14	1,039	1,033
5	1,085	1,089	15	1,136	1,125
6	1,062	1,070	16	1,227	1,213
7	1,025	1,038	17	1,283	1,269
8	0,972	0,988	18	1,278	1,267
9	0,929	0,938	19	1,192	1,188
			20	1,116	1,106

Ebben a fejezetben a diszkrét idejű skalár dinamikus rendszert tanulmányoztuk. Megvizsgáltuk az egyensúlyi helyzet létezését és stabilitását. Példát közöltünk 2- és 3-ciklusokra. Végül bemutattunk egy olyan rendszert, amely előrejelezhetetlenül működik: kaotikusan viselkedik. A lehető legegyszerűbb rendszerekre szorítkoztunk, s eltekintettünk a többváltozós, több időszaki késleltetésű rendszerek elemzésétől. A folytonos idejű rendszerek vizsgálata is fontos lenne, de meghaladná kereteinket.

8. Adómorál és adóztatás: három modell

A modern gazdaságban az állam jelentős adókat ró ki a vállalatokra és az egyénekre, de a befizetés (az adócsalás) foka függ az adómoráltól. Az itt bemutatandó modellekben kulcsszerepet játszik az *adómorál* – itt egy valós szám, amely az adókulcs mellett meghatározza, mennyi jövedelmet vall be az állampolgár. Az adómorál közvetlenül nem mérhető, de létezésére és értékére következtethetünk. Minél jobb egy társadalom adómorálja, (adott adórendszer mellett) annál kevesebb jövedelmet titkolnak el az adófizetők.

Ebben a fejezetben három erősen stilizált közgazdasági modellről lesz szó. 1) Egy azonosságot elemzünk, amely leírja az adóbevétel függését az adókulcstól és a csalástól. 2) A második modell egy optimalizálás mentes, a 3) a harmadik modell egy optimalizáláson alapuló modellt elemez.

8.1. Egy azonosság

Azt remélem, hogy adózási modelljeim – minden hibájuk ellenére – segítenek az adóztatás alapkérdéseinek megértésében. Külön hangsúlyozom, hogy nem foglalkozom az adómorál eredetével, adottnak veszem. Egyik modellben sincs adóhivatal, amely eseti ellenőrzéseivel feltárja az adócsalást, és büntetéssel sújtja az adócsalót. Ugyancsak figyelmen kívül hagyom, hogy az adókulcs emelése – a nettó jövedelem csökkentése miatt – valamennyire csökkenti azt az időmennyiséget, amelyet adott évben az állampolgár hajlandó munkával tölteni. Végül elsiklom afölött, hogy különböző foglalkozási ágakban különböző az adócsalás lehetősége. A 8.1. táblázatban stilizált adatok alapján feltüntetek 3–3 országot, ahol közepes, illetve erős az adómorál, viszont kicsi, közepes és nagy az állami újraelosztás. Az egyenlőtlenségek a vélelmezett jóléti sorrendet mutatják: a közepes adómorál mellett a cseh, az erős mellett a svéd rendszer tűnik optimálisnak.

8.1. táblázat. *Adómorál, jövedelem- újraelosztás és jólét*

Újraelosztás foka Adómorál	Kicsi (kb. 30%)		Közepes (kb. 40%)		Nagy (kb. 50%)
Közepes	Szlovákia	<	Csehország	>	Magyaro.
Erős	Japán	<	Németo.	<	Svédország

A modern gazdaságokban az adók látványos szerepet játszanak: a nemzeti jövedelem 30–60%-át is elérik. (Ebbe a számba beleértendők a nemzeti jövedelem 5–15%-át kitevő állami nyugdíjakat fedező járulékok is, de az egyszerűség kedvéért itt nem foglalkozom velük külön.) Egyrészt az állam közjavakat (utakat, iskolákat, kórházakat stb.) építtet és működtet az adókból, másrészt a gazdagabbak befizetéseiből támogatja a szegényebbeket. Különböző országokban az adómoráltól is függően különböző mértékben titkolják el az állampolgárok adóköteles jövedelmüket. Izgalmas és fontos kérdés: az adómorált figyelembe véve mekkora adókat rójon ki az állam? A válasz ellentmond a naiv elképzelésnek: minél gyengébb az adómorál, annál kisebb adókulcsokat érdemes kiróni.

További egyszerűsítés: személyi jövedelemadóra (röviden: szja) szorítkozunk (reálisabb modellben további adókat, például az általános forgalmi adót is bevonnám). Fájó szívvel figyelmen kívül hagyjuk az adókedvezményeket és a magasabb adókulcsokat, s csupán egykulcsos szját modellezünk (Magyarországon 2012 óta egyébként egykulcsos az szja). Feltesszük, hogy a befolyt adót az állampolgárok között egyenlően szétosztják, s a nettójövedelem- különbségek mérséklése mellett ez a pénz teljesen fedezi a fizetőssé tett közjavak fogyasztását.

Egy egyszerű azonossággal kezdünk, amely később hasznunkra lesz. A társadalmat különböző jövedelmű állampolgárok alkotják, a típusok száma $I > 1$ természetes szám, és az $i = 1, 2, \ldots, I$ típusú egyén jövedelme w_i, népességbeli súlya (részaránya) f_i. Ekkor az átlagos jövedelem $\mathbf{E}w = \sum_{i=1}^{I} f_i w_i$. Az állam egykulcsos szját alkalmaz, ahol az *adókulcs* t valós szám, $0 \le t \le 1$. Néha elhagyjuk a megkülönböztető i alsó indexet, azaz a w jövedelmű állampolgárnak tw adót kellene befizetnie, de tökéletlen adómorálja miatt jövedelme egy részét (e-t) eltitkolja. Már említettem, hogy a valóságot nagyon leegyszerűsítő modellünkben az adóztatás egyetlen célja: az adózás után maradó nettó jövedelme mellett mindenkinek azonos γ alapjövedelmet biztosítson. Fölteszem, hogy az (adózás előtt) átlagjövedelem éppen egységnyi, jele: $\mathbf{E}w = 1$, tehát az eltitkolt jövedelem (értsd: a teljes és a bevallott jövedelem különbsége) várható értéke $\mathbf{E}e < 1$. Mivel az állam a teljes adóbevételét alapjövedelemként szétosztja, az alapjövedelem egyenlő az adókulcs és az átlagos bevallott jövedelem szorzatával:

$$\gamma = t\mathbf{E}(w - e) = t(1 - \mathbf{E}e). \tag{8.1}$$

8.1. példa. A nagyságrendek tisztázása érdekében célszerű az (8.1) azonosságot közelítő, kicsit manipulált magyar adatokkal kitölteni: $\gamma = 3/8$; $\mathbf{E}e = 1/4$, tehát a képzeletbeli összesített adókulcs $t = 1/2$.

8.2. Adócsalás optimalizálás nélkül

Eddig nem próbáltuk megmagyarázni az eltitkolt jövedelem nagyságát. Az optimális adócsalási modell eredményét megelőlegezve, most hüvelykujj-szabályként feltesszük, hogy az eltitkolt jövedelem (jele: e) és a teljes jövedelem hányadosa az adókulcs és az adómorál (μ) hányadosa:

$$\frac{e}{w} = \frac{t}{\mu}, \qquad \text{azaz} \qquad e = \mu^{-1}tw. \tag{8.2}$$

Vigyázat, az adócsalás nagysága ennél arányosan kisebb: $te = \mu^{-1}t^2w$!

Számpélda: $w = 1$, $t = 0{,}3$ és $\mu = 1{,}5$ esetén $e = 0{,}2$.

Ahhoz, hogy a modell értelmes legyen, az eltitkolt jövedelemnek kisebbnek kell lennie a jövedelemnél, azaz $t < \mu$. Ahhoz, hogy ez még a maximális $t = 1$ adókulcsnál is fennálljon, föltesszük, hogy $\mu > 1$.

(8.1) és (8.2) értelmében az adóbevétel–adókulcs-függvény

$$\gamma(t) = t(1 - \mu^{-1}t) = t - \mu^{-1}t^2. \tag{8.3}$$

Jelölje rendre w_{m} és w_{M} a legkisebb és a legnagyobb jövedelmet. Mivel az átlagjövedelem 1, ezért – az egyforma jövedelmek triviális esetétől eltekintve – feltehetjük, hogy $0 < w_{\mathrm{m}} < 1 < w_{\mathrm{M}}$. Az államnak itt nagyon egyszerű célja van: maximalizálni akarja az adóbevételeket. Az elemzés folytatásához a 2.4. tételre van szükségünk. A következő tétel megadja a maximális adóbevételt jelentő adókulcsot.

8.1. tétel. *a) Feltéve, hogy az adómorálra teljesül $1 \le \mu \le 2$, a (8.3)-beli átlagos adóbevétel akkor maximális, ha az adólulcs az adóerkölcs fele:*

$$t^* = \frac{\mu}{2}. \tag{8.4}$$

b) Ekkor minden állampolgár jövedelme felét titkolja el: $e^* = w/2$, és az így adódó alapjövedelem azt adóerkölcs negyede:

$$\gamma(\mu/2) = \mu/4. \tag{8.5}$$

Bizonyítás. *a)* A 2.4. tétel jelölései szerint (8.3)- ban $A = \mu^{-1}$ és $B = 1$. Innen adódik (8.4). Mivel az adókulcs értelemszerűen legfeljebb 1, szükség van a $\mu \le 2$ feltevésre.

b) (8.4)-et behelyettesítve (8.2)-be, majd (8.3)-ba, adódik (8.5). ∎

Megjegyzések. 1. Ez a modell nagyon merev, hiszen az eltitkolt és az eredeti jövedelmek aránya az adómorál értékétől függetlenül 1/2. Mégis, $\mu = 1$ esetén a magyar adatok közelítőleg reprodukálhatók: a $t = 0{,}5$ adókulcs $\mathbf{E}e = 0{,}25$ adócsalást ad.

2. Egy jobb modell esetén nem kellene feltennünk, hogy $\mu \le 2$. Ez a korlátozás káros, mert feleslegesen kizárja azokat a gazdaságokat, ahol $\mu > 2$, többek közt a fehér gazdaságot, ahol $\mu = \infty$, azaz $e^* = 0$.

8.3. Optimális adócsalás

Rátérünk a bonyolultabb modellre. Most minden állampolgár optimalizálással dönt az adóeltitkolásáról, és az adóbevételek helyett az állam egy bonyolultabb *célfüggvényt* maximalizál, amely az alapjövedelem mellett valamennyire figyelembe veszi az adófizetők különböző csoportjainak célfüggvényét is. (A modern közgazdaságtanban a célfüggvény alapfogalom, s minden szereplő saját célfüggvényét maximalizálja lehetőségein belül: a fogyasztó a hasznosságot, a vállalat a profitot, és az állam jó esetben a társadalmi jólétet.) Megemlítjük, hogy itt egy olyan többszereplős dinamikus (Stackelberg-) játékról van szó, ahol a szereplők nem egyszerre lépnek: az állam lép először az adókulcs meghirdetésével, és erre reagálnak az állampolgárok az adócsalással.

A bevezetőben már szóltam a nagyobb fogyasztás okozta öröm és nagyobb csalás miatt érzett szégyen viaskodásáról. Ennek leírásához szükségünk van a fogyasztás és az adócsalás viszonyára is. Ha az állampolgár nem titkolná el jövedelme egy részét, akkor fogyasztása a nettó jövedelem: $(1-t)w$ és az alapjövedelem: $\gamma(t)$ összege lenne. De letagadja jövedelme egy részét: e, azaz adót „takarít meg": te, s ezzel növeli a fogyasztását:

$$c = (1-t)w + te + \gamma(t). \tag{8.6}$$

A legegyszerűbb $U(c,e)$ hasznosságfüggvényt akkor kapjuk, ha feltételezzük, hogy a kétváltozós függvény két egyváltozós függvény különbsége, és a kisebbítendő a fogyasztás homogén lineáris, a kivonandó pedig az eltitkolt jövedelem kvadratikus függvénye. Az adómorál most azt mutatja, hogy mennyire hat kedvezőtlenül az adócsalás az adózó közérzetére. Képletben:

$$U(c,e) = 2c - \mu w^{-1}e^2. \tag{8.7}$$

A μ szorzó mellé bevettük még a w^{-1} szorzót is, mert ha a 2. állampolgár jövedelme $\lambda(>1)$-szor nagyobb, mint az 1.-é, akkor a λ-szoros jövedelem- eltitkolás nem λ^2-szeres, hanem csak λ- szoros szégyent okoz.

Behelyettesítve (8.6)-ot (8.7)-be, adódik az új, származtatott hasznosság:

$$U[w,e] = 2(1-t)w + 2te + 2\gamma(t) - \mu w^{-1}e^2. \tag{8.8}$$

Adottnak véve γ-t, most optimumként adódik az egyszerűbb modellben önkényesen feltételezett (8.2)-beli jövedelem-eltitkolás.

8.2. tétel. *Ha a w jövedelmű állampolgár adócsalásával a (8.8) célfüggvényt maximalizálja, akkor az optimális jövedelem-eltitkolást (8.2) adja.*

Bizonyítás. (8.8)-ban csak $2te - \mu w^{-1}e^2$ függ közvetlenül e-től. Most $B = 2t$ és $A = \mu w^{-1}$ szerepel az 2.4. tételben, és (8.4)-ből adódik (8.2). ∎

Mivel az állampolgároknak van hasznosságfüggvénye, most már megadhatunk egy ún. *társadalmi jóléti függvényt*, a Rawls-félét, amelyet John Rawls filozófusról neveztek el. E szerint a társadalom jólétét a legrosszabb helyzetű tagjának (reálisabban: tagjainak) a maximális hasznossága adja. Esetünkben ez a legkisebb jövedelmű állampolgár hasznosságfüggvényének maximuma – itt a t adókulcs függvényében:

$$V(t) = U[w_{\mathrm{m}}, e^*(t)]. \tag{8.9}$$

Most meghatározhatjuk a társadalmilag optimális adókulcsot.

8.3. tétel. *a) A Rawls-féle optimális adókulcs*

$$t^* = \frac{1-w_{\mathrm{m}}}{2-w_{\mathrm{m}}}\mu > 0; \tag{8.10}$$

feltéve, hogy az adómorálra teljesül, hogy

$$1 < \mu < \mu_{\mathrm{m}} = \frac{2-w_{\mathrm{m}}}{1-w_{\mathrm{m}}}. \tag{8.11}$$

b) A (8.10)-beli $t^*(\mu)$ adókulcs–adómorál- függvény lineáris és növekvő, valamint az optimális jövedelem-eltitkolás mértéke független az adómoráltól:

$$\frac{e^*}{w} = \frac{1 - w_\mathrm{m}}{2 - w_\mathrm{m}} < \frac{1}{2}. \tag{8.12}$$

c) Az optimális alapjövedelem értéke

$$\gamma^* = \frac{1 - w_\mathrm{m}}{(2 - w_\mathrm{m})^2}\mu. \tag{8.13}$$

Bizonyítás. *a)* (8.9), (8.8), (8.3) és (8.2) értelmében

$$V(t) = 2(1-t)w_\mathrm{m} + 2t\mu^{-1}tw_\mathrm{m} + 2t(1-\mu^{-1}t) - \mu w_\mathrm{m}^{-1}(\mu^{-1}tw_\mathrm{m})^2.$$

Rendezve,

$$V(t) = 2w_\mathrm{m} + (2 - w_\mathrm{m})t - (2\mu^{-1} - \mu^{-1}w_\mathrm{m})t^2.$$

Innen már az 2.4. tétel valóban megadja a társadalmilag optimális adókulcsot.
b) és *c)* Egyszerű behelyettesítéssel. ∎

Megjegyezzük, hogy a bonyolult modell optimuma nulla minimális jövedelem mellett az egyszerű, bevételmaximalizáló modell optimumát adja.

8.1. feladat. *a)* Igazoljuk, hogy a Rawls-féle optimális adókulcs kisebb, mint az adómaximalizáló kulcs! *b)* Igazoljuk, hogy minél nagyobb a minimális jövedelem, annál kisebb a társadalmilag optimális Rawls- féle adókulcs!

Ezen a ponton számpéldán szemléltetjük a bonyolultabb modellt.

8.2. példa. A (8.10) értelmében $w_\mathrm{m} = 0{,}5$ mellett az $\mu = 1{,}5$-es adómorál ad $t^* = 0{,}5$ adókulcsot. (8.12) és (8.13) képlet alapján ekkor rendre $e^* = 0{,}5/1{,}5 = 1/3$, $\gamma^* = 0{,}5 \cdot (2/1{,}5^2) \cdot 1{,}5^2 = 1/3$.
Végül még egy feladatot tűzök ki.

8.3. feladat. Mindenekelőtt bemutatom a legegyszerűbb, kéttípusos népességet, ahol a $w_\mathrm{m} < 1$ jövedelműek mellett vannak $w_\mathrm{M} > 1$ jövedelműek is. A két típusból álló népességbeli súlya rendre $f_\mathrm{m} > 0$ és $f_\mathrm{M} > 0$,

$$f_\mathrm{m} + f_\mathrm{M} = 1 \qquad \text{és} \qquad f_\mathrm{m}w_\mathrm{m} + f_\mathrm{M}w_\mathrm{M} = 1.$$

a) Ha a társadalmi jóléti függvényt nem Rawls, hanema közönséges súlyozott számtani átlag szerint számoljuk:

$$W(t) = f_\mathrm{m}U[w_\mathrm{m}, e^*(t)] + f_\mathrm{M}U[w_\mathrm{M}, e^*(t)], \tag{8.14}$$

akkor a társadalmilag optimális adókulcs 0, s nincs jövedelem-eltitkolás: $e^* = 0$. *b)* Hogyan kellene módosítani a hasznosságfüggvényt, hogy ebben az esetben is pozitív legyen a társadalmilag optimális adókulcs?

9. Három népességdinamikai modell

Az egyes országok népességének (létszámának és korösszetételének) alakulása gazdaságilag és politikailag egyaránt érdekes. 1) Legegyszerűbb modellünkben a születések és a halálozások különbségével magyarázzuk a népsségszám változását. 2) Bonyolultabb a helyzet, ha a születéseket a jelenleg dolgozók, a halálozásokat az előző időszak dolgozói létszámával magyarázzuk. 3) Érdekes eredményeket kapunk, ha a szülőképes nőkőn belül megkülönböztetjük a fiatalabb és az idősebb nőket. Végül levonok néhány következtetést.

9.1. Születés és halálozás

Miközben a harmadik világ jelentős részében még tart a népességrobbanás, a fejlett világ egyes országaiban drámai ütemű népességfogyás és öregedés tapasztalható, ez utóbbi alól más országok (pl. Kína) sem kivételek. Például Magyarországon az 1980-as 10,7 milliós népességmaximum elérése óta ma már 10 millió alá csökkent a létszám. De ennél sokkal súlyosabb a nemzedéki (korosztályi) arányok eltolódása: jelenleg az idősek (60 éven felettiek) aránya 20%, de 2050-re 40% várható. Nem nehéz belátni, hogy ezek a fejlemények feszültségekhez vezetnek a nyugdíj- és az egészségügy területén, bár az optimisták szerint az idősek egészségi állapotának folyamatos javulása nyomán jelentősen emelkedik majd az idősek munkakínálata, s ez enyhíti e feszültségeket. Fontos kérdés a vándorlás, de ezzel a jegyzetben nem foglalkozunk.

Az eddigiekből is látható, hogy a demográfia fontos. Itt azt szeretném igazolni, hogy elméletileg is érdekes, és gazdag modellezési lehetőségei vannak. Három modellt mutatok be. Az 1. modell annyira egyszerű, hogy alig érdemli meg a modell nevet: az év eleji népességszám egyenlő az előző év eleji népességszámmal + születésszám − halálozási szám. Ha feltesszük, hogy mind a születésszám, mind a halálozásszám arányos a népességgel, akkor egyszerűen alakul a népességszám stb.

Kulcsszerepet játszanak az átmenet-valószínűségek, amelyek azt mutatják, hogy egy adott gyermeknemzedék hányad része lesz szülő, illetve nagyszülő. A teljes termékenységi arány pedig azt mutatja, hogy egy nő átlagosan hány gyermeket szül összesen. Az elemzésben először felírjuk az alapösszefüggéseket.

Bár elvileg minden pillanatban születhet egy csecsemő és meghalhat valaki, a gyakorlatban célszerűtlen évesnél finomabb bontású népességmodellekkel dolgoznunk. (Elméleti elemzésben azonban jogosult lehet folytonos koreloszlás alkalmazása is, de az nagyon elbonyolítja a matematikai elemzést.) A legegyszerűbb demográfiai modellben nincsenek korosztályok. Éves felosztással dolgozva, jelölje a naptári éveket $t = 0, 1, \ldots$, a születések számát B_t, a halálozásokét D_t, végül a népesség év végi értékét N_t. Könnyen belátható a már említett azonosság:

$$N_t = N_{t-1} + B_t - D_t, \qquad t = 0, 1, \dots. \tag{9.1}$$

Ha ismerjük a (B_t) és (D_t) sorozatot, és N_{-1} kezdőértéket, akkor ismert a népesség bármilyen évi értéke.

Kicsit tovább jutunk, ha az adott évi születések és a halálozások számát arányosnak vesszük az az év eleji népességszámmal, ahol b_t és d_t rendre a születési és halálozási arányszám:

$$B_t = b_t N_{t-1} \qquad \text{és} \qquad D_t = d_t N_{t-1}. \tag{9.2}$$

Behelyettesítve a (9.2) egyenletpárt a (9.1) egyenletbe:

$$N_t = N_{t-1} + b_t N_{t-1} - d_t N_{t-1} = (1 + b_t - d_t) N_{t-1}, \qquad t = 0, 1, \dots. \tag{9.3}$$

Ezzel eljutottunk a legegyszerűbb tételhez.

9.1. tétel. *a) Ha a születési arányszám adott évben nagyobb mint a halálozási, akkor a népességszám növekszik. b) Ha a születési arányszám adott évben kisebb mint a halálozási, akkor a népességszám csökken. c) Ha a születési arányszám adott évben azonos a halálozásival, akkor a népességszám állandó.*

Figyeljük meg, hogy a tételben nem tesszük fel, hogy a születési és halálozási arányok időben változatlanok, csak a különbségük előjeléről beszélünk. A valóságban nem is volna helyes feltenni, hogy ezek az arányok időben változatlanok, hiszen például ha egy ország népességéből eltűnnének a szülőképes nők, akkor a népesség hosszabb távon kihalásra van ítélve. Ideje áttérni egy reálisabb modellre. De előtte beillesztjük a 9.1. táblázatot, amely válogatott évekre tartalmazza a hazai népesség szülési, halálozási és létszám adatait. (Ha a 9.1. táblázattal akarnánk ellenőrizni az alapegyenlet érvényességét, akkor vagy minden évet fel kellett volna tüntetnünk, vagy összesíteni kellett volna az évtizedes születéseket és halálozásokat!) Például 2010-ben 90,3 ezer fő született, 130,4 ezer fő halt meg, és év végén a népesség létszáma 10 millió 14 ezer fő volt, tehát visszafelé számolva egy évvel korábban a népességszám 10 054 ezer fő volt.

9.1. táblázat. *Születések, halálozások, év végi népesség, Magyarország, ezer fő*

év t	Születési szám B_t	Halálozási szám D_t	Népesség N_t
1950	190,4	110,0	9 293
1960	146,5	101,5	9 961
1970	151,8	120,2	10 322
1980	146,7	145,4	10 709
1990	125,7	145,7	10 375
2000	97,6	135,6	10 222
2010	90,3	130,4	10 014

9.2. Gyermekek, szülők, nagyszülők

A középiskolai keretekre való tekintettel az éves bontásnál jóval durvább tagolással élünk: csak 3 nemzedéket különböztetünk meg: gyermekeket, szülőket és nagyszülőket. Esetenként az elemzési időszak hossza 25 év, régen ezt emberöltőnek nevezték. A naptári időszakok indexe $t = 0, 1, \ldots$. (Természetesen a gyakorlatban éves adatokkal dolgoznak a statisztikusok és a modellezők.)

Legyen a t-edik időszakban a gyermekek száma K_t, a szülőké M_t és a nagyszülőké P_t. A népesség teljes létszáma

$$N_t = K_t + M_t + P_t.$$

A demográfusok megkülönböztetik a következő három *függőségi hányadost*, ahol a szülők létszámához viszonyítják a gyermekek, illetve a nagyszülők létszámát, és az eltartottak együttes létszámát.

Fiatalkori függőségi hányados

$$k_t = \frac{K_t}{M_t}. \tag{9.4}$$

Időskori függőségi hányados

$$p_t = \frac{P_t}{M_t}. \tag{9.5}$$

Teljes függőségi hányados

$$d_t = \frac{K_t + P_t}{M_t} = k_t + p_t. \tag{9.6}$$

Ezek a hányadosok mutatják, hogy milyen teher hárul a szülőkre a gyermekek és a nagyszülők eltartásában. (Az eltartás szó nem jelenti azt, hogy a gyermekek és az idősek henyélők!) Például a gazdasági fejlődés korai szakaszaiban a fiatalkori függőségi hányados nagyon nagy: 1-hez közeli, nehézzé téve a magas színvonalú kötelező iskolai képzés finanszírozását. A fejlődés késői szakaszában viszont az időskori függőségi hányados nagy: szintén 1-hez közeli érték, megdrágítva a nyugdíj- és egészségügyi rendszer finanszírozását. A teljes függőségi hányados viszonylag stabil. A 9.2. táblázat a magyar népességre mutatja be e mutatók alakulását. Például 2000-ben a 19 gyermek és 20 idős jutott 100 dolgozókorú lakosra. Érdekes, hogy 1970- ben több, mint kétszer annyi gyermek volt mint idős, míg 2050-re majdnem megfordul az arány.

9.2. táblázat. *Korosztályi és függőségi hányadok alakulása Magyarországon*

Év	Gyermekek	Idősek	Időskori	Teljes
	a r á n y a		függőségi hányados	
t	K_t/N_t	P_t/N_t	p_t	d_t
1970	0,283	0,131	0,224	0,706
2000	0,236	0,146	0,236	0,618
2050	0,189	0,262	0,477	0,821

Megjegyzés: gyermekek: 0–19 év, idősek: 65–. 2050: előrejelzés.

Rátérünk az azonos számú évjáratokat tartalmazó modellhez. Az adott korosztály létszámcsökkenését a 0 és 1 közti, időben változó α_t és ω_t pozitív számok, az ún. *túlélési valószínűségek* határozzák meg, amelyek feltevésünk szerint adottak:

$$M_t = \alpha_t K_{t-1} \qquad \text{és} \qquad P_t = \omega_t M_{t-1}. \tag{9.7}$$

Az időben változó φ_t *termékenységi együttható* pedig kapcsolatot teremt a szülők és a gyermekek száma között:

$$K_t = \varphi_t M_t, \qquad \varphi_t > 0. \tag{9.8}$$

Megjegyezzük, hogy korábban nagy volt a gyermekhalandóság, s ezen belül a csecsemőhalandóság. Például 100 évvel ezelőtt hazánkban minden ötödik újszülött meghalt 1 éves kora előtt, és még 50 évvel ezelőtt is minden huszadik csecsemő meghalt. Ma már a csecsemőhalandóság gyakorlatilag megszűnt. De nagy csecsemőhalandóság esetén félrevezető a (9.8) termékenységi egyenletünk. Hasonló a helyzet a szülői és a nagyszülői halandósággal.

A teljes termékenységi együttható általában tört szám, s ez csak úgy értelmezhető, hogy vannak családok, ahol $0, 1, 2$, stb. számú csecsemő születik, és ezek gyakorisága időben változik, jelük $f_{0,t}, f_{1,t}, f_{2,t}, f_{3,t}, \ldots$. Képletben:

$$\varphi_t = f_{1,t} \cdots 1 + f_{2,t} \cdot 2 + f_{3,t} \cdot 3 + \cdots .$$

A továbbiakban ezzel a bonyodalommal nem foglalkozunk.

Szokás *korfáról* beszélni, amikor a vízszintes tengelyre mérjük föl a korosztályok létszámát, és a függőlegesre a korosztály életkorát, balra a nőkét, jobbra a férfiakét. Mi az egyszerűség kedvéért egynemű népességet modellezünk, elhanyagolva a férfi és női szaporodási szerepek közti alapvető különbségeket. Bármilyen visszásnak látszik e feltevés, a demográfiában nagyon elfogadott és hasznos. Az interneten számos valóságos és képzelt korfát találhatunk.

A rendszer dinamikájának meghatározásához meg kell adnunk két kezdőértéket: M_{-1}-et és M_0-t. Ekkor (9.7)– (9.8) segítségével meghatározható $P_0 = \omega_0 M_{-1}$ és $K_0 = \varphi_0 M_0$ stb. Valójában M_{-1}-re nincs szükségünk. Ha ismert M_0, akkor ismert K_0 is, és abból már $t \geq 1$-re minden ismert.

A 9.3. táblázat szemlélteti a stilizált (leegyszerűsített) kínai népességdinamikát, halandóság nélkül: $\alpha_t = 1$ és $\omega_t = 1$. Számolási könnyebbség kedvéért a kezdő időszak szülőinek létszámát vesszük 1 egységnek. Abszolút számokra gondolva 1950-ben Kínának körülbelül 0,5 milliárd lakója volt, jelenleg pedig körülbelül 1,4 milliárd lakója van. Ismert, hogy 1925 és 1975 között a sokgyermekes család volt tipikus Kínában. Családonként 4 gyermeket feltételezve: $\varphi_0 = 2$ volt (egy család 2 felnőttből állt, a férjre és a feleségre 2-2 gyermek jutott). Aztán a Mao-ce tung halála után a kirakatpereket túlélő kínai politikusok végre valahára felfedezték, hogy egy ilyen gyorsan szaporodó népesség nem fér el Kínában, és hajtűkanyart téve, bevezették az egygyermekes családmodellt, $\varphi_1 = 0{,}5$-del. De a késleltetés miatt a népességszám egyelőre nem csökken. Nagyon elnagyolt modellünk 2025-ig vár, hogy Kína visszatérjen a kétgyermekes családmodellhez, de akkorra már felére csökkenne a népesség. Vidéken (különösen, ha az első gyermek lány volt), soha sem tartották be annyira szigorúan az egygyerekes törvényt, mint a városokban, és pár éve már a városokban is felhagytak vele.

9.3. táblázat. *Stilizált kínai népességdinamika*

Negyed-század	Termé-kenység	Gyermek	Szülők	Nagyszülők	Összesen	Teljes függőségi hányad
			létszáma			
-	φ_t	K_t	M_t	P_t	N_t	d_t
1925-	2	2	1	0,5	3,5	2,5
1950-	2	4	2	1	7	2,5
1975-	0,5	2	4	2	8	1
2000-	0,5	1	2	4	7	2,5
2025-	1	1	1	2	4	3

A 9.3. táblázat utolsó oszlopa élesen megvilágítja a kínai gazdasági csoda egyik forrását: az elmúlt évtizedekben a teljes függőségi hányados 2,5-ről ideiglenesen 1-re csökkent, de majd vissza fog térni a magas értékre.

A népességtudományban kiemelkedő szerepet játszik az ún. *stabil népesség* fogalma. Egy népességet stabilnak nevezünk, ha a korosztályok létszámarányai állandók. Képletben [(9.4)–(9.5)]:

$$k_t = k_0 \qquad \text{és} \qquad p_t = p_0, \qquad t = 0, 1, \ldots,$$

Fontos speciális eset a *stacionárius népesség*, azaz amikor nemcsak az arányok, de maguk a korosztályi létszámok is állandók. Képletben:

$$K_t = K_0 \qquad \text{és} \qquad P_t = P_0, \qquad t = 0, 1, \ldots,$$

Legegyszerűbben állandó termékenységi és túlélési paraméterértékekkel lehet stabil népességeket előállítani. Tegyük föl, hogy

$$\varphi_t = \varphi, \qquad \alpha_t = \alpha \qquad \text{és} \qquad \omega_t = \omega.$$

Ekkor belátható a következő tétel.

9.2. tétel. *Állandó túlélési és termékenységi paraméterértékek esetén a népesség stabil, és a növekedési együtthatója $\nu = \alpha\varphi$. Ha $\nu = 1$, akkor a népesség stacionárius.*

Bizonyítás. *Behelyettesítve $M_t = \alpha K_{t-1}$-t $K_t = \varphi M_t$-be: $K_t = \varphi\alpha K_{t-1}$, azaz a gyermekszám mértani sorozatot alkot, ν hányadossal. A $K_t = \varphi M_t$ termékenységi egyenlet alapján ugyanaz igaz a szülők létszámára is. Végül $P_t = \omega M_{t-1}$ szerint az idősek létszáma is ugyanazzal a növekedési ütemmel növekszik.* ∎

Érdekes a függőségi hányadosok alakulása.

9.3. tétel. *Stabil népesség esetén a fiatalkori függőségi hányados $k_t = \varphi$, az időskori függőségi hányados $p_t = \omega/(\alpha\varphi)$, míg a teljes függőségi hányados $d_t = k_t + p_t$.*

Bizonyítás. A fiatalkori függőségi hányados

$$k_t = \frac{\varphi M_t}{M_t} = \varphi.$$

Az időskori függőségi hányados

$$p_t = \frac{P_t}{M_{t-1}} \frac{M_{t-1}}{M_t} = \frac{\omega}{\alpha\varphi}.$$

∎

9.3. Fiatal és idős szülők

Több szempontból is érdemes módosítani az előbbi modellt, és az aktív szülők körén belül megkülönböztetni a fiatal és az idős szülőket. Ez annak felel meg, hogy a nemzedéki időszak hosszát 30 évre emeljük, s fél nemzedékekkel számolunk. Az egyszerűség kedvéért eltekintünk a termékenység és a halandóság változásától: a stabil népességre szorítkozunk. Sőt, eltekintünk a halandóságtól, és feltesszük, hogy senki sem hal meg idő előtt. Mint matematikailag felesleges toldaléktól, szintén eltekintünk az idősektől, pontosabban a terméketlen idősektől. A fiatal szülők számát U_t, az idős szülőkét pedig V_t jelöli. A 2.2. szakaszt alkalmazva, érdekes tételeket mondok ki és bizonyítok be.

Újra felírjuk az alapegyenleteket, de most megbontva a két szülői kategóriát. Túlélési egyenletek

$$U_t = K_{t-1} \qquad \text{és} \qquad V_t = U_{t-1} = K_{t-2}. \tag{9.9}$$

Termékenységi egyenlet

$$K_t = \chi U_t + \psi V_t, \qquad \chi \geq 0, \quad \psi > 0. \tag{9.10}$$

Az elemzés előtt a 9.4. táblázattal szemléltetjük modellünket. Legyen $\chi = \psi = 0{,}5$ és $K_{-1} = 60\,000$ és $K_0 = 40\,000$. Látni fogjuk, hogy $\varphi = 1$ miatt a népességszerkezet egy stacionárius népességhez tart.

9.4. táblázat. *Számított népességdinamika*

Időszak t	Gyermekek K_t	Fiatal szülők U_t	Idős szülők V_t
0	40 000	60 000	–
1	50 000	40 000	60 000
2	45 000	50 000	40 000
3	47 500	45 000	50 000
4	46 250	47 500	45 000
5	46 875	46 250	47 500
6	46 563	46 875	46 250
7	46 719	46 563	46 875
8	46 641	46 719	46 563
9	46 680	46 641	46 719

Akinek jó szeme van, az láthatja, hogy a folyamat egyre kisebb kilengésekkel tart egy végállapothoz, ahol $K^* = U^* = V^* = 46\,667$. (A határérték valójában egy végtelen tizedes tört: 46 666,666..., de ennek nincs gyakorlati jelentősége.)

Visszatérünk az elméleti elemzéshez. Behelyettesítve a (9.9) túlélési egyenleteket a (9.10) termékenységi egyenletbe, egy érdekes rekurziót kapunk az egymást követő gyermekszámok között (vö. 2.2. alfejezet):

$$K_t = \chi K_{t-1} + \psi K_{t-2}, \qquad t = 0,\, 1,\, \ldots \qquad K_{-1},\, K_{-0} \quad \text{adott.} \tag{9.11}$$

Most is mértani sorozat alakjában keressük a megoldást: $K_t = \kappa\lambda^t$, ahol κ és λ valós számok. Behelyettesítjük a feltételezett megoldást a rekurzióba:

$$\lambda^t = \chi\lambda^{t-1} + \psi\lambda^{t-2}.$$

Egyszerűsítés után a

$$\lambda^2 = \chi\lambda + \psi$$

másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek az egyenletnek két különböző valós gyöke van, és ezek lineáris kombinációjaként adódik a megoldás. Pontosabban a következő igaz.

9.4. tétel. *a) A (9.11) rekurzió általános (kezdeti értéktől független) megoldása*

$$K_t = \kappa_1\lambda_1^t + \kappa_2\lambda_2^t$$

alakú, ahol $\lambda_{1,2}$ a

$$\lambda^2 - \chi\lambda - \psi = 0$$

másodfokú egyenlet két különböző valós megoldása, valamint κ_1 és κ_2 tetszőleges valós szám.

b) Adott kezdeti feltételek mellett a $(\kappa_1,\, \kappa_2)$ együtthatópár egyértelműen meghatározható a következő lineáris egyenletrendszerből:

$$K_0 = \kappa_1 + \kappa_2 \qquad \text{és} \qquad K_{-1} = \kappa_1\lambda_1^{-1} + \kappa_2\lambda_2^{-1}.$$

Tovább finomítjuk az elemzést. Kizárjuk az atipikus $\chi = 0$ esetet. (A kizárt esetben a K_{t+1}/K_t növekedési együttható ciklikusan változik!) Általában nem igaz, hogy a népesség stabil, hiszen két különböző mértani sorozat „zavarja" egymást. (A kivételes eset $\psi = 0$!) Mivel a negatív gyök abszolút értéke kisebb mint a pozitív gyök, még inkább áll a hatványaikra is, tehát az aszimptotikus megoldás $\kappa_1\lambda_1^t$, $\kappa_1 \neq 0$.

Igazoltuk tehát a következő tételt.

9.5. tétel. *a) Ha $\chi > 0$, akkor a (K_t) megoldás aszimptotikusan tart a $\kappa_1 \lambda_1^t$ pályához, $\kappa_1 > 0$.*

b) Ha $\chi + \psi > 1$, akkor a népesség létszáma növekvő; ha $\chi + \psi < 1$, akkor a népesség létszáma csökkenő; végül ha $\chi + \psi = 1$, akkor a népesség létszáma állandó.

Végül egy feladatot tűzünk ki, amely megvilágítja, hogy milyen fontos hatással van a stabil népesség növekedési ütemére az, hogy az adott termékenység hogyan oszlik meg a fiatal és az idős szülők között. Az egyszerűség kedvéért továbbra is eltekintünk az idő előtti halálozástól.

9.1. feladat. Stabil népességen belül (ahol a létszámarányok időben állandóak) rögzítjük a $\varphi = \chi + \psi$ együttes termékenységi arányszámot. *a)* Csökkenő népességben ($\varphi < 1$), minél kisebb a fiatalkorú szülések aránya, annál lassabban csökken a népesség: $\nu(\chi) < 1$ növekvő függvény. *b)* Növekvő népességben ($\varphi > 1$), minél kisebb a fiatalkorú szülések aránya, annál lassabban növekszik a népesség: $\nu(\chi) > 1$ csökkenő függvény. *c)* Állandó létszámú népességben ($\varphi = 1$) a születések eloszlása közömbös: $\nu(\chi) = 1$.

Mondandónk végére értünk. Bemutattunk három népességdinamikai modellt: az 1. modellben az életkor alig játszott szerepet. A 2. modellben a szülőkorúak nem voltak megbontva, a 3. modellben ketté voltak bontva. A 2. modell viszonylag egyszerű volt, és annak elemzésekor még arra is volt módunk, hogy a túlélési valószínűségeket és az időskorúakat is figyelemmel kísérjük. A 3. modellben a másodrendű rekurzió kezelése annyira lefoglalta erőinket, hogy lemondtunk ezekről a bonyodalmakról. Megismerkedtünk viszont egy új technikával, amely elvileg lehetővé teszi, hogy tetszőleges számú korosztályra bontva elemezzük a népességdinamikai modellt. Ez azonban már felsőbb matematikai ismereteket igényelne, és erről itt lemondtunk.

10. Elemi nyugdíjmodellek

A nagycsaládok felbomlásával és a fejlett társadalmak öregedésével a nyugdíjkérdés egyre fontosabbá válik. A 20. század elején főleg *tőkésített nyugdíjrendszerek* működtek, ahol a dolgozók ugyanúgy előre takarékoskodtak időskorukra, mint ma egy takarékos ember a karácsonyi ajándékokra. A 20. század közepén (a Nagy Válság és a II. világháború pusztítása miatt) csődbe mentek a tőkésített nyugdíjrendszerek, és helyükre léptek a *felosztó-kirovó nyugdíj*rendszerek. Ezekben a rendszerekben az egyének kötelezően részt vesznek, és nem saját nyugdíjukra takarékoskodnak előre, hanem az éppen akkor nyugdíjasok járadékát fizetik ki. Egy társadalmi szerződésről van szó, amely a mindenkori fiatalok kötelességévé teszi a mindenkori öregekről való gondoskodást. Itt az egyén olyan *nyugdíj*ra számíthat, amely a korábbi befizetéseknek, illetve – állandó járulékkulcs esetén – a bruttó keresetéknek valamilyen növekvő (esetleg nemcsökkenő) függvénye.

Bemelegítésként egy stilizált példa. Hősnőnk 2016-ban töltötte be a 63. évét, 40 éven keresztül mindig az akkori átlagbérért dolgozott, ennek nettó értéke 2016-ban majdnem 200 eFt volt. A szabályok némi egyszerűsítésével azt mondhatjuk, hogy *kezdő nyugdíja* az utolsó évi bére 80%-a, azaz havi 160 eFt. *Életjáradékként* ezt (pontosabban ennek reálértékét) kapja egész életén keresztül – ez a *már megállapított nyugdíja.*

A 10.1. alfejezetben makroszinten vizsgálódunk, minden egyéni különbségtől eltekintünk, és a járulékkulcs, a helyettesítési arány (átlagnyugdíj/átlagkereset) és a függőségi hányados (idősek/dolgozók létszámaránya) közti kapcsolatot vizsgáljuk. A 10.2. alfejezetben mikroszinten vizsgálódunk, különös tekintettel arra, hogy a nagyobb keresetűek egyben nagyobb nyugdíjúak tovább élnek, s emiatt torz *jövedelemeloszlás* alakul ki a kiskeresetű és várhatóan rövid életű egyénektől a nagykeresetű és várhatóan hosszú életűek felé.

10.1. Nyugdíjrendszer makroökonómiája

Ebben az alfejezetben a *felosztó-kirovó nyugdíjrendszer* makroökonómiáját elemezzük, egyelőre egy adott időpontra szorítkozva. Tiszta felosztó-kirovó rendszer esetén minden évben a dolgozók nyugdíjjárulékainak összege megegyezik a nyugdíjak összegével. Mivel a dolgozó járuléka a bruttó keresetének és a járulékkulcsnak a szorzata, definíció szerint teljesül a következő azonosság: nyugdíjasok száma × átlagnyugdíj = járulékkulcs × dolgozók száma × átlagkereset. Bevezetve a dolgozók számát: M, a nyugdíjasok számát: P, az átlagnyugdíjat: b (és felidézve az u bruttó átlagkeresetet), adódik a képlet:

$$Pb = \tau M u. \tag{10.1}$$

Rendezzük át a (10.1) azonosságot:

$$\tau = \frac{b}{u}\frac{P}{M}. \tag{10.2}$$

A fejezet bevezetésében már találkoztunk (10.2) azonosság mindkét tényezőjével, de most képlettel definiáljuk őket. Az első tényezőt *átlagos helyettesítési aránynak* nevezzük: $\beta_u = b/u$ – ez az átlagnyugdíjnak az átlagbérhez viszonyított értéke. A második tényező neve *(rendszer)függőségi hányados* – nyugdíjasok száma/dolgozók száma (vö. 9. fejezet). Jele: $p = P/M$. (Korábban már találkoztunk a demográfiai függőségi hányadossal.) Tehát beláttuk a következő tételt.

10.1. tétel. *Egy tiszta felosztó-kirovó nyugdíjrendszerben a járulékkulcs egyenlő az átlagos helyettesítési arány és a rendszerfüggőségi hányados szorzatával:*

$$\tau = \beta_u p. \tag{10.3}$$

A stilizált magyar nyugdíjrendszerben például $\beta_u = 0{,}6$ és $p = 0{,}5$; tehát $\tau = 0{,}3$, az amerikaiban viszont $\beta_u = 0{,}4$ és $p = 0{,}3$; tehát $\tau = 0{,}12$. (A bruttó és a nettó kereset közti kapcsolattal a 12. fejezetben foglalkozunk.) Minél nagyobb a nyugdíjak relatív értéke, és minél több nyugdíjas jut egy dolgozóra, annál nagyobb járulékkulcsra van szükség. Ezt az egyszerű dolgot nagyon sok ember képtelen megérteni, és egyszerre nagyobb nyugdíjat, kisebb járulékot és alacsonyabb nyugdíjkorhatárt követel vagy ígér.

A továbbiakban a fenti azonosság jobb oldalának második tényezőjét tovább vizsgáljuk. Figyelembe vesszük, hogy a dolgozók és a nyugdíjasok száma egyaránt függ a lakosság demográfiai összetételétől, a foglalkoztatási és a nyugdíjazási helyzettől. Bevezetjük a *részvételi hányadot*, amely a dolgozók (M) és a dolgozókorúak létszámának (M^*) az aránya: $\mu = M/M^*$. Sikeres országokban a dolgozókorúak nagy arányban dolgoznak, sikertelen országokban viszont nem. Bevezetjük még a *jogosultsági hányadot* is, amely a nyugdíjasok (P) és a nyugdíjaskorúak létszámának (P^*) az aránya: $\zeta = P/P^*$: vannak olyan időskorúak, akik nem jogosultak nyugdíjra, és vannak olyan dolgozókorúak, akik viszont jogosultak. A 9. fejezetben már bevezettük a *demográfiai (időskori) függőségi hányadost*, amely a nyugdíjkorúak és a dolgozókorúak létszámának az aránya: $p^* = P^*/M^*$. Ezek segítségével részletesebben is fölírható a mutatónk:

$$\frac{P}{M} = \frac{P}{P^*}\frac{P^*}{M^*}\frac{M^*}{M}, \tag{10.4}$$

azaz felhasználva jelöléseinket, adódik a

10.2. tétel. *Egy tisztán felosztó-kirovó rendszerben a rendszerfüggőségi hányados egyenlő a jogosultsági hányad és a demográfiai függőségi hányados szorzatának és a részvételi hányadnak az arányával:*

$$p = \frac{\zeta}{\mu}p^*. \tag{10.5}$$

Szóban: minél több nyugdíjaskorú jut egy dolgozókorúra, minél kisebb a dolgozók aránya a dolgozókorúakhoz képest, és minél nagyobb a nyugdíjasok aránya a nyugdíjaskorúakhoz képest, annál nagyobb a rendszerfüggőségi hányados.

A további elemzéshez vezessük be a következő mutatókat! GDP: Y, *egy dolgozóra jutó GDP*: $y = Y/M$, *nettóbér-hatékonyság*: $\eta_v = y/v$ – ez az egy főre jutó GDP és az átlag nettó bér arányát mutatja. A hagyományos elemzésben a nyugdíjkiadások GDP-hányada kiemelkedő szerepet játszik. Az előzőhöz hasonló módon kifejezhető a *nyugdíjkiadás aránya a GDP-ben*, ha felbontjuk a

$$\frac{Pb}{My} \tag{10.6}$$

kifejezést:

10.3. tétel. *A nyugdíjkiadás GDP-hányada egyenlő a rendszerfüggőségi hányados és az átlagos nettó helyettesítési arány szorzatának és a nettóbér- hatékonyságnak a hányadosával:*

$$\frac{B}{Y} = \frac{p\beta_v}{\eta}. \tag{10.7}$$

A 10.1. táblázat a magyar gazdaság nettó kereseti adatain szemlélteti a fentieket, a 20. század utolsó harmadának néhány évére.

10.1. táblázat. *Nyugdíjak a magyar gazdaságban 1970–1996, %*

				Nettó		
	Nyugdíj	Jogosult-	Függő-	helyette-	Részvé-	Nettó
	kiadási	sági	ségi	sítési	teli	bérhaté-
	h á	n y	a d	o s		konyság
Év	$100B/Y$	100ζ	$100p$	$100\beta_v$	100μ	$100\eta_{\mathbf{v}}$
1970	3,5	66,7	38,7	37,5	91,2	305,1
1975	5,0	82,1	37,3	45,4	87,8	315,1
1980	6,9	93,0	38,2	54,7	87,3	320,1
1985	7,9	100,0	40,4	61,2	86,9	358,7
1990	8,8	109,9	41,8	66,2	86,4	398,4
1994	10,0	115,6	41,1	59,5	65,8	430,2
1996	8,9	119,2	40,7	58,9	64,0	504,5

Vegyük észre, milyen látványosan nőtt a nettó keresethez viszonyított nyugdíj 1970 és 1990 között: 37,5%-ról 66,2%-ra. Vegyük figyelembe azonban a táblázat utolsó oszlopát, ahonnan leolvasható, milyen mértékben maradt el az átlagkereset az átlagtermeléstől.

10.2. Nyugdíjrendszer mikroökonómiája

Ebben az alfejezetben a felosztó-kirovó nyugdíjrendszer mikroökönómiáját vizsgáljuk. Legyen L a munkába lépés kora, R a nyugdíjba vonulás kora és D a halálozás kora: $0 < L < R < D$, valós számok. Ha eltekintünk az inflációtól (lásd 13.1. táblázat) és a reálkeresetek, illetve a -nyugdíjak emelkedésétől, akkor a w bruttó kereset és a b nyugdíj között a következő összefüggés áll fönn:

$$(D - R)b(R) = \tau u(R - L). \tag{10.8}$$

Valóban, a dolgozó $R-L$ évig fizet évente τu járulékot (életpálya-befizetés), míg a nyugdíjas $D-R$ éven keresztül kap évi $b(R)$ nyugdíjat (életpálya-nyugdíj). Kifejezve a nyugdíjat a nyugdíjba vonulás korától:

$$b(R)=\frac{\tau u(R-L)}{D-R}. \tag{10.9}$$

Deriválással elegáns képletet adunk a $b(R)$ függvény százalékos emelkedéséről, de a beavatatlan Olvasó rögtön a 10.2. táblázatra ugorhat. Mindenekelőtt bevezetjük az $x(t)$ függvény *változási sebességét*:

$$\frac{dx(t)}{x(t)dt}. \tag{10.10}$$

Igaz a

10.4.* tétel. *a) A függvény változási sebességét logaritmikus deriváltja adja:*

$$\frac{dx(t)}{x(t)dt}=\frac{d\log x(t)}{dt}.$$

b) Az $y(t)/z(t)$ hányadosfüggvény változási sebessége a számláló és a nevező változási sebességének a különbsége:

$$\frac{d[y(t)/z(t)]}{[y(t)/z(t)]dt}=\frac{dy(t)}{y(t)dt}-\frac{dz(t)}{z(t)dt}.$$

Bizonyítás. *a)* A természetes alapú $\log x$ függvény deriváltja $1/x$, az összetett függvény deriváltja a láncszabály szerint éppen a fenti érték.
b) $\log[y(t)/z(t)]=\log y(t)-\log z(t)$, ezért a) szerint

$$\frac{d[y(t)/z(t)]}{[y(t)/z(t)]dt}=\frac{d}{dt}\log(y(t)/x(t))=\frac{d}{dt}\log y(t)-\frac{d}{dt}\log z(t)=\frac{dy(t)}{y(t)dt}-\frac{dz(t)}{z(t)dt}.$$

∎

Ezt alkalmazva (10.9)-re $t=R$, $y=R-L$ és $x=D-R$ szereposztásban, adódik a

Következmény. ** A nyugdíj–nyugdíjéletkor-függvény változási sebessége a munkában és a nyugdíjban töltött időszakok hosszának reciprok összege:*

$$\frac{db(R)}{b(R)\,dR}=\frac{1}{R-L}+\frac{1}{D-R}. \tag{10.11}$$

A 10.2. táblázat numerikusan szemlélteti a nyugdíj növekedését a *nyugdíjba vonulási kor* növekedésekor. $L=20$, $D=80$, $u=1$ és $\tau=1/3$. De (10.11)-ből számítógép nélkül is látható, hogy például az általános $R=60$ évnél az éves jutalom $0{,}025+0{,}05=0{,}075$ – jól közelíti a szokásos értékeket. Vegyük figyelembe, hogy az egységnyi bruttóbér 2/3-a a nettó bér, és számításunkban ennyi jár 60 éves kori nyugdíjba vonuláskor. Itt $R_{\mathrm{m}}=58$ a *minimális korhatár*, $R_{\mathrm{M}}=62$ a *maximális korhatár* – 1996 előtti magyar értékek.

10.2. táblázat. *Nyugdíj–nyugdíjba vonulási kor*

Nyugdíjazási kor R	58	59	60	61	62
Nyugdíj $b(R)$	0,576	0,619	0,667	0,719	0,778

A gyakorlatban azonban nem az egyedi, hanem az átlagos várható élettartam szerepel: $\mathbf{E}D$, azaz az *eszmei számla* szerint

$$b(R) = \frac{\tau u(R-L)}{\mathbf{E}D - R}, \qquad \text{ahol} \qquad R < \mathbf{E}D. \tag{10.12}$$

A gondolatmenetben azonban még így is marad egy elhanyagolás: a választott életkor nemcsak a munkaszeretettől függ, hanem az egészségi állapottól is. Ismert, bár nem eléggé, hogy statisztikusan erős pozitív korreláció (vö. 17. fejezet) létezik az R nyugdíjkor és a $E(D|R)$ élettartam között: legegyszerűbb esetben minél később megy nyugdíjba valaki, annál tovább él. Ezért (10.12) helyett tompítottabb nyugdíjszabályt kell alkalmazni. Az egyenleg pozitivitása vagy negativitása nem tüntethető el, de csökkenthető.

10.1. feladat. Legyen $z(D,R)$ az D élettartamú dolgozók életpálya-befizetéseinek és -kifizetéseinek az egyenlege:

$$z(D,R) = \tau(R-L) - b(R)(D-R). \tag{10.13}$$

a) Igazoljuk, hogy $z(D,R) = b(R)(\mathbf{E}D - D)$.

b) Tegyük föl, hogy két típus van, a várhatóan rövid, illetve hosszú életű: $D_1 < \mathbf{E}D < D_2$, f_1 és f_2 valószínűséggel és $L < R_1 < R_2$. Igazoljuk, hogy a várható életpálya-egyenleg negatív:

$$\mathbf{E}z < 0!$$

Más dimenzió tárul föl, hogy ha feltesszük, hogy a dolgozók azonos korban mennek nyugdíjba, de az ekkor várható élettartamuk meredeken növekvő függvénye az életpálya-keresetnek. Erre vonatkozik a 10.3. táblázat, ahol növekvő nyugdíj szerint négy negyedre osztjuk a 2012-ben elhunyt magyar férfi nyugdíjasokat, és 100-nak vesszük utolsó évi átlagos nyugdíjukat. Például a legszegényebb férfi nyugdíjas negyed (az átlagnyugdíj 62%-ból) csak 17 évet él, míg a leggazdagabb negyed (az átlagnyugdíj 152%-ból) 21 évet.

10.3. táblázat. *Nyugdíj és a 60 évesen várható élettartam, magyar férfiak, 2012*

Nyugdíjosztály i	Relatív nyugdíj b_i	Várható élettartam (év) T_i
1	61,9	17,1
2	81,1	18,3
3	105,0	19,5
4	152,0	21,1
Átlag	100	19,0

A további számolás leegyszerűsítése kedvéért tegyük föl, hogy a dolgozók életpálya-keresete kortól független, de egymástól eltér. Eltekintünk attól, hogy minden tb- nyugdíjrendszerben jövedelem-újraelosztás megy végbe a férfiaktól a nőkhöz. A dolgozók azonos korban mennek nyugdíjba, és az ekkor várható élettartamuk növekvő függvénye a keresetnek. Legyen egy adott dolgozói típus bruttó életpálya-keresete $u > 0$, közös munkába lépési koruk L, nyugdíjazási koruk R, és nyugdíjba vonuláskor várható élettartamuk $e(u)$, várható értéke e. Ha a járulékkulcs τ, akkor most is érvényes a 10.1. feladatban bevezetett, de a bruttókeresettel arányos életpálya-egyenleg:

$$z(u,R) = \tau u(R-L) - b(u,R)e(u). \tag{10.13$'$}$$

Két ok miatt módosítani kell az N felső indexszel jelölt hagyományos eszmei számlát, (i) figyelembe kell venünk a keresetek különbségét:

$$b^{\mathrm{N}}(u,R) = \frac{\tau u(R-L)}{e}, \tag{10.14}$$

és (ii) a keletkező átlaghiányt elkerülendő, egységesen $\gamma > 0$ tényezővel szorozzuk be és A felső indexszel különböztetjük meg N-től:

$$b^{\mathrm{A}}(u,R) = \frac{\gamma\tau u(R-L)}{e}, \tag{10.15A}$$

10.2. feladat. *a)* Igazolható, hogy a korrekciós tényező egyensúlyi értéke

$$\gamma^{\mathrm{A}} = \frac{e}{\mathbf{E}[ue(u)]}. \tag{10.16A}$$

b) Arányosnak véve a nyugdíjakat és a bruttó kereseteket, számítsuk ki a korrekciós tényező értékét a 10.3. táblázat adataival!

A 10.5. tétel segítségével igazolni fogjuk, hogy $\mathbf{E}[ue(u)] > 1$, azaz $\gamma^{\mathrm{A}} < 1$.

Az egyenlőtlenség $n > 1$ tagból álló pozitív elemű és szigorúan növekvő sorozatpárra vonatkozik:

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n \qquad \text{és} \qquad 0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n. \tag{10.17}$$

10.5. tétel. *(Csebisev összegegyenlőtlensége, 1882). A (10.17) feltevés mellett igaz, hogy a kéttényezős szorzatok számtani közepe nagyobb, mint a számtani közepek szorzata:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i > \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right). \tag{10.18}$$

Megjegyzés. A (10.18) egyenlőtlenség duálisa a következő: (a_i) szigorúan növekvő és (b_i) szigorúan csökkenő sorozat:

$$0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n \qquad \text{és} \qquad b_1 > b_2 > \cdots > b_n > 0. \tag{10.19}$$

Ekkor igaz, hogy a kéttényezős szorzatok számtani közepe kisebb, mint a számtani közepek szorzata:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i < \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right). \tag{10.20}$$

A bizonyításhoz szükség lesz egy segédtételre, némileg általánosabb alakban megfogalmazva az egyenlőtlenséget. Legyen j_i az $(1, \ldots, n)$ számok permutációja, $(1, \ldots, n)$ számok sorrendjének valamilyen megváltoztatása.

10.1. segédtétel. *(10.17) esetén*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i > \sum_{i=1}^{n} a_i b_{j_i},$$

ahol a (j_i) permutációban legalább egy szám helyet vált.

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy például $j_1 = 2$ és $j_2 = 1$. Ekkor igaz, hogy

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 > a_1 b_2 + a_2 b_1, \qquad \text{mert} \qquad (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) > 0.$$

Megismételve az eljárást, a jobb oldal egészen addig növekszik, amíg el nem tűnnek a cserék. ∎

A tétel bizonyítása. Bevezetve a $a_{n+i} = a_i$ és a $b_{n+i} = b_i$ jelöléspárt és kihasználva a két sorozat monotonitását, a segédtétel miatt igaz a következő n egyenlőtlenség:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i > \sum_{i=1}^{n} a_i b_{i+1},$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i > \sum_{i=1}^{n} a_i b_{i+n-1}.$$

Összeadva az egyenlőtlenségeket és elosztva mindkét oldalt $1/n^2$-tel, adódik (10.18). ∎

10.3. feladat. A (10.18) egyenlőtlenségnek van egy tréfás változata. Képzeljük el, hogy 500, 1 000, 2 000, 5 000, 10 000 és 20 000 forintos bankjegyek vannak kirakva egy asztalra, 6 homogén oszlopba. Rád van bízva, hogy melyik oszlopból veszel ki 1-et, 2-t, 3-at, 4-et, 5-öt és 6-ot. Mikor kapod a legnagyobb összeget? (És a legkisebbet?)

Végül egy váratlan következmény:

Következmény. *n pozitív szám számtani közepe legfeljebb akkora, mint a négyzetes közepük:*

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}, \tag{10.21}$$

és egyenlőség csak akkor áll, ha mind az n szám egyenlő.

Bizonyítás. Rendezzük az a_i számokat növekvő sorrendbe, és legyen $b_i = a_i$. Ekkor (10.18), illetve gyengítése (szigorú egyenlőtlenség helyett egyenlőtlenség/egyenlőség) adja (10.21)-et. ∎

11. Önkéntes nyugdíjrendszerek

Ebben a jegyzetben fontossága miatt általában a tb-nyugdíjrendszert modellezzük, de érdekességként ebben a fejezetben kitekintünk az önkéntes magánnyugdíj-rendszerekre is (és kihagyjuk a kötelező magánnyugdíj-rendszert). Nem egyszerű időskori megtakarításról van szó (5.3. alfejezet), hanem olyanról, amelyet a kormány támogat – az adózók befizetéséből.

Fontosabb eredményeink: *1)* Átfogalmazzuk az 5.3. alfejezet előrelátó dolgozókat feltételező modelljét kamatmentes, de támogatott megtakarításra. Bevezetve a rövidlátókat, *2) passzivitásuk* esetén az előrelátók egyszerűen kihasználják őket. *3)* Ha azonban a rövidlátók *aktivizálódnak*, akkor a torz jövedelem-újraelosztás gyengül.

Tájékoztatásul a 11.1. táblázatban bemutatunk négy országot, ahol a három pillér súlya jelentősen különböző. A számok csak hozzávetőlegesek, és a magyar 2. pillér gyakorlatilag már halott (2010-ben még a dolgozók 75%-a vett részt benne), valamint az önkéntes pillérben kevés az évente befizetők aránya.

11.1. táblázat. *Pillérek súlya és elterjedtsége négy országban, 2012 körül*

	kötelező tb		kötelező magán		önkéntes magán	
Ország	részvétel	járulékkulcs	részvétel	járulékkulcs	részvétel	járulékkulcs
Egyesült Államok	100	12	50	9	17	3
Németország	100	20	0	0	15	4
Csehország	100	28	0	0	50	3
Magyarország	100	34	3	0	35	4

Ugyancsak megemlítjük, hogy jelenleg Magyarországon három önkéntes rendszer is működik, de együttes együttes súlyuk is jelentéktelen. Előzetes adatok szerint 2018-ban 710 ezer fő fizetett be kb. 140 mrd Ft-ot, s ez után 28 mrd Ft adókedvezményt vettek fel. Ez egy személyre átlagosan 36 eFt, holott a maximum 280 eFt – az átlagos kihasználás csupán 13%. Ha a későbbi modellt számszerűsítenénk, és karikatúraszerűen feltennénk, hogy a tényleges részvevők maximálisan igénybe veszik a rendszert, akkor kb. 100 ezer tag van, és a támogatást minden magyar állampolgár fizeti.

11.1. Előrelátó dolgozók támogatott megtakarítása

Ebben az alfejezetben a dolgozók előrelátók, de más szempontból módosítjuk az 5.3. alfejezet életciklus modelljét: *a)* eltekintünk a kamattól, és *b)* feltesszük, hogy a hagyományos megtakarítást a kormányzat támogatja. A támogatást olyan adók fedezik, amelyeket hozzáadva a támogatott megtakarításokhoz, a támogatás nélküli megtakarításokat kapjuk – azaz a támogatás inkább a restség leküzdésére szolgáló eszköz.

Egyszerűsítésként stacionárius népességet feltételezünk. Minden évben $R > 0$ dolgozó és $D - R > 0$ nyugdíjas évjárat él együtt, R és D természetes szám. $L = 0$ miatt felnőtt években számolunk. Minden évjáratnak gyakorlatilag végtelen sok tagja van, s így a tagok egyéni döntéseinek nincs hatása a rendszer egészére. Az év végén minden évjárat 1 évvel idősebb lesz, de a legidősebb kihal, és a legfiatalabb színre lép. Minden dolgozónak életkorától és a naptári évtől függetlenül egységnyi keresete, majd ennek megfelelő nyugdíja van.

Bevezetjük a munkában töltött időszaknak a teljes felnőtt (ρ), illetve a nyugdíjas élettartamhoz mért arányát (β):

$$\rho = \frac{R}{D} < 1 \qquad \text{és} \qquad \beta = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

A fogyasztási egyenletpár felírásához be kell vezetni az éves s nagyságú önkéntes megtakarítást. A dolgozó minden forintnyi önkéntes megtakarítását a kormányzat $\alpha > 0$ forintnyi támogatással egészíti ki – ez a *támogatási kulcs*. Ellentétben az irodalom zömével, mi explicite modellezzük e támogatás adóvonzatát: $\theta \geq 0$ az eszmei *különadó* kulcsa.

Definíció szerint a fiatal- és időskori fogyasztási pár éves szinten

$$c = 1 - \theta - s, \qquad d = \beta(1+\alpha)s. \tag{11.3}$$

Szóban: éves fiatalkori fogyasztás = bruttó bér – adó – megtakarítás, éves időskori fogyasztás = járadékosítási szorzó x (megtakarítás+támogatás).

Feltesszük, hogy minden évben minden dolgozó *előrelátó*, s ezért annyit takarít meg, hogy tervezett fogyasztási pályáját kisimítsa, azaz egyenlővé teszi fiatal- és időskori éves fogyasztását (vö. (5.6)-beli Leontief-féle hasznosságfüggvény):

$$1 - \theta - s = \beta(1+\alpha)s, \qquad \text{ezért} \qquad s^{\mathrm{o}} = \frac{1-\theta}{1+\beta(1+\alpha)}. \tag{11.4}$$

Behelyettesítve (11.4)-et (11.2)-ba egy implicit egyenletet kapunk az egyensúlyi adókulcsra:

$$\theta = \alpha s = \alpha\frac{1-\theta}{1+\beta(1+\alpha)}.$$

Innen adódik az egyensúlyi θ^{o} adókulcs és az önkéntes optimális s^{o} megtakarítás.

11.1. tétel. *Előrelátó dolgozók támogatott megtakarítási modelljében a kormányzat a következő adókulcsot választja:*

$$\theta^{\mathrm{o}} = \frac{\alpha}{(1+\beta)(1+\alpha)} > 0. \tag{11.5}$$

Ekkor a dolgozók éves megtakarítása

$$s^{\mathrm{o}} = \frac{1}{(1+\beta)(1+\alpha)} > 0. \tag{11.6}$$

A továbbiak miatt fontos következmény, hogy a megtakarítás és az adó összege független a támogatási kulcstól, tehát a támogatásra nincs szükség.

Következmény. *Előrelátó dolgozók esetén az adó és a megtakarítás összege független a támogatási kulcstól:*

$$\theta^{\mathrm{o}} + s^{\mathrm{o}} = \frac{1}{1+\beta}.$$

11.1. feladat. Számoljuk ki kézzel az $R = 40$ és $D = 60$, $\alpha = 1$ esetet!

11.2. Passzív rövidlátó dolgozók

Most az előrelátók mellé bevezetjük a rövidlátó dolgozókat, akik nem képesek kisimítani a jövedelmüket, ezért a kormányzat kötelező nyugdíjrendszert működtet. Minden dolgozó egységnyi keresetéből $\tau > 0$ kötelező nyugdíjjárulékot fizet.

Feltéve, hogy a nyugdíjba vonuló évjáratok minden tagja minden évben b nagyságú kötelező nyugdíjat kap, e nyugdíj képlete (10.9) miatt

$$b = \frac{R\tau}{D-R} = \frac{\rho\tau}{1-\rho} = \beta\tau. \tag{11.7}$$

Önkéntes megtakarítás hiányában a fogyasztói pályát akkor lenne *sima*, ha a nettó kereset és a nyugdíj egyenlő lenne, azaz $1 - \tau = b$. Némi számolással adódik az ezt megvalósító maximális járulékkulcs:

$$\bar{\tau} = \frac{1}{1+\beta} = 1 - \rho, \tag{11.8}$$

megegyezik a 11.1. tétel következményében szereplő értékkel: $\theta^{\mathrm{o}} + s^{\mathrm{o}} = \bar{\tau}$.

A dolgozók jelentős része nem szívesen fizet kötelező nyugdíjjárulékot, ezért a kormányzat e kritikus érték alatt tartja a járulékot: $\tau < \bar{\tau}$. Kiindulópontunk: még az azonos keresetű dolgozók között is különböző a dolgozók megtakarítási hajlandósága. Feltesszük, hogy csak két típus létezik: rövidlátó (L) és előrelátó (H): $f_L, f_H > 0$ és $f_L + f_H = 1$. A megtakarítások csak a típustól függnek: s_L és s_H. Igaz a következő adóegyenlet:

$$\theta = \alpha(f_L s_L + f_H s_H). \tag{11.9}$$

Ebben az alfejezetben a rövidlátó dolgozó *passzív*, semmit sem takarít meg: $s_L = 0$. Az előrelátó dolgozó viszont a (11.4a)-ban meghatározott céllal önkéntesen megtakarít: $s_H > 0$. Ekkor a dolgozói és a nyugdíjas fogyasztási egyenletek definíció szerint rendre

$$c_L = 1 - \tau - \theta, \qquad d_L = b \tag{11.10 – L}$$

és

$$c_H = 1 - \tau - \theta - s_H, \qquad d_H = \beta[\tau + (1+\alpha)s_H]. \tag{11.10 – H}$$

Szóban: a korábbi fiatalkori fogyasztásból levonódik még a nyugdíjjárulék, az időskorihoz viszont hozzáadódik a nyugdíj.

Módosítással ugyan, de megismételjük a 11.1. alfejezet gondolatmenetét. Feltesszük, hogy minden évben a H-típusú dolgozó annyit takarít meg, hogy tervezett fogyasztási pályáját kisimítsa, azaz egyenlővé teszi fiatal- és időskori éves fogyasztását:

$$1 - \tau - \theta - s_H = \beta[\tau + (1+\alpha)s_H], \qquad \text{ezért} \qquad s_H^o = \frac{1-(1+\beta)\tau - \theta}{1+\beta(1+\alpha)}. \tag{11.11}$$

Behelyettesítve (11.11b)-t és $s_L = 0$-t (11.9)-be egy implicit egyenletet kapunk az egyensúlyi adókulcsra:

$$\theta = \alpha f_H s_H = \alpha f_H \frac{\chi - \theta}{1+\beta(1+\alpha)}, \qquad \text{ahol} \qquad \chi = 1 - (1+\beta)\tau > 0.$$

Itt χ mutatja a kötelező nyugdíjrendszer által hagyott rést (vö. (11.8) és $\tau < \bar{\tau}$ feltevés). Innen adódik az egyensúlyi θ^o adókulcs és az önkéntes optimális s_H^o megtakarítás.

11.2. tétel. *A passzív rövidlátó dolgozók modelljében a kormányzat a következő adókulcsot választja:*

$$\theta^o = \frac{\alpha\chi f_H}{1+\beta(1+\alpha)+\alpha f_H} > 0. \tag{11.12}$$

Ekkor az előrelátók optimális megtakarítása

$$s_H^o = \frac{\chi}{1+\beta(1+\alpha)+\alpha f_H} > 0, \tag{11.13}$$

és a rövidlátóké nulla.

Megjegyzések. 1. Ebben a modellben az önkéntes nyugdíjrendszer egyszerűen jövedelmet csoportosít át a rövidlátóktól az előrelátóknak. Minél nagyobb az α támogatási kulcs, annál nagyobb a perverz újraelosztás: a tücsök által a hangyának a különadóba csomagolt külön jövedelme.

2. Még ezek a képletek is bonyolultak, s az egyes paraméterek hatása távolról sem világos.

A folytatáshoz szükségünk lesz a rövidlátó és az előrelátó típus átlagos életpálya-fogyasztására:

$$e_L = \rho c_L + (1-\rho)d_L = \rho(1 - f_H\theta^o/f_L) \qquad \text{és} \qquad c_H = d_H = \rho(1 + f_L\theta^o/f_H).$$

Ezen a ponton bevezetünk egy fontos valószínűség-számítási fogalmat, a *szórást* (vö. későbbi 16.1. alfejezet). Tegyük föl, hogy az X valószínűségi változó $f_i > 0$ valószínűséggel veszi föl az x_i értéket. Legyen várhatóértéke $\mu = \mathbf{E}X = f_1x_1+\cdots+f_nx_n$, $x_1 < \cdots < x_i < \cdots < x_n$. A várható érték körüli ingadozás mértékét, a szórásnégyzetet célszerű a négyzetes eltérések várható értékeként definiálni:

$$\mathbf{D}^2X = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \mu)^2.$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{D}^2X \geq 0$, és $\mathbf{D}^2X = 0$ pontosan akkor, ha X állandó, azaz $n = 1$.

A rendszer egyenetlenségét/egyenlőtlenségét két (belső és külső) szórással jellemezzük: a belső az egyenetlen L- fogyasztási pályák szórása, a külső pedig az életpályák átlagos fogyasztásának szórása:

$$\varepsilon_I^2 = f_L[\rho(c_L - e_L)^2 + (1-\rho)(d_L - e_L)^2] \qquad \text{és} \qquad \varepsilon_E^2 = f_L(e_L - \rho)^2 + f_H(c_H - \rho)^2.$$

A megértést elősegítendő, a 11.2. táblázatban numerikusan szemléltetjük eredményeinket. Felnőtt években számolva, $R = 40$, $D = 60$, $\tau = 0{,}2$. Három támogatási kulcsot modellezünk: $\alpha = 0$; 0,5; 1 és a háromszor több rövidlátó van, mint előrelátó: $f_L = 3/4$ és $f_H = 1/4$. Ahogy az α támogatási kulcs 0-ról 1-re növekszik, úgy csökken L átlagfogyasztása, $c_L^o = 0{,}667$-ről 0,654-re. A későbbi összehasonlítás kedvéért: a külső szórás 0-ról 0,022-re növekszik; míg a belső alig csökken, és 0,16 körül marad. (Mivel $c_H^o = d_H^o$, ezért elegendő c_H^o szerepeltetése.)

11.2. táblázat. *Pályák kötelező és önkéntes nyugdíj esetén: passzív rövidlátóak esete*

		Előrelátó	R ö v i d l á t ó				
Támogatási		típus	dolgozó	nyugdíjas	átlagos	Belső	Külső
kulcs	Adókulcs		f o g y a s z t á s			szórás	
α	θ^o	c_H^o	c_L^o	d_L^o	e_L^o	ε_I	ε_E
0,00	0,000	0,667	0,800	0,4	0,667	0,163	0,000
0,25	0,007	0,681	0,793	0,4	0,662	0,160	0,008
0,50	0,012	0,691	0,788	0,4	0,659	0,159	0,014
0,75	0,016	0,699	0,784	0,4	0,656	0,157	0,018
1,00	0,019	0,705	0,781	0,4	0,654	0,156	0,022

11.2. feladat. Programozzuk be a 11.2. táblázat számítását!

11.3. Aktív rövidlátó dolgozók

Ellentétben a 11.2. alfejezettel, most feladjuk a rövidlátó dolgozók passzivitását; mérsékelt akaraterőt és értelmet tulajdonítunk L-nek.

Minden L-típusú dolgozó naivan felteszi, hogy csak ő rövidlátó, a többiek megtakarítása $\tilde{s}$, ezért adóegyenlegük $\theta = \alpha\tilde{s}$, azaz $\tilde{s} = \theta/\alpha$. Ő lelkileg képtelen ennyit félretenni, de adott γ *relatív megtakarítási hajlandóság* esetén $(0 < \gamma \le 1)$ a becsült megtakarítás γ-szorosára hajlandó:

$$s_L = \gamma \frac{\theta}{\alpha}. \tag{11.14}$$

Megtartva az előrelátók (11.11) megtakarítási egyenletét, s_L megjelenése miatt a (11.9) mérlegegyenlet módosul:

$$\theta = \gamma f_L \theta + \alpha f_H \frac{\chi - \theta}{1 + \beta(1+\alpha)}. \tag{11.15}$$

Rövid kitérőt teszünk: ha a heurisztikus (11.14) megtakarítási egyenlet helyett leszámítolt hasznosságú fogyasztást feltételeznénk (vö. 5.3. alfejezet), akkor (11.15) helyett egy szinte kezelhetetlen egyenletet kapnánk. Valóban, legyen $\delta \in (0,1)$ a leszámítolási együttható, ekkor az optimalitási feltétel

$$(1 - \theta - s_L) = \delta\beta(1+\alpha)s, \qquad \text{ezért} \qquad s_L^{\mathrm{o}} = \frac{1-\theta}{1 + \delta\beta(1+\alpha)}. \tag{11.4 $-$ L}$$

Valóban, (11.4-L)-t és (11.4-H)-t behelyettesítve a (11.9) mérlegegyenletbe, túlzottan bonyolult egyenletet kapnánk.

Visszatérve (11.15)-höz, adódik a

11.3. tétel. *Aktív rövidlátó dolgozók esetén az állandósult állapot jellemzői, adókulcs, H- és L-megtakarítás*

$$\theta^{\mathrm{o}} = \frac{\alpha f_H \chi}{\psi}, \qquad s_H^{\mathrm{o}} = \frac{(1 - \gamma f_L)\chi}{\psi} \qquad \text{és} \qquad s_L^{\mathrm{o}} = \frac{\gamma f_H \chi}{\psi}, \tag{11.16}$$

ahol

$$\psi = (1 - \gamma f_L)[1 + \beta(1+\alpha)] + \alpha f_H > 0. \tag{11.17}$$

Megjegyzés. Az aktív rövidlátók lakta rendszer (11.16)– (11.17) egyensúlyi adókulcsából látszik, hogy minél nagyobb a γ relatív megtakarítási hajlandóság, annál nagyobb az egyensúlyi kulcs, és annál kisebb a perverz újraelosztás.

11.3. feladat. Igazoljuk, hogy ha $\gamma = 1$ (maximális), akkor paradox módon a rövidlátó előrelátóvá válik: $s_L^{\mathrm{o}} = s_H^{\mathrm{o}}$; és mindkét szórás eltűnik: $\varepsilon_I = \varepsilon_E = 0$!

A 11.3. táblázat a γ relatív megtakarítási hajlandóság hatását mutatja rögzített $\alpha = 1$ támogatási kulcs esetén (az 1. sor a 11.3. táblázat utolsó sora). Ahogy γ 0-ról fokozatosan 1-re emelkedik, az egyensúlyi adókulcs 0,019-ről 0,067-re növekszik, és mindkét típus fogyasztási pályája kisimul, a külső szórás 0,022-ről 0-ra süllyed, a belső pedig 0,156-ről 0-ra.

11.3. táblázat. *Pályák kötelező és önkéntes nyugdíjra: aktív rövidlátóak esete*

Relatív megtak. hajland.	Külön adó-kulcs	Előrelátó típus	R ö v i d l á t ó dolgozó	nyugdíjas	átlagos	Belső szórás	Külső szórás
			f o g y a s z t á s a				
γ	θ^o	c_H^o	c_L^o	d_L^o	e_L^o	ε_I	ε_E
0,00	0,019	0,705	0,781	0,400	0,654	0,156	0,022
0,25	0,023	0,701	0,771	0,423	0,655	0,142	0,020
0,50	0,030	0,696	0,756	0,459	0,657	0,121	0,017
0,75	0,041	0,687	0,728	0,523	0,660	0,084	0,012
1,00	0,067	0,667	0,667	0,667	0,667	0,000	0,000

11.4. feladat. Programozzuk be a 11.3. táblázat számítását!

Összefoglalva a fejezet mondanivalóját: ha az önkéntes nyugdíjrendszer kedvezményeit csak az előrelátó dolgozók használják ki, akkor a rendszer a rövidlátók rovására segíti őket. A rendszert úgy kell megtervezni, hogy a rövidlátók is minél nagyobb mértékben használják ki a támogatásokat, például alacsony tagdíjplafonnal és bőséges támogatással.

12. Nyugdíjindexálás

Dinamikus nyugdíjmodellekben meg kell különböztetni a kezdő és a már megállapított nyugdíjakat: az elsőt az adott évben nyugdíjazott állampolgár kapja, a másodikat az előző években nyugdíjazottak. Bár az új nyugdíjasok létszáma csak töredéke az összesnek, de valamikor minden nyugdíjas új nyugdíjas volt, ezért a kezdő nyugdíjak fontos szerepet játszanak.

A kezdő nyugdíj a legtöbb országban többé-kevésbé függ a dolgozó kereseti pályájától, a már megállapított nyugdíj pedig az előző évi nyugdíjtól. Mivel a bérek és az árak évről évre jelentősen változnak, többnyire emelkednek, a nyugdíjaknak is valahogyan követniük kell e folyamatokat.

A 12.1. táblázat a 2004 és 2013 közötti Magyarországon mutatja be e folyamatot. A 2. és 3. oszlopban a *folyóáras* átlagos nyugdíj, az átlagos nettó keresetek idősora áll, és s a 4. oszlop adja a *fogyasztói árszintet* (ez szerepel majd a 13.1. táblázat 3. oszlopában.) Ez az index azt mutatja, hogy a t-edik évben egy átlagos fogyasztói kosár megvásárlása hányszorosába kerül a 2003-as évinek. Például a 2013-as árszint 60,8%-kal volt magasabb. Az 5. és a 6. oszlop közli az *állandó áras* átlagos nyugdíj, az átlagos nettó keresetek idősorát. A teljesség kedvéért felírjuk a folyó- (vastag betűs) és az állandóáras (dőlt betűs) nyugdíj és nettó bér kapcsolatát:

$$b_t = \frac{\bar{\mathbf{b}}_t}{P_t} \qquad \text{és} \qquad v_t = \frac{\mathbf{v}_t}{P_t}.$$

Például a 2013-as átlagos nyugdíj folyó áron 102,5 eFt/hó, 2003-as állandó áron csak 63,7 eFt/hó! Szinte minden évben változtak a szabályok, de itt ezzel a bonyodalommal szerencsénkre nem kell foglalkoznunk.

12.1. táblázat

Nyugdíjak és nettó keresetek, folyó és állandó árakon (eFt/hó): 2003–2013

Évek	Folyó áras átlagnyugdíj	Folyó áras nettó kereset	Fogyasztói árszint	Állandó áras átlagnyugdíj	Állandó áras nettó kereset
t	$\bar{\mathbf{b}}_t$	$\mathbf{v}_t$	P_t	$\bar{b}_t$	v_t
2003	50,4	88,8	1,000	50,4	88,8
2004	56,2	93,7	1,068	52,6	87,7
2005	63,0	103,1	1,106	57,0	93,2
2006	69,1	111,0	1,150	60,1	96,5
2007	76,3	114,3	1,242	61,4	92,0
2008	84,3	122,0	1,317	64,0	92,6
2009	83,4	124,1	1,373	60,7	90,4
2010	86,4	132,6	1,440	60,0	92,1
2011	91,3	141,2	1,496	61,0	94,4
2012	96,6	144,1	1,581	61,1	91,1
2013	102,5	151,1	1,608	63,7	94,0

Az egyszerűség kedvéért minden évjáratot egy-egy személy képvisel (makromodell), és eltekintünk a keresetek életkortól való függésétől és az átlagtól való eltéréstől. További egyszerűsítés: az évjáratokat megszemélyesítő személyek szolgálati és nyugdíjban töltött ideje változatlan.

Feltevéseink mellett a kezdő nyugdíj az az évi keresettel arányos. A már megállapított nyugdíjak vagy a bérek vagy az árak, esetleg kettejük átlaga szerint nőnek, s eszerint beszélünk a nyugdíjak bér-, ár- és bér–ár-indexálásáról. Mindkét tiszta indexálási módszernek vannak előnyei és hátrányai. Magyarországon 1993 és 1999 között bér-, 2000 és 2009 között bér–ár-, és azóta árindexálás van érvényben.

Itt egy rövid kitérőt kell tennünk. A legtöbb állampolgár nem ért egyet azzal, hogy a már megállapított nyugdíjak emelése matematikailag arányos. Szerintük egy 30 eFt-os nyugdíj 3%-os emelése aránytalanul kicsi egy 300 eFt-os nyugdíj hasonló mértékű emeléséhez képest: 900 Ft vs. 9000 eFt. Mielőtt megmagyaráznám, hogy miért tartom ezt az emelést helyesnek, megjegyzem, hogy ma már világszerte a nyugdíjemelések ilyenek. A magyarázat: ha az emelés előtt elfogadta a társadalom az 1:10-es arányt, akkor az emelés után is el kell fogadnia – a 30,9 eFt és a 309 eFt ugyanannyi ér, mint korábban a 30 eFt és a 300 eFt. Ha a „közvélekedést” követné az emelési szabály, és mindenki azonos összeget kapna emelésként, például az átlagos nyugdíj 3%-át, 4 eFt-ot, akkor előbb-utóbb a nyugdíjarányok nagyon összehúzódnának – és sérülne a biztosítási jelleg. Egyébként lényegében gyenge arányos és erős egyösszegű emelés jellemezte a magyar nyugdíjrendszert 1968 és 1992 között – de nem vált be.

Más a helyzet a bérkövető emelésnél. Itt nemcsak az azonos évben nyugdíjba vonulók közti nyugdíjarányok őrződnek meg, hanem az egymás utáni évjáratok tagjai közti arányok is. Az árindexálásnál viszont még szerény, évi 2%-os reálbér-emelkedésnél is ugyanennyivel tágul az egymás utáni évjáratok nyugdíja közti relatív rés, de a 2015 és 2018 közötti időszak 28%-os reálbér-növekedése az árindexálás (és az 1 éves késleltetés) miatt 28%-os különbséget okoz a 2016-os és 2019-os nyugdíjasok járadék között.

A fejezet szerkezete a következő: a 12.1. alfejezet bemutatja a bérindexált nyugdíjakat. A 12.2. alfejezet modellezi a jelenlegi magyar helyzetet, az árindexált nyugdíjak átlagos helyettesítési hányadosának dinamikáját.

12.1. Bérindexált nyugdíjak

Éves modellel dolgozunk, ahol $t = 0, 1, \ldots$. Az inflációs hatásokat eleve eltávolítjuk, mert állandó áras változókkal számolunk (lásd 12.1. táblázat utolsó két oszlopát). S évig dolgozik a képviselő, és T évig van nyugdíjban, ahol S, T természetes számok, például $S = 40$ év és $T = 20$ év.

Mint korábban leírtuk, a kezdő nyugdíj az az évi nettó keresettel (jele: v_t) arányos:

$$b_{0,t} = \beta v_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, \tag{12.1}$$

ahol a β arányossági szorzót *járadékszorzónak* nevezzük. Magyarországon a 40 éves szolgálati időhöz tartozó érték kb. 80%.

Legyen a t-edik évi reálbér növekedési együtthatója g_t, azaz $v_t = g_t v_{t-1}$. Bérindexált nyugdíj esetén a $k-1$ évvel korábban megállapított nyugdíj az az évi bérnövekedés ütemével növekszik:

$$b_{k,t} = g_t b_{k-1,t-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, T-1, \qquad t = 1, 2, \ldots. \tag{12.2}$$

Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy a kezdeti időszak nyugdíjaira teljesül

$$b_{1,0} = b_{2,0} = \cdots = b_{T-1,0} = g_0 v_0, \tag{12.3°}$$

Szinte nyilvánvaló a

12.1. tétel. *A (12.1)–(12.2) bérindexálás és* (12.3°) *esetén a mindenkori nyugdíj értéke független a megállapítás évétől:*

$$b_{0,t} = b_{1,t} = \cdots = b_{T-1,t} = \beta v_t. \tag{12.3}$$

Bizonyítás. (12.1) szerint (12.3) első egyenlősége áll minden t-re: $b_{0,t} = \beta v_t$.

Teljes indukciót alkalmazunk a már megállapított nyugdíjakra. (12.2) és (12.3°) szerint $t = 0$-ra (12.3) áll.

Az indukciós lépést $t-1$-ről alkalmazzuk t-re. (12.2) és $t-1$-re vett (12.3) szerint

$$b_{k,t} = g_t b_{k-1,t-1} = g_t \beta v_{t-1} = \beta v_t.$$

Azaz (12.3) t-re is teljesül. ∎

Megjegyzés. Ha nem tennénk föl (12.3°)-t, akkor csak $t \geq T$-re teljesülne a homogenizálódás.

Ebben az egyszerű rendszerben minden nyugdíjas járadékának az aránya minden dolgozó nettó béréhez β – ezt *helyettesítési hányadosnak* is nevezik. Mitől függ a helyettesítési hányados? Ehhez be kell vezetni a nyugdíjjárulék-kulcsot: τ és a szuperbruttó bért (hivatalos nevén: teljes bérköltséget): w_t, valamint a homogén lineáris szja kulcsát (amelybe az egészségügyi járulékkulcsot is beleértjük): θ.

$$v_t = (1 - \tau - \theta) w_t. \tag{12.4}$$

Könnyen belátható a

12.2. tétel. *A bérindexált nyugdíjrendszerben az egyensúlyi járadékszorzó*

$$\beta = \frac{\tau S}{(1-\tau-\theta)T}. \tag{12.5}$$

Bizonyítás. Egy felosztó-kirovó nyugdíjrendszerben a teljes nyugdíjkiadás és a teljes nyugdíjbevétel egyenlő egymással:

$$T\beta v_t = \tau S w_t,$$

Figyelembe véve (12.3)–(12.4)-t:

$$T\beta(1-\tau-\theta)w_t = \tau S w_t,$$

azaz (12.5) áll. ∎

12.1. példa. Jelenleg (2018-ban) Magyarországon $\tau = 0{,}205$ és $\theta = 0{,}235$ esetén $\beta = 0{,}732$ kisebb, mint 0,8.

12.2*. példa. Az utóbbi évek hazai fejleményeinek a leírásához fel kell bontani a nyugdíj és az egészségügyi járulékot munkavállalói (E) és munkáltatói (F) részre, annál is inkább, mert a hivatalos adatok erre vonatkoznak: egészségügyi és nyugdíjjárulék-kulccsal (θ^E, θ^F és τ^E, τ^F), írhatjuk le: ekkor a t-edik évi bruttó kereset

$$u_t = \frac{v_t}{1-\theta^E-\tau^E}.$$

Szükségünk lesz még a teljes bérköltség és a bruttó bér kapcsolatára is

$$w_t = (1+\tau_t^E+\theta^F)u_t.$$

Számszerűsítve: $\theta^E = 0{,}15 + 0{,}085$; $\tau^E = 0{,}1$; $\tau_1^F = 0{,}145$; a 2018-as értékek alapján $\theta^F = 0{,}05$. Megfelelő transzformációval adódnak a 12.1. példa adatai:

$$\tau_t = \frac{\tau_t^E+\tau_t^F}{1+\theta^F+\tau_t^F}.$$

A bérindexált nyugdíjak hazai alakulását (1993–1999) bemutatandó, a 12.2. táblázatban felidézzük a magyar termelés (y_t), az átlagos nettó bér (v_t) és az átlagos nyugdíj ($\bar{b}_t$) reálértékének változását, valamint az átlagos helyettesítési hányados (jele: γ_t) idősorát. Az állandó mellékhatások miatt a szabály csak gyengén érvényesül.

A szereplő növekedési együtthatók definíciója a következő:

$$g_t^{\mathrm{y}} = \frac{y_t}{y_{t-1}}, \qquad g_t^{\mathrm{v}} = \frac{v_t}{v_{t-1}}, \qquad g_t^{\bar{b}} = \frac{\bar{b}_t}{\bar{b}_{t-1}}.$$

12.2. táblázat.
Reálkibocsátás, -bérek, -nyugdíjak és arányuk 1993–1999: bérindexálás

Év	GDP	Nettó bér	Nyugdíj	Helyettesítési hányados
	R e á l v á l t o z á s			
t	$100(g_t^y - 1)$	$100(g_t^v - 1)$	$100(g_t^{\bar{b}} - 1)$	$\gamma_t = \bar{b}_t/v_t$
1993	–0,8	–3,9	–4,6	0,603
1994	3,1	7,2	–4,7	0,594
1995	1,5	–12,2	–10,1	0,619
1996	0,0	–5,0	–7,9	0,593
1997	3,3	4,9	0,4	0,563
1998	4,2	3,6	6,2	0,578
1999	3,1	2,5	2,1	0,592

12.2. Árindexált nyugdíjak

Számos országban és számos időszakban az elvileg kielégítő bérindexálás helyett árindexálás működött, és ez működik hazánkban is 2010 óta. Mielőtt bemutatnánk a modellt, folytatjuk a 12.2. táblázatban elkezdett idősort2010 és 2018 között: 12.3. táblázat. 2018-ban a GDP 4, a nettó bérek 8 és a nyugdíjak csak 2%-kal nőnek, s emiatt az átlagos helyettesítési hányados 58,3-ról 55%-ra csökken.

12.3. táblázat.
Reálkibocsátás, -bérek, -nyugdíjak és hányadosuk 2010–2018, árindexálás

Év	GDP	Nettó bér	Nyugdíj	Helyettesítési hányados
	R e á l v á l t o z á s			
t	$100(g_t^y - 1)$	$100(g_t^v - 1)$	$100(g_t^{\bar{b}} - 1)$	$\gamma_t = \bar{b}_t/v_t$
2010	0,7	1,8	–0,9	0,651
2011	1,8	2,4	1,2	0,647
2012	–1,7	–3,4	0,1	0,670
2013	1,9	3,1	4,5	0,678
2014	3,7	3,2	3,2	0,675
2015	2,9	4,3	3,5	0,668
2016	2,1	7,4	1,4	0,631
2017	4,1	10,2	3,0	0,583
2018	4,0	8,0	2,0	0,550

Rátérünk az árindexálás modellezésére. Itt is használhatnánk a már megállapított nyugdíjakra a kettős (kor és idő szerinti) indexálást, de a félreértések elkerülése végett más utat választunk. Legyen b_t a t- edik év átlagos újonnan megállapított nyugdíja. Jó közelítéssel az új nyugdíj az előző évi v_{t-1} nettó keresettel arányos:

$$b_t = \beta v_{t-1}, \qquad t = 1, 2, \ldots, \qquad \beta > 0, \tag{12.6}$$

ahol a nagyobb realizmus kedvéért most β a késleltetett járadékszorzó. Elhagyjuk a nettó bér növekedési együtthatójából a v felső indexet: $g_t = v_t/v_{t-1}$-et, az új nyugdíjasok esetében a helyettesítési hányados $b_t/v_t = \beta/g_t$, alig kisebb β-nál.

Megismételjük, hogy feltevésünk szerint minden évben ugyanannyi egyén születik, mindenki megéri a nyugdíjkorhatárt és T évig él nyugdíjban, s ezalatt a nyugdíja reálértékben változatlan marad. Ezért a t-edik év átlagnyugdíja

$$\bar{b}_t = \frac{b_t + \cdots + b_{t-T+1}}{T}. \tag{12.7}$$

Átlagos helyettesítési hányadosnak nevezzük az átlagnyugdíj és a nettó bér hányadosát:

$$\gamma_t = \frac{\bar{b}_t}{v_t}. \tag{12.8}$$

Itt is meg kellene adni az általános kezdőértékeket:

$$b_0, \qquad b_{-1}, \qquad \ldots, \qquad b_{T-1},$$

de feltesszük, hogy (12.6) a 0-adik időszak előtt is érvényesült:

$$b_0 = \beta v_{-1}, \qquad b_{-1} = \beta v_{-2}, \qquad \ldots, \qquad b_{T-1} = \beta v_{-T}. \tag{12.6$'$}$$

Behelyettesítve (12.6)-ot és (12.7)-et (12.8)-ba:

$$\gamma_t = \beta\, \frac{v_{t-1} + \cdots + v_{t-T}}{T v_t}, \qquad t = 1, 2, \ldots. \tag{12.9}$$

A további elemzés előkészítéseként egyelőre tegyük föl, hogy a nettó keresetek állandó ütemben nőnek:

$$v_t = v_0 g^t, \qquad g > 1. \tag{12.10}$$

Behelyettesítve (12.10)-et (12.9)-be, és egyszerűsítés után a mértani sorozat összegképletét alkalmazva adódik a

12.3. tétel. *(12.10) és (12.6') esetén az átlagos helyettesítési hányados állandó, és zárt alakban felírható:*

$$\gamma = \beta\, \frac{g^{-1} + \cdots + g^{-T}}{T} = \beta \frac{1 - g^{-T}}{T(g-1)}. \tag{12.11}$$

Minél gyorsabb a bérnövekedés, annál inkább elmarad az átlagos helyettesítési hányados a β-tól: kis részben a késleltetés, nagy részben a régi nyugdíjak fokozatos lemaradása miatt. Például a 12.4. táblázat szerint $T = 20$ éves nyugdíjtartam és 2%-os növekedési ütem esetén 0,8 helyett csak $\gamma = 0{,}654$ a helyettesítési hányados.

12.4. táblázat.
A helyettesítési hányados függése a bérnövekedés ütemétől: árindexálás

Reálbér-növekedési ütem $100(g-1)$	0	1	2	3	4	5
Átlagos helyettesítési hányados γ	0,800	0,722	0,654	0,595	0,544	0,498

12.1. feladat. Számoljuk ki saját programmal (például excellel) a 12.4. táblázatot!

Visszatérünk az időben változó ütemű esetre. Először egy elemi megoldással kísérletezünk, ahol adott mind az átlagnyugdíj, mind a nettó bér reálnövekedési együtthatója:

$$\bar{b}_t = g_t^{\bar{b}} \bar{b}_{t-1} \qquad \text{és} \qquad v_t = g_t^{\mathrm{v}} v_{t-1}.$$

Ekkor a helyettesítési hányados dinamikája egyszerűen adódik. Behelyettesítjük a (12.8) definícióba a két növekedési egyenletet:

$$\gamma_t = \frac{g_t^{\bar{b}}\, \bar{b}_{t-1}}{g_t^{\mathrm{v}}\, v_{t-1}},$$

s újra felhasználva (12.8)-at, adódik a

12.4. tétel. *Minden év átlagos helyettesítési hányadosa egyenlő az előző év átlagos helyettesítési hányadosa szorozva a nyugdíjak és a nettó bér növekedési együtthatójának a hányadosával:*

$$\gamma_t = \gamma_{t-1} \frac{g_t^{\bar{b}}}{g_t^{\mathrm{v}}}.$$

Ez az összefüggés egyébként független a nyugdíjak indexálási módjától. Ha azonban kíváncsiak vagyunk arra, hogy miképp függ a nyugdíjak növekedési üteme a nettó bérekétől, akkor mélyebb megfontolásokra van szükségünk.

Minden évjáratot 1 nyugdíjassal képviselve, a t-edik év teljes nyugdíjkiadása [(12.7)]

$$B_t = T\bar{b}_t = b_t + \cdots + b_{t-T+1}. \tag{12.12}$$

Mivel

$$B_{t-1} = b_{t-1} + \cdots + b_{t-T},$$

ezért az állománycserélődést (12.12) alapján a következő rekurzió írja le:

$$B_t = b_t + B_{t-1} - b_{t-T}, \tag{12.13}$$

azaz (12.8) alapján az átlagos helyettesítési hányadosra térve (azaz B_t-t $Tv_t = Tg_t v_{t-1}$-gyel osztva)

$$\gamma_t = \frac{B_t}{Tv_t} = \frac{B_{t-1}}{Tg_t v_{t-1}} + \beta \frac{v_{t-1} - v_{t-T-1}}{Tv_t}. \tag{12.14}$$

Bevezetjük a t-edik évbeli $G_t = v_t/v_{t-T}$ halmozott bérnövekedési együtthatót, amely egyben a következő év legújabb és legrégebbi nyugdíjának hányadosát adja: $G_t = b_{t+1}/b_{t-T+1}$. Ekkor (12.14)-ből adódik a

12.5. tétel. *(12.6') esetén az árindexált nyugdíjak helyettesítési hányadosának dinamikája*

$$\gamma_t = \frac{\gamma_{t-1}}{g_t} + \beta \frac{1 - G_{t-1}^{-1}}{g_t T}. \tag{12.15}$$

12.3. példa. Érdemes megmutatni, hogyan alakul (12.15) szerint az átlagos helyettesítési hányados állandó reálbér- növekedési ütemnél [(12.5)]: $g_t \equiv g$, $G_t \equiv g^T$. Behelyettesítve a (12.15) képletbe:

$$\gamma = \frac{\gamma}{g} + \beta \frac{1 - g^{1-T}}{gT},$$

azaz (12.11).

A bonyolult (12.15) képletet érthetőbbé tesszük két megjegyzéssel. A jobb oldal első tagja képviseli a rendszer tehetetlenségét: mérsékelt reálbér-növekedési ütem esetén alig változik az átlagos helyettesítési hányados egyik évről a másikra. A második tag a legrégebbi és legújabb nyugdíj cserélődési hatását mutatja, de ennek abszolút értékét a 20-szal való osztás eleve lecsökkenti 0,05 alá.

Mi történik azonban, ha a bérnövekedési ütem 3 éven keresztül átmenetileg kiemelkedő értéket ér el? Legyen az éves növekedési együttható g_t, amely két értéket vehet föl, $1 < g_{\mathrm{m}} < g_{\mathrm{M}}$, s a nagyobbat $t_0 - 1, t_0, t_0 + 1$- ben:

$$g_t = \begin{cases} g_{\mathrm{m}}, & \text{ha } t < t_0 - 1 \text{ vagy } t > t_0 + 1; \\ g_{\mathrm{M}}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A numerikus számításokban stabil kiindulási helyzetet mérlegelünk, ezért feltesszük, hogy $t_0 = 1$ előtt $2T$ éven keresztül érvényes volt (12.6), s a kezdeti időszakban $G_0 = g_{\mathrm{m}}^T$ és $\gamma_1 = \gamma(g_{\mathrm{m}})$. A 12.5. táblázat a helyettesítési hányados dinamikáját mutatja. Látható, hogy a kezdeti 0,654 helyettesítési hányados 3 év alatt (dőlt számok) meredeken zuhan 0,557-ig, majd megfordul, és jóval lassabban (a táblázatban nem is szereplő évben) tér vissza a kezdeti értékhez.

12.5. táblázat. *Az átlagos helyettesítési hányados dinamikája reálbér sokknál*

Év t	Helyettesítési hányados γ_t	Év t	Helyettesítési hányados γ_t
		9	0,592
0	0,654	10	0,597
1	*0,618*	21	0,602
2	*0,585*	12	0,607
3	*0,557*	13	0,612
4	0,563	14	0,617
5	0,569	15	0,622
6	0,575	16	0,627
7	0,580	17	0,632
8	0,586	18	0,636

12.2. feladat. Számoljuk ki saját programmal (például excellel) a 12.5. táblázatot!

Egyszerű modellünk számszerűleg és közelítőleg megmutatta, hogyan hat egy hirtelen támadt reálbér-növekedés az átlagos helyettesítési hányadosra: gyors zuhanás, majd lassú felépülés. Ha figyelembe vennénk az itt elhanyagolt bonyodalmakat, akkor sokkal bonyolultabb képet kapnánk, ez azonban nem célunk.

Hogyan alakul a munkáltatói nyugdíj-járulékkulcs? Egyrészt párhuzamosan csökken, majd nő az átlagos helyettesítési aránnyal:

$$(\tau^E + \tau_t^F)Su_t = T\gamma_t v_t = T\gamma_t u_t(1 - \theta^E - \tau^E),$$

azaz

$$\tau_t^F = \frac{T\gamma_t(1 - \theta^E - \tau^E)}{S} - \tau^E.$$

A valóságban a munkáltatók számára csak a teljes bérköltség számít. Adott teljes bérköltség-pálya esetén a nettó reálbér gyorsabban növekszik, ez csökkenti az átlagos helyettesítési hányadost és a munkáltatói nyugdíjjárulék- kulcsot. Aztán fordul a kocka.

Zárásként körvonalazzuk a *vegyes indexálást*, amely az ár- és a bérindexálás kombinációja. 2000 és 2009 között elvben ez a forma működött, $\iota = 1/2$ értékkel. Itt a nyugdíjat kettős (kor és naptári év szerinti) indexszel kell ellátni: hány éve ment nyugdíjba: $k = 1, \ldots, T$ és hányadik évben vagyunk: $t = 0, 1, \ldots$. Legyen ι 0 és 1 közti szám a *bérindex súlya*.
Kezdő nyugdíj:

$$b_{0,t} = \beta v_{t-1}, \qquad t = 1, 2, \ldots. \tag{12.16}$$

Folytatott nyugdíj:

$$b_{k,t} = b_{k-1,t-1}g_t^{\iota} = \beta g^{-1} g^{(\iota-1)k} v_t, \qquad k = 1, 2, \ldots, T-1. \tag{12.17}$$

12.6. táblázat.
Reálkibocsátás, -bérek, -nyugdíjak és hányadosuk 2000–2009, kombinált indexálás

	Reálváltozás			Helyettesítési
Év	GDP	Nettó bér	Nyugdíj	hányados
t	$100(g_t^{\mathrm{Y}} - 1)$	$100(g_t^{\mathrm{v}} - 1)$	$100(g_t^{\bar{b}} - 1)$	$\gamma_t = \bar{b}_t/v_t$
2000	4,2	1,5	2,6	0,591
2001	3,8	6,4	6,6	0,591
2002	4,5	13,6	9,8	0,573
2003	3,8	9,2	8,5	0,568
2004	4,9	–1,1	3,9	0,600
2005	4,4	6,3	7,9	0,611
2006	3,8	3,6	4,5	0,623
2007	0,4	–4,6	–0,3	0,668
2008	0,8	0,8	3,4	0,691
2009	–6,6	–2,3	–5,7	0,672

12.3. feladat. Föltéve, hogy $g_t \equiv g > 1$, a (12.11) képlet általánosításaként igazoljuk az átlagos helyettesítési hányadost vegyes indexáláskor:

$$\gamma = \beta g^{-1} \frac{1 - g^{(\iota-1)T}}{T(1 - g^{\iota-1})}, \qquad \iota < 1!$$

12.4. feladat. Számolja ki $\iota = 1/2$-re az átlagos helyettesítési hányadost a bérnövekedés függvényében!

A számítássorozat végére érve felhívjuk a figyelmet az elhanyagolt tényezők hatására. Csak a legfontosabb elhanyagolásokat említjük. A népesség öregedése miatt a nyugdíjrendszer egyenlege a jelzettnél kedvezőtlenebbül alakul. A kereseti különbségek felerősödése és az ezekkel korreláló várható élettartam polarizálódása elkerülhetetlenné teszi a nyugdíjszabály tompítását: a mindenki számára látható nyugdíjplafon visszaállításán túl valamilyen alapnyugdíj bevezetését vagy degresszió visszahozatalát. Kérdés, hogy az általános korhatár emelése mennyire képes ellensúlyozni a nyugdíjrendszer fenntarthatóságát veszélyeztető irányzatokat, például a nyugdíjazáskor várható élettartam emelkedését.

13. A jelzáloghitel elemi modelljei

A hitelek a gazdaságban jelentős szerepet játszanak, és matematikai modellezésük sem csupán könyvelőknek való feladat. Különösen nehéz probléma a hosszú távú hitelek (jelzálog-, diákhitelek stb.) tervezése, hiszen az évtizedekre terjedő törlesztési folyamat során nagyon megváltozhat a lakosság pénzügyi helyzete: reáljövedelmek, kamatlábak, árfolyamok. Jelzáloghitelnek nevezik a lakásvételt fedező kölcsönt; ha az adós tartósan elmarad a törlesztéssel, akkor a lakás a bank tulajdonába megy át.

A jobb megértés érdekében egy egyszerű számpéldán szemléltetem a jelzáloghitel jelentőségét. Vegyünk egy fiatal családot, amelynek családi nettó jövedelme havi 300 eFt, és szerény bérlakásukért 150 eFt-nyi lakbért fizetnek. Van már 10 mFt megtakarításuk, és szeretnének felvenni 20 mFt-os jelzáloghitelt, hogy egy 30 mFt-os lakást vegyenek maguknak. (Példánkban a CSOK-kal nem foglalkozunk.) Ha 10 évre kamatmentes hitet kapnának, akkor évi 2 mFt-ot, azaz havi 167 eFt-ot kellene törleszteniük, alig többet mint a lakbér.) 2004 és 2008 között a svájci frank alapú jelzáloghitel kamatmentes hitelnek tűnt a magas kamatlábú forint hitelekhez képest, különösen akkor, ha a hitelfelvevő eltekintett a tetemes kezelési költségtől.

Ebben a fejezetben röviden bemutatom a jelzáloghitel törlesztési folyamat három legegyszerűbb modelljét. 1. A *hagyományos jelzáloghitelt*, ahol a törlesztési pálya tervezésénél nem veszik figyelembe, hogy az infláció miatt a törlesztési pálya reálértékben orrnehéz, mert a nominális törlesztési részlet időben állandó. 2. Az ún. *kettős indexálású jelzálog* (angolul: Dual Indexed Mortgage, röviden: DIM) modelljét, ahol az infláció figyelembevétele miatt a törlesztési részlet vásárlóértéke időben állandó. 3. A *devizaalapú jelzáloghitel* modelljét, amelyben a forinthitel és törlesztése egy árnyékként számolt devizaalapú hitel és -törlesztés átváltásából adódik.

A képletek egyszerűsítése miatt kamatláb helyett kamategyütthatóval (1+kamatláb), inflációs ráta helyett inflációs együtthatóval (1+inflációs ráta) számolunk. Ugyanezért eltekintünk a kamatláb, az inflációs ráta és a forintárfolyam időbeli változásától. (Figyelem: ha az svájci frank forintárfolyama növekszik, akkor a orint gyengül.)

13.1. Hagyományos jelzáloghitel

A hiteltörlesztési folyamatot általában folyó áron – az infláció figyelembevétele nélkül – tervezik a bankok. Legyen $D_0 > 0$ a hitel kezdőértéke, $T > 1$ a törlesztési (vagy futam)idő és legyen $t = 1, 2, \ldots, T$ a hiteltörlesztési időszakok (általában hónap, de itt év) indexe. A t-edik időszak (végi) törlesztése B_t, az időszaki kamategyüttható (= 1+kamatláb) R, és az időszakvégi adósság D_t.

Definíció szerint minden évre igaz a következő azonosság: év eleji adósság = tavalyi adósság + éves kamat – éves törlesztés. Szimbólumokkal:

$$D_t = RD_{t-1} - B_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, T-1, T, \qquad D_0 \qquad \text{adott.} \tag{13.1}$$

Figyelem: a köznyelv gyakran kamatnak nevezi a kamatlábat, holott az első $(R-1)D_t$, a második $R-1$.

Szükségünk lesz a (B_t) törlesztési sorozat *jelenértékére*, amelyet angol kezdőbetűi nyomán (present value) PV-vel rövidítünk. Definíció szerint a törlesztési pénzfolyamat jelenértéke az a szám, amelynek megfelelő tőkét elhelyezve a hitel felvételekor a bankban, és a hitelkamatlábbal kamatoztatva az esedékes törlesztésekig, a hitelfelvevő éppen ki tudná fizetni a hitel kezdőértékét.

13.1. segédtétel. *A (B_t) törlesztési sorozat jelenértéke $R-1$ kamatláb esetén*

$$\mathrm{PV} = \frac{B_1}{R} + \frac{B_2}{R^2} + \cdots + \frac{B_T}{R^T}. \tag{13.2}$$

Bizonyítás. Gondoljuk azt, hogy a hitel felvételekor a hitelfelvevő T darab kamatozó bankbetétet képez, és a t-edikbe betesz $R^{-t}B_t$ forintot, $t = 1, \ldots, T$. A kamatos kamat miatt a t-edik időszak végére a t-edik betét éppen B_t-re duzzad, tehát a hitelfelvevő ebből tudja fizetni az esedékes törlesztést. Ha összeadjuk a „bankbetétek” kezdőértékét, adódik (13.2). ∎

Ésszerű feltevés, hogy a hitelérték éppen a törlesztési sorozat jelenértéke: $D_0 = \mathrm{PV}$. A valóságban azonban a kamatlábrés (= hitelkamatláb – betéti kamatláb) miatt a hitelkamatláb jóval nagyobb, mint a betéti kamatláb. A jelzáloghitel esetében azonban a kamatlábrés nem túl jelentős.

A hagyományos hitelnél időben változatlan a törlesztés: $B_t = B$. Igaz a

13.1. tétel. *A T futamidő esetén a $D_0 > 0$ nagyságú hitel időben állandó törlesztőrészlete*

$$B = \frac{(R-1)D_0}{1-R^{-T}}, \qquad R > 1. \tag{13.3}$$

Bizonyítás. $B_t \equiv B$ esetén (13.2)-ben alkalmazható a mértani sorozat összegképlete:

$$D_0 = \mathrm{PV} = R^{-1}\frac{1-R^{-T}}{1-R^{-1}}B. \tag{13.4}$$

Rendezéssel adódik (13.3). ∎

A valóságban a kamategyüttható idővel változik, s e miatt a változtatható kamatlábú hitelek esetében a bank akár minden időszakban újraszámolhatja az esedékes törlesztési részletet, miközben felteszi, hogy a kamategyüttható a következőkben már nem változik. Ezzel a fontos bonyodalommal azonban csak a fejezet végén foglalkozunk.

A következő feladat egy szakemberek által is gyakran figyelmen kívül hagyott jelenséget világít meg (vö. 13.6. táblázat)

13.1. feladat. Jelölje $B(T)$ a T futamidőhöz tartozó törlesztést. Igazoljuk közvetlenül (13.3) segítségével, hogy $R > 1$ esetén a futamidő növelésével növekszik a teljes törlesztési összeg: $TB(T) < (T+1)B(T+1)$!

Egyszerűsége miatt érdemes az öröktörlesztést külön is bemutatni.

13.1. példa. Ha a törlesztési idő végtelen: $T = \infty$, akkor

$$B(\infty) = (R-1)D_0 \qquad \text{és} \qquad D_t = D_0. \tag{13.3$'$}$$

Ebből leolvasható, hogy a változatlan törlesztőrészlet a kamattal egyenlő. Az is látszik, hogy nagyobb, például 10%-os éves kamatláb esetén már az első évben képtelenség egy 10 mFt-os hitelt törleszteni, hiszen csak az éves kezdőrészlet 1 mFt lenne.

A jelzáloghitel egyik legnagyobb problémája, hogy modern gazdaságban – a válságoktól eltekintve – az általános árszínvonal emelkedése (köznapi nyelven: az infláció) nem hanyagolható el. Sőt, a következő, 13.3. alfejezetben tárgyalt devizaalapú hitelek miatt árfolyamváltozások is hatnak.

Ahhoz, hogy jobban megértsük a kérdést, egy rövid kitérőt teszünk az infláció és a később tárgyalandó árfolyam kérdésében. Legyen P_t és P_t^* a 2004-től kezdve számított hazai és svájci halmozott árindex, másképp: árszint; $p_t = P_t/P_{t-1}$ és $p_t^* = P_t^*/P_{t-1}^*$ az éves árindex, valamint E_t a CHF–HUF éves nominális árfolyam, $F_t = E_t P_t^*/P_t$ pedig az inflációval korrigált reálárfolyam. Ekkor a 13.1. táblázat mutatja az éves és a halmozott forint és frank árindexet, valamint a nominális és reálárfolyamot. Például 2013-ban a hazai és a svájci árindex 60,8, illetve 5,8%-kal volt magasabb, mint 2003- ban, míg a frank árfolyama a 2004-es 159,3-ról 242 forintra ugrott. A reálárfolyam sokkal kevesebbet nőtt: 150,4-ről csupán 159,3-re, ha 2003-as forintban és svájci frankban számolunk.

13.1. *Magyar és svájci idősorok, 2004–2013*

Év	Forint: Éves árindex	Forint: Halmozott árindex	Nominál HUF/CHF árfolyam	Svájci frank: Éves árindex	Svájci frank: Halmozott árindex	Reál-árfolyam
t	$100(p_t-1)$	P_t	E_t	$100(p_t^*-1)$	$100P_t^*$	F_t
2004	6,8	106,8	159,3	0,8	100,8	150,4
2005	3,6	110,6	162,3	1,2	102,0	149,6
2006	3,9	115,0	157,0	1,1	103,1	140,7
2007	8,0	124,2	152,4	0,7	103,8	127,4
2008	6,1	131,7	177,8	2,4	106,3	143,5
2009	4,2	137,3	182,3	–0,5	105,8	140,6
2010	4,9	144,0	222,7	0,7	106,6	164,8
2011	3,9	149,6	255,9	0,2	106,8	182,7
2012	5,7	158,1	241,0	–0,7	106,1	161,7
2013	1,7	160,8	242,1	–0,2	105,8	159,3

Az inflációs hatás vizsgálatában visszatérünk a változó törlesztőrészletű pályához: (B_t). Legyen az időben állandó inflációs együttható (=1+inflációs ráta): p, és a t-edik időszakvégi halmozott árindex (árszint): $P_t = p^t$, $P_0 = 1$. Osszuk el a (13.1) egyenlet mindkét oldalát P_t-vel:

$$\frac{D_t}{P_t} = \frac{R}{p}\frac{D_{t-1}}{P_{t-1}} - \frac{B_t}{P_t}. \tag{13.5}$$

Ezen a ponton bevezetjük a reálkamat-együtthatót (r), a reáltörlesztést (b_t) és a reáladósságállományt (d_t):

$$r = \frac{R}{p}, \qquad b_t = \frac{B_t}{P_t} \qquad \text{és} \qquad d_t = \frac{D_t}{P_t}. \tag{13.6}$$

A korábbi változókat *nominális* jelzővel különböztetjük meg reáltársaiktól. Figyeljük meg, hogy a nominális kamategyütthatót az éves inflációs együtthatóval osztottuk, a törlesztőrészletet és az adósságot viszont az árszinttel.

(13.6) segítségével (13.5) egyszerűsíthető:

$$d_t = rd_{t-1} - b_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \qquad d_0 = D_0 \qquad \text{adott.} \tag{13.7}$$

Szóban: Éves reáladósság = tavalyi reáladósság + éves reálkamat – éves reáltörlesztés.

Kitérőként megemlítjük, hogy rossz hagyományként a közgazdászok a reálkamatlábat gyakran azonosítják a nominális kamatláb és az inflációs ráta különbségével. Ez azonban csak néhány százalékos inflációs ráta esetén elfogadható közelítés (6.1. segédtétel), amikor

$$r - 1 = \frac{R}{p} - 1 = \frac{R-p}{p} \approx (R-1) - (p-1), \qquad \text{ha} \qquad p \approx 1.$$

A képletek jobb megértését számpéldákkal segítjük. Alapadatok: a hitel futamideje: $T = 20$ év, a hitel összege: $D_0 = 10$ mFt (millió forint).

Bár a nominális kamatláb és az inflációs ráta részben független egymástól, szemléltetésünkben célszerű a reálkamat-együtthatót rögzíteni: $r = 1{,}06$. A 13.2. táblázatban azt nézzük meg, hogyan hat az inflációs ráta növekedése az éves nominális törlesztési részletre. Állandó árszintnél a törlesztés 872 eFt (ezer forint), évi 6%-os inflációnál a nominális részlet már 1369 eFt – ez már kifizethetetlen, figyelembe véve a 2004-es hazai jövedelemviszonyokat. Persze, az évek múltával a törlesztés reálértéke egyre inkább csökken. Nulla infláció esetén a zárótörlesztés reálértéke is 872 eFt, s 6%-os infláció esetén 427 eFt-ra csökkenne, ha folyamatosan kifizethető lett volna.

13.2. táblázat. *Az infláció hatása az éves induló és záró törlesztésre, eFt*

Inflációs együttható p	Nyitó törlesztés B	Záró reál törlesztés b_T
1,00	872	872
1,03	1110	614
1,06	1369	427

Megjegyzés. Reálkamat-együttható: $r = 1{,}06$, nominál kamat- együttható: $R = rp$, záró törlesztés reálértéke: $b_T = B/p^T$.

13.2. Kettősen indexált törlesztés

1975 körül Franco Modigliani (Nobel-emlékdíjas amerikai közgazdász) választ keresett a gyors infláció okozta kezdeti törlesztési gondokra. Megoldásként az ún. *kettősen indexált hitelt* javasolta, ahol nemcsak a reálkamat-együttható, hanem a b_t reáltörlesztés is állandó: $r_t = r$ és $b_t = b$. Ekkor (13.7) tovább egyszerűsödik:

$$d_t = rd_{t-1} - b, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \qquad d_0 \qquad \text{adott.} \tag{13.8}$$

A 13.1. tétel helyére lép a

13.2. tétel. *Ha a reálkamat-együttható állandó, és a bank úgy állapítja meg az esedékes hiteltörlesztést, hogy a reáltörlesztés minden időszakban állandó legyen, akkor a reáltörlesztés*

$$b = \frac{(r-1)D_0}{1 - r^{-T}}, \qquad r > 1; \tag{13.9}$$

míg a reáladósság (13.8) szerint alakul.

Visszatérünk a 13.1. példánkhoz.

13.2. példa. Ha a törlesztési idő végtelen: $T = \infty$, és kettősen indexált törlesztést alkalmaz a bank, akkor a törlesztőrészlet reálértéke

$$b(\infty) = (r-1)d_0. \tag{13.3$''$}$$

Ebből leolvasható, hogy ilyenkor a változatlan reálértékű törlesztőrészletnek a hitelhez viszonyított aránya a reálkamatlábbal egyenlő. Alacsony éves reálkamatláb esetén még magas nominálkamatláb mellett is törleszthető a kezdőrészlet, de a tartozás nominális értéke sokáig növekszik, de reálértelemben természetesen csökken: $D_1 = rpD_0 - p(r-1)D_0 = pD_0 < RpD_0$.

A 13.3. táblázatban azt vizsgáljuk, hogyan hat a reálkamat-együttható emelkedése a kettősen indexált hitel (DIM) törlesztésére. 0%-os reálkamatlábnál fejből tudjuk az eredményt: 10 mFt/20 = 500 eFt; 3%-os reálkamatlábnál az éves törlesztés nominális értéke 672 eFt, de 6% esetén már 872 eFt! (a 13.2. táblázat 1. sora).

13.3. táblázat. *A reálkamatláb hatása az éves törlesztésre: DIM*

Reálkamat-együttható r	Éves törlesztés (eFt) b
1,00	500
1,03	672
1,06	872

A 13.2. feladat az állandó nominális vagy reáltörlesztésű jelzáloghitel érdekes különbségét emeli ki.

13.2. feladat. Mutassuk meg, hogy a hagyományos hitelnél a nominális adósság időben monoton csökken, míg a kettős indexálású hitelnél a monotonitás csak akkor igaz, ha az inflációs együttható elegendően kicsi, nevezetesen ha

$$p < \frac{1 - r^{-T}}{1 - r^{-T+1}}!$$

Például $r = 1{,}03$ reálkamat-együttható és $T = 20$ évnyi törlesztési idő esetén az inflációs ráta legfeljebb csak 3,9% lehet: $p < 1{,}039$, hogy a tartozás monoton csökkenő legyen.

Egyébként a magyar diákhitel is a kettős indexálású hitelhez hasonlít, csak a futamidő változó, és a törlesztőrészlet a mindenkori egyéni kereset rögzített százaléka. Állandó reálkereset esetén a törlesztési pálya azonossá válik a kettős indexálású pályával.

13.3. Devizaalapú-hitel

Alacsonyabb és stabilabb (alig ingadozó) külföldi kamatlábak, valamint elhanyagolható külföldi infláció, és kedvező (túlértékelt) árfolyamok miatt számos országban a hazai valuta helyett valamilyen más ország devizája alapján számolják el a jelzálog- (és egyéb) hiteleket. Túlértékeltnek nevezzük a hazai valutát, ha tartós eladósodást okoz, mert az import túl olcsó, és az export túl drága.

Magyarországon 2004 után terjedt el a *devizaalapú hitelezés*, és az alacsonyabb kamatlábak és stabil árfolyam miatt a svájci frank nemcsak a forint-, de az eurókölcsönöket is kiszorította. 2008-ban azonban beütött a nemzetközi pénzügyi és gazdasági válság. Míg az euró forint árfolyama 20010-re 250-ről csak 300-ra (20%-kal) nőtt, addig a svájci franké 150-ről 250-re (67%-kal) ugrott. Emellett a devizakamatláb is nőtt, míg a reálárfolyam 2007 és 2011 között 127 és 183 Ft között ingadozott.

Új modellünkben is állandó paraméterértékekre szorítkozunk, de a forint adósság helyére egyelőre a devizában kifejezett adósság lép (*-gal jelölve a devizában adott kamategyütthatót, adósságot és törlesztőrészletet):

$$D_t^* = R_t^* D_{t-1}^* - B_t^*, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \qquad 1 < R^* < R. \tag{13.10}$$

Mivel a *devizaalapú* hitelnél a devizában kifejezett adósságot (D_t^*) és a törlesztést (B_t^*) a bank minden időszakban forintra számítja át, ezért szükségünk lesz a külső valuta árfolyamára (a hazai valutában kifejezve): E_t, és időben állandónak feltételezett relatív változására:

$$e = E_t / E_{t-1} > 1. \tag{13.11}$$

Felírjuk a (13.10) devizaadósság-dinamika forintban kifejezett alakját:

$$E_t D_t^* = e R_t^* E_{t-1} D_{t-1}^* - E_t B_t^*, \qquad t = 1, 2, \ldots, T. \tag{13.12}$$

Például a svájci frankban kifejezett D_t^* tartozást E_t frank–forint árfolyammal beszorozva kapjuk meg a $E_t D_t^*$ kifejezett adósságot.

Ekkor a devizáról a forintra átszámított (hullámos felülvonással megkülönböztetett) törlesztőrészlet és adósság rendre

$$\tilde{B}_t = E_t B_t^*, \qquad \text{és} \qquad \tilde{D}_t = E_t D_t^*. \tag{13.13}$$

A 13.1. és a 13.2. tétel helyére most új tétel lép.

13.3. tétel. *Ha a bank minden időszakban állandónak veszi a törlesztés devizaértékét, akkor a t-edik időszak törlesztőrészletének állandó deviza- és változó forintértéke rendre*

$$B^* = \frac{(R^*-1)D_0^*}{1-R^{*-T}} \qquad \text{és} \qquad \tilde{B}_t = E_t B^*, \tag{13.14}$$

míg a devizaadósság (13.10), s ugyanaz forintra átszámítva pedig (13.13) szerint alakul.

Bevezetve az $\tilde{R} = eR^*$ devizaalapú hitel forint kamategyütthatóját, (13.13) segítségével (13.12) átírható:

$$\tilde{D}_t = \tilde{R}\tilde{D}_{t-1} - \tilde{B}_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \qquad \tilde{D}_0 = D_0. \tag{13.15}$$

Hasonlítsuk össze a forintalapú adósság (13.1) egyenletét a devizaalapú adósság forintban kifejezett (13.15) egyenletével. Látható, hogy a két kamatláb pontosan akkor azonos, ha

$$R = \tilde{R}(= R^* e).$$

Ezt az esetet nevezik *fedezetlen kamatparitásnak*: a hazai kamategyüttható = külső kamategyüttható × árfolyam-együttható. Alacsony kamatlábaknál és leértékelődésnél jó közelítéssel igaz, hogy a hazai kamatláb = külső kamatláb – árfolyamváltozás. Bár az eltérő törlesztési folyamat miatt eltérő a két adósságdinamika, a két hitel jelenértéke azonos. Ha emellett a forint hazai értékvesztése párhuzamos a leértékelődéssel: $p = e$, azaz az $F_t = E_t P_t^*/P_t$ reálárfolyam $P_t^* \equiv 1$ esetén állandó, akkor különösen egyszerű az összehasonlítás: a devizaalapú hitel azonos a kettős indexálású forinthitellel. A forinthitel hazai törlesztőrészlete reálértékben magasról indul, de erősen csökken; míg a devizaalapú hiteltörlesztés alacsonyabb szintről indul, de reálértékben állandó.

A jelenérték segítségével összehasonlíthatjuk a forint- és a devizaalapú hitelt is. Emlékeztetőül: PV= D_0. Relatív árfolyammal dolgozva (egységnyinek véve a kezdőárfolyamot), azaz (13.11)–(13.13) segítségével

$$\tilde{\mathrm{PV}} = B^* \left(\frac{e}{R} + \cdots + \frac{e^T}{R^T} \right), \qquad \text{ahol} \qquad E_0 = 1.$$

Bevezetve a $\rho = R/e$ forint-ekvivalens deviza- kamategyütthatót, (13.14) segítségével a devizaalapú hitel jelenértéke zárt alakban egyszerűen felírható:

$$\tilde{\mathrm{PV}} = \frac{R^*-1}{1-R^{*-T}} \frac{1-\rho^{-T}}{\rho - 1} D_0,$$

amely pontosan akkor nagyobb vagy kisebb, mint eredeti forinttársa: PV=D_0, ha $\rho > R^*$ vagy $\rho < R^*$. Visszatérve az eredeti jelölésekre: $R > R^* e = \tilde{R}$ vagy $R < R^* e = \tilde{R}$.

Harmadszor is megvizsgáljuk a legegyszerűbb esetet.

13.3. példa. Ha a törlesztési idő végtelen: $T = \infty$, és devizaalapú hitelt alkalmaz a bank, akkor a t-edik időszak törlesztőrészletének deviza- és forintértéke rendre

$$B^*(\infty) = (R^*-1)D_0 \qquad \text{és} \qquad \tilde{B}_t = E_t(R^*-1)D_0. \tag{13.3*}$$

Ebből leolvasható, hogy ilyenkor a változatlan deviza törlesztőrészletnek a hitelhez viszonyított aránya a devizakamatlábbal egyenlő. Alacsony devizakamatláb esetén komolyabb hitelt is lehetséges törleszteni, feltéve, hogy a leértékelődés az inflációhoz és a nominális jövedelmi pályához képest nem túl gyors.

A 13.4. táblázatban egyszerű idősorral mutatjuk meg a devizaalapú hitel viharszerű elterjedését. Az összes és a devizaalapú hitelállomány 2003 végén a GDP 10,7 és 0,5%-a volt, s ez 2008 végére felugrott 27,4 és 19,2%-ra. A válság hatására a folyamat megfordult, és 2013-tól a devizaalapú hitelezés lényegében megszűnt.

13.4. táblázat. *Forint- és frankalapú hitelek állománya/GDP: HU, 2003–2013*

Év	Összes hitelek	Devizaalapú hitelek	Év	Összes hitelek	Devizaalapú hitelek
2003	10,7	0,5	2009	28,9	20,1
2004	12,6	1,8	2010	30,7	21,5
2005	15,3	5,0	2011	29,2	19,7
2006	18,5	9,0	2012	24,2	14,3
2007	21,8	12,9	2013	22,2	12,6
2008	27,4	19,2			

A 13.5. táblázatban a két hitelfajtát összehasonlítva három esetet vizsgálunk: 1. sor – az árfolyam állandó: $e = 1$, tehát a devizaalapú eszmei kamatláb kisebb, mint a forintkamatláb: $eR^* < R$; 2. sor – a leértékelődés követi az inflációt: $e = p$, és a devizaalapú eszmei kamatláb egyenlő a forintkamatlábbal: $eR^* = R$; 3. sor – a forint leértékelődése gyorsabb, mint az infláció: $e > p$, és a devizaalapú eszmei kamatláb nagyobb, mint a forintkamatláb: $eR^* > R$. Az 1. eset a 2004–2008-as helyzet, a 3. eset a 2009-től kialakuló helyzet *stilizált* képe, és a 2. eset a kettő között egy simább átmenet. Számszerűen: $R^* = 1{,}06$; $p = 1{,}06$; $R = R^*p = 1{,}1236$; $e(1) = 1$, $e(2) = R/R^* = 1{,}06$ és $e(3) = 1{,}1$.

A forinthitel kezdőrészlete 1 369 eFt, záró reálértéke csupán 427 eFt (13.1. táblázat utolsó sora). A devizaalapú hitel kezdőrészlete mindhárom esetben 872 eFt. A kedvező esetben a záró reálérték 272 eFt, a hitel jelenértéke csak 6,368 mFt. A kedvezőtlen esetben a záró reálérték 1 829 eFt, a jelenérték viszont elképesztő: 14,058 mFt. A semleges esetben a törlesztés reálértéke változatlan, és a jelenérték megegyezik a hitellel.

13.5. táblázat. *A devizaalapú hitel és a forint leértékelődése*

Leértékelődési együttható e	Reáltörlesztés (eFt) kezdő $\tilde{b}_1$	záró $\tilde{b}_T$	Devizaalapú-hitel jelenértéke (mFt) $\tilde{\mathrm{PV}}$
1,00	872	272	6,368
1,06	872	872	10,000
1,10	872	1829	14,058

Megjegyzés. $R^* = 1{,}06$, $p = 1{,}06$ és $R = 1{,}1236$; forinthitel törlesztőrészlete: $B = 1\,369$ eFt, záró reálértéke: $b_T = 427$ eFt.

Közelebb kerülnénk a 2004 és 2012 közötti magyar helyzethez, ha egy időben változó paraméterű devizaalapú hitelt vizsgálnánk: egy nagyon kedvezőnek induló devizaalapú hitel (1. sor) egy hirtelen változás miatt nagyon kedvezőtlenné válik (3. sor). Ennek szemléltetésétaz Olvasókra bízzuk.

Racionális és naiv várakozások

A fejezet végéhez közeledve feloldjuk az állandó kamatláb (-együttható) feltevését. Tegyük föl, hogy a forint kamategyüttható a következő pályát írja le: (R_t). Ekkor a (13.2) jelenérték-képletben R^t helyett $R_1 \cdots R_t$ kerül. Számunkra a t-edik időszakban kezdődő szakasz érdekes, amelynek elején a tartozás értéke D_{t-1} és a nominálisan rögzített törlesztőrészlet végig B_t-re van tervezve. Ha a bank ismerné a hátralévő időszak kamategyüttható-pályáját (racionális várakozás!), akkor a jelenérték-egyenlet

$$D_{t-1} = \frac{B_t}{R_t} + \frac{B_t}{R_t R_{t+1}} + \cdots \frac{B_t}{R_t R_{t+1} \cdots R_T} \tag{13.16R}$$

lenne. A bankárok azonban nem estek a fejükre, és jobb híján a naiv várakozást alkalmazzák: végig a mostani kamategyütthatót vetítik előre, tehát

$$D_{t-1} = \frac{B_t}{R_t} + \frac{B_t}{R_t^2} + \cdots \frac{B_t}{R_t^{T-t+1}} = B_t \frac{1 - R_t^{t-T-1}}{R_t(1 - R_t^{-1})}, \tag{13.16N}$$

azaz

$$B_t = \frac{R_t - 1}{1 - R_t^{t-T-1}} D_{t-1}. \tag{13.17}$$

Természetesen a tényleges tartozást a várakozások beteljesedésétől függetlenül évről évre módosítják:

$$D_t = R_t D_{t-1} - B_t. \tag{13.18}$$

Ha azonban R_t meredeken csökken (mint 1995 és 2003 között), akkor a naiv várakozás jelentősen előrehozza a törlesztési pályát.

Kamatláb és futamidő

A fejezet végéhez érve bemutatjuk, hogyan függ 2018. őszén a nominális kamatláb (pontosabban: teljes hitelmegtérülési mutató, THM) a futamidőtől. Mivel a bankárok arra számítanak, hogy az inflációs ráta emelkedik, ezért a futamidő növekedésekor a nominális kamatláb jelentősen emelkedik. A teljesség kedvéért a havi törlesztési időt is közöljük (forrás: www. portfolio hu/finanszirozas/hitel/fix-torlesztes) Az adatok 10 mFt-os hitelre, illetve a legjobb és legrosszabb ajánlatra vonatkoznak.

13.6. táblázat. *Nominális kamatláb és futamidő*

Futamidő	Bank	Nominális kamatláb %	Havi törlesztőrészlet (Ft)
$T = 10$			
	UniCredit	3,63	99 097
	Erste	4,95	105 285
$T = 15$			
	UniCredit	4,58	76 342
	Erste	6,16	84 332
$T = 20$			
	K&H	5,11	65 332
	OTP	7,00	76 232

14. Az általános egyensúlyelmélet legegyszerűbb modellje

A matematikai közgazdaságtan egyik csúcsteljesítménye az *általános* piaci egyensúly létezésének bizonyítása. (A 4.1. alfejezetben csak az egytermékes részpiac egyensúlyát vizsgáltuk.) A legegyszerűbb esetben a termelést elhanyagoljuk, és egy cseregazdaságra szorítkozunk, amelyben a már meglevő termékeket cserélik el a háztartások egymással. A csere célja: minden háztartás annyira javítsa a helyzetét, amennyire csak lehetséges. Részletesebben: minden háztartásnak van egy *hasznosságfüggvénye*, amely a csere utáni készletvektor (n darab szám rendezett együttese) monoton növekvő függvénye. Minden termék csere utáni összkészlete megegyezik a csere előtti összkészlettel. Minden háztartás csak addig nyújtózkodhat, ameddig a takarója ér, azaz egy feltételezett piaci árrendszerben a kezdőkészletek eladásából származó jövedelme megegyezik a végső készletek piaci értékével. *1)* Belátható, hogy megfelelő technikai feltevések mellett létezik legalább egy ilyen piaci árvektor és a hozzá tartozó optimális fogyasztási vektor rendszere. *2)* Aszimmetrikus információ esetén azonban az egyensúly gyakran nem létezik.

14.1. Általános egyensúly

Ebben az alfejezetben definiáljuk az általános egyensúly legegyszerűbb modelljét (amikor két termék és két fogyasztó létezik, valamint mindkét hasznosságfüggvény Cobb–Douglas-féle), és igazoljuk a piaci egyensúlylétezését, sőt kiszámítjuk az értékét.

A feladat nehézségét a fixpont-tételeknél adódó körkörösség jelenti: egyrészt adott piaci áraktól függ az egyes partnerek vagyona és kereslete; másrészt a mérlegfeltételek megszabják az egyensúlyi piaci árakat. Ez a kettőség megjelenik a bizonyításban is.

Két szereplőnk indexe 1 és 2. Az egyes szereplők kiinduló készletpárja (v_1, w_1), illetve (v_2, w_2), nemnegatív számpárok, de mindkét párban legalább az egyik elem pozitív. A jelölések egyszerűsítése érdekében olyan mértékegységeket választunk, hogy mindkét termék összkészlete egységnyi legyen:

$$v_1 + v_2 = 1 \qquad \text{és} \qquad w_1 + w_2 = 1. \tag{14.1}$$

A piaci egyensúly egyidejűleg háromfajta követelményt jelent.

a) A csere révén a javakat újra elosztják: olyan (x_1, y_1) és (x_2, y_2) nemnegatív pár – végeredmény fogadható el, amelyet a csere lehetővé tesz (vö. (14.1)):

$$x_1 + x_2 = 1 \qquad \text{és} \qquad y_1 + y_2 = 1. \tag{14.2}$$

b) Mivel modellünkben nincs pénz, ezért árak helyett árarányokról beszélünk. Ha a két termék áraránya $p > 0$, akkor 1 egységnyi 2. termékért p egységnyi 1. terméket kell adni. Feltételezzük, hogy mindkét szereplő a pozitív p árarány mellett ki tudja fizetni a cserét:

$$px_k + y_k = pv_k + w_k, \qquad k = 1, 2. \tag{14.3}$$

c) A közgazdaságtanban szinte általánosan elfogadott, hogy a döntéshozók maximalizálják célfüggvényüket, amely megmondja, hogy a választott döntés mennyire jó (5. fejezet). Itt additív logaritmikus *hasznosságfüggvényüket* maximalizálják a cserepartnerek:

$$u_k(x_k, y_k) = \alpha_k \log x_k + (1 - \alpha_k) \log y_k \to \max., \quad k = 1, 2. \tag{14.4}$$

ahol α_k $(0 < \alpha_k < 1)$ mutatja az 1. termék relatív fontosságát a k-adik fogyasztó számára.

Ez a célfüggvény jól bevált a fizikában is, amikor például a hangerősségnek logaritmikus függvényét érezzük. Azt is mondhatjuk, hogy függetlenül a kiinduló helyzettől, ha kétszeresre növeljük a fogyasztást, akkor ugyanannyival növekszik a hasznosság.

Ugyanakkor a 2.5. tétel 2. következménye szerint a parametrikus optimális megoldás

$$x_k(p) = \frac{\alpha_k(pv_k + w_k)}{p} \qquad \text{és} \qquad y_k(p) = (1 - \alpha_k)(pv_k + w_k), \qquad k = 1, 2. \tag{14.5}$$

A fixponttétel már említett kettősége megjelenik a bizonyításban is. Egyszerű számolással belátható, hogy ilyen egyensúlyi rendszer létezik.

14.1. tétel. *A kéttermékes, kétszereplős, Cobb-Douglas-féle hasznosságfüggvényű cseregazdaságban a piaci egyensúly létezik, és az egyensúlyi árarány*

$$p^* = \frac{w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2}{1 - v_1\alpha_1 - v_2\alpha_2}, \tag{14.6}$$

míg az optimális fogyasztási párok $(x_k(p^*), y_k(p^*))$ *[(14.5)], ahol* $k = 1, 2$.

Bizonyítás. Tetszőleges p relatív ár mellett már meghatároztuk a k-adik szereplő optimális fogyasztási párját, most ezek segítségével felírjuk a piaci egyensúlyi relatív árra vonatkozó fixpontegyenletet.

Behelyettesítve (14.5a)-t a (14.2a) mérlegfeltételbe:

$$1 = x_1(p) + x_2(p) = \frac{\alpha_1(pv_1 + w_1)}{p} + \frac{\alpha_2(pv_2 + w_2)}{p},$$

Rendezve p-re a fixpontegyenletet:

$$p(1 - v_1\alpha_1 - v_2\alpha_2) = w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2,$$

azaz a (14.6) képletben szereplő p^* adódik, (14.2b) pedig következmény. ∎

14.1. példa. Még ebben a kétszereplős–kéttermékes modellben is túl sok paraméter van, ezért szemléltetés kedvéért tovább egyszerűsítjük a modellt. Feltesszük, hogy kezdetben az 1. szereplőnek csak a v-terméke van, a 2.-nek csak w: $v_1 = 1$, $w_1 = 0$ és $v_2 = 0$, $w_2 = 1$ (piaci specializáció). Ekkor az egyensúlyi relatív ár

$$p^* = \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_1}$$

és a fogyasztási négyes

$$x_1^* = \alpha_1, \quad y_1^* = \alpha_2 \qquad \text{és} \qquad x_2^* = 1 - \alpha_1, \quad y_2^* = 1 - \alpha_2.$$

Szükségünk van még egy fontos fogalomra. Egy elosztást *Pareto-optimálisnak* nevezünk, ha nincs más, (14.2)–(14.3)-at kielégítő *megengedett* elosztás, amely minden részvevőnek legalább olyan jó, mint az adott elosztás, és legalább egyik részvevőnek határozottan jobb. Figyelem: ha egy maharadzsától elvesszük vagyona felét, és 1 milió éhező között szétosztjuk, az nem Pareto-optimális, hiszen a maharadzsa jóléte csökken. Mégis legtöbben támogatunk egy ilyen újrelosztást. (A 3. fejezetben vizsgált Nash-egyensúlyban nincs „csere".)

14.2. tétel. *(1. jóléti tétel.) Pareto-értelemben a piacnál nincs jobb elosztási mechanizmus.*

Bizonyítás. Indirekt bizonyítjuk. Tegyük föl, hogy van egy másik megengedett elosztás, jele $(\bar{x}, \bar{y})$, amelyik – a részvevőket alkalmasan indexelve – az 1. részvevőnek jobb, és a 2. részvevőnek legalább olyan jó, mint a piaci elosztás. Mivel a részvevők nem ezeket választották, ezek a piaci árak mellett vagy drágábbak vagy legalább annyira drágák, mint a piaciak:

$$p^*\bar{x}_1 + \bar{y}_1 > p^*x_1^* + y_1^* \qquad \text{és} \qquad p^*\bar{x}_2 + \bar{y}_2 \geq p^*x_2^* + y_2^*.$$

Összeadva a két egyenlőtlenséget:

$$p^*(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) + \bar{y}_1 + \bar{y}_2 > p^*(x_1^* + x_2^*) + y_1^* + y_2^*.$$

Felhasználva a (14.2) megengedettségi feltételeket: $p^* + 1 > p^* + 1$ – ellentmondás. ∎

Kiemeljük, hogy a 14.2. tétel köznapi nyelven azt mondja, hogy ha egy jóindulatú diktátor más árakat vagy más fogyasztást írna elő, akkor legalább az egyik fogyasztó rosszabbul járna, mint a piaci elosztásnál.

Bizonyítás nélkül kimondjuk a piaci egyensúlyra vonatkozó fordított állítást:

14.3. tétel. *(2. jóléti tétel.) Megfelelő feltételek mellett, ha (x^*, y^*) Pareto-optimális elosztás, akkor létezik olyan (v, w) kiinduló állapot, amelyre (x^*, y^*) piaci egyensúly.*

A 14.3. tételnek az a jelentősége, hogy ha a kormányzat változtatni akar az egyensúlyi elosztáson, akkor az árak helyett a jövedelmeket kell befolyásolnia.

14.1. feladat. Két személynek két termékből eredetileg 50-50 egysége van. (5.6)-féle hasznossággfüggvényük rendre $U_1(x_1, y_1) = \min[2x_1, y_1]$, illetve $U_2(x_2, y_2) = \min[x_2, 2y_2]$.

a) Határozzuk meg a csereegyensúlyt!
b) Melyek a Pareto-optimális elosztások?
c) Mi az oka, hogy egyértelmű az egyensúly?

A számolás végére érve megemlítjük, hogy e tételek tetszőleges számú szereplőre (könnyű) és termékre (nehéz) is érvényesek. Sokkal bonyolultabb a bizonyítás, ha a célfüggvények nem olyan egyszerűek, mint a 14.1. tételben, de különösen, ha a fogyasztás mellett a termelést is ábrázolják. Az általános tételt Arrow–Debreu 1954-ben igazolta.

Külön, itt nem tárgyalható kérdés: hogyan lehet a sokszereplős és soktermékes piacon az egyensúlyt kiszámítani? Van-e olyan dinamikus piaci algoritmus, amelynek végeredménye az egyensúlyi árvektor?

14.2. feladat. *a)* Általánosítsuk a (14.1)–(14.6)képleteket 2-ről n részvevőre! *b)* Miért nem könnyű az általánosítás $m > 2$ termékre?

14.2. Kivételek

Ez az optimalitási tétel azonban csak súlyos megszorítások mellett alkalmazható. Ki kell zárnunk a következő bonyodalmakat. *a)* Tökéletlen verseny van: (kevés szereplő versenyez, ezért a piaci egyensúlyi mennyiségnél kevesebbet termelnek bizonyos termékből – 6.5. tétel). *b) Külső (externális) hatások* lépnek föl (például a vasgyártót nem kényszeríti az állam arra, hogy figyelembe vegye: az általa okozott környezetszennyezés másoknak kárt okoz; s ezért több vasat gyárt, mint ha kárpótolnia kellene a károsultakat). *c) Közjavak* léteznek (például minden egyes fogyasztó úgy érezheti, hogy semmi baj nem történik, ha egyedül ő nem fizet az országos járványelhárításért, a tv- műsorért stb., s ezért a termelők összességében az optimálisnál kevesebbet termelnek a közjavakból). *d) Aszimmetrikus információ* jellemzi a biztosítást (például nem lehet jó egészségbiztosítást venni, mert az egészségesek nem hajlandók az átlagos kockázatot megfizetni). *e)* Sokan nem találnak a piacon tisztességes megélhetést, itt a Pareto-optimalitás nem segít.

Zárásként összehasonlítjuk a kötelező és az önkéntes egészségbiztosítást, és Arrow (1963) nyomán olyan modellt készítünk, ahol az önkéntes rendszer létre sem jön. (Más eszközökkel vizsgáljuk e kérdést a 16.2. alfejezetben.) Rendezzük javuló egészségi állapot szerint sorba a népességet, és osszuk $n > 1$ egyforma létszámú osztályba az állampolgárokat; az i-edik osztály egy tagja éves tb- egészségügyi biztosításának költsége c_i, s ezek a számok szigorúan csökkenő sorozatot alkotnak:

$$c_1 > c_2 > \cdots > c_{n-1} > c_n > 0.$$

Ha a biztosításban mindenki részt vesz, akkor a tb alapelve szerint mind az n szereplő az *átlagos* ellátási költséget fizetné:

$$f_n = \frac{c_1 + \cdots + c_n}{n}.$$

Ha az i-edik osztály tagjai magánbiztosítást választanak, akkor a magánbiztosítás díja jóval nagyobb: $d_i > c_i$, de ez is monoton csökken:

$$d_1 > d_2 > \cdots > d_{n-1} > d_n > 0.$$

Most kísérletképp tegyük önkéntessé a tb-részvételt, de a díj maradjon egységes. Elképzelhető, hogy $f_n > d_n$, s ezért az n-edik osztály tagjai egységesen kilépnek a rendszerből, de a többi osztály tagjai bent maradnak. Ekkor azonban növekszik a maradék $n-1$ osztály átlagos biztosítási díja, sőt az $n-1$-edik típus magánbiztosítási díja fölé kerül:

$$f_{n-1} = \frac{c_1 + \cdots + c_{n-1}}{n-1} > d_n.$$

így már a 2. legegészségesebb, $n-1$ indexű osztály tagjainak sem éri meg a részvétel: $f_{n-1} > d_{n-1}$, azok is kilépnek.

Tegyük föl, hogy az i-edik osztály magándíja éppen az i-edik osztály tb-költségének és az első i osztály átlagos tb-költségének a számtani közepe:

$$d_i = \frac{c_i + f_i}{2}, \qquad \text{ahol} \qquad f_i = \frac{c_1 + \cdots + c_i}{i},$$

azaz $c_i < d_i < f_i$, $i = n, \ldots, 2$, azaz végül csak a legbetegebbek maradnak bent az önkéntes rendszerben (mint Haydn Búcsú szimfóniájában, amikor a fizetetlen zenészek egymás után távoznak a színpadról).

15. Együtt élő nemzedékek modellje

A valóságos világ egyik fontos stilizált jellemzője, hogy kb. 30 évente kihal egy nemzedék, és helyére lép egy újabb. (Természetesen egy országban minden nap születik és meghal legalább egytucat ember. Az éves állománycserét is modelleztük a 12. fejezet nyugdíjindexálási modelljében. Tehát a nemzedék fogalma durva, de hasznos egyszerűsítés.) A nemzedékek végtelen láncában furcsa helyzetek állnak elő, például a piaci egyensúly optimalitása is felborul. Ahogyan a 20. század elejének matematikus óriása, David Hilbert fogalmazta meg a halmazelmélet legismertebb paradoxonát a következő népszerű alakban: egy végtelen számú egyágyas szobából álló teli szálloda képes még egy vendéget befogadni; valóban, az n- edik szobában lakó n-edik vendéget tovább küldik az $n+1$-edik szobába, s ekkor a 1. szoba kiürül az új vendég számára.

Ilyen helyzetet ír le az együtt élő nemzedékek általános egyensúlyi modellje is, amelyet három alfejezetben ismertetünk. A 15.1. alfejezetben a kamatláb állandó. A 15.2. alfejezetben a kamatlábra irányuló várakozás racionális (vö. Bevezetés), a 15.3. alfejezetben naiv.

15.1. Stacionárius modell

Minden időszakban (amelynek hossza kb. 30 év) két felnőtt nemzedék él együtt: 1. (fiatal) és 2. (idős). Jövedelmük rendre $y_1 \neq y_2$, fogyasztásuk c, d, megtakarításuk s_1, s_2 – egyelőre mindhárom pár időben állandó. Definíció szerint $c = y_1 - s_1$, $d = y_2 - s_2$. Hagyományos statikus piacon nincs csere: $c^{\mathrm{o}} = y_1$ és $d^{\mathrm{o}} = y_2$ – autarkia.

Több feladatot oldunk meg egymás után: *a)* adott kamategyütthatóra kiszámítjuk az optimális megtakarítást, *b)* meghatározzuk az egyensúlyi kamategyütthatót, *c)* felírjuk a kamategyütthatók dinamikáját és *d)* meghatározzuk az egyensúly stabilitási feltételét. Mindenekelőtt egy hasonlattal világítjuk meg a hossz- és a keresztmetszeti feltétel különbségét. Képzeljünk el egy családi albumot, ahol látható egy személy fiatal- és időskori fényképe (hosszmetszet), illetve egy apa és fia egyiddejű fényképe (keresztmetszet).

a) Hoszmetszeti feltétel

A hosszmetszeti feltétel egy nemzedék két időszakát fogja át. Legyen a kamategyüttható ρ, s az egyéni költségvetési feltétel szerint időskorban elkölthetjük a fiatalkori kamatolt megtakarítást:

$$s_2 = -\rho s_1. \tag{15.1}$$

A könnyű számolás kedvéért egy szokatlan és szélsőséges életpálya-hasznosságfüggvénnyel számolunk [vö. (5.6)]:

$$U(c, d) = \min(c, d). \tag{15.2}$$

A lényeg, hogy a két időszak fogyasztása között egyáltalán nincs időbeli helyettesítés.

Ekkor az optimális $s(\rho)$ megtakarítást az adott ρ kamategyüttható függvényében határozzuk meg.

Behelyettesítve a (15.1) költségvetési feltételt a (15.2) hasznosságfüggvénybe:

$$U[s_1] = \min(y_1 - s_1, y_2 + \rho s_1).$$

A származtatott $U[s_1]$ hasznosságfüggvény maximuma ott valósul meg, ahol a két fogyasztás egyenlő:

$$y_1 - s_1 = y_2 + \rho s_1, \qquad \text{azaz} \qquad s_1^{\mathrm{o}} = \frac{y_1 - y_2}{1 + \rho}. \tag{15.3}$$

b) Keresztmetszeti feltétel

A keresztmetszeti feltétel adott időszakban együtt élő két nemzedékre vonatkozik. Ha $\nu > 0$ az időszakos népességnövekedési együttható (vö. 9. fejezet), akkor a keresztmetszeti feltétel (9. és 10. fejezet), azaz az adott időszak összmegtakarítáa nulla:

$$\nu s_1 + s_2 = 0. \tag{15.4}$$

Ekkor igazolható a

15.1. tétel. *Az együtt élő nemzedékek modelljében a (15.1) hasznosságfüggvény esetén egyetlen egyensúlyi kamategyüttható létezik, az aranyszabálynak nevezett értékek:*

$$\rho_G = \nu \qquad \text{és} \qquad c_G = d_G = \frac{\nu y_1 + y_2}{\nu + 1}. \tag{15.5}$$

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy az aranyszabály egyensúlyban (a G index a golden rule-ra utal) a hossz- és a keresztmetszeti feltétel egybeesik.

Bizonyítás. Valóban, behelyettesítve a (15.4) keresztmetszeti feltételbe az egyes nemzedékre vonatkozó (15.1) hosszmetszeti feltételt:

$$(\nu - \rho)s_1 = 0.$$

Mivel $y_1 \neq y_2$, ezért (15.3) miatt $s_1^{\mathrm{o}} \neq 0$, tehát (15.5) igaz. ∎

Megjegyezzük, hogy a társadalmi szerződés által biztosított végtelen láncú csere minden nemzedéknek nagyobb jólétet nyújt, mint az autarkia.

A dinamikai folytatásnál két esetet kell megkülönböztetnünk: a kamatlábra vonatkozó várakozás racionális vagy naiv.

15.2. Dinamika racionális várakozás esetén

Mostantól feltesszük, hogy a (ρ_t) kamategyüttható-pálya és az $(s_{i,t})$ megtakarítási pályapár időben változó. Ebben az alfejezetben a várakozás racionális (lásd Bevezetés), azaz a várt kamatláb megvalósul, a modellel összhangban van. A (15.3) alapján meghatározott, időben változó kamategyütthatóktól függő $s_1(\rho_{t+1})$ és $s_2(\rho_t)$ megtakarításpár segítségével kiszámítjuk a (15.4) mérlegfeltétel dinamikai változatát. Belátjuk a következő tételt.

15.2. tétel. *Racionális várakozás esetén a kamategyüttható- dinamika*

$$\rho_{t+1} = \nu - 1 + \frac{\nu}{\rho_t}, \qquad t = 0, 1, 2, \dots. \tag{15.6}$$

Megjegyzés. Figyelemre méltó, hogy a (15.6) jobb oldala csökkenő függvény, az állandósult állapot fölötti/alatti kamategyütthatót az állandósult érték alá/fölé viszi: oszcilláció.

Bizonyítás. Felírjuk a (15.3) feltételes megtakarításokat időben változó kamategyütthatókra, a második megtakarítást (15.1) alapján számolva, de egy időszakkal eltolva:

$$s_1(\rho_{t+1}) = \frac{y_1 - y_2}{1 + \rho_{t+1}} \qquad \text{és} \qquad s_2(\rho_t) = \frac{(y_2 - y_1)\rho_t}{1 + \rho_t}.$$

Behelyettesítjük őket a dinamizált (15.4) keresztmetszeti feltételbe:

$$\nu \frac{y_1 - y_2}{1 + \rho_{t+1}} = \frac{(y_1 - y_2)\rho_t}{1 + \rho_t}. \tag{15.7}$$

Feltéve, hogy $y_1 \neq y_2$, egyszerűsítünk $y_1 - y_2$-vel, és reciprokot veszünk:

$$\frac{1 + \rho_{t+1}}{\nu} = \frac{1 + \rho_t}{\rho_t}, \tag{15.8}$$

azaz (15.6) áll. ∎

Most pedig közvetlenül meghatározzuk az állandósult állapotot, és igazoljuk a stabilitását növekvő létszámú népességre.

15.3. tétel. *Racionális várakozás esetén a (15.6) dinamika állandósult állapota valóban $\rho_G = \nu$, s ez aszimptotikusan stabil, ha a népesség növekszik: $\nu > 1$.*

Megjegyzés. A $\nu \geq 1$ feltevés szükséges is a stabilitáshoz, hiszen $\nu < 1$ esetén $g(\infty) = \nu - 1 < 0$ lenne.

Bizonyítás. A bizonyítás alapötlete egyszerű: ahhoz, hogy a 7.2.* tételt alkalmazhassuk, az 1-lépéses helyett a 2-lépéses átmenetet kell vizsgálni.

Először (15.6)-ot időtlenné tesszük:

$$g(\rho) = \nu - 1 + \frac{\nu}{\rho}, \tag{15.9}$$

majd bevezetjük az iteráltját:

$$g(g(\rho)) = \nu - 1 + \frac{\nu}{\nu - 1 + \nu/\rho}. \tag{15.10}$$

Ez a függvény szigorúan monoton növekszik a $(0, \infty)$ szakaszon, egyetlen értelmes fix pontja szintén ν. A 7.2.* tétel szerint mind a páros, mind a páratlan sorozat konvergál ν-hez, tehát együtt is konvergálnak. ∎

15.1. példa. Figyelemre méltó, hogy a (15.6) kamategyüttható-dinamika a stabilitási tartomány szélén, $\nu = 1$ esetén 2-ciklust ad! Valóban, ekkor $\rho_{t+1} = 1/\rho_t = \rho_{t-1}$, azaz

$$\rho_{2t} = \rho_0 \qquad \text{és} \qquad \rho_{2t-1} = \frac{1}{\rho_0}, \qquad t = 1, 2, \ldots.$$

15.1. feladat. Programozzuk be a (15.6) dinamikát $\nu = 2$-re $\rho_0 = 1$ és $\rho_0 = 3$ kezdő állapot esetén!

15.3. Naiv várakozás

Ebben az alfejezetben a modern közgazdaságban domináns szerepet játszó racionális várakozás helyett legegyszerűbb ellenpárként a *naiv* várakozást vizsgáljuk (lásd a 4.1. alfejezet sertésciklusát). Ekkor a szereplők az előző időszak tényleges kamatlábát vetítik ki a jelenre. A 30 éves időszak miatt mindkét várakozási feltétel egyformán irreális.

A (15.3) alapján meghatározott, időben változó kamategyütthatóktól függő $s_1(\rho_t)$ és $s_2(\rho_{t-1})$ megtakarításpár segítségével kiszámítjuk a (15.6) naiv dinamikai változatát. Belátjuk a következő tételt.

15.4. tétel. *Naiv várakozás esetén a kamategyüttható- dinamika*

$$\rho_t = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\nu(1 + \rho_{t-1})}}{2}, \qquad t = 1, 2, \ldots. \tag{15.11}$$

Bizonyítás. A (15.3) feltételes megtakarítások helyett (az s_2-beli ρ_t kamategyütthatót megtartva!)

$$s_1(\rho_t) = \frac{y_1 - y_2}{1 + \rho_t} \qquad \text{és} \qquad s_2(\rho_{t-1}) = \frac{(y_2 - y_1)\rho_t}{1 + \rho_{t-1}},$$

majd behelyettesítjük a (15.4) keresztmetszeti feltételbe:

$$\nu \frac{y_1 - y_2}{1 + \rho_t} = \frac{(y_1 - y_2)\rho_t}{1 + \rho_{t-1}}. \tag{15.12}$$

(15.12)-t rendezve a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$\rho_t^2 + \rho_t - \nu(1 + \rho_{t-1}) = 0. \tag{15.13}$$

A megoldóképletet felírva, és a pozitív gyököt megtartva adódik (15.11). ∎

Ennek a rendszernek ugyanaz a $\rho^{\mathrm{o}} = \nu$ az állandósult állapota, de globálisan stabil.

15.5. tétel. *A naiv várakozásos (15.11) dinamika állandósult állapota valóban $\rho_G = \nu$, s ez aszimptotikusan globálisan stabil.*

Megjegyzés. Figyelemre méltó, hogy a (15.11) dinamika nemcsak, hogy monoton növekszik, de emiatt az állandósult állapot fölötti/alatti kamategyütthatót az állandósult érték fölött/alatt hagyja, ezért a 7.2.* tétel közvetlenül alkalmazható.

Bizonyítás. *a)* Belátható, hogy a (15.11)-ből adódó

$$f(\rho) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\nu(1+\rho)}}{2} \tag{15.14}$$

kamategyüttható-leképezés egyetlen fix pontja valóban ν. De a bonyodalmas számolás helyett elegendő a (15.13) állandósult állapotát, (15.10)-et vizsgálni, de ezt már korábban megtettük. Belátható, hogy $[0, \nu)$ képe $[0, \nu)$, s $[\nu, \infty)$-é $[\nu, \infty)$. A görbe konkáv.

b)* 7.2.* tétel következményének speciális esete. ∎

15.2. példa. Figyelemre méltó, hogy a (15.11) kamategyüttható-dinamika $\nu = 1$ esetén sem ad 2-ciklust!

A 15.1. feladatot most a naiv várakozás feltevésére írjuk át!

15.2. feladat. Programozzuk be a (15.11) dinamikát $\nu = 2$-re a $\rho_0 = 1$ és a $\rho_0 = 3$ kezdőállapotra! Nézzük meg, hogy a racionális vagy a naiv várakozás mellett tart-e gyorsabban a pálya az egyensúlyhoz!

15.3. feladat. Programozzuk be a (15.11) dinamikát $\nu = 1/2$-re a $\rho_0 = 1$ és a $\rho_0 = 1/3$ kezdőállapotra!

Megjegyzések. 1. Ha a (15.1) hasznosságfüggvény helyébe reálisabb, nagyobb időbeli helyettesítést megengedő hasznosságfüggvényt írunk, akkor változik a stabilitási feltétel, és nemcsak elfajult esetben jelenik meg a második állandósult állapot, amely maga az autarkia (önellátás): $s_1 = s_2 = 0$.

2. Csupán két együtt élő nemzedék feltételezése nagyon durva közelítés, és csak kvalitatív megállapítások származtatására alkalmas. A sok együtt élő korosztály általános modellje azonban nem fér bele a jegyzetbe, de a 12. fejezetben érintettük az $S + T$ korosztályos modellt.

16. Valószínűség-számítás és biztosítás

Ebben a fejezetben először körvonalazom a valószínűség-számítás elemeit, majd vázolom a biztosítás három alapmodelljét.

1) A valószínűség-számítás már ismert valószínűségű események bizonyos kombinációinak valószínűségét számítja ki. Ha bevezetjük a valószínűségi változó, a várható érték és a szórás fogalmát, akkor elvi jelentőségű felső becsléseket adhatunk annak a valószínűségére, hogy milyen gyorsan tart a fejek (és hasonlóan az írások) relatív gyakorisága 1/2-hez.

2) A biztosítás lényege: a biztosítótársaság sok nagyjából egyforma és egymástól független káreseményt biztosít ügyfelei számára – biztosítási díj ellenében kifizeti a károsultakat. Mivel az összkár relatív szórása (szórás/kár, ahol a szórás a véletlen változó ingadozásának (16.4)-ben definiálandó értéke) nagyon kicsiny, ezért az elegendő tőkével és jól működő hálózattal rendelkező biztosító viszonylag kis felárral fedezi a kárt. Közgazdasági szempontból különlegesen érdekes eset, ha a kár valószínűségét növeli a biztosítás megléte: ez a *morális kockázat*, ekkor célszerű önrészesedéssel csökkenteni a kár valószínűségét. Ha a kis- és nagykockázatúak előre nem különböztethetők meg egymástól, akkor csak a nagykockázatúaknak érné meg a biztosítás megkötése, ez a *kontraszelekció.* Viszont megfelelő önrészesedés bevezetésével a kisebb kockázatúak megkülönböztethetik magukat a nagyobb kockázatúaktól.

16.1. A valószínűség-számítás elemei

Annak idején (1961 és 1965 között) a magyar középiskolában nem tanítottak valószínűség-számításra, de azóta a közoktatásban megjelent e téma is. A középiskolai valószínűség-számítás zöme a kombinatorikára épít, és olyan kérdéseket vizsgál, hogy például az ötös lottón mennyi a valószínűsége a telitalálatnak. Az Újszövetség is beszámol arról, hogy már a római katonák is játszottak kockajátékot, ti. kockát vetettek a keresztre feszített Krisztus köpenyére. Még egyszerűbb a pénzfeldobás, amikor írásra (I) vagy fejre (F) kell fogadni.

Meglepő módon azonban 1654-ig senki sem tudott megbízhatóan megoldani valószínűség-számítási feladatokat. Ekkor két matematikai lángész, Pascal és Fermat egymástól függetlenül megoldottak egy összetett valószínűség-számítási feladatot, s ezzel megszületett a valószínűség-számítás.

A nevezett feladat ismertetése helyett egy olyan problémát mutatunk be, amelynek „megoldása” kétségeket ébresztett.

16.1. példa. Két egyforma éremmel egyszerre dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy egymástól különböző eredményt kapunk? Ha képzeletben megszámozzuk az érméket, és 1, 2 sorrendben írjuk föl az eredményeket, akkor négy egyforma valószínűségű esemény létezik: FF, FI, IF és II, tehát az FI és IF együttes valószínűsége 1/2. Érdekes, hogy sokáig még a legkiválóbb matematikusok sem ismerték fel, hogy az egyébként megkülönböztethetetlen FI és IF eseménypár most két elemi esemény, s ezért azt hitték, hogy hogy 3 egyenlő valószínűségi eseményünk van: egyenként 1/3 valószínűséggel.

Középiskolás szinten a valószínűség meghatározása előtt föl kell tennünk, hogy létezik egy n-elemű véges alaphalmaz (a biztos esemény): Ω, elemei $\omega_1, \ldots, \omega_n$ (az elemi események). Feltesszük, hogy minden ω_i-nek van valószínűsége: $p_i > 0$, melyek összege 1:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

A 16.1. példa alapján azonban nem tehetjük föl, hogy Ω minden részhalmaza *megfigyelhető* (pl. az IF és az FI részhalmazok külön-külön nem figyelhetők meg). Ezért bevezetjük a *megfigyelhető halmazok ún. algebráját*: $\mathcal{A}$-t, amelynek bármely A és B elemére (ezek Ω részhalmazai), ezek összege ($A \cup B$) és metszete, azaz közös része ($A \cap B$) is benne van az algebrában.

Képletben:

$$A \cup B = \{\omega |\ \omega \in A \text{ vagy } \ \omega \in B\},$$

ahol a *vagy* nem kizáró, és

$$A \cap B = \{\omega |\ \omega \in A \text{ es } \ \omega \in B\}.$$

Szükségünk lesz még A *kiegészítő* halmazára:

$$\bar{A} = \Omega \backslash A = \{\omega |\ \omega \notin A\}.$$

16.1. példa. (folytatás) Két megkülönböztethetetlen érme együttes feldobásakor megfigyelhető halmazok az üres és a teljes halmazon kívül: $IF \cup FI$, II, FF.

A valószínűség egy alaphalmaz bizonyos részhalmazain definiált, skalárértékű függvény, amely minden $A \in \mathcal{A}$-hoz egy $\mathbf{P}(A)$ nemnegatív számot rendel, amely legfeljebb 1, s emellett teljesülnek a következő összefüggések;

ha két esemény egymást kizárja, akkor együttes valószínűségük a két valószínűség összege:

$$\text{ha} \qquad A \cap B = \emptyset, \qquad \text{akkor} \qquad \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B),$$

valamint a kizárható esemény valószínűsége 0, a biztosé 1:

$$\mathbf{P}(\emptyset) = 0 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{P}(\Omega) = 1.$$

Fenti példánkban az *eloszlást* a következő képlet definiálja minden megengedett részhalmazra:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i \in A}^{n} p_i.$$

Az ún. klasszikus valószínűség-számításban minden elemi esemény egyforma valószínűségű: $p_i \equiv 1/n$, és egy összetett esemény valószínűsége a kedvező és az összes események hányadosa: $p = k/n$. Legegyszerűbb példa, amikor a szimmetria sérül, az újszülöttek természetes megoszlása fiúkra és lányokra: 0,514 vs. 0,486. (Olyan társadalmakban, mint pl. a kínai, ahol a fiúk értékesebbek, mint a lányok, abortusz miatt a fiútöbblet sokkal erősebb lehet.)

Megjegyezzük, hogy ha végtelen halmazokat, például a természetes számok halmazát vagy a $[0, 1]$ szakaszt mérlegelnénk alaphalmazként, akkor nagyon bonyolult technikai részletekbe ütköznénk.

A legegyszerűbb véletlen esemény az, amely vagy bekövetkezik (siker) vagy nem (kudarc) – például, hogy egy kockával 6-ost dobok vagy éremmel fejet. Legyen p egy 0 és 1 közötti szám; ha a siker bekövetkezésének a valószínűsége p, akkor elmaradásának valószínűsége $1 - p$. (Két fenti példában: $p = 1/6$, illetve $p = 1/2$).

A valószínűség-számításban alapvető fogalom két esemény függetlensége. Legyen a két esemény A és B, egyedi, és együttes valószínűségük rendre $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(B)$, $\mathbf{P}(A \cap B)$. Azt mondjuk, hogy a két esemény egymástól *független*, ha együttes előfordulásuk valószínűsége az egyedi valószínűségük szorzata:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

A 16.1. példában a két érmedobás eredménye egymástól független, s ha megszámoztuk volna az érméket, akkor a megfigyelhetővé válás után $\mathbf{P}(FI) = \mathbf{P}(F)\mathbf{P}(I)$ stb. Természetesen vannak nem független események is: A és $\bar{A}$, ha $0 < \mathbf{P}(A), \mathbf{P}(\bar{A}) \leq 1$. (A 16.3. feladatban szereplő Markov-lánc egymást követő valószínűségi változói sem függetlenek.) A továbbiakban csak független eseményekkel foglalkozunk.

Tegyük föl, hogy egy p siker-valószínűségű kísérletet n-szer megismétlünk. Kérdés: mennyi a valószínűsége, hogy a siker k-szor fordul elő?

16.1. tétel. *Annak a valószínűsége, hogy n független kísérletből k számú lesz a sikeres,*

$$p_{k,n} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{16.1}$$

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy a siker pontosan az $i_1, \ldots, i_k$ sorszámú kísérletben fordul elő. Kombinatorikából ismert, hogy n kísérletből k-t (a sikereseket)

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}-$$

féleképp lehet kiválasztani. Ezek az elemi események. A kísérletek függetlensége miatt egy adott sorozatra a k számú siker valószínűsége p^k, az $n - k$ számú kudarc valószínűsége $(1-p)^{n-k}$, tehát (16.1) teljesül. ∎

Figyelemre méltó, hogy (16.1)-ben éppen az n-edfokú binomiális kifejezés tagjai fordulnak elő. Ez még világosabb, ha bevezetjük a $q = 1 - p$ jelölést:

$$1 = (p+q)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Ezért a (16.1) eloszlást *n-edrendű binomiális eloszlásnak* nevezzük.

16.1. példa. (folytatás) $p = 1/2$ esetén (16.1)-ben 3 tag van, értékük $1/4$, $1/2$ és $1/4$.

Eddig csak véletlen eseményekről beszéltünk, de érdemes bevezetni a *valószínűségi változó* fogalmát is: legyen $x_1, \dots, x_n$ valós számsorozat, $X = x_i$ teljesül p_i valószínűséggel. Például a kockánál $x_1 = 1, \dots, x_6 = 6$, de a fej–vagy–írásál önkényesen kell választani a valószínűségi változót: például $x_1 = 1$ (fej), $x_2 = 0$ (írás).

Nyilvánvalóan adódik az X *várható értékének* definíciója:

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i. \tag{16.2}$$

Ez a szám a lehetséges kimenetelek valószínűségeikkel súlyozott átlaga. A kockadobásnál a várható érték 3,5. Másik gyakorlati példa: egy tanuló különféle tantárgyi jegyeinek az átlaga.

Nyilvánvaló, hogy a c állandóval beszorozva a valószínűségi változót, a várható érték is c-vel szorzódik: $\mathbf{E}(cX) = c\mathbf{E}X$.

Később még szükségünk lesz a következő elemi tételre, amely egy triviális, mégis hasznos felső becslést ad: mekkora lehet annak a valószínűsége, hogy egy pozitív értékű valószínűségi változó nagyobb, mint a várható érték 2-szerese, 3-szorosa stb.?

16.2. tétel. *(Markov-egyenlőtlenség, 19. század vége.) Ha $X \geq 0$, X nem azonosan 0, és $\lambda > 1$, akkor*

$$\mathbf{P}(X > \lambda\mathbf{E}X) < \frac{1}{\lambda}. \tag{16.3}$$

Bizonyítás. Tegyük föl, hogy $n > 1$, $(x_i)_{i=1}^n$ monoton növekvő sorozat, és az m index (ha létezik) választja el X-nek a $\lambda\mathbf{E}X$-nél nem nagyobb és nagyobb értékeit:

$$0 \leq x_m \leq \lambda\mathbf{E}X < x_{m+1}.$$

$x_i \leq \lambda\mathbf{E}X$ esetén X-et 0-val becsüljük alulról, egyébként $\lambda\mathbf{E}X$-szel. Behelyettesítve (16.2)-be:

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i + \sum_{i=m+1}^{n} p_i x_i > \lambda\mathbf{E}X \sum_{i=m+1}^{n} p_i = \lambda\mathbf{E}X\mathbf{P}(X > \lambda\mathbf{E}X),$$

azaz $\mathbf{E}X > 0$-val elosztva mindkét oldalt: $1 > \lambda\mathbf{P}(X > \lambda\mathbf{E}X)$. Innen adódik (16.3). ∎

16.2. példa. Ha kíváncsiak vagyunk arra, hogy a dolgozók hányad része keres többet, mint az átlagkereset 3-szorosa, akkor a Markov-egyenlőtlenség $\lambda = 3$-mal nagyon pontatlan választ ad: 1/3-a. Magyarországon 2012-ben, amikor kb. ennyi volt a nyugdíjjárulék-alap plafonja, 3%- a.

Az átlag mellett szükség van azonban a *szórásra* is, amely azt mutatja, hogy mennyire véletlen a változó, azaz mennyire ingadozik a várható értéke körül. Egyszerű volna a várható értéktől mért különbségek abszolút értékének a várható értékét venni:

$$\mathbf{d}X = \sum_{i=1}^{n} p_i |x_i - \mathbf{E}X|.$$

Analitikusan azonban előnyösebb egy négyzetösszeges definíció:

$$\mathbf{D}X = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i |x_i - \mathbf{E}X|^2}. \tag{16.4}$$

Még jobb a szórásnégyzetet szerepeltetni (vö. a 16.4. tétel):

$$\mathbf{D}^2 X = \sum_{i=1}^{n} p_i |x_i - \mathbf{E}X|^2. \tag{16.4′}$$

Nyilvánvaló, hogy a $c > 0$ állandóval beszorozva az X valószínűségi változót, a szórás is c-vel szorzódik: $\mathbf{D}(cX) = c\mathbf{D}X$.

A következő feladat egyszerűsíti (16.4′)-t.

16.1. feladat. Igazoljuk, hogy

$$\mathbf{D}^2 X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2. \tag{16.4″}$$

Következmény. *n szám súlyozott négyzetes közepe legalább akkora, mint súlyozott számtani közepe:*

$$\mathbf{E}X^2 \geq \sqrt{(\mathbf{E}X)^2}.$$

Megjegyzés. Ezt az egyenlőtlenséget a 10.4. következményeként már korábban, másképp igazoltuk.

16.3. példa. Legyen X értéke siker esetén 1, kudarc esetén 0. Ekkor $\mathbf{E}X = p$ és $\mathbf{D}^2 X = p - p^2 = p(1 - p)$ – ez nevezik Bernoulli-féle valószínűségi változónak.

Hogyan lehet két valószínűségi változó összegét és szorzatát definiálni? Például annak idején központi kérdés volt a kockajátékosok számára, hogy miképp oszlik el két kocka együttes dobásakor az eredmények összege. Bevezetünk egy másik, Y valószínűségi változót, a következő valószínűségi eloszlással: legyen $y_1, \dots, y_m$ valós számsorozat, $Y = y_j$ áll q_j valószínűséggel. Először az együttes eloszlást definiáljuk. Az ún. *peremeloszlások* sor- és oszlopösszegekkel vannak meghatározva:

$$p_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}, \quad i = 1, \dots, n \qquad \text{és} \qquad q_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Külön megadjuk a két változó függetlenségi feltételrendszerét:

$$r_{ij} = p_i q_j, \qquad i = 1, \dots, n \qquad \text{és} \qquad j = 1, \dots, m.$$

16.1. táblázat. *Együttes eloszlás*

	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	összesen
x_1	r_{11}	$\dots$	r_{1j}	$\dots$	r_{1m}	p_1
$\dots$	$\dots$		$\dots$			$\dots$
x_i	r_{i1}	$\dots$	r_{ij}	$\dots$	r_{im}	p_i
$\dots$	$\dots$		$\dots$			$\dots$
x_n	r_{n1}	$\dots$	r_{nj}	$\dots$	r_{nm}	p_n
összesen	q_1	$\dots$	q_j	$\dots$	q_m	1

Az $X+Y$ valószínűségi változó: $x_1+y_1 \dots, x_i+y_j, \dots, x_n+y_m$, és az XY valószínűségi változó pedig $x_1y_1 \dots, x_iy_j, \dots, x_ny_m$, mindkettő együttes $(r_{i,j})$ valószínűségekkel.

Érdemes az n-edrendű binomiális eloszlás várható értékét és szórását kiszámítani. Nehéz volna azonban (16.1)-et behelyettesíteni (16.2)-be és (16.4′)-ba, segítségképp két általános tételt mondunk ki előtte.

16.3. tétel. *Két valószínűségi változó összegének a várható értéke a várható értékek összege:*

$$\mathbf{E}(X+Y) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y. \tag{16.5}$$

Bizonyítás. Definíció szerint

$$\sum_i \sum_j r_{ij}(x_i + y_j) = \sum_i p_i x_i + \sum_j q_j y_j.$$

∎

Teljes indukcióval a 16.3 tétel tetszőleges tagszámú összegre kiterjeszthető.

Bonyolultabb a szórásnégyzet esete, itt kikötjük a két eloszlás és a megfelelő véletlen változók függetlenségét.

16.4. tétel. *Két független valószínűségi változó összegének a szórásnégyzete a szórásnégyzetek összege:*

$$\mathbf{D}^2(X+Y) = \mathbf{D}^2X + \mathbf{D}^2Y. \tag{16.6}$$

Megjegyzés. Figyelemre méltó a hasonlóság a Pitagorasz-tételhez. Ugyanakkor $Y = X$ esetén $\mathbf{D}^2(X+Y) = 4\mathbf{D}^2X$, míg $Y = -X$ esetén $\mathbf{D}^2(X+Y) = 0$.

Bizonyítás. Érdemes bevezetni az $\hat{X} = X - \mathbf{E}X$ és az $\hat{Y} = Y - \mathbf{E}Y$ *különbségváltozókat.* Ekkor $\mathbf{E}\hat{X} = 0$, $\mathbf{D}^2X = \mathbf{E}\hat{X}^2 = \mathbf{D}^2\hat{X}$ stb., valamint a 16.3. tétel általánosítása szerint

$$\mathbf{D}^2(X+Y) = \mathbf{E}(\hat{X}+\hat{Y})^2 = \mathbf{E}\hat{X}^2 + 2\mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y}) + \mathbf{E}\hat{Y}^2.$$

Csak azt kell még belátnunk, hogy $\mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y}) = 0$. Behelyettesítéssel és az $r_{ij} = p_iq_j$ függetlenségi feltételt használva,

$$\mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_iq_j\hat{x}_i\hat{y}_j = \sum_{i=1}^{n} p_i\hat{x}_i \sum_{j=1}^{m} q_j\hat{y}_j = \mathbf{E}\hat{X}\mathbf{E}\hat{Y} = 0.$$

∎

Teljes indukcióval a 16.4. tétel is tetszőleges tagszámú összegre kiterjeszthető, csak a valószínűségi változók páronkénti függetlenségét kell feltennünk.

16.4. példa. Bármilyen n-edrendű binomiális eloszlás valószínűségi változóját T_n-nel jelöljük, ez a sikerek számát adja meg.

16.2. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az n-edrendű binomiális eloszlás várható értéke np, szórásnégyzete $np(1-p)$.

Ezen a ponton kimondunk egy fontos egyenlőtlenséget, amely egy tetszőleges valószínűségi változónak várható értékétől való eltérését becsüli a szórás segítségével.

16.5. tétel. *(Csebisev-egyenlőtlenség, 1867.) Legyen az X valószínűségi változó várható értéke μ, és szórása $\sigma > 0$. Ekkor*

$$\mathbf{P}(|X-\mu| > \varepsilon) < \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Megjegyzések. 1. Csebisevről több fontos egyenlőtlenséget is elneveztek; ez a valószínűség-számítási egyenlőtlenség, a 10.5. tétel viszont az összegegyenlőtlenség.

2. Az időpontokból nyilvánvaló, hogy Csebisev előbb alkalmazta a Markov egyenlőtlenséget, mint ahogy Markov kimondta volna.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Markov-egyenlőtlenséget (16.2. tételt) az $Y = |X-\mu|^2 > 0$ valószínűségi változóra. Definíció szerint $\mathbf{E}Y = \sigma^2$, $\varepsilon^2 = \lambda\sigma^2$. ∎

16.5. példa. Figyelemre méltó, hogy a szimmetrikus pénzfeldobásnál a Csebisev-egyenlőtlenség bizonyos esetben éles: $p = 1/2$, $(\sigma = 1/2,)$ $\varepsilon = 1/2$

$$\mathbf{P}(|X - 1/2| \geq 1/2) \leq 1.$$

Egy egyenlőtlenséget *élesnek* nevezünk, ha esetenként egyenlőségre teljesül, pl. a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség.

Az alfejezet végén bebizonyítjuk az ún. *nagy számok gyenge törvényét.* Legyen $X_1, \ldots, X_n$ n darab páronként független és azonos eloszlású valószínűségi változó, amelyeknek létezik közös várható értéke: μ és közös szórása: $\sigma > 0$. Képezzük a számtani közepüket:

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}. \tag{16.7}$$

Látható, hogy $\mathbf{E}S_n = \mu$.

Heurisztikusan a nagy számok törvényei azt mondják ki, hogy páronként (vagy teljesen) független valószínűségi változókra sok ismétlés után a számtani közép sztochasztikusan a közös várható értékhez tart. (De ennek igazához alkalmas korlátossági feltétel kell.) A gyenge törvény csak az eltérés valószínűségét korlátozza, az itt nem taglalt erős törvény viszont majdnem minden elemi eseményre is igazolja a konvergenciát. A gyenge törvény megengedi, hogy minden n-re más és más halmazon legyen nagyobb

ε-nál az eltérés, az erős törvény ezt egymásba skatulyázott, és egyre kisebb halmazokra korlátozza. (Legegyszerűbb alakban ez utóbbi törvény azt az evidens állítást mondja ki, hogy a $[0, 1]$ szakasz pontjait 2-es számrendszerben felírva, majdnem minden szám kifejtésében a 0-k és az 1-esek részaránya azonos: $1/2$– $1/2$. Meglepő lenne, ha például a „túl sok” számra a relatív gyakoriság nem tartana egy határértékhez. Ha van határérték, akkor szimmetria miatt 0,5 lenne.)

Formálisan

16.6. tétel. *(Csebisev tétele, 1867, a nagy számok gyenge törvénye.) Annak valószínűsége, hogy a (16.7)-ben definiált számtani középnek a közös várható értéktől abszolút értékben vett eltérése nagyobb, mint egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám, n-nel fordítottan arányos felső korláttal becsülhető:*

$$\mathbf{P}(|S_n - \mu| > \varepsilon) < \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}. \tag{16.8}$$

Megjegyzés. A tételt először a legegyszerűbb alakban Jakob Bernoulli bizonyította be (posztumusz publikáció: 1713).

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Csebisev-egyenlőtlenséget (16.5. tételt) a $Z_n = S_n/n > 0$ valószínűségi változóra. A 16.3. és 16.4. tétel értelmében $\mathbf{E}Z_n = \mu$ és $\mathbf{D}^2 Z_n = \sigma^2/n$. ∎

Megjegyzések. 1. Statisztikai alkalmazásokban a tételt megfordítva alkalmazzuk: ha meg akarjuk vizsgálni, hogy a siker valószínűsége tényleg p, akkor naiv módon éppen az ismételt dobások átlagát vesszük. Például ha 100 dobásból 30 db fej, akkor $p = 0{,}3$ becsléssel élünk.

2. Egyébként bonyolultabb eszközökkel sokkal pontosabb becslést is kaphatunk (16.8) jobb oldalára, de ezt csak jelezzük a 16.7. példa végén.

16.6. példa. A gyakorlatban gyakran élünk az $\varepsilon = \sigma$ választással. Ekkor

$$\mathbf{P}(|S_n - \mu| > \sigma) < \frac{1}{n}. \tag{16.8$'$}$$

16.7. példa. Legyen $X = 1$ a fej, $X = 0$ az írás, azaz $p = 1/2$, $\mu = 1/2$, $\sigma = 1/2$, tehát $\varepsilon = 0{,}1$ esetén 100 dobásnál $\mathbf{P}(|S_{100} - 0{,}5| > 0{,}1) < 1/4 = 0{,}25$.

Ha $n = 3$ fej-vagy-írást vizsgálnánk, akkor a négy valószínűség rendre

$$p_{3,0} = \frac{1}{8} = 0{,}125; \qquad p_{3,1} = \frac{3}{8} = 0{,}375 \qquad p_{3,2} = \frac{3}{8} = 0{,}375; \qquad p_{3,3} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Mivel S_3 lehetséges értékei 0, $1/3$, $2/3$ és 1, válasszuk (16.8$'$) a minimális eltérést, $\varepsilon = 1/2 - 1/3 = 1/6$, s ez esetben $\mathbf{P}(|S_3 - 1/2| > 1/6) = 0{,}25$; holott (16.8) jobb oldala értelmetlenül nagy: 3.

A következő feladat a valószínűség-számítás bonyolultabb kérdéskörére vonatkozik, de speciális megfogalmazása miatt a középiskolás keretek között is vizsgálható.

16.3. feladat. Tekintsünk egy 2-állapotú Markov-láncot, ahol a rendszer a t-edik időszakban rendre x_t és y_t valószínűséggel van az 1., illetve a 2. állapotban, $x_t + y_t = 1$.

Adott a és b átmenet-valószínűségek esetén az állapotvalószínűségek a következő szabály szerint változnak ($0 < a, b < 1$):

$$x_{t+1} = ax_t + (1-b)y_t \qquad \text{és} \qquad y_{t+1} = (1-a)x_t + by_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

a) Határozzuk meg a rendszer (x^o, y^o) stacionárius állapotvalószínűség-párját, azaz ahol az állapotvalószínűségek időben állandóak!

b) Igazoljuk, hogy akármilyen $x_0 \geq 0$ és $y_0 = 1 - x_0 \geq 0$ kezdőállapotból indítva a rendszert, (x_t, y_t) tart (x^o, y^o)-hoz, azaz hosszú távon a rendszer rendre x^o és y^o valószínűséggel van az 1. és a 2. állapotban!

Miután megismerkedtünk a valószínűség-számítás néhány alapelemével, alkalmazzuk eredményeinket a biztosításra.

16.2. A biztosítás alapmodelljei

A biztosítás három alapmodelljét mutatjuk be: *a)* klasszikust, *b)*a morális kockázatot és *c)* a kontraszelekciót figyelembe vevő modellt.

a) Klasszikus modell

A klasszikus biztosítási alapmodell a következő. Van n számú egyén, akiket egymástól függetlenül, azonos p valószínűséggel érhet kár, amelynek értéke $d > 0$. Egy biztosító $e = pd(1+\pi)$ díjért hajlandó az egyéni kárt biztosítani, ahol $\pi > 0$ a biztosító bruttó (költségeit is tartalmazó) haszonkulcsa biztosítottakként. A kérdés: milyen további feltételek mellett éri meg az egyéneknek, illetve a biztosítónak biztosítást kötni?

Tegyük föl, hogy az egyén vagyona 1 egység, amely nagyságrendben összemérhető a kárértékkel. Például hősünknek volt 6 mFt megtakarított pénze, s ebből vett egy 5 mFt értékű autót. Az autóját biztosítja az önmagának okozott kár és a lopás ellen. Első látásra nem érdemes biztosítást kötnie, hiszen a várható kár kisebb, mint a biztosan kifizetett díj: $pd < pd(1+\pi)$.

A biztosítás megkötése és elmulasztása mellett várható hasznosság segíthet a válaszban. Legyen $u(\cdot)$ egy megfelelő szakaszon értelmezett, szigorúan növekvő és szigorúan konkáv skalárértékű függvény (vö. a következőkben szereplő 16.7. tétellel), amely megmondja, hogy szubjektíve mennyit ér az egyénnek, hogy ha kár esetén van autóbiztosítása és ha nincs. Bal oldalra írjuk a biztosítási díjjal csökkentett, de biztosított értékű vagyont. Jobb oldalon a *várható hasznosság* két tagja szerepel: $p \in (0, 1)$ valószínűséggel a biztosítatlan autó tulajdonosának a kár bekövetkezése esetén tapasztalt hasznossága, és $q = 1 - p$ valószínűséggel a szerencsés kimenetel hasznossága. Ekkor utólag visszatekintve felesleges lett volna a biztosítás, mert nem volt káreset. A kérdés az, hogy mikor lesz a bal oldal nagyobb, mint a jobb.

$$u(1-e) > pu(1-d) + qu(1).$$

Figyelem: $0 < p < 1$, mert soha ($p = 0$) vagy biztosan ($p = 1$) bekövetkező kár eseményeket nem érdemes biztosítani. Az egyszerűség kedvéért egyelőre eltekintünk a biztosítási díjtól: $\pi = 0$ esetén $e_0 = pd$, ekkor kimondhatjuk a következő tételt.

16.7. tétel. *Ha az egyén hasznosságfüggvénye szigorúan növekvő és szigorúan konkáv, és a biztosítási díj csak a várható kárt fedezi (nincs biztosítói haszon: $\pi = 0$), akkor teljesül*

$$u(1-pd) > pu(1-d) + qu(1),$$

azaz érdemes biztosítást kötni.

Bizonyítás. A szigorú konkavitás definíciója szerint $u(px+qy) > pu(x) + qu(y)$, $p, q = 1-p > 0$ és $x \neq y$. Nyilvánvaló választás: $x = 1-d$ és $y = 1$, akkor $px + qy = p(1-d) + q = 1 - pd$. ∎

16.4. feladat. Ha biztos a kár, akkor tényleg nem érdemes biztosítást kötni? Miért nem érdemes biztosítást kötni, ha lineáris a hasznosságfüggvény?

Miért képes a biztosító viszonylag kis haszonnal biztosítást nyújtani? Mert a (16.6) Csebisev-tétel értelmében, ha a kár szempontjából egyforma és független egyének sokasága vesz részt a biztosításban, akkor az egy biztosítottra jutó kifizetés relatív szórása nagyon kicsiny, a biztosító kockázata elhanyagolható.

16.5. feladat. Miért nem érdemes az államnak biztosítást kötnie vagyontárgyaira?

Érdemes meghatározni azt a π^{o} biztosítói haszonkulcsot, amely mellett az egyénnek közömbös, hogy részt vesz-e vagy sem a biztosításban:

$$u(1 - pd(1+\pi^{\mathrm{o}})) = pu(1-d) + qu(1). \tag{16.9}$$

Azt tudjuk, hogy minél kisebb a kár valószínűsége, és minél nagyobb a kár-vagyon hányados, annál nagyobb hasznot vagy haszonkulcsot terhelhet az egyénekre a biztosító. Egy számpéldán szemléltetjük a haszon, illetve -kulcs paraméterérték-függését, ahol feltesszük, hogy $u(x) = \log x$. Ekkor bevezetve $s = \pi pd$ biztosítói hasznot, (16.9) egyszerűsödik:

$$\log(1-pd-s) = p\log(1-d). \tag{16.10}$$

(16.10)-ből ki lehet fejezni s-t:

$$1 - pd - s = (1-d)^p, \qquad \text{azaz} \qquad s = 1 - pd - (1-d)^p.$$

Számpélda: p és d 0,2; 0,4 és 0,6-et veszi föl: $3 \times 3 = 9$ eset. A 16.2. táblázat szerint maximális biztosítói haszon kis relatív kár (0,2) és kis kárvalószínűség (0,2) mellett csupán csak 0,004, míg nagy relatív kár (0,6) és nagy kárvalószínűség (0,6) mellett 0,063; haszonkulcs kis relatív kár (0,2) és nagy kárvalószínűség (0,6) mellett csupán csak 4,4%, míg nagy relatív kár (0,6) és kis kárvalószínűség (0,2) mellett 39,5%.

16.2. táblázat. *A maximális biztosítói haszon (s) és haszonkulcs (π)*

Kárvalószínűség p	0,2	0,4	0,6	0,2	0,4	0,6
Kár d	haszon			haszonkulcs		
0,2	0,004	0,005	0,005	0,091	0,067	0,044
0,4	0,017	0,025	0,024	0,214	0,155	0,100
0,6	0,047	0,067	0,063	0,395	0,279	0,175

Ezen a ponton kitérünk a Bevezetésben említett Lucas-féle jövedelemkiegyenlítésre. Tegyük föl, hogy a reprezentatív dolgozó keresete 1/2–1/2 valószínűséggel w_1 és w_2, $0 < w_1 < w_2$, és lehetőség lenne teljes jövedelemkiegyenlítésre: $v = (w_2 - w_1)/2 > 0$ kiegészítő jövedelmet kap a vesztes, és ugyanannyit fizet a nyertes: marad $w = (w_2 + w_1)/2$. Elméleti kérdés: milyen $s > 0$ biztosítási felárat hajlandó fizetni a dolgozó ezért a szolgáltatásért? Most az eddigi $u(x) = \log x$ additív hasznosságfüggvény helyett egy nem additív és eltolt kezdőpontú hatványközéppel dolgozunk:

$$U(w_1, w_2) = \left[\frac{(w_1 - w_0)^r + (w_2 - w_0)^r}{2}\right]^{1/r}.$$

Kitérő: minél nagyobb az r kitevő abszolút értéke, annál nehezebben viseli el a fogyasztó az ingadozást. Határértékben ($r \to -\infty$): $U(w_1, w_2) = \min(w_1, w_2) - w_0$. Ekkor a jövedelemkiegyenlítés közömbösségi feltétele

$$w - s - w_0 = U(w_1, w_2), \qquad \text{azaz} \qquad s = w - w_0 - U(w_1, w_2).$$

Egyszerű számítással adódik a kiegyenlítési díj függése a 0-hasznosságponttól és a hasznossági függvény kitevőjétől. Két kereset: $w_1 = 1{,}05$ és $w_2 = 0{,}95$. A két paraméter a következő értékeket veszi föl: $w_0 = 0, \ldots, 0{,}8$, $r = -1, -2, -3, -4 \ldots$. A bal felső sarokban ($w_0 = 0$ és $r = -1$) még valóban 2 ezrelékes díj szerepel, de a jobb alsó sarokban ($w_0 = 0$ és $r = -1$) 2,7%!

16.3. táblázat. *Kiegyenlítési díj változása $s(r, w_0)$*

Hasznosságpont w_0 Kitevő r	0	0,2	0,4	0,6	0,8
–1	0,002	0,003	0,004	0,006	0,012
–2	0,004	0,005	0,006	0,009	0,018
–3	0,005	0,006	0,008	0,012	0,023
–4	0,006	0,008	0,010	0,015	0,027

Általánosítjuk a feladatot arra az esetre, amikor az egyén *részleges* biztosítást is köthet. Legyen az *önrészesedés* értéke s, $0 \le s \le d$, a biztosító $e(s) = p(d - s)(1 + \pi)$ díjért hajlandó a kár s fölötti részét biztosítani, ahol $\pi > 0$ a biztosító bruttó haszonkulcsa biztosítottakként. (Természetesen $s = 0$-nél nincs önrészesedés, $s = d$-nél pedig nincs biztosítás.)

Ismét elhanyagolva a biztosító haszonkulcsát, visszatérünk az önrészesedésen alapuló biztosítás (bal oldal) és az ennél hátrányosabb, biztosítás nélküli eset (jobb oldal) várható hasznosságához: $U(s) > U(d)$, azaz

$$pu(1-e(s)-s)+qu(1-e(s)) > pu(1-d)+qu(1), \qquad e(s)=p(d-s). \tag{16.11}$$

Igaz a 16.7. tétel általánosítása.

16.8. tétel. *Ha az egyén hasznosságfüggvénye szigorúan növekvő és szigorúan konkáv, és a részleges biztosítási díj csak a várható kárt fedezi (nincs biztosítói haszon), akkor az egyénnek érdemes teljes biztosítást kötnie:* $s^{\text{o}} = 0$.

Mi az értelme akkor az önrészesedésnek? Sok.

b) Morális kockázat

A kármegelőzés elhanyagolása miatt a biztosítás megléte növeli a kár veszélyét: ezt hívják *morális kockázatnak*. Feltehető, hogy minél kisebb az önrészesedés, annál nagyobb a kár valószínűsége: $p(s)$ csökkenő függvény a $0 \le s \le d$ szakaszon. Ekkor (16.11) bal oldalát módosítanunk kell:

$$U(s) = p(s)u(1-e(s)-s)+[1-p(s)]u(1-e(s)). \tag{16.12}$$

Az elméleti levezetéshez ismét a kalkulushoz kell folyamodnunk, de a beavatatlan Olvasó nyugodtan átugorhatja a következő tételt, és áttérhet a számpéldára. De az is elég, ha az Olvasó elfogadja, hogy $U'(s)$ az U hasznosságfüggvény érintőjének a meredeksége az s pontban. A 2.6.* tétel speciális eseteként igaz

16.9.* tétel. *A 16.8. tétel feltevéseit általánosítva a morális kockázat figyelembe vételével, az optimális s^{o} önrészesedésre három eset lehetséges:*
a) vagy teljesül

$$0 < s^{\text{o}} < d, \ \ \textit{ha} \ \ U'(s^{\text{o}}) = 0; \tag{16.13a}$$

b) vagy nincs biztosítás:

$$s^{\text{o}} = d, \ \ \textit{ha} \ \ U'(d) \ge 0; \tag{16.13b}$$

c) vagy teljes a biztosítás:

$$s^{\text{o}} = 0, \ \ \textit{ha} \ \ U'(0) \le 0. \tag{16.13c}$$

Számpéldánk folytatja a 16.2. táblázatot, de kikapcsolja a haszonkulcsot: $\pi = 0$. A kulcskérdés: hogyan függ a morális kockázat az önrészesedéstől. A $p(s) = p_0 + \rho(d-s)$ függvény paraméterértékeit kísérletezéssel állapítjuk meg.

Mielőtt bemutatnánk, hogyan változik a biztosított jóléte az önrészesedés emelésével, felhívjuk az Olvasó figyelmét arra, hogy maguknak a hasznossági értékeknek nincs közgazdasági értelme. Helyesebb olyan mértékegységben kifejezni őket, amelyeknek van. Érdemes a biztosítás nélküli ($s = d$) esetet választani alapnak. A többi kimenet értékét egy olyan $\varepsilon > 0$ számmal jellemezzük, amellyel az alapesetben beszorozva mind a vagyon, mind a kár értékét, annak hasznossága megegyezne a részleges biztosításéval – az eredeti vagyon és kár esetén. Képletben:

$$U[\varepsilon, s] = p(s)u(\varepsilon[1-e(s)-s])+[1-p(s)]u(\varepsilon[1-e(s)]). \tag{16.12$'$}$$

Az s nagyságú önrészesedés ε *relatív hatékonysága* tehát az

$$U[\varepsilon, d] = U[1, s]$$

egyenlet gyöke. Újból logaritmikus hasznosságfüggvényt tételezünk föl, s ekkor $U(\varepsilon, d) = U(1, d) + \log \varepsilon$, ezért

$$U[1, d] + \log \varepsilon = U[1, s], \qquad \text{azaz} \qquad \varepsilon = \exp(U[1, s] - U(1, d]).$$

A 16.4. táblázatban rögzítjük $p(s) = p_0 + \rho(d - s)$-ben $p_0 = 0{,}2$-t és $d = 0{,}6$-et, és a három morális kockázattal kísérletezünk: $\rho_1 = 0$ (gyenge), $\rho_2 = 0{,}1$ (közepes) és $\rho_3 = 0{,}2$ (erős), és 0,1-es lépésközzel vizsgáljuk az önrészesedés hatását. A megfelelő közelítő optimális önrészesedés $s_1^\circ = 0$, $s_1^\circ = 0{,}2$ és $s_1^\circ = 0{,}6$. Az optimális relatív hatékonyságok rendre 1,069; 1,032 és 1, mindhárom dőltve.

16.4. táblázat. *Relatív hatékonyság, morális kockázat és önrészesedés*

		Morális kockázat foka	
Önrészesedés	gyenge	közepes	erős
s	ε_1	ε_2	ε_3
0,0	*1,069*	1,024	0,978
0,1	1,067	1,029	0,992
0,2	1,063	*1,032*	1,001
0,3	1,055	1,031	1,007
0,4	1,042	1,025	1,009
0,5	1,024	1,016	1,007
0,6	1,000	1,000	*1,000*

c) Kontraszelekció

Ebben az alfejezetben olyan esetet vizsgálunk, amelyben két ügyféltípus létezik: a kis- és a nagykockázatú típus: $0 < p_L < p_H < 1$, súlyuk a népességben $f_L, f_H > 0$, $f_L + f_H = 1$. (Most eltekintünk a morális kockázattól.) Először megnézzük, hogy mi történik, ha a biztosító képtelen vagy nem akarja a biztosításnál megkülönböztetni a két típust, és közös biztosítási díjat ajánl, amely átlagosan fedezi a teljes biztosítás költségét:

$$e_0 = (f_L p_L + f_H p_H)d. \qquad (16.14)$$

Például a tb-egészségügyi biztosításnál nem vizsgálják meg, hogy eredetileg beteg volt-e az illető vagy sem, vagy férfi-e vagy nő.

16.10. tétel. *Két típus önkéntes és közös biztosításánál a kockázatosabb típusnak mindig érdemes biztosítást kötnie, de a kisebb kockázatú típusnak csak akkor, ha teljesül*

$$p_L u(1-d) + q_L u(1) \le u(1-e_0). \tag{16.15}$$

Ebben az esetben viszont az L-típus keresztfinanszírozza a H-típust, a túlfizetés: $z = e_0 - p_L d$.

Megjegyzések. 1. (16.14) miatt a keresztfinanszírozás nagysága arányos a H-típus súlyával, a kockázatkülönbséggel és a kárral:

$$z = (f_L p_L + f_H p_H)d - p_L d = f_H(p_H - p_L)d > 0.$$

2. Ha (16.15) nem teljesül, akkor csak a kockázatosabb típus köt biztosítást, és (16.14) helyére magasabb díj lép: $e_H = p_H d$. Ilyenkor *kontraszelekcióról* (vagy antiszelekcióról) beszélünk.

Ha a biztosító jól megválasztja önrészesedés nagyságát, akkor a kontraszelekciót is kiszűrheti. Ha az egyének becsületesek lennének, akkor kétféle teljes biztosítást lehetne kötni: $e_L = p_L d$ és $e_H = p_H d$ díjjal – ez lenne az ún. *első legjobb megoldás*. De ezt nem lehet feltenni, viszont a kiskockázatú típus nagy önrészesedéssel jelezheti a biztosítónak, hogy ő valóban kiskockázatú: $e_L(s) = p_L(d-s)$. A nagykockázatú típusnak viszont nem éri meg, hogy a nagyobb önrészesedéssel vállalja a hazugságot, hogy kis kockázatú: marad $e_H = p_H d$. Képletben a két *érdekeltségi feltétel*:

• A kiskockázatúnak legalább annyira megéri a önrészesedés vállalása, mint a kockázatosabb típusra méretezett teljes biztosításé:

$$U_L(s) = p_L u(1 - e_L(s) - s) + q_L u(1 - e_L(s)) \ge u(1 - p_H d) = U_H(0). \tag{16.16L}$$

• A nagykockázatúnak (H) még csalás (L-nek tetteti magát) árán sem igazán éri meg az önrészesedés vállalása:

$$U_{L|H}(s) = p_H u(1 - e_L(s) - s) + q_H u(1 - e_L(s)) \le U_H(0), \tag{16.16H}$$

ahol $U_{L|H}$ az L-ként szerződő H-típus hasznossága. Emellett természetesen mindkét szereplő jobban jár, mint ha semmilyen biztosítást sem kötne:

$$U_L(s) > U_L(d) \qquad \text{és} \qquad U_H(s) > U_H(d). \tag{16.17}$$

A következő tételben megadjuk a *második legjobb* megoldást.

16.11. tétel. *A második legjobb megoldásban a kiskockázatú típus önrészesedése egy olyan* $0 < s^* < d$ *szám, amelyre egyenlőséggel teljesül (16.16H):*

$$U_{L|H}(s^*) = U_H(0), \tag{16.18}$$

a nagykockázatúnak típusnak pedig marad a drága, de teljes biztosítás. Ismét logaritmikus hasznosságfüggvényen szemléltetjük a rendszert: $u(x) = \log x$. *Ekkor (16.18) analitikusan kezelhetővé válik:*

$$p_L \log(1 - p_L d - q_L s^*) + q_L \log(1 - p_L d + p_L s^*)) = \log(1 - p_H d).$$

A 16.5. táblázatban bemutatjuk a numerikus módszerekkel meghatározott második legjobb megoldást a $p_L = 0{,}2$ és $p_H = 0{,}4$ kockázatpár esetén, amint a kár/vagyon hányados növekszik. Például 10%-os relatív kárnál csak a vagyon 9,5%-os önrészesedést érdemes vállalni, míg 90%-osnál már 57,2%-ot. Persze magához a (relatív) kárhoz mérve az önrészesedést fordított képet kapunk: a legkisebb kárnál szinte semmit sem érdemes biztosítani, de a legnagyobb kárnál már majdnem a kár 1/3-át.

16.5. táblázat. *A második legjobb megoldás – változó kár*

Kár/vagyon d	Optimális önrészesedés s	Kár/vagyon d	Optimális önrészesedés s
0,1	0,095	0,6	0,439
0,2	0,179	0,7	0,489
0,3	0,255	0,8	0,533
0,4	0,323	0,9	0,572
0,5	0,384		

16.6. feladat. Készítsünk egy programot, amely meghatározza az optimális önrészesedést, ha a kár/vagyon arány rögzített: $d = 0{,}5$; és a kis és nagy kockázat 0,2 és 0,6 között változik 0,1-es lépésközzel.

A fejezet végére érve, megemlítjük, hogy a modellek nemcsak a szűken vett biztosításra, hanem az ösztönzési feladatok széles körére alkalmazhatók. Például a jobbágy és a földesúr közti szerződés hatékonyabb, mint a rabszolga és gazdája közti, de kevésbé hatékony, mint a bérlő és a tulajdonos közti. (A rabszolga alig érdekelt a munkája eredményében, a jobbágy némileg érdekelt, végül a bérlő viszont maximálisan.)

17. Regressziószámítás és korreláció*

Ebben a fejezetben a matematikai statisztikába vezetjük be a középiskolás szinten álló Olvasót. 1) Először azt vizsgáljuk, hogyan lehet egy páros megfigyeléssorozat esetén az egyik véletlen sorozatot egy másik véletlen sorozattal lineárisan közelíteni. Szaknyelven fogalmazva: a regressziószámítással optimálisan illesztünk egy valószínűségi változót egy másik valószínűségi változóra – ez a regressziós egyenes. 2) Több közgazdasági alkalmazást is ismertetünk: hogyan függ egy ország relatív árszintje a fejlettségétől; növekszik vagy csökken a szolgálati idő a nyugdíjba vonulási kor emelkedésével?

17.1. Matematikai statisztikai háttér

Egy köznapi példával indítunk.

17.1. példa. Tömeg–magasság-kapcsolat. Jól ismert, hogy egyéb tényezőktől (életkor, nem, táplálkozás) eltekintve, minél magasabb valaki, annál nagyobb a tömege (súlya). Kérdésünk: statisztikai értelemben a tömeg változékonyságának hányad részét magyarázza meg a magasság? Szemléltetésképp egy ötelemű mintát találtam ki, ahol a gyermekkoromban alkalmazott tömeg (kg) = magasság (cm) − 100 képletet némileg eltorzítva adtam meg az „adatokat”: a 2. és a 4. férfi soványabb, mint a képlet adná, sőt, kisebb a tömegük, mint az 5 cm-rel alacsonyabb 1–1 társuké. (A valóságban minél közelebb van a magasság az átlaghoz, annál gyakoribb az előfordulásuk. Ezen egyszerűen lehetne javítani, ha súlyoznánk a mintát: például a 16-elemű szimmetrikus binomiális mintánál a széleken 1–1 férfi maradna, középen 6, és átmenetben 4–4 férfi, de még akkor is képzeletbeli maradna a példánk.)

17.1. táblázat. *Tömeg–magasság*

Magasság (cm)	170	175	180	185	190
Tömeg (kg)	70	71	80	82	89

Hamarosan belátjuk, hogy h_i-val jelölve az i-edik férfi magasságát (height) és m_i-mel a tömegét (mass), az

$$m_i = \alpha + \beta h_i + e_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

lineáris *regressziós* egyenlet $\beta^* = 0{,}92$ és $\alpha^* = 87{,}4$ számpárnál adja a később megmagyarázott legjobb illeszkedést. Az e_i a lineáris közelítés *hibája* (error).

Tekintsünk két egyforma méretű diszkrét valószínűségi változót: X-et (független) és Y-t (függő). A regressziós egyenes általános képlete

$$Y = \alpha + \beta X + e. \tag{17.1}$$

Szabatosan fogalmazva: arra vagyunk kíváncsiak, hogyha egy tetszőleges mintában van két valószínűségi változó: X, Y, akkor *lineárisan* milyen mértékben magyarázza X valószínűségi változó Y-t. Itt nem részletezendő okok miatt az illeszkedés hibáját a hiba szórásnégyzetével mérjük, s ezt akarjuk minimalizálni:

$$\mathbf{D}^2(Y - \beta X - \alpha) \to \min, \qquad \text{feltéve, hogy} \qquad \mathbf{D}^2 X, \mathbf{D}^2 Y > 0. \tag{17.2}$$

Innen ered a név: *a legkisebb négyzetek módszere*, amelyet Gauss német és Legendre (ejtsd: lözsandr) francia matematikus 1800 körül fedezett föl. (Gausst annak idején a matematikusok fejedelmének nevezték – páratlan matematikai képességei elismeréseként.)

A számolás megkönnyítése kedvéért mindkét valószínűségi változóból levonjuk várható értékét: $\hat{X} = X - \mathbf{E}X$ és $\hat{Y} = Y - \mathbf{E}Y$. Így a cél

$$\mathbf{E}(\hat{Y} - \beta\hat{X})^2 \to \min. \tag{17.3}$$

17.1. tétel. *(17.2)–(17.3)-ban a legjobb lineáris illeszkedést a*

$$\beta^* = \frac{\mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y})}{\mathbf{E}\hat{X}^2} \qquad \text{és} \qquad \alpha^* = \mathbf{E}Y - \beta^*\mathbf{E}X \tag{17.4}$$

képletpár adja.

Megjegyzés. (17.4a) számlálójában megjelenik egy fontos mennyiség: a különbségváltozók szorzatának a várható értéke, neve: *kovariancia* (együttváltozás): $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y})$. Ha a két különbségváltozó általában egyszerre pozitív vagy egyszerre negatív, akkor a kovariancia pozitív; ha általában külön pozitívak, akkor a kovariancia negatív. Megemlítjük, hogy két független valószínűségi változó kovarianciája 0 (vö. 16.4. tétel).

Bizonyítás. Jelölje a (17.3)-beli célfüggvényt $f(\beta)$. Tagonként véve a várható értéket:

$$f(\beta) = \mathbf{E}\hat{Y}^2 - 2\beta\mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y}) + \beta^2\mathbf{E}\hat{X}^2. \tag{17.5}$$

Ez β másodfokú függvénye, fölülről nyitott parabola, amelynek a minimumhelye (17.4a). ∎

17.1. feladat. Bizonyítsuk be (17.4b)-t!

Mielőtt tényleges adatokkal számolnánk, felírjuk a legfontosabb képleteket az egyedi (x_i), (y_i) függvényében. Kezdjük a regressziós egyenlettel!

$$y_i = \alpha + \beta x_i + e_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{17.1'}$$

A számolásban felesleges a különbségváltozókat használni.

$$\mathbf{E}X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{és} \qquad \mathbf{E}Y = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j,$$

$$\mathbf{E}X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad \mathbf{E}Y^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j^2 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{E}(XY) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j,$$

$$\mathbf{D}^2X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2, \qquad \mathbf{D}^2Y = \mathbf{E}Y^2 - (\mathbf{E}Y)^2, \qquad \mathrm{cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}X\mathbf{E}Y.$$

Most már a Csebisev-féle összegegyenlőtlenséget (10.5 tételt) valószínűség-számítási nyelvre is lefordíthatjuk: ha X és Y valószínűségi változó hossza azonos, és elemei monoton növekvő sorrendbe állíthatók, akkor kovarianciájuk pozitív.

A 17.2. táblázat első felében a 17.1. példának a képletek alapján kiszámított legfontosabb statisztikai mutatói szerepelnek. Az utolsó mutatót (r) csak később definiáljuk. A táblázat második felében a becslés hibáit adjuk meg: negatív érték a többletet, pozitív érték a hiányt adja.

17.2. táblázat. *A tömeg–magasság- kapcsolat statisztikai mutatói*

Várható érték		Szórás		Kovari-	Regresz-sziós	Abszolút	Korre-lációs
magasság	tömeg	magasság	tömeg	ancia	együttható		
(cm)	(kg)	(cm)	(kg)				
$\mathbf{E}h$	$\mathbf{E}m$	$\mathbf{D}h$	$\mathbf{D}m$	$\mathrm{cov}(h,m)$	β^*	α^*	r
180	78,2	7,071	7,026	46,0	0,920	– 87,4	0,926

hiba-1	hiba-2	hiba-3	hiba-4	hiba-5
e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
2,0	–3,6	2,8	–2,8	1,6

A regressziós egyenest – kellő óvatossággal – *előrejelzésre* is használhatjuk: a független változó $n+1$- edik mérése alapján megjósolhatjuk a függő változó $n+1$- edik „hibamentes” értékét: $\tilde{y}_{n+1} = \alpha^* + \beta^* x_{n+1}$. Ezt tette Gauss az elveszett Ceresz kisbolygó pályájának előrejelzésekor.

β^* képlete aszimmetrikus, mert csak a magyarázó X változó szórásától függ. Ezt az aszimmetriát eltüntethetjük, ha mindkét különbségváltozót *standardizáljuk*, azaz a szórásukkal osztjuk: ekkor a legjobb lineáris becslés

$$\frac{\hat{Y}}{\mathbf{D}Y} = \frac{\mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y})}{\mathbf{D}X\,\mathbf{D}Y}\,\frac{\hat{X}}{\mathbf{D}X}.$$

Ezt a standardizált regressziós együtthatót X és Y *korrelációs együtthatójának* nevezik:

$$r = \frac{\mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y})}{\mathbf{D}X\,\mathbf{D}Y}, \qquad \text{feltéve,} \quad \text{hogy} \qquad \mathbf{D}X \neq 0 \neq \mathbf{D}Y. \tag{17.6}$$

A következő tétel új oldaláról mutatja be a korrelációs együtthatót.

17.2. tétel. *A korrelációs együttható négyzete azt mutatja, hogy Y szórásnégyzetének hányad részét magyarázza $\beta^* X$-é.*

$$\beta^{*2}\mathbf{E}\hat{X}^2 = r^2\mathbf{E}\hat{Y}^2. \tag{17.7a}$$

A hibák szórásnégyzete pedig a maradék:

$$\mathbf{E}(\hat{Y} - \beta^*\hat{X})^2 = (1 - r^2)\mathbf{E}\hat{Y}^2. \tag{17.7b}$$

Bizonyítás. (17.6)-ból következik (17.7a).
(17.5) alapján

$$f(\beta^*) = \mathbf{E}\hat{Y}^2 - 2\frac{[\mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y})]^2}{\mathbf{E}\hat{X}^2} + \frac{[\mathbf{E}(\hat{X}\hat{Y})]^2}{(\mathbf{E}\hat{X}^2)^2}\mathbf{E}\hat{X}^2.$$

Elvégezve az összevonást, és felhasználva (17.6)-ot, adódik (17.7b). ∎

Következmény. *a) A korrelációs együttható a $[-1, 1]$ intervallumba esik:*

$$-1 \leq r \leq 1. \tag{17.8}$$

b) A korrelációs együttható minimumát, illetve maximumát éppen akkor veszi föl, ha a lineáris becslésben nincs hiba, és rendre csökkenő, illetve növekvő a regressziós egyenes:

$$\text{vagy} \qquad \beta^* < 0 \qquad \text{vagy} \qquad \beta^* > 0. \tag{17.9}$$

Bizonyítás. *a)* Mivel (17.7b) bal oldala nem negatív, ezért a jobb oldala sem, tehát $\mathbf{E}\hat{Y}^2 > 0$ miatt $r^2 \leq 1$, azaz (17.8) áll.
b) A bal oldal pontosan akkor 0, ha nincs hiba, azaz $\hat{Y} \equiv \beta^*\hat{X}$. (17.6) alapján

$$r = \frac{\mathbf{E}(\beta^*\hat{X}^2)}{|\beta^*|\mathbf{D}^2 X} = \frac{\beta^*}{|\beta^*|}, \tag{17.6'}$$

azaz esetszétválasztással adódik (17.9). ∎

Rátérünk a súlyozott változókra. Nagyszámú megfigyelés esetén célszerű lehet osztályokba sorolni az adatokat. Legyen N a megfigyelések száma, n az osztályok száma, indexük $i, j = 1, \ldots, n$. Legyen N_{ij} az (i, j) cellába eső megfigyelések száma. Sor- és oszlopösszegeket véve:

$$K_i = \sum_{j=1}^{n} N_{ij} \qquad \text{és} \qquad L_j = \sum_{i=1}^{n} N_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

A relatív gyakoriságok pedig

$$r_{ij} = \frac{N_{ij}}{N}, \qquad p_i = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \qquad \text{és} \qquad q_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}.$$

Példaként felírjuk a súlyozott átlagokat:

$$\mathbf{E}X = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \qquad \text{és} \qquad \mathbf{E}Y = \sum_{j=1}^{n} q_j y_j,$$

de a többi mutató is hasonlóan felírható.

A regressziószámítás csak elegendően nagy elemszám esetén alkalmazható. Szélsőséges esetben, ha csak két elemünk van, akkor a két pont egy egyenesen öszeköthető, ezért a korrelációs együttható vagy –1 vagy +1.

17.2. példa. Érdekességként kitérünk a regressziószámítás elterjesztőjének és névadójának (lásd később), Galton brit statisztikusnak (1870 körül) nevezetes vizsgálatára: mennyire öröklődik apáról fiúra a testmagasság? $n = 928$ apa–fiú-pár adatát hasonlította össze. A 17.3. táblázatban adjuk meg a minta néhány fontos statisztikai mutatóját (Kőrösi Gábortól kaptam ezt a fájlt).

17.3. táblázat. *Apa–fiú magasságpár statisztikája, hüvelykben*

	Átlag	Medián	Szórás	Minimum	Maximum
Apa F	68,31	68,50	1,787	64,6	73,0
Fiú S	68,09	68,20	2,518	61,7	73,7

Figyelemre méltó, hogy Galton ha nem is cm-ben, de a hazájában a mai napig szokásos láb mellőzésével csupa hüvelykben adta meg a magassági adatokat. Páros elemszámú mintánkban a *medián* a csökkenő sorba rendezett minta két középső értékének az átlaga, azaz ugyanannyi apa, illetve fiú magassága nagyobb, mint ahányé kisebb a mediánnál. Galton mintájában mind az apák, mind a fiuk mediánja nagyon közel esik a megfelelő átlaghoz, a szórások kicsik az átlagokhoz képest, és a fiúk minimuma jóval kisebb az apáké (de ez lehet csak egy „kisiklás” is).

Galton a következő regressziós egyenletet becsülte:

$$s_i = \alpha + \beta f_i + e_i,$$

ahol f_i és s_i az i-edik apa (father) és fia (son) magassága. Azt találta, hogy az átlagnál magasabb apáknak az átlagnál magasabb fiúk van, de a fiúk mérete kevésbé emelkedik ki, mint az apáké: $\beta = 0{,}646$ – jóval kisebb mint 1: tehát a fiúk magassága visszatér az átlaghoz.

A levezetés kecdvéért feltehetjük, hogy az átlagmagasság változatlan: $\mathbf{E}S = \mathbf{E}F$ (a valóságban $68{,}09 < 68{,}31$; de a százalékos hiba kicsi). Ekkor átlagot véve, és a hibák várható értékét 0-nak tekintve, $\mathbf{E}S = \alpha + \beta\mathbf{E}F$. Ha az 1. apa magassága átlag fölötti volt: $f_1 > \mathbf{E}F$, akkor a vitatható $e_1 = 0$ feltevéssel élve $s_1 = \alpha + \beta f_1$-ről azt kell belátni, hogy $\mathbf{E}F < s_1 < f_1$. Ezért választotta Galton az eljárás jelzőjét regressziónak (regression = visszatérés). A korrelációs együttható négyzetének értéke: $r^2 = 0{,}21$ arra utal, hogy öröklődik a magasság, de csak részben.

17.2. feladat. Igazoljuk Galton eredményét: $\mathbf{E}F < s_1 < f_1$!

Félrevezető lehet a regressziószámítás, ha egy vagy több fontos magyarázóváltozót kihagyunk. Ezt szemlélteti a tömeg–magasság példa következő általánosítása.

17.3. példa. Tömeg–magasság–jövedelem-kapcsolat. Több fejlett országra jellemző, hogy a magasabb jövedelműek magasabbak és soványabbak, mint az átlag. A 17.4. táblázat a legegyszerűbb karikatúra-példát mutatja be.

17.4. táblázat. *Tömeg–magasság, rejtett jövedelem*

Magasság (cm)	160	165	170	175
Tömeg (kg)	80	60	90	70

Az 1. és a 3. típus szegény, átlagban alacsony és kövér, a 2. és a 4. típus gazdag, átlagban magas és sovány. Hiába teljesül mindkét osztályra a magasabb–nagyobb tömegű kapcsolat, a 17.4. táblázat adataival az átlagra már 0 korreláció adódik (17.5. táblázat). Mellesleg ez arra is példa, hogy a 0 korreláció nem jelenti a két változó függetlenségét!

17.5. táblázat. *A tömeg–magasság-kapcsolat statisztikai mutatói, rejtett jövedelem*

Várható érték magasság (cm) $\mathbf{E}h$	Várható érték tömeg (kg) $\mathbf{E}m$	Szórás magasság (cm) $\mathbf{D}h$	Szórás tömeg (kg) $\mathbf{D}m$	Kovariancia $\mathrm{cov}(h, m)$	Regressziós együttható β^*	Abszolút együttható α^*	Korrelációs együttható r
167,5	75	5,590	11,180	0	0	75	0

hiba-1 e_1	hiba-2 e_2	hiba-3 e_3	hiba-4 e_4
5	–15	15	–5

Ha az összefüggés nem lineáris, és ezt nem vesszük észre, akkor is félrevezető regressziót kapunk. Szemléltetésként tegyük föl, hogy Galilei 1638-ban publikált zseniális lejtőkísérleteiben négyzetes helyett lineáris regressziót használt volna: a pontos érték $s_t = (g \sin\gamma)\, t^2/2$, a regresszió viszont $s_t^L = \alpha + \beta t$. A 17.6. táblázatban $\gamma = 1/10$ dőlésszögű, súrlódás és közegellenállás mentes lejtőn mutatjuk be a kísérleti adatokat, és lineáris „becslésüket”. (Mellesleg Galilei annyira csak a négyzetes törvény kvalitatív megtalálására koncentrált, és olyan durván volt kénytelen mérni az időt, hogy g-re a helyes érték, 9,81 m/sec^2 felét kapta – természetesen az akkori mértékegységben.) A táblázat első fele a becslési adatokat, második fele pedig a tényleges és a becsült utat mutatja meg. Vigyázat: elvileg hibás becslés, a negatív kezdő út árulkodó, és az adatok 3 tizedesjegyes pontossága irreális!

17.6. táblázat. *A négyzetes törvény lineáris „becslése”*

Várható érték idő $\mathbf{E}t$ (sec)	Várható érték út $\mathbf{E}s_t$ (m)	Sz ó r á s idő $\mathbf{D}t$ (sec)	Sz ó r á s út $\mathbf{D}s_t$ (m)	Kovari-ancia $\mathrm{cov}(t, s_t)$	Regresz-sziós együttható β^*	Abszolút együttható α^*	Korre-lációs együttható r
3	6,366	2,000	6,116	11,752	2,938	–2,448	0,961

Idő t (sec)	Tényleges út s_t (m)	Becsült út s_t^L (m)
0	0	–2,448
1	0,490	0,490
2	1,959	3,428
3	4,407	6,366
4	7,835	9,304
5	12,242	12,242
6	17,629	15,180

Ha viszont t^2 és véletlen hibákkal megfigyelt s_t páros között keresünk korrelációt, akkor $\beta = g/2 \approx 5$ körüli eredményre számíthatunk.

A korreláció alkalmazásakor nem szabad lemondani a józan ész alkalmazásáról. Két adatsor között véletlenül is lehet szoros korreláció, és az ilyen hamis korreláció alkalmazása tévedést okozhat. A 17.7. táblázat (Kőrösi Gábor ajándéka) 11 évre megadja a Miss Amerika életkorát és a forró eszközzel elkövetett (röviden: forró) gyilkosság áldozatainak számát az Egyesült Államokban; korreláció 0,87.

17.7. táblázat. *Miss Amerika életkora és a forró gyilkosság áldozatainak száma*

Év t	Miss Amerika életkora x_t	+ldozatok száma y_t	Év t	Miss Amerika életkora x_t	+ldozatok száma y_t
1999	24	7	2005	24	7
2000	24	7	2006	21	4
2001	24	7	2007	20	2
2002	21	3	2008	19	3
2003	22	4	2009	20	2
2004	21	3			

Hagyjuk ki a mintából a 2009. évet, és akkor már 2008-ban feltételes előrejelzést készíthetünk a csonka mintán becsült $y_t = -17{,}987 + 1{,}031 x_t$ regressziós egyenessel: ha az $x_{2009} = 20$ esetet eltaláljuk, akkor (kerekítéssel) forró gyilkosság áldozataira 5 adódik a tényleges 2 helyett.

Végül szükségünk lesz a korrelációs együtthatónak a regressziószámításnál szélesebb körű alkalmazására. Felidézzük a 16. fejezetből a kétdimenziós eloszlás fogalmát, (r_{ij}) együttes, valamint p_i és q_j peremeloszlásokkal. (17.6) képlet ilyenkor is alkalmazható, és segíthet a megértésben.

17.4. példa. Szemléletesen mutatja a korrelációs együttható jelentését a következő 4-elemű szimmetrikus példa. Legyen X és Y valószínűségi változó értékkészlete 0 és 1, együttes eloszlásukat a 17.8. táblázat adja, $p, q > 0$, $p + q = 1/2$.

17.8. táblázat. *Kétdimenziós szimmetrikus eloszlás*

X / Y	0	1	együtt
0	p	q	1/2
1	q	p	1/2
együtt	1/2	1/2	1

Könnyű belátni, hogy $\mathbf{E}X = \mathbf{E}Y = 1/2$, $\mathbf{E}X^2 = \mathbf{E}Y^2 = 1/2$, tehát $\mathbf{D}X = \mathbf{D}Y = 1/2$. Ugyancsak egyszerű, hogy $\mathbf{E}(XY) = p$, $\mathrm{cov}(X, Y) = p - 1/4$, azaz $r(X, Y) = 4p - 1$. Ahogy p növekszik 0-ról 1/2-re, úgy növekszik $r(X, Y)$értéke –1-ről +1-re. Szavakban: ahogy növekszik a főátló súlya a mellékátló rovására, úgy válik negatívról pozitívra a korrelációs együttható. Középúton, $p = q = 1/4$, a két eloszlás egymástól független, összhangban $r = 0$-val.

17.2. Közgazdasági alkalmazások

A közgazdaságtanban széles körben alkalmazzák a regressziószámítást, még olyankor is, amikor nem lenne szabad, például amikor (X_t) és (Y_t) időben gyorsan növekvő sorozat, hiszen ilyenkor nem X_t, hanem t a lényeges magyarázó változó. (Gyakori példa: a kibocsátás magyarázata a népességgel, holott közben a termelékenység is növekszik.) Mi hasznos alkalmazásokat igyekszünk bemutatni: *a)* a relatív árszint és a fejlettség kapcsolata; *b)* pozitív korreláció a nyugdíjba vonulási kor és a szolgálati idő között; *c)* Berkson-paradoxon és a Nők 40/merev korhatár.

a) Az árszint és a fejlettség kapcsolata

2001 óta az EU számos országában használnak közös pénzt, szemmel láthatóvá téve, hogy minél alacsonyabb az egy főre jutó GDP (y), annál alacsonyabb az (átlagos) árszint (P). De megfelelő statisztikai munkával ez a jelenség más, eurózónán kívüli országokra is megmutatható. Kiindulás a Balassa–Samuelson-hatás (1964): minden nyitott gazdaság két részből áll, a külkereskedelemben részt vevő és részt nem vevő szektorból. Az elsőben a hazai árak követik a nemzetközi árakat, de a másodikban nem. Például hiába ugyanolyan termelékeny egy magyar fodrász mint egy osztrák, a bére reálértéke csak fele a másikénak. Ezért az 1 euró = 320 forint árfolyam mellett azonos típusú tv Bécsben 300 EUR, azaz Budapesten 96 eFt; egy férfi hajvágás 20 EUR Bécsben, de csak 10 EUR Budapesten. (A volt szocialista országok nem voltak piacgazdaságok, ezért ott hatványozottan érvényesült az árak kétszintűsége: 1 uszodabelépő 1 kg kenyér árába került, egy színes tv többhavi átlagbér volt – mai árakon 300 Ft, illetve kb. 1 mFt – szemben a mai 1500, illetve 100 eFt-os árral.)

Az adatokat a 17.9. táblázat tartalmazza. Előrebocsátom, hogy szándékosan tartottam meg az országok angol neveit és sorrendjét. Be akartam mutatni, milyen ostoba rendszert használ az EU: az egyes országok angol nyelvű neve helyett saját nyelvű nevét használva teszi be az angol ábécé szerinti sorrendbe, pl. Magyarország H helyett az M-nél szerepel Hungary névvel. Súlyozatlan átlagot használnak, tehát a törpe Málta ugyanolyan súllyal szerepel, mint a hatalmas Németország. Mind a fejlettség, mind az árszint esetében az átlag 100%. Például az átlaghoz közeli Franciaország fejlettsége 104%, árszintje 109%. Magyarországnál fordított eltérést látunk: 68%-os fejlettséghez 62%-os árszint társul. További figyelmeztetés: nemcsak a fogyasztási cikkek és szolgáltatások, hanem a beruházási javak árai is figyelembe vannak véve.

17.9. táblázat. *Fejlettség és árszint, EU, 2017*

Ország i	GDP/fő y_i	GDP-árszint P_i	Ország i	GDP/fő y_i	GDP- árszint P_i
Belgium	117,0	110,5	Lithuania	78,0	63,4
Bulgaria	49,0	48,2	Hungary	68,0	61,8
Czechia	89,0	68,4	Malta	96,0	83,2
Denmark	125,0	133,8	Netherlands	128,0	112,1
Germany	123,0	107,1	Austria	128,0	110,1
Estonia	77,0	75,7	Poland	70,0	58,1
Greece	67,0	82,3	Portugal	77,0	81,4
Spain	92,0	90,4	Romania	63,0	51,0
France	104,0	109,5	Slovenia	85,0	82,6
Croatia	61,0	64,2	Slovakia	77,0	67,9
Italy	96,0	98,9	Finland	109,0	124,3
Cyprus	84,0	89,2	Sweden	122,0	129,8
Latvia	67,0	68,9	UK	105,0	111,9

Oblath Gábor rendelkezésemre bocsátotta számításai eredményét, amelynek egy részét itt közreadom. A regressziós egyenes a fejlettség lineáris függvényében magyarázza az árszintet:

$$P = 0{,}965y + 3{,}5; \quad r^2 = 0{,}83.$$

Egyébként a legtöbb szoftverben egyszerűen számíthatók ezek a mutatók .

b) Pozitív korreláció a nyugdíjba vonulási kor és a szolgálati idő között

Elméleti nyugdíjmodellekben gyakran tesszük föl, hogy a szolgálati idő a nyugdíjba vonulási kor és a munkába állási kor különbsége: $S = R - Q$. Mivel $Q \approx 19$ év, azt hihetnénk, hogy R és S közti korreláció értéke 1. De a dolgozók jelentős részének töredezett munkaviszonya van (még a gyermeknevelés miatt otthon töltött évek beszámításával is), ezért érdemes egy folytonossági együtthatóval általánosítani az $S(R)$ kapcsolatot: $S = \varphi(R - Q)$, $0 < \varphi \leq 1$. Jól működő gazdaságban a nyugdíjba vonulási kor és a szolgálati idő között pozitív a korreláció. (Később találkozunk olyan nyugdíjrendszerrel is, ahol a korreláció negatív.) Itt egy képzeletbeli példát adunk. Két nyugdíjba vonulási kor létezik: R_1 és $R_2 (> R_1)$, és két folytonossági együttható: φ_1 és φ_2, $0 < \varphi_1 < \varphi_2 \leq 1$. Ekkor négy különböző szolgálati idő áll elő:

$$S_{ij} = \varphi_i(R_j - Q), \qquad i, j = 1, 2.$$

Nyilvánvaló, hogy $S_{11} < S_{21}, S_{12} < S_{22}$. Ha $S_{21} < S_{12}$, azaz $\varphi_2(R_1 - Q) < \varphi_1(R_2 - Q)$, akkor a négytagú Csebisev-összegegyenlőtlenség feltétele teljesül, a korreláció pozitív. Ellenkező esetben bizonyítani kellene a pozitivitást, de erről lemondunk.

A 17.7. táblázatot általánosítva azt mondhatjuk, hogy normális nyugdíjrendszerben a rövid szolgálati idő tipikusan korai nyugdíjba vonulási korral párosul, hosszú pedig későivel – ez pozitív korrelációs együtthatót ad.

c) Berkson-paradoxon és a Nők40/merev korhatár

Végül a Berkson-paradoxont (1946) és egy közgazdasági alkalmazását mutatjuk be. A nevezett paradoxont eredetileg egészségügyi statisztikában fedezte fel névadója, de itt a Wikipédia egyszerűbb példáját ismertetem tovább egyszerűsítve.

17.5. példa. Tegyük föl, hogy egy amerikai egyetemre felvételiző diákoknak két fontos jellemzőjük van: $X=$ tudás és $Y=$ sportbeli ügyesség. Mindkettő bináris változó: 0 és 1; 1/2–1/2 valószínűséggel, egymástól függetlenül. Egy diákot akkor vesznek föl az egyetemre, ha legalább az egyik ismérv szerint jó: $\min(X, Y) = 1$. Ezek szerint a diákok 3/4-ét felveszik, és a felvett diákokra az (X, Y) változó együttes eloszlása a következő: $(1, 1)$, $(1, 0)$ és $(0, 1)$ egyenként 1/3 valószínűséggel. Grafikusan is látható lenne, hogy $r < 0$. Eredetileg független két változó paradox módon a szűrés után negatív korrelációt mutat. Ezt a példát általánosítja a

17.3. feladat. A 17.10. táblázat egy 2×2-es valószínűségi eloszlást ad meg, amelynek bal felső sarka 0, s ujjgyakorlatként ennek statisztikai mutatóit vizsgáljuk.

17.10. táblázat. *Tükrözött L eloszlás*

X Y	0	1	együtt
0	0	p	p
1	q	$1-p-q$	$1-p$
együtt	q	$1-q$	1

a) Indokolja meg számolás nélkül, hogy miért negatív X és Y korrelációs együtthatója: $r(X, Y)$!

b) Határozza meg $r(X, Y)$-t p, q függvényében!

c) Hogyan egyszerűsödik a képlet szimmetrikus eloszlás esetén?

d) Mi $r(X, Y)$ numerikus értéke, ha $p = 1/4$?

Ismert, hogy 2011-2012 óta hazánkban a férfiak csak az *általános nyugdíjkorhatár* elérése után mehetnek nyugdíjba: $R^* = 63$ év (2016), de a nők akkor is nyugdíjba mehetnek, ha legalább $S^* = 40$ évnyi jogviszonyt szereztek (Nők40). A nőket vizsgálva, megfelelő aggregálással a 17.11. táblázat kétdimenziós eloszlását kapjuk. Például a DK-i cella 0,089 értéke azoknak a nőknek a részaránya, akik egyszerre érték el a 40 éves jogviszonyt és a 63 éves korhatárt. Ugyanakkor a korhatáron visszavonulók várható szolgálati ideje csak 31,4 év.

17.11. táblázat. *Szolgálati idő és nyugdíjba vonulási kor együttes eloszlása, 2016, nők*

Életkor (R) Szolgálati idő (S)	Korai 58,6	Korhatár 63	Átlagosan 60,6
Rövid S 31,4	0	0,551	0,551
Elegendő S 41,2	0,355	0,089	0,449
Átlagosan 37,8	0,355	0,640	1,000

Elhanyagolva a csoportokon belüli szórásokat, a korrelációs együttható

$$r(R,S) = -\sqrt{\frac{pq}{(1-p)(1-q)}}$$

Numerikusan: $p = 0{,}551$ és $q = 0{,}355$; $r(R,S) = -0{,}822$. A belső szórások figyelembe vétele leviszi a korrelációs együtthatót –0,6-ra, majd –0,53-ra.

18. Zárszó helyett

Áttekintettünk néhány tucat közgazdasági modellt. Némelyikük majdnem triviális volt, mások viszont sokáig elkerülték még a legjobb közgazdászok figyelmét is.

Azoknak a középiskolásoknak (és nemcsak középiskolásoknak, hanem például a tanáraiknak vagy egyéb érdeklődőknek), akiket egyaránt érdekel a matematika közgazdaságtani alkalmazása, ez a jegyzet számos témát kínált, amelyek megértésével elmélyíthették tudásukat. A hangsúly majdnem mindig a közgazdaságtanon volt, itt a matematika csak „szolgálólány". (*Majdnem* mindig-et írtam, mert egy- két helyen a matematika vette át a főszerepet. Például a káoszelmélet közgazdasági alkalmazásait éppen csak érinti a jegyzet, még sem volt szívem kihagyni az alkalmazások alapjául szolgáló elméletet.)

A közgazdaságtan sokkal összetettebb jelenségekkel foglalkozik, mint a középiskolából legjobban ismert modellező tantárgy, a fizika. A gazdaságban nincsenek olyan egyszerű helyzetek, mint a mechanikában a lejtő vagy a Föld Nap körüli keringése. Ezért a közgazdaságtani modellek sokkal esetlegesebbek, mint a fizikaiak. Mégis megkíséreltem bevezetni az Olvasót e bonyolult témakörbe. Remélem, hogy a jegyzet egyes fejezeteit elsajátítva, jobban érti majd a közgazdaságtant; s emellett tágítja tudását a matematika alkalmazásáról.

Az egyes modellek kifejtését nem akartam megzavarni a személyes háttér ismertetésével, de a jegyzet végére érve néhány emléket megosztok az Olvasóval.

1. A Közgazdasági modellekről c. fejezet 50 éves modellezési gyakorlatom leszűrése. 1970 és 1990 között Kornai János vezetése alatt modelleztem a hiánygazdaságot, és próbáltam meg elsajátítani mesterem modellezési filozófiáját. Távirati stílusban a következőket szűrtem le az együttműködésből: *a)* a gazdaság egy dinamikus rendszer, *b)* amelynek szereplői általában nem optimalizálnak; *c)* a vizsgálatokban világosan el kell különíteni a leíró és a normatív szempontokat (a *mi van*-t a *mit szeretnénk*-től).

2. A Matematikai segédeszközök c. fejezet 2.2. alfejezete azon a felismerésen alapul, hogy ha a magasabb rendű helyett a másodrendű differenciaegyenletekre szorítkozunk, akkor a megoldás a másodfokú egyenlet segítségével tárgyalható. A 2.3. alfejezet (elemi optimalizálás) Hódi Endre (1963/1998) munkájára vezethető vissza, amellyel még 1965 körül ismerkedtem meg.

3. A Játékelméleti bevezető c. fejezet első változatát Urbán János felkérésére írtam meg 1994-ben, amikor a magyar származású Harsányi János, az amerikai John Nash és a német Richard Selten közgazdasági Nobel-díjat kapott. Felemelő élmény volt, amikor évekkel később Kiss Géza meghívására beszélhettem a játékelméletről az Apáczai János

Gyakorló Iskola zsúfolt termében középiskolásoknak és tanáraiknak.

4. A Három lineáris dinamikus közgazdasági modell c. fejezet 3. modellje a piacgazdaságok beruházási ciklusairól szólt. A modellel még egyetemistaként, a néhai Bródy András Közgazdasági Intézeti szemináriumán ismerkedtem meg 1968 körül. Bauer Tamás, Kornai János, Lackó Mária és Soós Károly Attila nemzetközileg is úttörő munkásságához kapcsolódva, 1982 után kezdtem a szocialista beruházási ciklusok modellezésével foglalkozni, és ott is jó szolgálatot tett Hicks gondolatmenete. 2000 körül egy nagy sikerű angol nyelvű tankönyvben olvastam egy ledorongoló ismertetést a Hicks-modell lineáris változatáról, amely valóban késhegyen táncol. Levélben hívtam föl az ismerős szerzők figyelmét, hogy elhallgatták Hicks zseniális nemlineáris kiegészítését. A szerzők a kritikát „csípőből" visszautasították, de a következő kiadásból kihagyták a modellt, s vele együtt az igazságtalan bírálatot. Középiskolás olvasóim remélhetőleg megbocsájtják, hogy egy késhegyen táncoló modellt mutattam be nekik, és a 7.2. alfejezet végén is csak vázoltam a nemlineáris általánosítást.

5. A Fogyasztói döntések és hasznosságmaximum c. fejezet újdonsága a kalkulus elkerülése. Ha lennének ábrák a jegyzetben, akkor könnyebb lenne a kifejtés, de ez ellenkezne az algoritmikus megközelítésünkkel, tudniillik, hogy számolunk.

6. A Termelés, költség és profit c. fejezethez is az előbb leírtakat fűzhetném hozzá.

7. A Nemlineáris dinamikus rendszer: stabilitás, ciklus és káosz c. fejezet tárgyával 1982-ben, a Magyar Tudományos Akadémián szervezett Téli Iskolán ismerkedtem meg, amelyen főleg matematikusok és fizikusok vettek részt. Szerencsém volt, mert éppen egy kaotikus modellen dolgoztam, és a téli iskola hátszelét felhasználva, viszonylag korán publikáltam kaotikus közgazdasági modellt.

8. Az Adómorál és adózás: három modell c. fejezetet Lackó Mária és Tóth István János az MTA KRTK Közgazdaság- tudományi Intézetében (KTI) folyó munkája ösztönözte. A lineáris–kvadratikus hasznosságfüggvényt egy publikálatlan cikkből vettem. Egyik szerzője – „megsejtve", hogy éppen erre van szükségem –, egy nemzetközi konferencián ismeretlenül átadta cikktervezetük nyomtatott változatát, ahonnan már egyszerű volt a folytatás. Garay Barna–Tóth János, illetve Méder Zsombor–Vincze János társszerzőkkel írt cikkeink a jóval reálisabb logaritmikus hasznosságfüggvényre támaszkodtak, de ezek alkalmazása kizárta a ceruza-papír alapú tárgyalást.

9. A Három népességdinamikai modell c. fejezet korábbi változatát a Fazekas Mihály Gyakorló Gimnáziumban adtam elő. Alapötlete egyszerű: ha 100 együtt élő évjárat helyett csak 2–3 együtt élő nemzedékre szorítkozunk, akkor az elmélet a másodfokú egyenlettel tárgyalható.

10. Az Elemi nyugdíjmodellek c. fejezet korábbi változatát szintén a Fazekas Mihály Gyakorló Gimnáziumban adtam elő. Itt kell szólnom a néhai Augusztinovics Máriáról, aki 1990 körül sokunkban felkeltette a mély érdeklődést a nyugdíjgazdaságtan iránt. Engem a következő kérdéssel „fogott meg": *Mi kell ahhoz, hogy egy 100-adfokú (valós együtthatós) polinomnak legfeljebb két pozitív gyöke legyen?* Némi gondolkodás után beugrott a páratlanul gazdag és igényes Pólya–Szegő (1924/2010) feladatgyűjtemény, amely tartalmazta Descartes válaszát (1630 körülről): *A polinom együtthatóinak sorozata legfeljebb kétszer válthat előjelet.* (Másodfokú egyenlet esetén egyébként a megoldóképletből könnyen leolvasható, hogy a feltétel nem csak szükséges, de elégséges is.) Hadd idézzem Pólya szavait művéről: „Hasonló volt a hátterünk [Szegő Gáborral] ... mindketten a KöMaL feladatmegoldói voltunk."

Számomra különösen kedves a fejezetben szereplő Csebisev- féle összegegyenlőtlenség, mert hozzá kapcsolódik életem első „felfedezése”. 1963-ban jelent meg Jánossy Ferenc „A gazdasági fejlettség mérése és mérésének új módszere”. Tájékozott és gondoskodó szüleim megvették számomra a könyvet, és ott találkoztam egy állítással: egy gazdaság éves növekedési mutatója kétféleképp is mérhető, és az egyik módszer mindig nagyobb értéket ad, mint a másik. Az ok: általában azoknak a termékeknek a fogyasztása növekszik, amelyeknek az ára csökken. Elég hamar felismertem, hogy az összegegyenlőtlenségből logikailag következik a növekedési indexek sorrendje. Középiskolás létemre viszonylag egyszerűen eljutottam Köves Pálhoz, aki az akkori Marx Károly Közgazdaság-tudományi Egyetemen volt a statisztika professzora. Figyelmesen meghallgatott és tankönyvében megmutatta, hogy az általam adott bizonyítás helyett a szakirodalom már régóta egy sokkal általánosabb, a korrelációs együtthatóra épülő bizonyítást alkalmaz. A jegyzetben bemutatott közgazdasági alkalmazás azonban remélhetőleg új.

11. Az Önkéntes nyugdíjrendszer c. fejezet Király Balázzsal közös munkánk első lépése volt. Mindmáig nem tudok túllépni azon, hogy a témával foglalkozó hazai és nemzetközi szerzők zöme – nyíltan vagy titokban – figyelmen kívül hagyja, hogy az önkéntes megtakarítások támogatását az egész társadalom fizeti – adókból. Magyarul: a hangyákat a tücskök jutalmazzák, s ezt még tetézi, hogy a hangyák általában gazdagabbak is, mint a tücskök! Jelenleg egy magyar tücsök évi maximum 1,5 mFt-ot tehet be ilyen-olyan számlára, és ezt az állam 20%-kal, maximum 300 eFt-tal egészíti ki. Miközben tízezrek tengődnek évi 300 eFt-ból!

12. A Nyugdíjdinamika c. fejezet a mai magyar nyugdíjpolitika leglátványosabb, de ugyanakkor legveszélyesebb intézkedését modellezi. Erőltetett járulékkulcs-csökkentés, a régi és új nyugdíjak közti egyenlőtlenségek drámai növelése. Egyelőre (2018. őszén) az elemzés csak pusztába kiáltott szó.

13. A jelzáloghitel elemi modelljei c. fejezetnek különösen hosszú (de számomra fontos) előtörténete van. 1978-ban belgiumi ösztöndíjasként hallgattam Franco Modigliani zseniális előadását a kettős indexálású jelzáloghitelekről. Igazi sztárközgazdászként erős felütéssel kezdte az előadását: „Az infláció társadalmi költségét akkor értettem meg igazán, amikor pár éve a fiam megházasodott.” A naiv olvasó azt hihetné, hogy a később Nobel-díjjal is kitüntetett közgazdász arra célzott, hogy felmentek az árak, és a család nem tudta kifizetni az esküvőt. Ez azonban tévedés, hiszen az árakkal együtt a bérek is emelkedtek. Az igazi ok: a gyors inflációt figyelmen kívül hagyva, a jelzáloghitelek nominálisan rögzített törlesztő részletei kifizethetetlenné váltak. Nálunk akkor még se infláció, se emelkedő kamatláb nem volt, csak mindent elárasztó hiány és fenntarthatatlan külső eladósodás. A tréfás bevezetés miatt mégis megjegyeztem a módszert!

1990 körül az infláció és a kamatláb már hazánkban is vágtatott, de a széltől is óvott hazai jelzálogadós még mindig 3%-os kamatot fizetett tartozása után. Ekkor jutott eszembe Modigliani fiának az esküvője, és az OTP-nek felajánlottam szolgálataim a kettős indexálású jelzáloghitellel – sikertelenül. +rtam azonban egy cikket a kérdésről, amely mintegy bevezetett a nyugdíjgazdaságtanba is (hiszen mindkét esetben hosszú távú és inflációtól megzavart folyamatokról van szó).

2004 és 2008 között hazánkban elszabadult a devizaalapú jelzáloghitelezés: először rossz pénzért (forint) jó pénzt (svájci frank) adtak a hitelezők, de aztán többszörösen visszavették az átmeneti ajándékot. Minden csoda három napig, bocsánat, pár évig tart, majd jött az összeomlás. 2008 és 2015 között a svájci frank nominális árfolyama 140-

ről 250-re (pár hónapig 300 forint fölé) ugrott. Egész idő alatt a tudatalattimban lapult a Modigliani-modell, és csak Király Júlia (az MNB egykori alelnöke) 2013-as KTI-s szemináriumi előadása csalta elő a mélyből. Az előadás után hazamentem, elkezdtem írni a közös cikk első változatát, amely évekkel később meg is jelent.

14. Az általános egyensúlyelmélet legegyszerűbb modellje c. fejezetben a matematikailag nagyon bonyolult modell lényegét megpróbáltam középiskolás szinten megfogalmazni. A lényeg: megfelelő feltevések mellett a piac a lehető legjobban elosztja a cserére felajánlott termékeket. Számomra az mutatja Kenneth Arrow Nobel-díjas közgazdász páratlan nagyságát, hogy miután 1954-ben Gerard Debreu-vel (szintén Nobel díjas) bebizonyította a klasszikus piaci egyensúly létezését és optimalitását, 1963-ban az amerikai egészségügy példáján megmutatta, hogy milyen bajt okoz a biztosítás önkéntessége.

15. Az Együtt élő nemzedékek modellje c. fejezet Paul Samuelson (a 20. század II. felének meghatározó közgazdászának) 1958-ból származó zseniális modelljét egyszerűsíti le. (Szerzője hírneve ellenére a nevezett modellt csak lassan ismerték el, de már évtizedek óta az egyik legfontosabb alapmodell.) Azáltal, hogy a szokással ellentétben nem tetszőleges vagy logaritmikus hasznosságfüggvényt, hanem a 6.2. példa Leontief-féle hasznosságfüggvényét tételezünk fel, most a dinamika végletesen leegyszerűsödik. A racionális várakozások felváltása a sokkal reálisabb naiv várakozásokkal régi szokásom: már a korábbi Modigliani-féle jelzáloghitelről szóló tanulmányomban (sőt, előtte is) a gyakorlati bankárokat követve is alkalmaztam: [(13.16R)] helyett naiv várakozásokkal számoltam [(13.16N)].

Augusztinovics Mária hatására nekiveselkedtem, hogy a kétidőszakos modellt általánosabb hasznosságfüggvény mellett n-időszakosra általánosítsam. A feladatot Molnár Györggyel együtt megoldottuk (Molnár–Simonovits, 1996), de a várt hatás elmaradt: a kétidőszakos modell túl kényelmes volt ahhoz, hogy lemondjanak róla.

16. A valószínűség-számítási bevezetés megírása nagy kihívás volt, mert a fej-vagy-írás feladattól kellett pár oldalon eljutni a nagy számok gyenge törvényéig. A kontraszelekciós irodalom érdekeltségi feltételes tárgyalását Eső Pétertől (egykor Rajk László Szakkollégium, most Oxford Egyetem) tanultam, amikor 2002-ben a rugalmas korhatár mechanizmustervezését tanulmányoztuk (Eső– Simonovits, 2003, lásd még Simonovits–Tóth, 2007 és a jegyzet 10.1. feladata).

17. Még nagyobb kihívás volt a matematikai statisztikai bevezetés, mert korábban alig alkalmaztam matematikai statisztikát. De a legkisebb négyzetek módszere a parabola minimumhelyének meghatározására vezethető vissza és a Berkson-paradoxon sem olyan bonyolult. Egy véletlen találkozás során Rudas Tamás egy liftben magyarázta el nekem e paradoxon hátterét, miután saját magam egy konkrét területen már korábban felfedeztem. Elméleti modelljeimben éveken keresztül számoltan a „szolgálati idő = nyugdíjba vonulási kor – munkába lépési kor" képlettel, amikor egy empirikus munka (Czeglédi–Simonovits–Szabó–Tir, 2016) rá nem döbbentett e feltevés irrealitására.

Azzal a reménnyel indítottam útjára a jegyzetet, hogy lesznek, akik élvezettel és haszonnal forgatják. A könyv végére érve az Olvasó eldöntheti, hogy teljesült-e a reményem vagy sem.

Feladatmegoldások

2.1. feladat. Valóban, (2.3)-at behelyettesítve (2.4)-be:

$$x_t = A^t x_0 + \frac{1-A^t}{1-A}B.$$

Összevetve (2.2)-vel, adódik a jól ismert képlet.

2.2. feladat. +rjuk föl az egyenletet $t+1$-re, $x_{t+2} = x_{t+1} - x_t$, majd helyettesítsük be $x_{t+1} = x_t - x_{t-1}$-t: $x_{t+2} = -x_{t-1}$ stb.

3.1. feladat. Ha a kapus ugyanarra vetődik, mint amerre a lövő a büntetőt rúgja, akkor kivédi a lövést; ellenkező esetben nem.

3.2. feladat. Lásd 3.3. feladat megoldását.

3.3. feladat. *a)* A (H, H) pár nem egyensúly, mert hozama pl. az 1. számára –3, s ha egyoldalúan eltér tőle, azaz K-t választja, akkor hozama 0-ra növekszik. A (K, K) pár sem egyensúly, mert hozama pl. az 1. számára 1, s ha egyoldalúan eltér tőle, azaz H-t választja, akkor hozama 2- re növekszik. Viszont a (H, K) és a (K, H) pár mindegyike Nash-egyensúly. Pl. ha (K, H)-tól az 1. játékos eltérne, akkor hozama 0-ról –3-ra csökkenne; ha a 2. játékos térne el, akkor pedig annak hozama 2-ről 1-re esne. *b)* Tegyük föl, hogy az 1. a Hajt stratégiát ξ, a Kitér stratégiát $1-\xi$ valószínűséggel választja; a 2. pedig η, ill. $1-\eta$ valószínűséggel. Ekkor az 1. játékos hasznosságfüggvénye

$$u_1(\xi,\eta) = \xi\eta\cdot(-3) + \xi(1-\eta)\cdot 2 + (1-\xi)\eta\cdot 0 + (1-\xi)(1-\eta)\cdot 1 = \xi(1-4\eta) - \eta + 1.$$

Ha $\eta^* < 1/4$, akkor $\xi^* = 1$ az optimum; ha $\eta^* > 1/4$, akkor $\xi^* = 0$ az optimum – de ezeket már korábban kizártuk. Megmarad $\eta^* = 1/4$, ahol a haszon 0. Szimmetria miatt $\xi^* = 1/4$.

c) Csak akkor lesz a játék halálos, ha mindkét játékos egymástól függetlenül H-t játszik, ennek valószínűsége $\xi^*\eta^* = 1/16$. Az életben maradásé tehát 15/16.

d) $u_1(H,K) = 2$, $u_1(K,H) = 0$ és $16u_1(\xi^*,\eta^*) = -3 + 3\cdot 2 + 0 + 3\cdot 3\cdot 1$, azaz $u_1(\xi^*,\eta^*) = 12/16 = 3/4$.

3.4. feladat. Triviális. A kevert stratégia $(1/3, 2/3)$, vö. 3.3. feladat.

4.1. feladat. Az egyensúly változatlan.

Behelyettesítve $S(P_t) = a + bP_t$ és $D(p_t) = c - dP_t$ egyenletet az árigazodási egyenletbe és rendezve:

$$P_{t+1} = P_t + \kappa[c - a - (b + d)P_t] = \kappa[c - a] + [1 - \kappa(b + d)]P_t.$$

A 2.1. tétel szerint a folyamat aszimptotikusan stabil, ha

$$-1 < [1 - \kappa(b + d)] < 1, \qquad \text{azaz} \qquad 0 < \kappa < \frac{2}{b + d}.$$

5.1. feladat. Legyen p a hűtő ára, akkor a kritikus vevő jövedelme $p = a + bw_p$, azaz $w_p = (p - a)/b$, $p > a$. Behelyettesítve w_p-t

$$F(w) = \frac{w - w_\mathrm{m}}{1 - w_\mathrm{m}}$$

egyenletbe, adódik

$$D(p) = 1 - \frac{(p - a)/b + w_\mathrm{m}}{1 - w_\mathrm{m}}.$$

5.2. feladat. A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget alkalmazva a $p_i x_i$ számokra:

$$(p_1 x_1)^{1/n} \cdots (p_n x_n)^{1/n} \leq \frac{p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n}{n} = \frac{1}{n}.$$

A bal oldalon $p_1^{1/n} \cdots p_n^{1/n}$ kiemelhető. A bal oldal maximuma a tényezők egyenlősége esetén valósul meg: $p_1 x_1 = \cdots = p_n x_n = 1/n$, azaz

$$x_1^\mathrm{o} = \frac{1}{p_1 n}, \qquad \ldots, \qquad x_n^\mathrm{o} = \frac{1}{p_n n}.$$

5.3. feladat. Behelyettesítéssel.

6.1. feladat. Helyettesítsük be (6.3)-ba (6.2)-t.

6.2. feladat. Itt nincs helyettesítés K és L között: $K(Q) = Q/a$ és $L(Q) = Q/b$, azaz

$$C(Q) = rK(Q) + wL(Q) = \left(\frac{r}{a} + \frac{w}{b}\right) Q.$$

6.3. feladat. Ekkor $K = Q^3/L^2$, azaz $c(L) = rQ^3/L^2 + wL$. A számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenség alkalmazhatóságához két egyenlő tagra kell bontani a lineáris részt:

$$\frac{rQ^3}{L^2} + \frac{wL}{2} + \frac{wL}{2} \geq 3Q\sqrt[3]{rw^2/4},$$

és két oldal egyenlősége éppen az első két tag egyenlősége esetén valósul meg:

$$\frac{rQ^3}{L^2} = \frac{wL}{2},$$

azaz igaz a feladat 1. állítása. A 2. állítást helyettesítéssel nyerjük:

$$K(Q,L) = Q^3 L^{-2} = Q\sqrt[3]{\frac{w^2}{4r^2}}.$$

6.4. feladat. +rjuk be (6.18)-ba a két költségegyütthatót:

$$Q_1(Q_2) = \frac{[a - c_1 - bQ_2]}{2b} \qquad \text{és} \qquad Q_2(Q_1) = \frac{[a - c_2 - bQ_1]}{2b}.$$

Eltávolítjuk a nevezőket:

$$2bQ_1 = a - c_1 - bQ_2 \qquad \text{és} \qquad 2bQ_2 = a - c_2 - bQ_1.$$

2-vel beszorozva az 1, egyenletet és abba behelyettesítve a 2.-at:

$$4bQ_1 = 2a - 2c_1 - 2bQ_2 = 2a - 2c_1 - (a - c_2 - bQ_1).$$

Rendezve

$$Q_1^* = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b} \qquad \text{és} \qquad Q_2^* = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3b}$$

Látható, hogy ha $c_1 > c_2$, akkor $Q_1^* < Q_2^*$.

6.5. feladat. (6.17) homogenizált alakja,

$$\hat{Q}_{1,t+1} = \frac{-\hat{Q}_{2,t}}{2} \qquad \text{és} \qquad \hat{Q}_{2,t} = \frac{-\hat{Q}_{1,t-1}}{2}$$

alapján

$$\hat{Q}_{1,t+1} = \frac{\hat{Q}_{1,t-1}}{4},$$

s ez egy 0-hoz tartó mértani sorozat $t = 0, 2, 4, \ldots$- ra.

6.6. feladat. Vegyük a (6.19′) differenciaegyenlet- rendszer homogén részét és felhasználva, hogy $\sum_{i=1}^{n} Q_{-i,t} = (n-1)Q_t$, összegezzük az n darab egyenletet:

$$\hat{Q}_{t+1} = \frac{-(n-1)\hat{Q}_t}{2}, \quad t = 1, 2, \ldots.$$

Már $n = 3$ esetén is 2-ciklust kapunk: $\hat{Q}_{t+1} = -\hat{Q}_t$. További vizsgálat tárgya, hogy miképp viselkednek az egyes vállalatok kibocsátásai; $n > 3$-nál divergálnak.

7.1. feladat. Egyszerű számolással igazolható, hogy a (7.8) jobb oldalán álló $f(x)$ függvény fix pontja $\sqrt{2}$:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right), \qquad \text{azaz} \qquad x^2 = 2.$$

Továbbá az $f(x)$ függvény $x > \sqrt{2}$ esetén növekvő:

$$x + \frac{2}{x} > y + \frac{2}{y}, \qquad \text{ha} \qquad x > y > \sqrt{2}.$$

Rendezve:

$$x^2y + 2y > xy^2 + 2x, \qquad \text{azaz} \qquad xy(x-y) > 2(x-y).$$

$x > y > \sqrt{2}$ miatt ez igaz, tehát $\sqrt{2} < x_{t+1} < x_t$ stb.

7.2. feladat. 2-ciklus: Szimmetria miatt feltehető, hogy $x_1 < 1/2 < x_2$. Definíció szerint $x_2 = 2x_1$ és $x_1 = 2 - 2x_2$. Behelyettesítve x_2-t x_1-be: $x_1 = 2 - 4x_1$, rendezve: $x_1 = 2/5$ és $x_2 = 4/5$.

8.1. feladat. *a)* $w_m = 0$ esetén a (8.10) képlet (8.5)-re egyszerűsödik.

b) Egyszerű átalakítással

$$t^* = 1 - \frac{1}{2 - w_m},$$

amely a minimálbérnek nyilvánvalóan csökkenő függvénye.

8.2. feladat. *a)* Egyszerű számolással (8.14) szerint

$$W(t) = 2(f_{\mathrm{m}}c_{\mathrm{m}} + f_{\mathrm{M}}c_{\mathrm{M}}) - \mu(f_{\mathrm{m}}w_{\mathrm{m}}^{-1}e_{\mathrm{m}}^2 + f_{\mathrm{M}}w_{\mathrm{M}}^{-1}e_{\mathrm{M}}^2).$$

Az újraelosztás miatt $f_m c_m + f_{\mathrm{M}}c_{\mathrm{M}} = f_m w_m + f_{\mathrm{M}}w_{\mathrm{M}} = 1$, és emiatt bármilyen $t > 0$ esetén $W(t) < W(0)$.

b) Ha $U(c,e)$ az 1. változóban is szigorúan konkáv függvény lenne, például $U(c,e) = \log c - \mu e^2$, akkor a módosításban is $\theta^* > 0$ állna.

9.1. feladat. Már beláttuk, hogy a ν növekedési együttható másodfokú egyenletünk nagyobbik gyöke:

$$\nu(\chi) = \frac{\chi + \sqrt{\chi^2 + 4(\varphi - \chi)}}{2}.$$

A $\nu(\chi)$ deriválásával közvetlenül belátható lenne állításunk, de elemi meggondolás is segít. Vegyünk egy csökkenő stabil népességet. Ebben a modellben a korosztályok létszáma időben monoton csökken. A fiatal szülők létszáma kisebb, mint az időseké, tehát súlyuk csökkenése lassítja a népességszám csökkenési ütemét.

10.1. feladat. *a)* (10.13′) értelmében

$$z^{\mathrm{N}}(D,R) = \tau u R - \frac{\tau u R}{\mathbf{E}D - R}(D - R) = \tau u \frac{\mathbf{E}D - D}{\mathbf{E}D - R} = b(R)(\mathbf{E}D - D).$$

b) Definíció szerint

$$\mathbf{E}z^{\mathrm{N}} = f_1 b(R_1)(\mathbf{E}D - D_1) + f_2 b(R_2)(\mathbf{E}D - D_2).$$

Nyilvánvaló, hogy

$$b^{\mathrm{N}}(R_1) < b^{\mathrm{N}}(R_2) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{E}D - D_2 < 0 < \mathbf{E}D - D_1,$$

ezért $\mathbf{E}z^{\mathrm{N}}$ első tagját felülbecsüljük, ha $b^{\mathrm{N}}(R_1)$ helyett $b^{\mathrm{N}}(R_2)$-t írunk, és azt kiemeljük:

$$\mathbf{E}z^{\mathrm{N}} < b^{\mathrm{N}}(R_2)[f_1(\mathbf{E}D - D_1) + f_2(\mathbf{E}D - D_2)].$$

A várható érték definíciója szerint a [ ]-ben 0 áll, tehát $\mathbf{E}z^{\mathrm{N}} < 0$.

10.2. feladat. *a)* Behelyettesítve (10.14A)-t (10.13)-be, az új egyenleg

$$z^{\mathrm{A}}(u,R) = b^{\mathrm{N}}(1,R)u[e - \gamma e(u)].$$

Várható értéket veszünk és 0-val egyenlővé tesszük az eredményt:

$$0 = \mathbf{E}z^{\mathrm{A}}(u,R) = b^{\mathrm{N}}(1,R)\mathbf{E}\{u[e - \gamma e(u)]\},$$

innen (10.16A).

Figyeljük meg, hogy $e(u)$ növekszik, és a Csebisev- összegegyenlőtlenség miatt $\mathbf{E}[ue(u)] > e$, azaz $\gamma^{\mathrm{A}} < 1$.

b) $\gamma^{\mathrm{A}} = 0{,}975$ – elhanyagolhatóan kicsi korrekció – valószínűleg a valóságban nagyobb az élettartamok szóródása.

10.3. feladat. A maximalizáláskor az 500-as oszlopból veszek ki 1-et, ... és a 20000-es oszlopból 6-ot. (A minimalizáláskor fordítva.)

11.1. feladat. $\rho = 2/3$, $\beta = 2$, (11.5) szerint $\theta^{\mathrm{o}} = 1/6 = s^{\mathrm{o}}$, $\bar{\tau} = 1/3$ és $1/6 + 1/6 = 1/3$.

11.3. feladat. (11.17) szerint $\nu_1 = f_H(1+\alpha)(1+\beta)$, azaz (11.16) szerint

$$s_H^{\mathrm{o}} = \frac{f_H\chi}{\nu_1} \qquad \text{és} \qquad s_L^{\mathrm{o}} = \frac{f_H\chi}{\nu_1}.$$

12.3. feladat.

$$B_t = \sum_{k=0}^{T-1} b_{k,t} = \beta v_t g^{-1} + \sum_{k=1}^{T-1} \beta v_t g^{-k-1} g^{(\iota-1)k}.$$

Alkalmazva a mértani sorozat összegképletét:

$$B_t = \beta v_t g^{-1} \frac{1 - g^{(\iota-1)T}}{1 - g^(\iota - 1}, \qquad \iota < 1.$$

12.4. feladat. A 12.3. feladat alapján könnyen elkészíthető a

12.7. táblázat.

A helyettesítési arány függése a bérnövekedés ütemétől: ár–bér-indexálás

Reálbér-növekedési ütem $100(g-1)$	0	1	2	3	4	5
Átlagos helyettesítési arány γ	0,800	0,763	0,729	0,698	0,668	0,641

13.1. feladat. Vezessük be az $S_T = R^{-1} + \cdots + R^{-T}$ jelölést. Ekkor a feladat állítása (13.3) szerint

$$\frac{T}{S_T} < \frac{T+1}{S_{T+1}}.$$

Felhasználva, hogy $S_{T+1} = S_T + R^{-T-1}$ és eltüntetve a nevezőket:

$$TS_T + TR^{-T-1} < (T+1)S_T \qquad \text{azaz} \qquad TR^{-T-1} < S_T.$$

Tagonkénti összehasonlítással igaz az utolsó egyenlőtlenség, ezért megfordítva az ekvivalens átalakításokat, igazoltuk a feladat állítását.

13.2. feladat. *a)* Az egyszerűség kedvéért csak $D_1 < D_0$-t igazoljuk. (13.3) értelmében $B(\infty) < B(T)$, és (13.1)-et felhasználva, adódik

$$D_1 = RD_0 - B(T) < RD_0 - B(\infty) = D_0.$$

b) (13.9) értelmében a kettős indexálású hitelnél $B(\infty) < b(T)$ pontosan akkor teljesül, ha

$$(pr-1)D_0 < \frac{(r-1)D_0}{1-r^{-T}}$$

áll. Rendezéssel adódik a 13.2b) feladat feltétele.

14.1. feladat. *a)* Az optimális elosztások a tökéletes helyettesíthetetlenség miatt $2x_1 = y_1$ és $x_2 = 2y_2$. Az optimalitási feltételekbe behelyettesítve az $x_1 + x_2 = 100$ és $y_1 + y_2 = 100$ mérlegfeltételeket, adódik

$$100 - x_1 = 2(100 - y_1) = 2(100 - 2x_1),$$

azaz

$$x_1^o = \frac{100}{3}, \quad y_1^o = \frac{200}{3}, \quad x_2^o = \frac{200}{3}, \quad y_2^o = \frac{100}{3}.$$

b) Az 1. egyént még nem éri veszteség, ha lemond annyi 1. termékről, hogy 25 egység maradjon. A 2. egyént még nem éri veszteség, ha lemond annyi 2. termékről, hogy 25 egység maradjon. E két szélsőség közt helyezkednek el a Pareto-optimumok:

$$x_1^o \ge 25, \quad y_1^o \ge 50, \quad x_2^o \ge 50, \quad y_2^o \ge 25.$$

c) Mivel egyik egyén sem képes helyettesíteni a két terméket, az optimális csere egyértelmű.

14.2. feladat. *a)*

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 1 \qquad \text{és} \qquad w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1. \tag{14.1n}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \qquad \text{és} \qquad y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1. \tag{14.2n}$$

(14.3)–(14.5) változatlan, csak k 2 helyett n-ig fut.

$$p^* = \frac{w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2 + \cdots + w_n\alpha_n}{1 - v_1\alpha_1 - v_2\alpha_2 - \cdots - v_n\alpha_n}. \tag{14.6}$$

b) Betűhiány miatt a fogyasztók mellett a termékeket is indexeljük. Legyen $p_1, \ldots, p_m$ az $i = 1, \ldots, m$-edik termék ára, $v_{i,k}$ a k-adik fogyasztó kezdő készlete, és $x_{i,k}$ a végső fogyasztása.

$$v_{1,k} + v_{2,k} + \cdots + v_{m,k} = 1, \qquad k = 1, 2. \tag{14.1m}$$

$$x_{1,k} + x_{2,k} + \cdots + x_{m,k} = 1, \qquad k = 1, 2. \tag{14.2m}$$

$$p_1 x_{1,k} + \cdots + p_m x_{m,k} = p_1 v_{1,k} + \cdots + p_m v_{m,k}, \qquad k = 1, 2. \tag{14.3m}$$

$$u_k(x_{1,k}, \ldots, x_{m,k}) = \alpha_{1,k} \log x_{1,k} + \cdots + \alpha_{m,k} \log x_{m,k} \to \max., \quad k = 1, 2. \tag{14.4m}$$

ahol $\alpha_{i,k}$ ($0 < \alpha_{i,k} < 1$) mutatja az i- edik termék relatív fontosságát a k-adik fogyasztó számára: $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i,k} = 1$. Viszonylag könnyen belátható, hogy m termék esetére a parametrikus optimum

$$x_{i,k}(p_1, \ldots, p_m) = \frac{\alpha_{1,k} p_1 v_{1,k} + \cdots + \alpha_{m,k} p_m v_{m,k}}{p_i}, \qquad i = 1, \ldots, m, \qquad k = 1, 2. \tag{14.5m}$$

Behelyettesítve (14.5m)-et (14.1m)-be:

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\alpha_{1,k} p_1 v_{1,k} + \cdots + \alpha_{m,k} p_m v_{m,k}}{p_i} = 1, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Rendezve

$$p_i = [\alpha_{1,1} v_{1,1} + \alpha_{1,2} v_{1,2}] p_1 + \cdots + [\alpha_{m,1} v_{m,1} + \alpha_{m,2} v_{m,2}] p_m, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Most egy m darab m-ismeretlenes egyenletrendszert kellene megoldanunk, és pozitív árakat kellene kapnunk, s ez magasabb matematikát igényelne.

15.1. feladat. Táblázatos alakban

15.1. táblázat. *Kamategyüttható-dinamika – racionális várakozás*

	K a m a t t é n y e z ő	
Időszakok t	alsó $\rho(1)$	felső $\rho(2)$
0	1,000	3,000
1	3,000	1,667
2	1,667	2,200
3	2,200	1,909
4	1,909	2,048
5	2,048	1,977
6	1,977	2,012
7	2,012	1,994
8	1,994	2,003
9	2,003	1,999

15.2. feladat. Táblázatos alakban

15.2. táblázat. *Kamategyüttható- dinamika – naiv várakozás*

	Kamattényező	
Időszakok	alsó	felső
t	$\rho(1)$	$\rho(2)$
–1	1,000	3,000
0	1,562	2,372
1	1,818	2,145
2	1,926	2,057
3	1,970	2,023
4	1,988	2,009
5	1,995	2,004
6	1,998	2,001
7	1,999	2,001
8	2,000	2,000

Megjegyzés. $\nu = 2$

15.3. feladat. Táblázatos alakban

15.3. táblázat. *Kamategyüttható-dinamika – naiv várakozás*

	Kamattényező	
Időszakok	alsó	felső
t	$\rho(1)$	$\rho(2)$
–1	1,000	0,333
0	0,618	0,457
1	0,529	0,489
2	0,507	0,497
3	0,502	0,499
4	0,500	0,500

Megjegyzés. $\nu = 0{,}5$

16.1. feladat. Elvégezve a négyzetre emelést (16.4′)-ban:

$$\mathbf{D}^2 X = \sum_{i=1}^{n} p_i [x_i^2 - 2x_i \mathbf{E}X + (\mathbf{E}X)^2] = \mathbf{E}X^2 - 2\mathbf{E}X\mathbf{E}X + (\mathbf{E}X)^2.$$

Összevonással adódik (16.4″).

16.2. feladat. A 16.3. tétel szerint teljes indukcióval $\mathbf{E}S_n = n\mathbf{E}X_1 = np$. A 16.4. tétel szerint $\mathbf{D}^2 S_n = n\mathbf{D}^2 X_1 = npq$.

16.3. feladat. *a)* Vegyük figyelembe az $y_t = 1 - x_t$ korlátozást. Ekkor elegendő az 1. állapot valószínűségváltozását vizsgálni!

$$x_{t+1} = ax_t + (1-b)(1-x_t) = (a-1+b)x_t + 1 - b.$$

Stacionárius esetben

$$x^* = (a-1+b)x^* + 1 - b,$$

azaz

$$x^* = \frac{1-b}{2-a-b} \qquad \text{és} \qquad y^* = 1 - x^* = \frac{1-a}{2-a-b}.$$

b) Vonjuk ki az első egyenletből a másodikat:

$$x_{t+1} - x^* = (a-1+b)(x_t - x^*).$$

Ez nullához tart, mert $|a+b-1| < 1$.

16.4. feladat. Nincs kockázat. Van kockázat, de közömbös.

16.5. feladat. Mert a kár relatív szórása kicsiny.

16.6. feladat. Mivel itt a „nagy” kockázat alkalmanként kisebb, mint máskor a „kis” kockázat, inkább nagyobb és kisebb kockázatról beszélünk.

16.5. táblázat. *A második legjobb megoldás – változó kockázatok*

Kisebb kockázat p_1	Nagyobb kockázat p_2	Optimális önrészesedés s
0,2	0,3	0,341
0,2	0,4	0,384
0,2	0,5	0,409
0,2	0,6	0,429
0,3	0,4	0,330
0,3	0,5	0,381
0,3	0,6	0,412
0,4	0,5	0,326
0,4	0,6	0,384
0,5	0,6	0,329

17.1. feladat. Helyettesítsük be $\hat{Y} = \beta\hat{X}$ egyenletbe az eltérésváltozók definícióját:

$$Y - \mathbf{E}Y = \beta(X - \mathbf{E}X), \qquad \text{azaz} \qquad Y = \mathbf{E}Y - \beta\mathbf{E}X + \beta X.$$

17.2. feladat. Indirekt: $\mathbf{E}F > \alpha + \beta f_1$-ból kivonva $\mathbf{E}F = \alpha + \beta\mathbf{E}F$-t, $0 > \beta(f_1 - \mathbf{E}F)$ – ellentmondás.

17.3. feladat. *a)* Heurisztikusan érvelve: azért negatív a korreláció, mert az (X, Y) síkban ÉNY–DK-i a regressziós egyenes meredeksége.

b) Várható értékek: $\mathbf{E}X = p + 1 - p - q = 1 - q$ és $\mathbf{E}Y = q + 1 - p - q = 1 - p$. Szorzat várható értéke: $\mathbf{E}(XY) = 1 - p - q$.

Szórások binomiális eloszlásra:

$$\mathbf{D}X = \sqrt{q(1-p-q)} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{D}Y = \sqrt{p(1-p-q)}.$$

Korrelációs együttható:

$$r(X,Y) = \frac{\mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)}{\mathbf{D}X\,\mathbf{D}Y} = \frac{1-p-q-(1-q)(1-p)}{\sqrt{q(1-p-q)}\sqrt{p(1-p-q)}}.$$

Rendezve

$$r(X,Y) = \frac{-\sqrt{pq}}{1-p-q}.$$

c) $p = q < 1/2$ esetén

$$r(X,Y) = \frac{-p}{1-2p}.$$

d) $p = 1/4$ esetén

$$r(X,Y) = \frac{-1/4}{1/2} = -\frac{1}{2}.$$

Fogalomtár [első előfordulás alfejezetszámával]

Adó az az összeg, amelyet az állam az állampolgártól meghatározott szabályok szerint évente beszed. [8.1]

Adókulcs az adó mértéke, amely az adóköteles jövedelem függvényében meghatározza az adót. [8.1]

Adómorál egy rejtett paraméter, amelytől függően az állampolgár az adóköteles jövedelme valamekkora részét – ellenőrzés nélkül is – bevallja. [8.2]

Adósság (tartozás) a felvett hitelből a törlesztés után maradó rész. [13.1]

Államadósság az állam adóssága, amely a korábbi állami bevételek és a állami kiadások különbségének kamatos kamattal számított összege. [4.2]

Állapot a dinamikus rendszer időben változó helyzetét írja le. [2.1]

Általános egyensúly olyan helyzet, amikor több áru és több részvevő optimális kereslete és kínálata egyensúlyban van. [14.1]

Általános nyugdíjkorhatár az az életkor, amikor a megfelelő évjárat tagjai levonás nélkül nyugdíjba vonulhatnak. [17.2]

Árindexált nyugdíj évről évre az infláció mértékében emelkedik. [12.2]

Ár- és bérindexált nyugdíj évről évre az infláció és a bérnövekedés átlagos mértékében emelkedik. [12.2]

Árszint (fogyasztói) megmutatja, hogy egy adott évhez képest hányszor több pénzre van szükség a rögzített fogyasztói kosár megvásárlásához. [12.2]

Aszimmetrikus információ esetén az eladó vagy a vevő többet tud magáról, mint a másik. (Például az életjáradékot vevő ismeri ősei tényleges halálozási életkorát, a biztosító nem ismeri.) [16.2]

Autonóm beruházás a beruházásnak a gazdaság helyzetétől független része. [4.3]

Autonóm fogyasztás a fogyasztásnak a gazdaság helyzetétől független része. [4.3]

Bérindexált nyugdíj évről évre az országos átlagbérek mértékében emelkedik. [12.1]

Berkson-paradoxon leírja, hogy két eredetileg független valószínűségi változó a szűré után negatívan vagy pozitívan korreláltá válik. [17.2]

Beruházás a kibocsátás fogyasztás feletti része, amelyet a gazdaságban a termelés eredményéből a tőke bővítésére fordítanak. [4.3]

Beruházási akcelerátor az az állandó, amely a termelés növekedésének függvényében kiegészíti a beruházás autonóm részét. [4.3]

Biztosítás kártérítést fizet a biztosított tárgyat ért kárért. [16.2]

Célfüggvény olyan függvény, amelyet az egyén maximalizálni/minimalizálni próbál. [2.3]

Ciklus – egy teljes visszatérési szakasz alatti pálya. [2.2]

Devizaalapú jelzáloghitelnél a törlesztőrészlet forintértékét egy párhuzamos, elvben devizában fennálló jelzáloghitel törlesztőrészletének egyenértékeként számítják ki. [13.3]

Devizaárfolyam az a szám, amely megmondja, hogy például 1 euróért hány forintot kell fizetni. (2019. január 15-én 1 euró = 321 Ft volt.) Minél nagyobb a szám, annál gyengébb a forint, [13.3]

Differencia-egyenlet olyan egyenlet, amelynek a bal oldalán későbbi idejű változó áll, mint a jobb oldalán. [2.1]

Dinamikus rendszerben a rendszer állapotát egy vagy több korábbi állapot határozza meg. [2.1]

Diszkrét idejű (szakaszos) dinamikus rendszerben az állapot lépésről lépésre változik (ellentéte a folytonos idejű). [2.1]

Dollárárverés olyan árverés, amelyben nemcsak a nyertesnek, de a vesztesnek is ki kell fizetnie az utolsó ajánlatát – irracionális. [3.2]

Domináns stratégia az ellenfél bármely lépése esetén jobb, mint más (ilyen a fogolydilemmában a köpés). [3.1]

Duopólium két termelő versengése a fogyasztókért. [6.3]

Egyensúlyi helyzetben a dinamikus rendszer nyugalomban van. [2.1]

Együtt élő nemzedékek modelljében negyedszázadonként kilép az idős nemzedék, a fiatal idős lesz, és belép egy fiatal nemzedék. [15.1]

Életjáradék egy meghatározott kortól az egyén élete végéig járó, általában értéktartó jövedelemáram. [10.1]

Előrelátó dolgozók optimális mértékben gondoskodnak a jövőjükről. [11.1]

Elsőrendű differenciaegyenlet esetén a jövő állapot csak a jelen állapottól függ. [2.1]

Életciklusmodell úgy írja le a megtakarítást, a fogyasztás és a jövedelem különbségét, hogy figyelembe veszi az életkort. (Tipikusan kisimítja a fogyasztási pályát.) [5.3]

Előrejelezhető egy dinamikus pálya, ha a kezdőérték kismértékű változása csak kis mértékben változtatja meg a pályát. [7.2]

Elsődleges egyenleg az állami költségvetés kamatkiadás nélküli egyenlege. [4.2]

Első legjobb megoldás a megengedettségi feltételek mellett maximalizálja a társadalmi jólétet – teljes információt feltételezve. [16.2]

Érempárosítás nevű 2-személyes, 0-összegű szimmetrikus játékban, ha a két játékos ugyanazt lépi, akkor az 1. játékos nyer, ellenkező esetben a 2. (A Nash-egyensúly 50-50%-os randomizálás.) [3.1]

Érdekeltségi feltétel kiköti, hogy a kormányzat által ajánlott menüből az egyes típusoknak érdemes a nekik szántat kiválasztaniuk. (Például rugalmas nyugdíjkorhatár esetén a hosszabb várható élettartamú dolgozónak nem érdemes rövidebb várható élettartamúnak tettetnie magát, mert annyival kisebb éves nyugdíjat kap, hogy a korábbi nyugdíjba vonulás ellenére is veszít.) [16.2]

Eszmei számla egy olyan felosztó-kirovó nyugdíjrendszer, amelyben az életpálya alatt befizetett járulékok egy eszmei (képzeletbeli) számlán kamatoznak, és az éves nyugdíj az eszmei tőke és a hátralévő várható élettartam hányadosa. [10.2]

Fedezetlen kamatparitás az a helyzet, amikor a hazai pénz leértékelési üteme a kitüntetett devizához (nálunk a svájci frankhoz) képest közelítőleg megegyezik a kamatlábkülönbséggel. (Pontosabb megfogalmazás a megfelelő együtthatók egyenlőségét mondja ki.) [13.3]

Felosztó–kirovó nyugdíjrendszerben minden nemzedék az előző nemzedéknek takarékoskodik (ellentéte a tőkésített rendszer). [10.1]

Fix pont az adott leképezésnél helyben marad. [2.1]

Fizetési mérleg egyenlege az export és az import különbsége. [4.2]

Fogolydilemma lép fel, amikor az önzés a domináns stratégia, de az összefogás lenne a játékosok közös érdeke. [3.1]

Fogyasztás a kibocsátás beruházás fölötti része: élelem, ruha, lakás, stb. [5.1]

Fogyasztási határhajlandóság a fogyasztás változó részének és a jövedelemnek a hányadosa. [4.3]

Független események együttes előfordulási valószínűsége a két esemény valószínűségének szorzata. [16.1]

Függőségi hányados a nyugdíjasok és a dolgozók létszámának a hányadosa (rendszer- vagy időskori). [10.1]

Gyáva nyúl szimmetrikus nem 0-összegű játék: kitérés – lebőgés, hajtás –halál. [3.1]

Hasznosság a fogyasztó számára a fogyasztással szerzett szubjektív öröm. [5.2]

Hasznosságfüggvény a hasznosság függése a fogyasztástól. [5.2]

Határciklus olyan ciklus, amelyre minden közeli állapotból induló pálya rátekeredik. [7.3.]

Helyettesítés a munka és a tőke között, míg a kibocsátás állandó. [6.2]

Helyettesítési arány/hányados az átlagos nyugdíj és az átlagos kereset aránya/hányadosa. [10.1]

Hiperbolikus leszámítolás a hagyományos leszámítolással ellentétben külön leszámítolja az összes jövőbeli fogyasztás hasznosságát. (Például a fogyókúra kezdetét mindig másnapra toljuk.) [5.4]

Hosszmetszeti pálya a folyamatosan idősödő, végül meghaló egyén pályája. [15.2]

Hüvelykujj-szabály egy viszonylag egyszerű válasz egy bonyolult kérdésre. (Például nettó jövedelmed 30%-át költsd élelemre.) [5.2]

Inflációs ráta az éves fogyasztói árszint százalékos emelkedése. [12.2]

Járulék, amit a dolgozó és a munkáltató fizet későbbi nyugdíj és egészségügyi ellátás biztosítására. [10.1]

Járulékkulcs a járulék és a kereset hányadosa. [10.1]

Játék - több személy közti kölcsönhatás, amelyikben minden játékos hasznossága legalább egy másik játékos döntésétől is függ (pl. fogolydilemma). [3.1]

Jelenérték egy többidőszakos törlesztési folyamot értéke, amelynél közömbös, hogy valaki készpénzben fizeti a jelenértéket vagy részletekben törleszt. [13.1]

Jelzáloghitel olyan hitel, amelyet lakásvételkor vesz föl az adós, és a teljes visszafizetésig a maradék adósság fejében a hitelező résztulajdonos marad. [13.1]

Jogosultsági hányad a nyugdíjasok és a nyugdíjaskorúak létszámának az aránya. [10.1]

Jövedelemeloszlás a társadalom teljes jövedelméből az egyes csoportok részesedési aránya. [8.2]

Kereslet a fogyasztó ártól és jövedelemtől függő vételi szándéka. [4.1]

Kamat a hitel után időszakonként (havonta, évente) fizetendő összeg. [4.2]

Kamatláb a kamat és a tartozás hányadosa. [4.2]

Kamategyüttható = 1 + kamatláb. (Éves vagy negyedszázados.) [4.2]

Kaotikus rendszerben sok olyan kezdőérték van, amelyben a pálya előrejelezhetetlen. [7.2]

Kaotikus beruházási ingadozások esetén a beruházások pályája előrejelezhetetlen. [7.3]

Keresztmetszeti pálya adott időben a különféle életkorúak együttese, profilja. [14.1]

Kezdő nyugdíj a nyugdíjazás első évében fizetett nyugdíj. [12.1]

Kifizetési tábla (i, j)-edik cellájában szereplő két szám rendre az 1. és a 2. játékos nyereménye, ha az 1. játékos az s_1^i (tiszta) stratégiát választja, a 2. pedig az s_2^j-t. [3.1]

Kiegyenlítési díj az az összeg, amelyet levonva a véletlen jövedelem időátlagából, a kockázatmentes csökkentett jövedelempálya hasznossága egyenlővé válik az eredeti kockázatos pályáéval. [16.2]

Kínálat a termelő ártól és profittól függő eladási szándéka. [4.1]

Kettős indexálású jelzáloghitelnél nemcsak a kamatláb, de a havi törlesztőrészlet is függ az inflációtól. [13.2]

Kevert stratégia a tiszta stratégiák véletlen sorsolásra bízott kiválasztása. [3.1]

Kontrakciós (zsugorító) leképezésben a képpontok távolsága kisebb, mint a tárgypontoké. [7.1]

Kontraszelekció olyan folyamat, amelyben az önkéntes biztosítás díjszabásának egyetemessége megnöveli a nagyobb kockázatúak részvételét a rendszerben (például csak a hosszabb életűek vesznek életjáradékot). [16.2]

Korrelációs együttható két valószínűségi változó lineáris együttmozgásának mértéke, –1 (ellentétes mozgás) és +1 (azonos irányú mozgás) közé esik. [17.1]

Költség a termeléssel járó bér- és tőkeköltség összege. [6.2]

Költségvetési feltétel azt mondja ki, hogy az egyén kiadásai egyenlők a jövedelmével. [5.2]

Költségvetési egyenleg az állam bevételeinek és kiadásainak a különbsége. [4.2]

Kötelező nyugdíjrendszerben a dolgozók rendszeresen járulékot fizetnek, s cserében időskorukban nyugdíjat – általában uniszex életjáradékot – kapnak. [10.1]

Közjavakat úgy fogyaszthatják az egyének, hogy mások fogyasztási lehetősége nem csökken (például rádióműsor hallgatása). [14.2]

Különadó egy képzeletbeli adó, amelyet a kormányzat vet ki a lakosságra, hogy az önkéntes nyugdíjrendszer támogatását fedezze. [11.1]

Külső adósság az ország éves fizetési mérleghiányainak kamatozott összege. [4.2]

Külső (externális) hatás nem tükröződik a piaci árban. (Például amikor a levegőt szennyező vaskohó nem fizet kártérítést a környék lakóinak a levegőszennyezésért.) [14.2]

Leértékelődési ütem: a hazai valuta egy év alatt százalékos leértékelődése egy külföldi kulcsvalutához képest. [13.3]

Legjobb válasz: a 2. játékos stratégiájára maximalizálja az 1. játékos nyereményét. (Ha mindkét játékos stratégiája legjobb válasz a másikéra, akkor Nash- egyensúlyban vagyunk.) [3.1]

Legkisebb négyzetek módszere meghatározza a regressziós egyenest. [17.1]

Leontief-féle hasznosságfüggvény: a hasznosság a két fogyasztás közül a kisebbikkel egyenlő. (Például 2 balkezes és 1 jobbkezes kesztyű = 1 pár kesztyű.) [5.2]

Leszámítolási együttható egy 0 és 1 közötti szám, amely megmutatja, hogy a jövőbeli fogyasztás hasznossága hányszorosa az azonos jelenbeli fogyasztás hasznosságának. [5.3]

Makroökonómia a gazdaság működését nagy vonalakban, a részletek mellőzésével vizsgálja. [1.2]

Már megállapított nyugdíj a nyugdíjazás első éve után fizetett nyugdíj. [12.1]

Második legjobb megoldás a megengedettségi és az érdekeltségi feltételek mellett maximalizálja a társadalmi jólétet – aszimmetrikus információt feltételezve. [16.2]

Másodrendű differenciaegyenlet esetén a jövő állapot csak a jelen és az előző állapottól függ. [2.2]

Medián a csökkenő sorba rendezett minta középső értéke. Például a béreloszlás mediánja kisebb, mint az átlaga, s ezért jobban jellemzi a közép jövedelmét. [8.3]

Megfigyelhető halmazokat a megfigyelő látja: például két egyforma érme együttes feldobása esetén FI és IF nem különböztethető meg. [16.1]

Megfigyelhető halmazok ún. algebrája az a halmazcsalád, amelyben bármely két megfigyelhető halmaz együttese és metszete is megfigyelhető. [16.1]

Mikroökonómia a gazdaság működését részletekbe menően vizsgálja. [1.2]

Minimális nyugdíjkorhatár az az életkor, amelynek elérése előtt a megfelelő évjárat tagja csak rokkant nyugdíjat választhat, ha jogosult rá. [10.2]

Morális kockázat, amikor a biztosítás miatt megnő a kárvalószínűség. [16.2]

Nagy számok törvényei különféle feltevések mellett azt jósolják, hogy ha egy kísérletet nagyon sokszor függetlenül megismétlünk, akkor a bekövetkezés gyakorisága az elméleti valószínűséghez tart. [16.1]

Naiv várakozás esetén az előrejelzés az előző időszak tényleges értékével egyezik. [14.2]

Nash-egyensúly olyan stratégiakombináció, amelytől egyik játékosnak sem érdemes egyoldalúan eltérnie (pl. nemek harca). [3.1]

n-edrendű binomiális eloszlás a kétesélyes eloszlás n-szeres független megismétlésénél keletkezik. [16.1]

Nemek harcában két Nash-egyensúly létezik, és nehéz köztük választani. [3.1]

Nők40 egy olyan nyugdíjszabály, amely minden magyar nőnek, akinek a jogosultsági éveinek a száma legalább 40, csökkentés nélkül korhatár alatt nyugdíjba vonulhat. [17.2]

Növekedési együttható = 1 + növekedési ütem. [4.2]

Növekedési ütem a változó változása osztva a kiinduló értékkel. [4.2]

Nullaösszegű játékban a játékosok hasznosságfüggvényének összege azonosan 0. (Nagyon megszorító feltevés, bár 0 helyett állandó összeg is állhat: sakkban 1.) [3.1]

Nyugdíj az állam vagy a vállalat által rendszeresen fizetett időskori jövedelem. [10.1]

Nyugdíjba vonulási kor eltérhet az általános és a minimális korhatártól. [10.2]

Nyugdíjindexálás az az eljárás, amely a már megállapított nyugdíjat a következő évben infláció vagy béremelkedés arányában növeli. [10.1]

Oligopólium kevés termelő versengése a fogyasztókért. [6.3]

Optimum az a helyzet, amelyben a lehetséges helyzetek közül a célfüggvény értéke maximális/minimális. [2.3]

Oszcillációnál a változók eltérése az egyensúlyi értéküktől szabályos időközükben előjelet vált. (Csillapítatlan oszcilláció: ciklus.) [2.2]

Önkéntes nyugdíjrendszerben a dolgozók időnként kényszer nélkül tagdíjat fizetnek, s cserében időskorukban egy összegben felvehetik az összegyűlt tőkét vagy nyugdíjat (életjáradékot) kapnak. [11.1]

Önrészesedés a biztosítási kárnak az a része, amely kimarad a kártérítésből. (Csökkenti a morális kockázatot.) [16.2]

Pálya a diszkrét rendszerbeli, egymás utáni állapotok sorozata. [2.1]

Pareto-optimális elosztás esetén nem létezik más megvalósítható elosztás, amely mindenkinek legalább olyan jó, és egy valakinek jobb, mint a P-elosztás. (llyen a piaci elosztás.) [14.1]

Peremeloszlás egy kétváltozós eloszlás sor- vagy oszlopeloszlása. [16.1]

Periódus a ciklus hossza, ennyi idő után ismétlődik a pálya. [2.2]

Piaci árigazodásban az új időszakban az áremelkedés a régi árhoz tartozó túlkereslettel arányos. [4.1]

Profit a bevétel és a költség különbsége. [6.3]

Racionális várakozás esetén a döntéshozó várakozása teljesül (Oidopusz megöli az apját). [14.1]

Ragadozó játék során a külső játékos fenyegető lépésének nem érdemes ellenállni. [3.1]

Regressziós egyenes két valószínűségi változó közti lineáris kapcsolatot a legkisebb hibával határozza meg. [17.1]

Reálárfolyam a nominális deviza-árfolyam és az hazai árszint hányadosa szorozva a külföldi árszinttel. [13.3]

Reálbér a nominális (folyó) bér és az árszint (árindex) hányadosa. [12.1]

Reálváltozó a nominális (folyóáras) változó és az árszint hányadosa. [12.1]

Reálkamatláb közelítőleg a nominális kamatláb és az inflációs ráta különbsége. (Pontosabban: a reálkamatszorzó 0= kamategyüttható/inflációs együttható.) [13.1]

Relatív árszint megadja, hogy mennyit ér egy konvertibilis valutájú ország valutája az átlagos országhoz képest. (Például a forint árszintje alacsony az euróéhoz képest, azaz a vásárlóértéke nagyobb mint a piaci árfolyamon számított.) [17.2]

Relatív megtakarítási hajlandóság az a szám, amellyel az aktív rövidlátó dolgozó zsugorítja mások becsült önkéntes megtakarításait. [11.2]

Relatív hatékonyság az a szám, amellyel beszorozva az alaprendszer jövedelmét, a keletkező jólét egyenlővé válik a vizsgált rendszer jólétével. [8.3]

Részleges biztosítás csak az önrészesedés fölötti részre vonatkozik. (Csökkenti a morális kockázatot, de rontja a biztonságot.) [16.2]

Részvételi hányad a dolgozók aránya a dolgozókorúak között. [10.1]

Rezervációs ár, a fogyasztó csak akkor veszi meg a terméket, ha ára ez alatt van. [5.1]

Rövidlátó dolgozók az optimálisnál kisebb mértékben (esetleg sehogy sem) gondoskodnak a jövőjükről. [11.2]

Sátorleképezés sátoralakú. [7.2]

Sertésciklus egy olyan árigazodási modellben keletkezhet, amelyben a kereslet késés nélkül, a kínálat viszont egy éves késéssel reagál a piaci árra. [4.1]

Skálahozadék megmutatja, hogy ha mind a tőkét, mind a munkát 2-szeresére növelik, hányszorosára nő a kibocsátás. (Állandó, növekvő és csökkenő.) [5.1]

Stabil egyensúlyi helyzet körüli állapotokból induló pályák közel maradnak az egyensúlyhoz, sőt, aszimptotikusan tartanak hozzá (lokálisan és globális, aszimptotikusan stabil). [2.1]

Stabil népesség korosztályi arányai időben állandók. [9.2]

Stacionárius népességben minden korosztály létszáma időben állandó. [9.2]

Standardizált valószínűségi változó az eredetiből a várható érték levonásával és a különbség szórással való osztásával adódik. [16.1]

Statisztika a valószínűség-számítás alkalmazása, amikor a kimenetekből visszafelé megjósoljuk a bemenetek valószínűségét. [17.1]

Stratégia gondosan végiggondolt döntés (gyakran többlépcsős). [3.1]

Származtatott hasznosságfüggvény az eredeti hasznosságfüggvényből a költségvetési feltétel behelyettesítésével adódik. [5.2]

Szimmetrikus játék esetén a két játékos stratégiahalmaza azonos, és a 2. játékos hasznosságfüggvény az 1. játékos hasznosságfüggvényéből a változók felcserélésével adódik. [3.1]

Szintvonal az azonos függvényértékű pontok halmaza. (A térképen például a 900 m magassági szintű pontok a Bükk-fennsík jelentős részét körbezárják. [6.2]

Szórásnégyzet: egy valószínűségi változónak a várható értékétől való különbségét négyzetre emeljük, és ennek a várható értékét vesszük. [16.1]

Termelési függvény a kibocsátást a tőke és a munka mennyiségével, valamint a műszaki fejlődés előrehaladásával határozza meg. [5.1]

Támogatási kulcs az egy forintnyi önkéntes pénztárbeli (és társainak fizetett) tagdíj után a kormányzat által fizetett kiegészítés. [11.1]

Társadalmi jóléti függvény az egyéni hasznosságfüggvények szimmetrikus függvénye, például átlaga. [8.2]

Teljes termékenységi együttható egy népesség nőtagjai által életükben megszült gyerekek száma. [9.2]

Tiszta stratégia a véges játék alapstratégiája, keverésükből születik a kevert stratégia. (Például az érempárosításban F vagy I.) [3.1]

Tőkésített nyugdíjrendszerben minden nemzedék magának takarékoskodik (ellentéte a felosztó–kirovó rendszer). [10.1]

Túlélési valószínűség megadja, hogy mekkora annak a valószínűsége, hogy egy egyén egy adott korcsoportból egy következő korcsoportba kerül. [9.2]

Valószínűség-eloszlás 1-dimenzióban egy olyan számsorozat, amelynek tagjai pozitívak és összegük 1. [16.1]

Valószínűség-számítás elemi események valószínűsége ismeretében összetett események valószínűségét számítja ki. [16.1]

Valószínűségi változó diszkrét esetben adott eloszlás minden eleméhez meghatározott számot rendel (például kockadobás). [16.1]

Változási sebesség az időegységre jutó változás és a változó aránya. [10.2]

Várható érték egy valószínűségi változó súlyozott átlaga. [16.1]

Várható hasznosság a biztosítás nélküli esetben bekövetkező szerencsétlen kimenet (van kár) + szerencsés kimenet (nincs kár) együttes hasznossága, amely eltér az egyéni kimenetek súlyozott átlagától. (Példa: annak ellenére érdemes lehet hetente 1 szelvénnyel lottózni, hogy a szelvény 250 Ft-os árából csak 100 Ft-ra számíthatunk.) [16.2]

Hivatkozások

Czeglédi, T.–Simonovits, A.–Szabó, E.–Tir, M. (2016): „A nyugdíjba vonulási szabályok hatása: nyertesek és vesztesek”, *Közgazdasági Szemle 63*, 473–500.

Eső Péter–Simonovits András (2003): „Optimális járadékfüggvény tervezése rugalmas nyugdíjrendszerre”, *Közgazdasági Szemle 50,* 99–111.

Garay Barnabás–Simonovits András–Tóth János (2012): „Local Interaction in Tax Evasion”, *Economics Letters 115*, 412–415.

Hódi Endre (1964/1998): Szélsőérték-feladatok elemi megoldása, Bp., Typotex.

Király Júlia–Simonovits András (2015): „Jelzáloghitelek forintban és devizában – egyszerű modellek”, *Közgazdasági Szemle 62,* 1–26.

Király Balázs–Simonovits, András (2016): „Megtakarítás és adózás egy önkéntes nyugdíjrendszerben”, *Közgazdasági Szemle 63*, 473–500.

Mérő László (1996): Mindenki másképp egyforma, Bp.

Molnár György–Simonovits, András (1996): „Várakozások, stabilitás és működőképesség az együttélő korosztályok realista modelljében”, *Közgazdasági Szemle 43*, 863– 890. Pólya György –Szegő Gábor (1924/2010): Válogatott feladatok és tételek az analízis köréből, magyarul Bp. Typotex.

Simonovits András (2012): „Szakaszokon értelmezett leképezések fix pontjai”, *KöMaL, 61* 264–273.

Simonovits András (2013): „Három népességdinamika modell,” *KöMaL, 62,* 131–139.

Simonovits András (2014) „A jelzáloghitel legegyszerűbb modelljei” *KöMaL, 64,* 450–457.

Simonovits András (2016): „Egyensúly, ciklus és káosz dinamikus rendszerekben,” *KöMaL, 65*, 258–267.

Simonovits András (2017): „Csebisev algebrai egyenlőtlensége és egy új közgazdasági alkalmazása”, *KöMaL, 67,* 72–75.

Simonovits András (2018): „Adómorál és adózás: két modell”, *KöMaL, 68,* 194–200.

Simonovits András–Tóth János (2007): „Új eredmények az optimális nyugdíjjáradékfüggvény tervezéséről”, *Közgazdasági Szemle 54*, 628–643.