MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont

MTA KRTK KTI

Centre for Economic and Regional Studies
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

MŰHELYTANULMÁNYOK DISCUSSION PAPERS

MT-DP – 2019/7

Játékelmélet és jog

KÓCZY Á. LÁSZLÓ

MTA KÖZGAZDASÁG- ÉS REGIONÁLIS TUDOMÁNYI KUTATÓKÖZPONT
KÖZGAZDASÁG-TUDOMÁNYI INTÉZET - BUDAPEST, 2019

Műhelytanulmányok
MT-DP – 2019/7

MTA Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont
Közgazdaság-tudományi Intézet

Játékelmélet és jog

Szerző:

Kóczy Á. László
tudományos főmunkatárs
Magyar Tudományos Akadémia
Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont
Közgazdaság-tudományi Intézet
és Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Pénzügyek Tanszék
E-mail: koczy.laszlo@krtk.mta.hu

2019. február

Kiadó:
Magyar Tudományos Akadémia Közgazdaság- és Regionális Tudományi Kutatóközpont
Közgazdaság-tudományi Intézet

Játékelmélet és jog

Kóczy Á. László

Összefoglaló

A játékelmélet a konfliktuselemzés svájci bicskája: gyakorlatilag minden stratégiai konfliktusra tud eszközt, modellt mutatni, legyen az két- vagy többszereplős, teljes- vagy hiányos információs és így tovább. Ebben a tanulmányban kifejezetten fiatal jogászok számára gyűjtöttük össze a releváns eszközöket. Mivel egy bevezető jellegű írásról van szó, kerültük a matematikai formalizmusokat, ugyanakkor feltüntettük a továbbolvasáshoz iránymutató hivatkozásokat, különösen ami a magyar nyelvű irodalmat illeti.

Tárgyszavak: játékelmélet, jog, alkalmazások

JEL kódok: C70, K00

Köszönetnyilvánítás:

A szerző köszöni Sziklai Balázs, Lőrincz Viktor és Szele Tamás értékes javaslatait; a talmudi csődjátékról szóló rész Sziklai „Örökösödési játék a Talmudból és annak játékelméleti megoldása” című előadása felhasználásával készült.
A tanulmány alapjául szolgáló kutatást az Emberi Erőforrások Minisztériuma által meghirdetett Felsőoktatási Intézményi Kiválósági Program támogatta, a Budapesti Corvinus Egyetem 'Pénzügyi és Lakossági Szolgáltatások' tématerületi programja (1783-3/2018/FEKUTSTRAT) keretében.

Game theory and law

László Á. Kóczy

Abstract

Game theory is the pocket knife of conflict modelling: it has tools, models for practically all strategic conflicts, be that two- or multiplayer, complete or incomplete information and so on. In this study we have collected relevant tools for young lawyers. Since this is an introductory text we have avoided mathematical formalism, but offered guidance for further reading especially regarding the academic literature in Hungarian.

Keywords: game theory; law; applications

JEL: C70, K00

Játékelmélet és jog[1]

László Á. Kóczy
(Magyar Tudományos Akadémia-Közgazdasági és Regionális Tudományi Kutatóközpont és Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Pénzügyek Tanszék)[2]

0 Összefoglalás

A játékelmélet a konfliktuselemzés svájci bicskája: gyakorlatilag minden stratégiai konfliktusra, legyen az két-, vagy többszereplős, teljes- vagy hiányos információs és így tovább, tud eszközt, modellt mutatni. Ebben a tanulmányban kifejezetten fiatal jogászok számára gyűjtöttük össze a releváns eszközöket. Mivel egy bevezető jellegű írásról van szó, kerültük a matematikai formalizmusokat, ugyanakkor feltüntettük a továbbolvasáshoz iránymutató hivatkozásokat, különösen ami a magyar nyelvű irodalmat illeti.

Kulcsszavak: játékelmélet, jog, alkalmazások

JEL kódok: C70, K00

1 Bevezetés

Az egyik ismert, Nobel-díjas szerző által jegyzett tankönyv (Myerson, 1991) a játékelméletet *konfliktuselemző* módszerként aposztrofálja. A jog szerepe is hasonló: konfliktusokat kezel, illetve segít elkerülni. Konfliktus alatt egyik esetben sem tökéletesen ellenkező érdekek ütközését értjük, pusztán arról van szó, hogy a felek érdekei nem egyeznek meg teljesen.

A játékelmélet a konfliktusok modellezéséhez a matematika nyelvét használja. A jelölések, fogalmak kicsit absztraktak, de a módszerek megértéséhez, alkalmazásához nem szükséges magas szintű matematika. Ebben a fejezetben nem is célunk a játékelmélet átfogó bemutatása, kizárólag a jogban hasznosítható modellek, eszközök bemutatására szorítkozunk. Természetesen nem ez az első írás, mely a két terület kapcsolatát keresi, de a korábbi művek általában csak a nonkooperatív modellekre szorítkoztak (Baird, Gertner, & Picker, 1994), holott sok új alkalmazás a kooperatív játékelméleten alapszik. A korábbi irodalomban nem tárgyalt eszközök válogatása természetesen elfogult: olyan témákat válogattunk, melyekhez a hazai játékelmélet-kutatók is jelentősen hozzájárultak.

A játékelmélet iránt mélyebben érdeklődők számára magyar nyelven (Gibbons, 2005) és (Forgó, Pintér, Simonovits, & Solymosi, 2006) nyújt egymást kiegészítő alapokat; angolul (Peters, 2008) alapos elméleti bevezető; az Elsevier gondozásában folyamatosan megjelenő köteteivel a *Handbook of Game Theory with Economic Applications* kiváló referencia. (Dixit & Nalebuff, 1991; Mérő, 2000) rendkívül szórakoztató példákon történeteken keresztül vezeti be az alapvető fogalmakat.

---

[1] A tanulmány Jakab András, Sebők Miklós és Szalai Ákos (szerk.): Empirikus jogi tanulmányok paradigmái és módszertana. Gyakorlati bevezetés jogászoknak (2019, előkészületben) c. kötetben fog megjelenni.

[2] A szerző köszöni Sziklai Balázs, Lőrincz Viktor és Szele Tamás értékes javaslatait; a talmudi csődjátékról szóló rész Sziklai „Örökösödési játék a Talmudból és annak játékelméleti megoldása” című előadása felhasználásával készült. A tanulmány alapjául szolgáló kutatást az Emberi Erőforrások Minisztériuma által meghirdetett Felsőoktatási Intézményi Kiválósági Program támogatta, a Budapesti Corvinus Egyetem 'Pénzügyi és Lakossági Szolgáltatások' tématerületi programja (1783-3/2018/FEKUTSTRAT) keretében.

2 Kétoldalú konfliktusok

2.1 Egyidejű döntések

Azok a legegyszerűbb konfliktushelyzetek, melyek mindössze két döntéshozó kölcsönhatását vizsgálják, méghozzá feltételezve, hogy döntéseiket egyidejűleg, de legalábbis a másik döntésének ismerete nélkül hozzák. Ebbe az irodalomba tartoznak az olyan, ismert modellek, mint a fogolydilemma, a nemek harca, vagy a szarvasvadászat, melyek a közös döntéshozás bizonyos fonákságaira világítanak rá.

Általában egy konfliktus három fő elemmel írható le: játékosok, szabályok, kifizetések. A *játékosok* a tulajdonképpeni döntéshozók, akik stratégiai döntéseik révén befolyásolhatják a konfliktus alakulását. A *szabályok* meghatározzák, hogy mikor, ki, milyen döntést hozhat, illetve hogy a döntések milyen végeredményhez vezetnek. Végül a játék kimenetele függvényében a játékosok *kifizetéseket* kapnak.

2.2 Típusjátékok

A legegyszerűbb esetben mindössze két játékosunk van, két-két lehetséges, egyidejűleg választott lépéssel. Vegyük a következő példát! A rendőrség egy bűncselekményt vizsgál, de nem rendelkezik közvetlen bizonyítékokkal, ezért az információkat két gyanúsítottól szeretné megkapni – ők a játék játékosai. Az elkövetők érdeke az, hogy ezek az információk ne jussanak a rendőrség kezébe, ezért egy – implicit – megállapodást kötnek. A játékosok ennek megfelelően vagy kooperálnak, azaz betartják ezt a megegyezést, vagy szakítanak, azaz nem. A lehetséges kimeneteleket egy táblázatban foglaljuk össze. A táblázat minden lehetséges stratégia-párra megmutatja kifizetéseiket, az első szám az 1., a második a 2. terhelt kifizetését mutatja: mivel büntetésekről van szó, ezért negatívak a kifizetések. Például, ha az 1. kooperál, akkor a 2. gyanúsítottra nem bizonyítható rá a bűncselekmény, így minimális kényelmetlenséggel, az őrizet után szabadul. Ezzel szemben, ha szakít, tanúvallomása alapján a 2. gyanúsítottat elítélik, hosszabb börtönbüntetést kap, s ennek megfelelően kifizetése negatív. A gyanúsítottak szempontjából az a legrosszabb eset, amikor mindketten szakítanak, hiszen így jut a rendőrség a legtöbb információhoz.

1. \ 2.	kooperál	szakít
kooperál	$\underline{-1}$, $\underline{-1}$	$\underline{-8}$, -2
szakít	-2, $\underline{-8}$	-9, -9

1. táblázat Gyanúsítottak kihallgatása vádalku nélkül.

Könnyű belátni, hogy ilyen büntetési tételek mellett aligha számíthatunk a gyanúsítottak vallomására. Függetlenül a másik játékos döntéseitől, a terhelt jobban jár, ha tagad, azaz *kooperál* és az ehhez a *legjobb válaszhoz* kapcsolódó kifizetést jelzésképpen aláhúzzuk. Ez az eredmény egy sokkal általánosabban felírt játékra is igaz, csak a kifizetések relatív értékétől függ. Ilyenkor a tanúvallomás, azaz a *szakítás* domináló stratégia, domináló stratégiát pedig nem érdemes választani. Így mindkét gyanúsított kooperál. Az elkövetők együttműködése racionális döntés, de egyben a kettőjük számára legkedvezőbb, Pareto-hatékony kimenetel[3]

1. \ 2.	kooperál	szakít
kooperál	-1, -1	-8, $\underline{0}$
szakít	$\underline{0}$, -8	$\underline{-7}$, $\underline{-7}$

2. táblázat Fogolydilemma: a gyanúsítottak kihallgatása vádalkuval

Mindez teljesen megváltozik, ha lehetőség van vádalkura. Ekkor az vallomást tevő terhelt kedvezményt kap a büntetéséből. Ekkor a kedvezmény miatt a *kooperál* válik domináló stratégiává, a gyanú-

[3] Egy eredmény Pareto-hatékony, ha csak más kárára növelhetjük valakinek az eredményét.

sítottak vallomására joggal számíthatunk. A várható viselkedés az, hogy mindkét terhelt szakít, holott a kapott büntetés nem Pareto-hatékony. Ezzel kialakul a fogolydilemmát ismertté tevő konfliktus az elkövetők közösségi és saját érdeke között.

Ez a viselkedés ráadásul előre megjósolható, a játéknak ez az úgynevezett *Nash-egyensúlya* (Nash, 1950, 1951). Ez az egyensúly egy közös viselkedési mintát, úgynevezett stratégaiprofilt takar: az egyes játékosok döntéseit nem vizsgálhatjuk önmagukban, az ilyen helyzetekben nincsen nyerő stratégia, csak a többiek viselkedésére adható legjobb válasz. A játékosok stratégia-profilját akkor nevezzük Nash-egyensúlynak, ha nincs olyan játékos, aki a többiek döntését adottnak véve növelni tudná a kifizetését. A korábbi jelölésünket használva a játék – úgynevezett tiszta – Nash egyensúlyai pontosan azok a stratégiák, melyek egy végig aláhúzgált kifizetéseket eredményeznek.

Ez a fajta konfliktus egyébként az élet számos olyan területén megjelenik, ahol ütköznek a közös és az egyéni érdekek, akár több szereplő esetén is. Míg a fogolydilemmában ezt a konfliktust a társadalom saját előnyére tudja fordítani, sok más esetben mi vagyunk a játékosok és a társadalmilag optimális eredmény válik elérhetetlenné. Példaként említhetjük a környezetszennyezést, ahol a közös érdek a szennyezés csökkentése lenne, de az egyén számára a szennyezés gyakran olcsóbb, kényelmesebb. Az adók befizetése közös érdek, de senki sem szeret adót fizetni. Ilyen esetekben a társadalmilag kívánatos viselkedést a kifizetések megváltoztatásával: jutalmakkal, büntetésekkel lehet elérni.

Már a példából is láthattuk, hogy a játék kimenetele nagyon függ a kifizetésektől, azok egymáshoz való viszonyától. Az alábbiakban röviden áttekintünk pár ismert játéktípust.

1. \ 2.	szarvas	nyúl
szarvas	$\underline{7}$, $\underline{7}$	0, 1
nyúl	1, 0	$\underline{1}$, $\underline{1}$

3. táblázat A szarvasvadászat nevű játék kifizetései

A szarvasvadászat néven ismert játék a „jobb ma egy veréb, mint holnap egy túzok” koordinációs változata. A két (vagy több vadász) kétféle préda közül választhat: nyulat bárki tud fogni, a szarvas elejtéséhez viszont több vadász együttműködése szükséges. Itt két (tiszta) Nash egyensúly is kialakulhat, hiszen ha a többiek szarvasra vadásznak, akkor nem éri meg egy nyúl után menni. Felmerül azonban az egyensúlyok megvalósíthatósága: Ha nem egyértelmű a másik játékos szándéka, akkor a kockázatkerülő vadász inkább nyulat fog. A modellt bizalmi, együttműködési helyzetek modellezésére használhatjuk, például ipari együttműködések, klaszterek esetén (Gedai, Kóczy, Meier zu Köcker, & Zombori, 2015). Gondolhatunk egy konzorciális pályázat beadására is, amely csak akkor nyerhet, ha a résztvevők energiát fektetnek a közös anyagba – ahelyett, hogy „saját pecsenyéjüket sütögetnék”. Sok résztvevő esetén egy-két potyautas még beleférhet, de az együttműködés kialakításakor gondolni kell a résztvevők ösztönzésére, a nem kooperatív tagok szankcionálására is. Ez megváltoztatja a kifizetéseket, s növeli az együttműködés sikerének esélyét.

fiú \ lány	foci	balett
foci	$\underline{2}$, $\underline{1}$	0, 0
balett	0, 0	$\underline{1}$, $\underline{2}$

4. táblázat A nemek harca játék kifizetései

A koordinációs problémák klasszikus esete az úgynevezett *nemek harca játék*. A történet szerin egy fiú és egy lány randevúzik, de a két izgalmas programlehetőség (futballmeccs, illetve balettelőadás) közül az utolsó pillanatig nem tudnak dönteni – míg a végén egyikük telefonja lemerül és így egymástól függetlenül kell helyszínt választaniuk. A két programmal kapcsolatban eltérnek a preferenciáik, de abban egyetértenek, hogy az estét együtt szeretnék eltölteni. Mindkét program Nash egyensúly (emellett van egy sokkal rosszabb *kevert* Nash egyensúly is), de a koordináció gondot okoz. Sajnos ezt problémát a játékelmélet önmagában nem tudja feloldani, viszont segít Schelling fókuszpont-elmélete: ha a fiú lovagias (és a lány ezt tudja), a baletten találkoznak.

Több résztvevő, vagy több lehetőség esetén még nehezebb a koordináció, ennek köszönhető, hogy létezik a munkaidő fogalma, a szabványosítás, vagy akár egy rendezvényen a *dress code*.

1. \ 2.	hajt	kitér
hajt	-100, -100	<u>10</u>, -<u>10</u>
kitér	-<u>10</u>, <u>10</u>	0, 0

5. táblázat A gyáva nyúl játék kifizetései

Míg a szarvasvadászat és a nemek harca játékokban a játékosok célja a koordináció, a gyáva nyúl játékban az antikoordináció: Két autó őrült sebességgel tart egymás felé. Az veszít, aki előbb rántja félre a kormányt; ha mindketten félrerántják, akkor döntetlen, végül ha senki sem, akkor a hősködés szörnyű balesetben végződik. Itt is két tiszta Nash egyensúlyt találunk: vagy az egyik, vagy a másik versenyző nyer – bár a példában várható értékben senki sem jár jobban, mintha el sem kezdték volna. A játék kitűnően modellezi konfliktusok eszkalálását. Mi a megoldás? Nos, a gyakorlatban a helyzet többnyire nem szimmetrikus, az egyik fél sokkal többet veszíthet a kitéréssel, így elszántabb, s ha ezt az másik felé tudja kommunikálni, a saját javára fordíthatja a versenyt. Ezt elérheti a tétek emelésével, vagy ha látványosan kihajítja a kormányt – így ha akarna sem tudna kitérni. Emlékezetes Kevin Bacon alakítása is a Footlose című filmben, ahol egy pedálba gabalyodott cipőfűzőnek „köszönhetően” nem tud kitérni és nyeri meg a végén a versenyt.

Lehetséges lépéseinknek – látványos – korlátozása sok esetben kényszerítheti a játékostársat egy számunkra kedvezőbb döntésre. Valójában itt sincs másról szó, mint bizonyos egyensúlyok kizárásáról, de ezt a legdrasztikusabb módon a lehetséges lépések felszámolásával tesszük.

1. \ 2.	fej	írás
fej	<u>1</u>, -1	-1, <u>1</u>
írás	-1, <u>1</u>	<u>1</u>, -1

6. táblázat Az érmepárosítás kifizetései

Az érmepárosítás játékban a két játékos egy-érme valamely oldalát választja: ha a kettőjük választása megegyezik, az első, ha különbözik, akkor a második játékos nyer. Míg a gyáva nyúl játékban mindkét fél az antikoordinációra törekszik, itt csak a második játékos. Jól látható, hogy ennek a játéknak nincs tiszta Nash egyensúlya. Könnyen belátható, hogy a két lehetőséget pontosan fele-fele arányban választva kerülhető el a vesztés (várható értékben).

kapus \ rúgó	bal	jobb
bal	<u>0</u>, 0	-1, <u>1</u>
jobb	-1, <u>1</u>	<u>0</u>, 0

7. táblázat A tizenegyes-rúgás az érmepárosítás egy változata

Pontosan ezzel a dilemmával szembesül a rúgó és a kapus egy tizenegyes rúgásakor. A rúgás gyorsasága miatt a kapusnak az elrúgás pillanatában el kell mozdulnia, hogy elérhesse a sarokba rúgott labdát, s korrigálni a másik sarokba már nem tud. A rúgó sarkot, illetve valójában oldalt választ. A kifizetéseket kicsit módosítottuk a labdarúgás szabályai szerint (nem ér gólt a kapus védése), de ez a lényegen mit sem változtat: a kapus egyező, a rúgó különböző oldalt szeretne. Itt is igaz, hogy hátrány ha választásunk kiismerhető, törekedni kell a kiegyensúlyozott keverésre.

Az érmepárosítási játék megmutatja, hogy bizonyos esetekben nincs (tiszta) legjobb válasz/nyerő stratégia, a lehető legjobb eredmény eléréséhez véletlen döntéseket kell hozni.

2.3 Általánosabb modellek

A bemutatott típusjátékok szimmetrikus helyzeteket írnak le, de sokkal általánosabb problémákat is vizsgálhatunk a szimmetria feloldásával. Például (Baird et al., 1994) egy gyalogos és egy gépjárművezető konfliktusát elemzi. A baleset kockázatának csökkentése érdekében mindkét félnek körültekintően kellene közlekednie, azonban ez költséges, például időveszteséggel jár. A baleset a gyalogos számára jár (jelentős, 100-as) kárral. Kérdés, hogy ki ezt ki téríti meg. Ha mindkét fél óvatos, a közúti baleset valószínűsége tizedére csökken, a várható veszteség -10.

gyalogos \ vezető	gondatlan	óvatos
gondatlan	-100, 0	-100, -10
óvatos	-110, 0	-20, -10

8. táblázat Gyalogos a vezető ellen: alapeset (Baird et al., 1994)

Alapesetben a kárt a gyalogos szenvedi el. Kézenfekvő lenne, hogy a baleset elkerülése érdekében körültekintően közlekedjen, de ha a gépjárművezetőnek semmi érdeke nem fűződik az óvatossághoz, továbbá a két fél együttes odafigyelése szükséges a baleset elkerüléséhez, akkor a gyalogos óvatossága önmagában felesleges időveszteség.

A helyzet mit sem változik, ha a felelősség a közúti baleset okozóját, azaz a gépjárművezetőt terheli. Hasonló megfontolásból ő sem fog körültekintően vezetni. Más a helyzet, ha a felelősség az okozót terheli: egyértelmű felelősről persze csak akkor beszélhetünk, ha az egyik fél elővigyázatos volt és a másik fél gondatlansága okozta a közúti balesetet.

gyalogos \ vezető	gondatlan	óvatos
gondatlan	-100, 0	-100, -10
óvatos	-10, -100	-20, -10

9. táblázat Gyalogos és vezető konfliktusa: a baleset okozója fizet (Baird et al., 1994)

Itt a kifizetések csak egy esetben változnak: ha a gyalogos óvatos és a balesetet a vezető gondatlansága okozza, akkor a felelősség, és így a költségek a vezetőt terhelik. Ez egy nagyon fontos változás, hiszen így az óvatos viselkedés egyensúlyivá válik, sőt ez lesz a játék egyetlen Nash egyensúlya. Már csak az a kérdés, hogy ha mindkét fél óvatos, akkor szükségszerűen a gyalogosnak kell-e vállalnia a kárt, vagy mondhatjuk-e, hogy a kár be sem következett volna, ha a vezető is gyalogosan közlekedik, s így a felelősség az övé. Bár adott esetben a két megközelítés eltérő kifizetéseket ad, a kedvező egyensúly változatlan marad.

2.4 Eltérő idejű döntések

Az eddig bemutatott konfliktushelyzetek során a döntések egyidejűek, legalábbis a másik fél döntésének ismerete nélkül kell lépni. Gyakoriak azok a konfliktusok, amikor ez a feltétel nem teljesül. Vegyük a következő egyszerű konfliktushelyzetet egy szolgáltató, mondjuk egy postaszolgáltató és az ügyfél között! Az ügyfél felad egy ajánlott küldeményt, és a nyomkövetési szolgáltatásért plusz díjat fizet. Ezek után a posta eldönti, hogy gondosan kezeli a küldeményt, vagy nem. Ha nem, és az ügyfél nem tudja megállapítani, hogy például a küldeménye célba ért-e, azaz lényegében nem kapta meg a kifizetett többletszolgáltatást, kártérítésre jogosult; kártérítési igényét a postahivatalban nyújthatja be, azaz a kárigény mellé egy kis kényelmetlenség is jár.

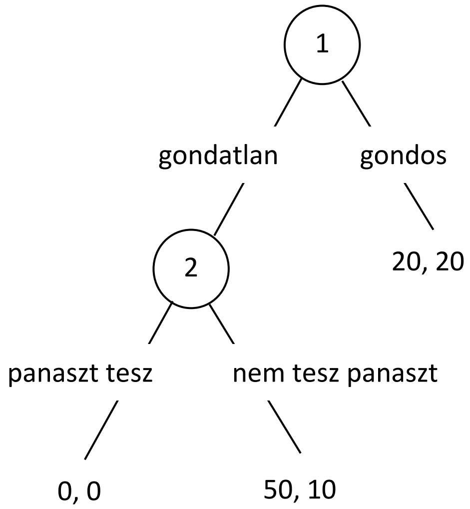
posta \ feladó	panaszt tesz	nem tesz panaszt
gondos	20, 20	20, 20
gondatlan	0, 0	50, 10

10. táblázat A szolgáltató és a vásárló konfliktusa normális alakban

A szolgáltatás igénybevételével létrejön a szolgáltató és a vevő között egy szerződés. A szerződés viszont csak akkor jó, ha megvalósul, azaz a felek a megállapodás megvalósítása érdekében cselekszenek: jelen esetben a vevő fizet, a posta pedig nyújtja az ígért szolgáltatást. Ez a viselkedés akkor egyensúlyi, ha semelyik félnek nem érdeke ettől eltérni. Hogy ezt az egyensúlyt jól lássuk, írjuk fel először normális alakban.

A felírt játékban két tiszta Nash egyensúlyt is találunk. Az egyik megfelel a szerződés szellemiségének: a posta gondosan jár el, de ha nem, a feladó panaszt tesz. Ugyanakkor van egy másik egyensúly is, melyben a posta nem jár el gondosan és a fogyasztó mégsem tesz panaszt. Annyit már most elárulhatunk, hogy az egyik egyensúly nem fog megvalósulni: vajon melyik? A válaszadáshoz azt kell megértenünk, hogy mi történik elégtelen szolgáltatás esetén. Most tehát *feltételezzük*, hogy a posta nem volt gondos és megvizsgáljuk, hogy ilyenkor mit tesz a feladó. Valójában egy nagyon egyszerű döntést kell hoznia: megéri-e panaszt tenni; megéri-e a kártérítésért utazni, sorban állni, adminisztrálni. A felírt játékból a választ egyértelműen megadhatjuk, hiszen csak a kifizetéseket kell összehasonlítani: panasz esetén 0, míg ha hagyja az egészet, akkor 10. Így tehát *nem* tesz panaszt.

Ebből viszont következik, hogy ha a posta nem jár el gondosan, akkor a kifizetése 50 lesz, szemben a gondos kezelés esetén elérhető 20-szal. Itt megint egyszerű a döntés, a posta nem jár el gondosan. A (*gondatlan, nem tesz panaszt*) egyensúly tehát előáll. Mi a probléma a másik egyensúllyal? A normális alak az egyidejű döntésre épül, tehát a (*gondos, panaszt tesz*) stratégia-pár egyensúlyi a panasz melletti elköteleződés miatt. A konfliktust felíró eredeti játékban ugyanakkor a döntések nem egyidejűek. Ha a posta a gondatlan kezelés mellett dönt, a feladó ennek ismeretében meggondolhatja magát és fentiekből tudjuk, hogy nem él a panasz lehetőségével. Így viszont a posta viselkedése is érthető, indokolt, s nem áll érdekében a gondos kezelés.



A gyakorlatban a játéknak van egy nulladik lépése is, amikor a feladó eldönti, hogy igénybe kívánja-e venni a szolgáltatást. Olyanért nyilvánvalóan nem fog fizetni, melyet – egyensúlyban – nem kap meg[4]. Mit tehetünk annak érdekében, hogy megmaradjanak az ügyfelek? Elsősorban olyan működési szabályokat kell kialakítani, hogy a felek betartsák a szerződést. A szolgáltatónak tehát saját érdeke, hogy könnyű legyen panaszt tenni, a jóvátétel fedezze a panasz összes költségét és a kompenzáció a szolgáltató számára előnytelen legyen. Nem igazán működik, ha például további szolgáltatást, vagy pláne szolgáltatásból kedvezményt kínál, hiszen ezzel valójában még nőhet is a kifizetése.

Ezt a játékalakot egyébként *extenzív alaknak* hívjuk és az ilyen játékokban azokat a Nash egyensúlyokat keressük, melyek a játék későbbi állapotaiban, az úgynevezett részjátékokban is egyensúlyiak. Az

[4] A gondatlanság nem jelent *automatikusan* szerződésszegést, legfeljebb ennek *valószínűségét* növeli. Ez az egyensúlyon mit sem változtat, viszont ha egy alapvetően hasznos szolgáltatásról van szó és a gondatlanság ellenére kicsi a szerződésszegés valószínűsége, még így is megéri a szolgáltatást igénybe venni.

ilyen egyensúlyokat *részjáték-tökéletes egyensúlyoknak* nevezzük (Selten, 1965). Teljes információs játékokban pontosan egy ilyen egyensúly van, amit a fent is alkalmazott fordított indukcióval lehet megtalálni: ennek lényege, hogy a játékot az utolsó elemi és így könnyen kiértékelhető döntésektől kezdve göngyölítjük fel.

3 Többoldalú konfliktusok

A résztvevők számának növelésével az eddig bemutatott modellek kiterjesztése kezelhetetlenül bonyolulttá válik. A *kooperatív játékelmélet* segítségével ilyen összetettebb helyzeteket is elemezhetünk – bár ezek a módszerek sem korlátlanok.

A név némileg megtévesztő, hiszen a kooperatív játékok lényege nem az együttműködés – ilyesmi nonkooperatív játékokban is előfordul –, hanem a szereplők közötti szerződések (*binding agreements*) lehetősége. Szerződés alatt kötelezően betartandó megegyezéseket, egy működő jogrendszert értünk. Egy megfelelő szankciókkal megtámogatott megegyezés olyan feltételeket is tartalmazhat, amelyek a jogrendszer támogatása nélkül nem lennének fenntarthatók. Ez a keretrendszer sokkal nagyobb szabadságot ad a modellezőnek és így számtalan megoldását ismerjük a kooperatív játékoknak. A tudományos irodalomban való elmerülés helyett csak néhány fontos megoldásra kívánunk kitérni, azokra is elsősorban alkalmazásuk szerint. Általában a kooperatív megoldások kétfélék: egy részük az együttműködés gyümölcseinek *igazságos* elosztását keresi, míg egy másik részük a nonkooperatív gondolkodást ülteti át a kooperatív környezetbe és a *lehetséges* megállapodásokat keresi.

3.1 Stabilitás

Hogyan jön létre egy megállapodás? Valamelyik fél, vagy egy közvetítő tesz egy ajánlatot, remélve annak elfogadását. Olyan ajánlat nem kerül elfogadásra, amelyik sérti bármelyik fél érdekeit, azaz ha jobban jár a megállapodás nélkül. A kooperatív játékok ugyanakkor nem csak az együttműködés, de a tiltakozás összetettebb formáit is lehetővé teszik. Míg a Nash egyensúly vizsgálatakor csak egyoldalú, egyéni elhajlásokat vizsgálunk, itt a széleskörű együttműködést a játékosok valamely részcsoportja is megakadályozhatja. Erre okot adhat az, ha ez a részcsoport, vagy koalíció önmagában is nagyobb értéket tud előállítani, nagyobb kifizetést tud elérni, mint amit a javaslat számára felkínál. Olyan egyensúlyi javaslatokat keresünk tehát, ahol a koalíciók – jogos – követelései teljesülnek. Ha egy elosztási javaslat teljesíti ezt a feltételt, akkor azt mondjuk, hogy eleme a *mag*nak (Shapley, 1955).

A nyakatekert megfogalmazásnak az az oka, hogy az ilyen elosztások száma szélsőségesen változik. Ritkább esetben csak néhány ilyen elosztás létezik, általában végtelen sok, de gyakran egy sem. Utóbbi esetben a mag *üres*. Ha a mag üres, az nem csak annyit jelent, hogy a népszerű megoldás csődöt mondott, hanem ilyenkor valóban nincs olyan javaslat, amit mindenki el fog fogadni.

A mag bizonyos értelemben átmeneti fogalom a kooperatív és a nonkooperatív világ között, hiszen egyfajta nonkooperatív gondolkodást vizsgálunk kooperatív környezetben. Ez a filozófia jól látható, ha – akár egyszerű – példákat nézünk.

Vegyünk egy eladó ingatlan tulajdonosát, illetve két vevőt! Tegyük fel, hogy a vevők az ingatlant egyformán, a vevőnél többre értékelik! Az eladás nyereségén a két fél osztozhat. Könnyű belátni, hogy a magnak *nem lehet* olyan eleme, ahol a vevő is részesül ebből a nyereségből: az eladó a másik vevő jelenléte révén képes a teljes nyereséget megkaparintani. Némileg meglepő módon száz eladó és százegy vevő esetén is minden nyereség az eladókhoz kerül.

Pontosan mi történik egy magbéli és egy nem magbéli javaslat esetén? Az előbbi az egyszerűbb eset: egy magbéli javaslat esetén semelyik koalíció nem emel kifogást, így a javaslat mindenki számára elfogadható. Ha nem magbéli, valamelyik koalíció számára elfogadhatatlan. A tiltakozás lehet konstruktív, mely esetben a koalíció egy jobb, a saját igényét kielégítő javaslatot tesz, más játékokban a tiltakozás onnan fakad, hogy a teljeskörű együttműködés nem optimális. Ha a mag nem üres, akkor egy pártatlan közvetítő – például ügyvéd – megfelelő moderálása mellet a javaslatok sorával viszonylag gyorsan el lehet jutni a (magbéli) megegyezésig (Béal, Rémila, & Solal, 2012; Kóczy, 2006; Yang, 2010).

3.2 Stabil párosítások

Az egyetemi és középiskolai felvételi a tágabban vett játékelmélet legnagyobb léptékű alkalmazása. A felek egy hatalmas, sok tízezer résztvevős koalíciós játékban vesznek részt. A játék tétje, hogy a jelentkezők melyik szakkal, illetve, hogy a szakok melyik jelentkezőkkel alkotnak koalíciót. Mivel a szaktársak személye másodlagos, az a kérdés, hogy melyik jelentkező, melyik szakhoz kerül és kifizetések helyett csak a szakok közötti preferenciasorrend ismert. Az ilyen problémákkal a játékelmélet részterülete, a (preferencia-alapú) párosításelmélet foglalkozik (Roth & Sotomayor, 1990).

A klasszikus megközelítés az egyetemi felvételit egy házassági „piachoz” hasonlítja, ahol a férfiak és nők kölcsönösen preferencia sorrendeket állítanak fel egymásról. Itt is természetes az egyéni racionalitás, azaz hogy senkinek se kelljen egy számára nem szimpatikus partnerrel leélnie az életét: megengedjük, hogy szingli maradjon. Így egy férfi preferenciáit három részre bonthatjuk: azon hölgyek rangsora, akik számára elfogadhatók, a „szingliség” és azon hölgyek rangsora, akik számára elfogadhatatlanok. Mi kizárólag az elsőkkel foglalkozunk. Egy házassági problémát az érintettek preferenciáinak felsorolásával adhatunk meg. Mi egy ilyen probléma megoldása? Természetesen stabil párosításokat keresünk, azonban az elégedetlenség itt sokkal természetesebb formában jelenik meg. Egyrészt egy férfi vagy nő elégedetlen, ha számára elfogadhatatlan partnerrel kívánjuk összeházasítani, másrészt egy férfi-nő pár elégedetlen, ha egymást jobban kedvelik, mint a párosítás során kijelölt partnereiket. Miközben a magról tudjuk, hogy lehet üres, stabil párosítás *mindig* létezik (Gale & Shapley, 1962); Gale és Shapley egy algoritmust is megadott, ami stabil párosítást eredményez:

A késleltetett elfogadási vagy Gale-Shapley algoritmus (Gale & Shapley, 1962; Roth, 2008)

1. Minden egyes férfi ajánlatot tesz az általa preferált nőnek.
2. A nők több ajánlat esetén a preferáltat megtartják (de még nem fogadják el!), a többit végleg elutasítják.
3. A férfiak kihúzzák a preferenciák közül az elutasító nőket.
4. Ha van olyan férfi, akinek éppen nincs párja és van még elfogadható nő a listáján, akkor visszatérünk az 1. lépéshez.
5. Egyébként véget ér az algoritmus és a nők elfogadják a fennmaradó ajánlatokat.

Megjegyzendő, hogy a nemek szerepe nem szimmetrikus, a szerepcserés algoritmus is stabil párosítást eredményez (sőt, ezen kívül is létezhetnek stabil párosítások), de a férfiak kezdeményezésével folyó *leányvásár* a férfiak, míg a szerepcserés *legényvásár* a nők számára legkedvezőbb stabil párosítást adja.

Az online társkeresés korszakában egy ilyen algoritmus sem teljesen haszontalan, de a legtöbb alkalmazása – módosított formában – iskolai, egyetemi felvételik bonyolításához kapcsolódik. A módosítás annyira egyszerű, hogy nem is írjuk le újra az algoritmust: míg a törvények tiltják a poligámiát, egy egyetemi szakra több jelentkezőt is fel lehet venni. Így a szakok mellé megadjuk a felvehető létszámot is és a 2. lépésben csak a létszám feletti jelentkezők kerülnek elutasításra.

Így a párosítás nagyon egyszerűnek tűnik: a felek megadják a preferenciákat és ennek alapján kialakul a párosítás. Ugyanakkor a megadott preferenciák valódisága itt is felmerül. Vajon érdekében áll-e a feleknek az őszinteség? A férfiak esetében ez könnyen belátható, ugyanakkor a nők esetében ez már nem igaz. Kóczy (2010, 2. példa) mutat egy olyan, egyszerű példát, ahol a taktikus manipuláció jobb partnert eredményez (Dubins & Freedman, 1981).

Létezik-e olyan algoritmus, mely őszinteségre sarkall? Egyértelműen, hiszen az úgynevezett sorozatos diktatúrában az egyik fél valamilyen sorrend szerint rendezve választ párt. Itt nem érdemes taktikázni. Ez az algoritmus ugyanakkor a másik fél preferenciáit figyelmen kívül hagyja és az eredmény nem stabil.

Létezik-e olyan algoritmus, ami egyszerre őszinte és stabil? A válasz nemleges, de vannak bizonyos pozitív részeredmények. Például leányvásár esetén a férfiak őszinték. Másrészt az iskolák, egyetemek preferenciáit gyakran törvények rögzítik, így a jelentkezők oldaláról futtatott felvételi során egyszerre teljesülhet a stabilitás és az őszinteség is.

Talán érdemes pár szóban kitérni a magyarországi felvételikre (Biró, 2008; Kóczy, 2010). Mind a közép- mind a felsőoktatási felvételire jellemző, hogy a felvételi pontszámok alapján történik. A pontszám-alapú, úgynevezett vonalhúzásos algoritmus nagyon hasonlít az eredeti Gale-Shapley algoritmushoz, de a pontegyezések miatt előfordulhat, hogy bár a keretszám még nem telt be, az utolsó helyekre túl sok azonos pontszámú jelentkező lenne jogosult. Országonként eltér a holtversenyek kezelése, nálunk ilyen esetben *senkit* sem vesznek fel. Hogy minél kevesebb hely maradjon betöltetlenül, az egyetemek gyakran utólag bővítik a keretszámot, újrafut az algoritmus és így tovább: elsősorban ennek köszönhető, hogy a ponthatárok csak hónapokkal az adatok feltöltése után kerülnek kihirdetésre.

Sérti az őszinteséget a felsőoktatási felvételinél alkalmazott jelentkezési korlát. Jelenleg mindössze 5 jelentkezés adható be, így egy közepes várható pontszámmal rendelkező jelentkezőnek aligha érdeke a legjobb szakok megjelölése. A legkisebb induló létszámok, illetve a kettős tanárszakok – elvileg – a stabilitást rontják el (Biró, Fleiner, Irving, & Manlove, 2010). Míg ezeken aligha lehet segíteni, a jelentkezési korlátokat semmi sem indokolja.

3.3 Igazságos elosztások

Kiindulva abból, hogy az együttműködés értéket teremt, vagy legalábbis nem káros, szeretnénk meghatározni, hogy a közösen teremtett értékből hogyan részesülhetnek az egyes játékosok, vagy éppen, hogy a közösen felmerülő költségekből kit, mennyi terhel. A legismertebb ilyen megközelítés a *Shapley érték* (Roth, 1988; Shapley, 1953), mely egyszerűsége és jó tulajdonságai miatt népszerű. Egy mondatban összefoglalva a Shapley érték *a játékosok átlagos vagy várható határhozzájárulása*. Mit jelent ez pontosan? A karakterisztikus függvény a játékosok minden csoportjára megad egy kifizetést, a koalíció értékét. Most nézzük meg, hogyan jön létre a feltételezett együttműködés.

Kezdetben volt egy ötlete egy játékosnak. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy ez az 1-es számú játékos – ekkor az ötlet értéke 5. A semmihez képest pontosan ennyivel növelte az elérhető kifizetést, ennek a játékosnak ennyi jár. Amikor a 2. játékos is csatlakozott a projekthez, a csoport értéke 9 –re, azaz $9-5=4$-gyel nőtt. Ez a 2. játékos határhozzájárulása, ennyivel növelte ő a kifizetést. Általánosan tegyük fel, hogy már létrejött az S koalíció az első s játékos együttműködésével. Ekkor szánja rá magát $s+1$ is. Az ő határhozzájárulása azon két koalíciókifizetése közötti különbség, amelyben már tag, illetve amelyben még nem tag. És így tovább egészen az utolsó játékosig. Az eddigi érvelés ugyanakkor feltételezett egy konkrét sorrendet. A kooperatív megközelítés éppen azért olyan egyszerű és elegáns, mert az ilyen részletekkel nem foglalkozik. Az összes játékos együttműködését nézve nincs is okunk feltételezni, hogy az egyik, vagy másik előbb támogatta az ötletet: a megállapodás a belépések tetszőleges sorrendje mellett létrejöhetett. Így a játékos hozzájárulásának a véletlenszerűen kiválasztott sorrend melletti, azaz átlagos vagy várható határhozzájárulását tekintjük.

Sajnos a lehetséges sorrendek száma gyorsan nő, így az egyes sorrendek végigszámolása időigényes feladat. A gyakorlatban egy kombinatorikus képlet terjedt el, amely minden koalíciót csak egyszer vesz sorra, viszont a határhozzájárulást a koalíció létrejöttének gyakoriságával súlyozza. Ez a formula is sok számolást igényel, a gyakorlatban egyszerű szoftverekkel 10-20 játékosra alkalmazható, ennél nagyobb problémák egzakt elemzése napokba telik, de ismertek közelítő formulák.

Mielőtt rátérünk az alkalmazásokra, fontos megérteni, hogy miért pont ez a történet, és miért pont ez a képlet lett népszerű. Ennek a titka az *axiomatikus* megközelítésben rejlik. A riasztóan elméleti hangzású gondolat valójában nagyon közel áll a joghoz: csak olyan megoldást fogadunk el, mely megfelel bizonyos széles körben elfogadott (alkotmányos?) alapelveknek. A Shapley érték esetében ezek a következők:

- Hatékonyság: csak olyan megoldás fogadható el, amely a teljes költséget/hasznot szétosztja.
- Nulla játékos tulajdonság: Ha egy játékos határhozzájárulása mindig nulla (beleértve a saját értékét is), akkor az értéke is nulla.
- Szimmetria: ha két játékos bármely koalícióhoz egyenlő mértékben járul hozzá, akkor az értékük is azonos.
- Additivitás: A játkosoknak egy adott problémára számított Shapley értéke a részproblémákra kapott Shapley értékeinek összege.

A *hatékonyág* szinte kötelező egy elosztási problémánál – csak egészértékű problémák esetén, ha úgy tetszik, a kerekítésből adódóan szokott sérülni. A *nulla játékos tulajdonság* is természetes, ha eltekintünk a szolidaritástól. A *szimmetria* tulajdonképpen a törvény előtti egyenlőséget fogalmazza meg matematikailag. Végül az elméleti irodalomban a legtöbb kritika az *additivitást* éri, de ez egy nagyon praktikus tulajdonság: ha nem lenne igaz, akkor egy elosztásnál minden korábbi problémát figyelembe kellene venni, illetve a kiosztott kifizetéseket senki sem költhetné el, hiszen egy későbbi részprobléma miatt módosulhatna az elosztás és ez esetleg visszafizetéseket írhatna elő.

Összességében tehát elég természetek ezek a tulajdonságok. Shapley [1953] igazolta, hogy pontosan egy olyan elosztási módszer létezik, mely mind a négynek megfelel és ez pedig a Shapley érték. A Shapley értéknek több más axiomatizációja is ismert más-más tulajdonságokból kiindulva (Pintér, 2009).

Mielőtt rátérnénk a Shapley érték alkalmazásaira, fontos hangsúlyoznunk, hogy vannak alternatív megközelítések is. Bár a Shapley érték rendkívül népszerű a legkorábbi ismert elosztási javaslat nem ezen alapszik. A 2000 éves, zsidó Talmud bemutat egy csődproblémát (Ketuvót 93a), melyben egy elhunyt vagyonának a hitelezők közötti szétosztásáról rendelkezik (Aumann & Maschler, 1985). A talmudi jogi szöveg, a *misna* által leírt példát az alábbi táblázat foglalja össze.

Vagyon \ Követelés	100	200	300
100	33⅓	33⅓	33⅓
200	50	75	75
300	50	100	150

11. táblázat A hitelezők részesedése a hagyatékból a talmudi példában

Az elosztást sokan vitatták, holott mindhárom elosztás alapja a vitatott összeg konzisztens, igazságos elosztása. A Talmud több ilyen elvet is megfogalmaz.

Rábed és Mamonidész, XII. századi zsidó tóratudós és filozófusok szerint minden hitelező ugyanakkora részt, de legfeljebb a követelését kapja a vagyonból. A Vitatott Szövet Elv (*Contested Garment Principle*; Bává meciá 2a (Aumann & Maschler, 1985)) két hitelező konfliktusára ad útmutatást:

mindkét hitelező lemond a követelésén túli részről, s a vita tárgyát képező részt egyenlő arányban elosztják. Például ha a vita tárgya 100, az egyik követelése 70, a másiké 80, akkor az első „lemond” 30, a másik 20 egységről, s a vita tulajdonképpen a fennmaradó 50 egységről szól. Ezt elosztják fele-fele, így az első 45, a második 55 egységet kap.

A fenti példa ezt az elvet követi: például ha a teljes vagyon 200 és a legnagyobb hitelezőnek 75 jut belőle, akkor a 100-at és 200-at hitelező a fennmaradó 125 értéken osztozkodik. Mivel az első követelése 100, ezért ennyi a vita tulajdonképpeni tárgya, ezt fele-fele elosztják, míg a fennmaradó 25-öt csak az utóbbi követelte, így az vita nélkül az övé.

Mit keres mindez egy játékelméletről szóló fejezetben? Hogy ezt megértsük, be kell vezetnünk egy kevésbé intuitív, de sok szempontból vonzó fogalmat, a *nukleóluszt*. Egy adott kifizetés esetén koalíció *többlete* az a kifizetés, amit a megállapodásból való kilépéssel nyerne. Miután minden koalícióra meghatároztuk ezt a többletet, rendezzük ezeket az értékeket nemnövekvő sorba. Végül a kapott (nemnövekvő) számsorok közül válasszuk a *lexikografikusan* legkisebbet: azt ahol sor első eleme a legkisebb, vagy ha a legkisebbnél a sorok eleje megegyezik, akkor azt, ahol az első eltérésnél kisebb értéket találunk – nagyjából úgy, mint, mikor szavakat abc sorba rendezzük. A *nukleólusz ez* a legkisebb elosztásvektor, magyarul a legnagyobb megalapozott elégedetlenséget próbálja minimalizálni. A nukleólusz általában egyértelmű és eleme a magnak (ha az nem üres): egy megoldásban egyesíti a mag és a Shapley érték bizonyos erényeit, ezért egyes szerzők szerencsésebbnek tartják a nukleólusz használatát allokációs problémákban is (Lemaire, 1984). Nem utolsó sorban pedig a talmudi csődprobléma nukleólusza pontosan a Talmudban javasolt (Vitatott Szövet Elv szerinti) elosztás.

E rövid kitérő után rátérünk a Shapley érték alkalmazásaira.

3.4 Költségmegosztás

Ha a kifizetéseket költségekkel helyettesítjük és a határhozzájárulás alatt a költségnövekedést értjük, érthető, hogy a Shapley érték alkalmas költségek szétosztására is, melyet az elméleti irodalom mellett (Balog, Bátyi, Csóka, & Pintér, 2011, 2017; Roson & Hubert, 2015) gyakorlati megfigyelések (Aadland & Kolpin, 1998) is alátámasztják.

Bár általában a számítások összetettek, az axiómák segítségével bizonyos esetekben nagyon könnyű a Shapley érték kiszámítása. Az egyik ilyen, ismert példa az úgynevezett reptéri probléma (Littlechild & Owen, 1973; Littlechild & Thompson, 1977). Egy repülőtéri kifutópálya építésének a költségeit szerették volna a repülőgépek leszállási díjaiból fedezni. A várható leszállások száma géptípus szerinti bontásban ismert volt az elemző számára, de az is, hogy a különböző típusok más-más hosszúságú leszállópályát igényelnek. Vegyük először a legnagyobb géptípust. Lesz a kifutópályának egy szakasza, amit kizárólag emiatt a gép miatt kell megépíteni – mint ahogy az Airbus 380 elterjedésével több helyen meg kellett hosszabbítani a kifutópályákat. Aligha fair ezekkel a költségekkel a kisebb gépeket terhelni. A pályának ezt a szakaszát külön alprojektként kezelhetjük, amiben a legnagyobb gépeket kivéve mindenki más nullajátékos és így ehhez az alprojekthez nem is járul hozzá. Ugyanakkor a szimmetria miatt a legnagyobb gépek leszállásai után mindig ugyanakkora összeget kérünk, ami a hatékonysággal együtt pontosan meghatározza, hogy mennyi jut egy-egy leszállásra. Miután ezt az alprojektet lerendeztük, rátérhetünk a következőre: a kizárólag a legnagyobb és a második legnagyobb gépek által használt szakaszra. Mivel a legnagyobb gépek már rendezték az utolsó szakaszt, a továbbiakban, beleértve ezt az alprojektet is, már pontosan ugyanazokkal az igényekkel rendelkeznek, mint a második legnagyobb géptípushoz tartozók. A szimmetria alapján a költségeik is azonosak lesznek, amihez – az additivitás alapján – a legnagyobb gépek esetében hozzájön még az első alprojekt. A gondolatmenetet folytatva kiderül, hogy a pálya egyes szakaszait pontosan annyian fizetik, mint ahányan használják és így gyorsan kiszámítható az egy-egy leszállásra vonatkozó költség.

Bár ez egy speciális eset, a gondolatmenet könnyen átültethető bármilyen hasonló infrastrukturális fejlesztésbe. Ezekben az esetekben a kiszámított Shapley érték a költségek egyetlen igazságos elosztását adja.

3.5 Hatalmi befolyás

A Shapley értéket – Shapley-Shubik index néven – régóta használjuk szavazási helyzetek elemzésére (Shapley & Shubik, 1954), nevezetesen az egyes szavazók hatalmi befolyásának mérésére. Ezekben a játékokban az egyszerűség onnan ered, hogy csak kétféle koalícióval kell számolnunk: vannak nyertes koalíciók, melyeknek tagjai képesek döntést hozni, és vannak elegendő szavazattal nem rendelkező, vesztes koalíciók. Egy ilyen helyzet leírható egy kizárólag 0 és 1 kifizetéseket tartalmazó TU játékkal, ahol a kifizetés maga a hatalom. Ez fordítva is igaz: minden egyszerű játék felfogható egy szavazási helyzetként, bár általában elvárjuk, hogy a teljes egyetértés mindig legyen elegendő a döntéshez, továbbá, hogy egy nyertes koalíció bővítése esetén maradjon nyertes, illetve egyidejűleg, egymásnak ellentétes döntések ne születhessenek.

Egy egyszerű játékban a határhozzájárulások elég unalmas képet mutatnak. Ez a szám szinte mindig 0 és csak akkor 1, amikor egy játékos belépésével egy vesztes koalíció nyertessé válik, azaz, ha a játékos a *mérleg nyelve*; tulajdonképpen a Shapley érték, illetve a Shapley-Shubik index azt mondja meg, hogy mekkora annak a valószínűsége, hogy egy adott játékos lesz a mérleg nyelve. Mi ennek a jelentősége? Kiindulva abból, hogy a játékosok sorba rendezhetők preferenciáik szerint, a döntés csak akkor születhet meg, ha ezt a játékost is sikerül meggyőzni. Tekintettel arra, hogy a sorban következő többi szavazó nehezebben győzhető meg, az adott játékos kvázi megkerülhetetlen és így képes akaratának, szempontjainak maradéktalan érvényesítésére, illetve másrészről a lobbytevékenység elsődleges célpontja és kedvezményezettje lesz.

Tekintettel arra, hogy a Shapley-Shubik indexek lefordíthatók a hatalomból való részesedésre, sőt, a döntéshozók által felosztott büdzséből való részesedésre (ez az úgynevezett *p-power* (Felsenthal & Machover, 1998)), fontos, hogy ismerjük és értsük a szavazási helyzetek hatalmi viszonyait. Például abban a társasházban, ahol a lakások alapterülete 37, 27, 27 és 9%-os arányban oszlik meg, könnyen belátható, hogy a legkisebb lakás tulajdonosa az egyszerű többségi ügyekben nullajátékos, azaz a társasház mindennapos működésébe nem tud beleszólni. Ugyanez igaz gazdálkodó szervezet tulajdonosi viszonyaira is: a fenti számok mellett a legkisebb tulajdonos nem tudja a döntéseket befolyásolni. Nem mindegy, hogy egy tulajdonrész megvásárlása milyen tényleges befolyást ad a szervezetben.

Nemzetközi szervezetek döntéshozása is rendszerint valamilyen súlyozott szavazáson alapszik. Az ENSZ Biztonsági Tanácsában az állandó tagok vétóval rendelkeznek: ezt is tudjuk modellezni. Mégis a legtöbbet vizsgált ilyen döntéshozó szerv az Európai Unió Tanácsa (korábbi nevén Miniszterek Tanácsa). Itt egy nyertes koalíciónak a tagok száma és lakossága alapján is (különböző mértékű) minősített többséggel kell rendelkeznie. Érdekesség, hogy a Római Szerződésben rögzített mechanizmusban Luxemburg nullajátékos lett, illetve, hogy a Lisszaboni Szerződés gyökeresen megváltoztatta a szavazási szabályokat, de ennek révén az egyes országok uniós befolyását is (Kóczy, 2011, 2012)[5]. Minden tag be- vagy kilépése hat a hatalmi viszonyokra is, így a Brexit tovább növeli a nagy országok befolyását (Kóczy, 2016).

Fontos megjegyezni, hogy a Shapley-Shubik index nem az egyetlen hatalmi mérték. Például a hasonlóan népszerű Banzhaf mérték (Banzhaf, 1965; Coleman, 1971; Penrose, 1946) egy teljesen más megközelítést alkalmaz, elsősorban különböző szavazási helyzetek, modellek összehasonlítására hasznos.

[5] A Szerződés előkészítése során két lengyel kutató javaslatot tett egy tudományosan megalapozott szavazási szabályra (Słomczyński & Życzkowski, 2006; Życzkowski & Słomczyński, 2004), de ez csekély támogatásra lelt.

A különböző megközelítés ellenére normalizált változata gyakran a Shapley-Shubik indexhez hasonló értékeket ad.

3.6 Körzetkiosztás

A körzetkiosztási probléma (*apportionment problem*) (Balinski & Young, 1982, 1994; Mészáros & Szakadát, 1993; Pukelsheim, 2014; Tasnádi, 2014) egy választási rendszer egyéni választókerületeinek vagy *körzeteinek* kisebb területi, vagy politikai egységek, például államok, régiók, vagy megyék közötti arányos elosztását vizsgálja. Egy rendkívül kényes kérdésről van szó, hiszen a választókerületek kialakítása közvetve a választások kimenetelét is meghatározhatja. Ennek oka ugyanakkor leginkább a kerületek határának önkényes megválasztása, az úgynevezett gerrymandering. Ha választási reformra készülünk, az elfogultság vádja ellen a legjobb védelmet a matematika nyújthatja. Egyrészt léteznek olyan, a gyakorlatban is használt kompaktsági mértékek[6], melyek biztosítják, hogy a megrajzolt kerületek nem túl tekervényesek, jelentősen csökkentve a döntési és ezzel a manipulációs lehetőségeket.

Más típusú manipulációra ad lehetőséget a választókerületek eltérő mérete, ha a törvényalkotót támogató régiókban ugyanannyi szavazattal több képviselőt tudnak az országgyűlésbe juttatni. Hogyan lehet ezt jól, azaz igazságosan csinálni? A dolgozat keretein túlmutató kérdés azt vizsgálni, hogy mi az igazságos, ezért egyszerűen *feltételezzük*, hogy a cél az *arányos* képviselet[7]. Az Egyesült Államokban a mindig is fontos szempont volt, hogy a képviselőházi helyeket népességarányosan osszák szét az államok között.

Miért nehéz az arányos szétosztás? Ha van két megye, az egyik lakossága 100, a másiké 200 fő, kön--nyen eloszthatunk 3 képviselői helyet 1, illetve 2 helyet rendelve a megyékhez. Ha 4 helyet kívánunk elosztani, már nagyobb bajban vagyunk. 2-2-es elosztásnál a kisebb, 1-3-as elosztásnál a nagyobb megye kap aránytalanul nagy képviseletet. Ahogy nő a megyék száma, úgy válik a probléma egyre összetettebbé és igényel tudományos megközelítést. Tekintettel arra, hogy az Egyesült Államok alkotmánya írta elő az arányos képviseletet, már az első kongresszustól kezdődően törekedtek a matematikai megközelítésre és a körzetkiosztás egy algoritmus, a *D'Hondt módszerrel* ekvivalens *Jefferson módszer* szerint történt[8]. Az algoritmust azóta többször módosították válaszul az évek során felbukkanó anomáliák kiküszöbölésére. Megfigyelték ugyanis, hogy a képviselőház méretének növelése egyes módszerek esetén nem feltétlenül jár az egyes államok részére kiosztott képviselői helyek számának növekedésével, sőt, egy ilyen elemzés Alabama esetében csökkenést mutatott. Az azóta Alabama-paradoxon néven ismert jelenség minden olyan módszer esetében előfordulhat, ami nem házmonoton; de hasonló furcsaságokat figyeltek meg az államok népességváltozása és az ebből következő meglepő kiosztás-változás kapcsán is. Az eredeti Jefferson módszert így előbb az Európában *Saint-Laguë-módszer* néven ismert *Webster*, a *Hamilton*, majd ismét a *Saint-Laguë*/*Webster* váltotta fel, végül 1940 óta a *Huntington-Hill*, vagy *Egyenlő Arányok* (Equal Proportions; EP) módszert használják (Balinski & Young, 1982).

Európában a körzetkiosztás nem rendelkezik hasonló, évszázados történelemmel, de a fenti kettős elnevezések mind a módszerek európai (újra)felfedezésére utalnak. Jelenleg is több ország használ valamilyen ismert algoritmust, vagy annak módosított formáját. Uniós szinten elsőként 2002-ben a Jog a Demokráciáért Európai Bizottság, ismertebb nevén a Velencei Bizottság fogalmazott meg ajánlásokat a körzetek kialakításával kapcsolatban (Venice Commission, 2002). Az ajánlás két fő elemet

[6] Például az Iowában használt körzetkiosztási szabályok: https://www.legis.iowa.gov/docs/code/42.4.pdf

[7] Az arányosság kézenfekvő egy viszonylag homogén lakosságú országban; de az Európai Parlamenti helyek szétosztásakor az egyes tagállamok szuverenitását is tekintetbe véve egy méretfüggő, de az arányosnál kevésbé progresszív elosztást javasoltak (Grimmett, 2012). Hasonló kiosztási módszerekkel találkozhatunk például az erős régiókkal jellemzett Spanyolországban.

[8] Az Amerikai Egyesült Államok Alkotmánya, Art. I, § 2, cl. 3.

tartalmaz: egyrészt a választási körzeteknek igazodniuk kell a földrajzi és adminisztratív határokhoz, másrészt az ajánlás 10, szélsőséges esetben 15%-os korlátokat fogalmaz meg a referenciától (átlagos körzetmérettől) való megengedett eltérésre vonatkozóan. Bár az ajánlás nem kötelező jellegű, többször hivatkoztak rá az uniós kommunikációban választási törvénymódosításokkal, választásokkal kapcsolatban.

Az országgyűlési képviselők választásáról szóló 2011. évi CCIII. törvény nem hivatkozik az ajánlásra, de szinte szó szerint átveszi ezeket az elveket[9], a korlátokat 15, illetve 20%-ra emelve. Sajnos a lefektetett elvekhez nem társul egy egyértelmű algoritmus: bár a törvényben a megyék egyéni választókerületeinek tételesen felsorolt száma (a törvény 1. melléklete) lényegében megfelel egy objektív elosztásnak, nem világos, hogy a törvény hogyan követi majd a demográfiai változásokat és az „önkényes" számokat nem védi semmi a manipuláció vádjától. Szerencsés lenne az is, ha – mint Norvégiában– a körzetkiosztás és a listás helyek szétosztása – egy módszertani szempontból hasonló probléma – megoldására hasonló algoritmust használnánk.

A törvényalkotókat menti az a tény, hogy a korábban ismert és széles körben használt körzetkiosztási módszerek nem kompatibilisek a Velencei Bizottság ajánlásával: még akkor sem feltétlenül az ajánlásnak megfelelő kiosztást javasolnak, amikor az ajánlás egyébként teljesíthető. Az új, Leximin módszer (Biró, Kóczy, & Sziklai, 2015; Biró, Sziklai, & Kóczy, 2012) olyan egyértelmű kiosztást határoz meg, ami (leximin módon) minimalizálja az átlagtól való legnagyobb eltérést[10] - ugyanakkor megengedi azokat az anomáliákat, amik több más módszer elutasításához vezettek. Így tehát kimondhatjuk, hogy a két megközelítés elvi szempontból is különböző: míg Európában a szavazók, az Egyesült Államokban az államok közötti igazságosság (egyenlőség, illetve arányosság) a cél (Kóczy, Biró, & Sziklai, 2017).

4 Összegzés

A játékelmélet a stratégiai konfliktusok elemzésének matematikai svájci bicskája, hiszen szinte minden probléma modellezéséhez, megoldásához kínál valamilyen eszközt, de ugyanakkor ezek az eszközök esetenként nagyon különbözőek és messze túlmutatnak a fogolydilemmán és hasonló tipizált konfliktushelyzeteken.

A nonkooperatív modellek bemutatása követi a szokásos formulákat. Itt a legfőbb üzenet, hogy döntéseink során vegyük figyelembe a többi cselekvő érdekeit és ezek alapján várható döntéseit. Időben eltolt döntések esetén pedig legyünk felkészülve az összes lehetséges kontingenciára és alakítsuk úgy a játékot, hogy a szándékolt viselkedés, például egy szerződés tárgya egyensúlyi viselkedés maradjon.

A kooperatív modellek sokrétűbbek és absztraktabbak, de sokkal látványosabb alkalmazásokra adnak lehetőséget. Ahogy az alapvető elméleti kérdések tisztázódnak, egyre több kutató fordul gyakorlati problémák felé, egyre több az alkalmazottabb tudomány kutatás, cikk is, és minden korábbinál nagyobb a kutatói erőfeszítés, hogy a modelleket megismertessék, megértessék és megszerettessék a szélesebb közvéleménnyel.

Fontos megjegyezni, hogy a fejezet nem kimerítő, a játékelméleti modellek és módszerek egész sora maradt ki – részben terjedelmi okokból, részben mert a bemutatásukhoz elkerülhetetlen a súlyosabb

[9] A törvényjavaslat egy korai változata a 10, illetve 15%-os korlátokat is megtartotta. Könnyen belátható, hogy ez – amennyiben a körzetek a megyei struktúrához igazodnak – matematikailag nem teljesíthető. Ezen felül az átlagtól való eltérés helyett a körhetek közötti eltérésről szólt, ami gyakorlatilag tovább felezi a megengedett eltérést.

[10] Valójában itt a megyei választókerületek átlagos méretének átlagtól való eltérését nézzük, a tényleges választókerületek kialakítása további kis eltéréseket eredményezhet.

matematikai formalizmus. Nem beszéltünk arról a – nyilvánvaló – esetről, amikor a konfliktus bizonyos elemei (kifizetések, korábbi lépések, stb.) ismeretlenek a felek számára. A kooperatív játékokban figyelmen kívül hagytuk a harmadik feleket érő külhatásokat, az úgynevezett externáliákat. Bár a hálózati és kísérleti módszerekkel külön fejezet foglalkozik, több ismertetett módszer is kiterjeszthető hálózatokra is, illetve a sokan foglalkoznak az elméleti modellek kísérleti megerősítésével/kritikájával. Végül több olyan feltörekvő terület van, mint például a sztochasztikus játékelmélet, melyre érdemes odafigyelni, de melyeknél még nem körvonalazódtak a joggal való kapcsolódási pontok.

5 Hivatkozások

Aadland, David, & Kolpin, Van (1998): Shared irrigation costs: An empirical and axiomatic analysis. *Mathematical Social Sciences*, Vol. 35., No. 2., 203–218 pp.

Aumann, Robert J., & Maschler, Michael (1985): Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. *Journal of Economic Theory*, Vol. 36., , 195–213 pp.

Baird, Douglas G., Gertner, Robert H., & Picker, Randal C. (1994): *Game theory and the law*. Cambridge, Massachusets and London: Harvard University Press.

Balinski, Michel L., & Young, H. Peyton (1982): *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man, One Vote*. New Haven: Yale University Press.

Balinski, Michel L., & Young, H. Peyton (1994): Apportionment. In S. M. Pollock, M. H. Rothkopf, & A. Barnett (Eds.), *Handbooks in Operations Research and Management Science, Volume 6* (pp. 529–560). Amsterdam: North-Holland.

Balog, Dóra, Bátyi, Tamás László, Csóka, Péter, & Pintér, Miklós (2011): Tőkeallokációs módszerek és tulajdonságaik a gyakorlatban. *Közgazdasági Szemle*, Vol. 58., No. 7–8., 619–632 pp.

Balog, Dóra, Bátyi, Tamás László, Csóka, Péter, & Pintér, Miklós (2017): Properties of risk capital allocation methods: Core Compatibility, Equal Treatment Property and Strong Monotonicity. *European Journal of Operational Research*, Vol. 259., No. 2., 614–625 pp.

Banzhaf, John F. (1965): Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis. *Rutgers Law Review*, Vol. 19., , 317–343 pp.

Béal, Sylvain, Rémila, Éric, & Solal, Philippe (2012): On the number of blocks required to access the core. *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 160., No. 7–8., 925–932 pp.

Biró, Péter (2008): *Student Admissions in Hungary as Gale and Shapley Envisaged*. (DCS Technical Report No. TR-2008-291). Glasgow: Dept of Computing Science, University of Glasgow.

Biró, Péter, Fleiner, Tamás, Irving, Robert W., & Manlove, David F. (2010): The College Admissions problem with lower and common quotas. *Theoretical Computer Science*, Vol. 411., No. 34–36., 3136–3153 pp.

Biró, Péter, Kóczy, László Á., & Sziklai, Balázs (2015): Fair apportionment in the view of the Venice Commission's recommendation. *Mathematical Social Sciences*, Vol. 77., , 32–41 pp.

Biró, Péter, Sziklai, Balázs, & Kóczy, László Á. (2012): Választókörzetek igazságosan? *Közgazdasági Szemle*, Vol. 59., No. 11., 1165–1186 pp.

Coleman, James S. (1971): Control of collectives and the power of a collectivity to act. In B. Lieberman (Ed.), *Social Choice* (pp. 192–225). New York: Gordon and Breach.

Dixit, Avinash K., & Nalebuff, Barry J. (1991): *Thinking strategically*. New York - London: W W Norton.

Dubins, LE, & Freedman, DA (1981): Machiavelli and the Gale-Shapley algorithm. *American*

Mathematical Monthly, Vol. 88., No. 7., 485–494 pp.

Felsenthal, Dan S., & Machover, Moshé (1998): *The measurement of voting power: Theory and practice, problems and paradoxes*. Cheltenham: Edward Elgar.

Forgó, Ferenc, Pintér, Miklós, Simonovits, András, & Solymosi, Tamás (2006): *Kooperatív játékelmélet*. Budapest.

Gale, David, & Shapley, Lloyd S. (1962): College admissions and the stability of marriage. *American Mathematical Monthly*, Vol. 69., No. 1., 9–15 pp.

Gedai, Endre, Kóczy, László Á., Meier zu Köcker, Gerd, & Zombori, Zita (2015): *About Cooperation, Selfishness and Joint Risks in Clusters*. *MPRA Paper*. Copenhagen-Berlin: University Library of Munich, Germany.

Gibbons, Robert (2005): *Bevezetés a játékelméletbe*. Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Grimmett, Geoffrey R. (2012): European apportionment via the Cambridge Compromise. *Mathematical Social Sciences*, Vol. 63., No. 2., 68–73 pp.

Kóczy, László Á. (2006): The core can be accessed with a bounded number of blocks. *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 43., No. 1., 56–64 pp.

Kóczy, László Á. (2010): A magyarországi felvételi rendszerek sajátosságai. *Közgazdasági Szemle*, Vol. 57., No. 2., 142–164 pp.

Kóczy, László Á. (2011): Lisszaboni kilátások. *Közgazdasági Szemle*, Vol. 58., No. 10., 1045–1058 pp.

Kóczy, László Á. (2012): Beyond Lisbon: Demographic trends and voting power in the European Union Council of Ministers. *Mathematical Social Sciences*, Vol. 63., No. 2., 152–158 pp.

Kóczy, László Á. (2016): *How Brexit affects European Union power distribution*. (MTDP No. 16/11) *IEHAS Discussion Papers*. Institute of Economics, Centre for Economic and Regional Studies, Hungarian Academy of Sciences.

Kóczy, László Á., Biró, Péter, & Sziklai, Balázs (2017): US vs. European apportionment practices: The conflict between monotonicity and proportionality. In U. Endris (Ed.), *Trends in Computational Social Choice*. AI Access.

Lemaire, Jean (1984): An application of game theory: cost allocation. *Astin Bulletin*, Vol. 14., No. 2., 61–81 pp.

Littlechild, S. C., & Owen, Guillermo (1973): A simple expression for the Shapley value in a special case. *Management Science*, Vol. 20., No. 3., 370–372 pp.

Littlechild, S. C., & Thompson, G. F. (1977): Aircraft landing fees: a game theory approach. *The Bell Journal of Economics*, Vol. 8., No. 1., 186–204 pp.

Mérő, László (2000): *Mindenki másképp egyforma*. Tercium.

Mészáros, József, & Szakadát, István (1993): *Választási eljárások - választási rendszerek*. (BME Szociológia Tanszék kiadványai). Budapest.

Myerson, Roger B. (1991): *Game Theory: Analysis of Conflict*. Cambridge, Massachusets -- London, England: Harvard University Press.

Nash, John F. (1950): Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Vol. 36., , 48–49 pp.

Nash, John F. (1951): Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, Vol. 54., No. 2., 286–295 pp.

Penrose, Lionel S. (1946): The elementary statistics of majority voting. *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 109., No. 1., 53–57 pp.

Peters, Hans (2008): *Game theory: A Multi-leveled approach*. Springer.

Pintér, Miklós (2009): A Shapley-érték axiomatizálásai. *Alkalmazott Matematikai Lapok*, Vol. 26., , 289–315 pp.

Pukelsheim, Friedrich (2014): *Proportional Representation*. Heidelberg: Springer.

Roson, Roberto, & Hubert, Franz (2015): Bargaining Power and Value Sharing in Distribution Networks: A Cooperative Game Theory Approach. *Networks and Spatial Economics*, Vol. 15., No. 1., 71–87 pp.

Roth, Alvin E. (Ed.) (1988): *The Shapley Value*. Cambridge: Cambridge University Press.

Roth, Alvin E. (2008): Deferred acceptance algorithms: history, theory, practice, and open questions. *International Journal of Game Theory*, Vol. 36., No. 3–4., 537–569 pp.

Roth, Alvin E., & Sotomayor, Marilda A. (1990): *Two-sided matching. A study in game-theroretic modeling and analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.

Selten, Reinhard (1965): Spieltheoretische Behandelung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit. Teil I: Bestimmung des dynamischen Preisgleichgewichts. *Zeitschrift Für Die Gesamte Staatswissenschaft / Journal of Institutional and Theoretical Economics*, Vol. 121., No. 2., 301–324 pp.

Shapley, Lloyd S. (1953): A value for n-person games. In H. W. Kuhn & A. W. Tucker (Eds.), *Contributions to the Theory of Games II* (Vol. II, pp. 307–317). Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Shapley, Lloyd S. (1955): *Markets as cooperative games*. (No. P-629).

Shapley, Lloyd S., & Shubik, Martin (1954): A method for evaluating the distribution of power in a committee system. *American Political Science Review*, Vol. 48., No. 3., 787–792 pp.

Słomczyński, Wojciech, & Życzkowski, Karol (2006): Penrose voting system and optimal quota. *Acta Physica Polonica B*, Vol. 37., , 3133 pp.

Tasnádi, Attila (2014): *Igazságos elosztások*. Budapest: Typotex.

Venice Commission (2002): Code of Good Practice in Electoral Matters. *CDL-AD*, Vol. 23., No. 190., 1–33 pp.

Yang, Yi-You (2010): On the accessibility of the core. *Games and Economic Behavior*, Vol. 69., No. 1., 194–199 pp.

Życzkowski, Karol, & Słomczyński, Wojciech (2004): Voting in the European Union: The square root system of Penrose and a critical point. *ArXiv*, Vol. cond-mat., No. 0405396., 25 pp.