Alkalmazott Matematikai Lapok **35** (2018), 125–144

MIRE JÓK A STABIL PÁROSÍTÁSOK?

(Stabil párosítások és alkalmazásaik)

FLEINER TAMÁS

A stabil párosítás fogalmát 1962-ben Gale és Shapley vezették be. A fogalom rendkívül sikeresnek bizonyult nem csupán az ún. kétoldalú piacokra történő gyakorlati alkalmazhatósága miatt, hanem azért is, mert több, elméleti szempontból érdekes probléma esetében eredményes a stabil párosításokra (illetve azok általánosítására) alapozott megközelítés. Az alábbiakban azt mutatjuk be, hogy a stabil párosítások létezése és azok struktúrája hogyan köthető Knaster és Tarski egy fixponttételéhez, és milyen időnként meglepő alkalmazásai vannak az így kapott eredményeknek. A jelen munka alapja a 2017-ben Cegléden rendezett XXXII. Magyar Operációkutatás Konferencián elhangzott, hasonló című előadás.

1. Bevezetés

Sokat idézett cikkükben Gale és Shapley vetették fel az alábbi problémát [18]. Képzeljük el, hogy n férfi és n nő mindegyike sorba rendezi az ellentétes nem képviselőit aszerint, hogy számára az adott illető hányadikként jön szóba mint házastárs. Ha a fenti szereplők n házaspárt alkotnak, akkor az így meghatározott párosítás instabil, ha található olyan férfi és nő, akik egymást az említett sorban kölcsönösen előbbre helyezték, mint a házastársukat. Természetes cél úgy összeházasítani a példában szereplő személyeket, hogy az imént leírt instabilitás ne lépjen fel. Ez a gondolat több általánosítási lehetőséget rejt magában. Elképzelhető, hogy az egyes játékosok nem egy, hanem több házastársat keresnek. Ennek egy gyakorlati szempontból is érdekes változata az egyetemi felvételi probléma, aholis férfiak és nők helyett az egyetemi szakok és az oda jelentkezők alkotják a két, egymást sorba rendező halmazt, továbbá az egyetemi szakok mindegyike rendelkezik egy, a felvehető hallgatók számát felülről korlátozó kvótával. Ebben a modellben egy felvételi séma (aholis minden jelentkezőt legfeljebb egy szakra vesznek fel, és egyetlen szak sem lépi túl a kvótáját) akkor lesz instabil, ha van olyan szak és hallgató, hogy a szak szívesen felvenné e hallgatót (esetleg azon az áron, hogy egy számára kevésbé értékes hallgatót elutasít), és az említett hallgató pedig jobban jár, ha a felvételi séma által előírt helyett erre a szakra nyer felvételt. Érdemes megemlíteni, hogy a Magyarországon a felvi.hu által meghatározott vonalhúzásból adódó felvételi séma éppen ezt a fajta instabilitást zárja ki.

Elképzelhető az is, hogy nem minden férfi-nő (vagy szak-jelentkező) pár valósulhat meg, azaz a lehetséges házaspárokat (felvételeket) leíró gráf nem teljes páros gráf. Sőt: ennek a gráfnak még csak párosnak sem kell lennie. Erre az általánosításra vezet az a szobatárs probléma, ahol – mondjuk – kétágyas kollégiumi szobákban kell elhelyezni néhány tanulót, akik mindegyike aszerint rendezte sorba a lehetséges szobatársait, hogy mennyire szívesen lakna egy szobában az adott személlyel. Itt egy szobabeosztás instabilitása azt jelenti, hogy található két kollégista, akik szívesebben laknának együtt, mint a beosztás szerinti szobatársukkal.

További, a gyakorlati alkalmazás szempontjából is érdekes általánosítási lehetőség, ha nem követeljük meg az egyes részvevőktől, hogy szigorú sorrendet határozzanak meg lehetséges párjaikon, így a döntetlenek is megengedettek. Az egyetemi felvételi problémában például a jelenkezőknek ugyan szigorú sorrendet kell felállítaniuk a jelentkezéseik között, ám az egyetemi szakok esetében megengedett, hogy két jelentkezőt egyformán értékeljenek, hiszen kizárólag a felvételi pontszám dönt, ami minden további nélkül megegyezhet.

Visszatérve az eredeti problémára: Gale és Shapley az ún. lánykérő algoritmus segítségével igazolták, hogy mind a házassági, mind az egyetemi felvételi problémában mindig létezik stabil megoldás. Knuth könyvében Conwaynek tulajdonítja azt az észrevételt, hogy a stabil párosítások hálót alkotnak [28]. Ez a megfigyelés később elengedhetetlenül fontosnak bizonyult számos további, stabil párosításokkal kapcsolatos eredményhez. A stabil párosítások vizsgálata egyébként számos tudományterület eszköztárát felhasználja: Knuth már említett [28] könyvét egyfajta algoritmuselméleti bevezetőnek szánta azzal, hogy egy kézzelfogható példán szemléltessen számos, az algoritmusok tervezéséhez és analíziséhez szükséges módszert. A ma már klasszikus bonyolultságelméleti és további algoritmikus vonatkozások tekintetében érdemes megemlíteni még Gusfield és Irving könyvét is [20]. A stabil párosításokon történő optimalizálás is természetes feladat, és ehhez különféle poliéderes módszerek bizonyulnak hasznosnak [41, 36, 5, 33, 1, 40, 11]. A gyakorlati alkalmazások kapcsán pedig a játékelméletből ismerős fogalmak és módszerek bukkannak fel, elég talán csak Roth és Sotomayor könyvét említeni [35].

Mai tudásunk alapján bátran kijelenthető, hogy Gale és Shapley a stabil párosítás fogalmának bevezetésével jóval többet ért el, mint a cikkükben megfogalmazott célt, azaz a matematikai-játékelméleti gondolkodásmód népszerűsítését. A munkájuk nyomán indult kutatás eredményeiből világossá válik, hogy mind a gyakorlati alkalmazások, mind pedig az elméleti jelentőségű eredmények okán kivételesen jól eltalált és használható fogalommal van dolgunk. Az előbbi tényt a stabil párosítások elméletében és a mechanizmustervezésben kifejtett munkásságukért 2012-ben Rothnak és Shapleynek ítélt közgazdasági Nobel-emlékdíjnál talán nem is kell jobban indokolni, míg az utóbbira példa lehet Galvinnak a Dinitz-sejtésre adott, lényegében stabil párosításokat felhasználó bizonyítása [19] vagy Király váratlan áttörést hozó közelítő algoritmusa [25].

Érdemes még néhány szót szólni az általánosításokkal kapcsolatos eredményekről. Az általánosított stabilitásfogalom manifesztálódhat részben rendezett halmazok közös antiláncában vagy matroidok közös függetlenjében [14], de definiálható hálózati folyamok stabilitása is a közgazdaságtanból ismert ellátási láncok egyfajta modelljeként [12]. A stabil folyammodell szorosan kapcsolódik Ostrovskyéhoz, ami bizonyos tekintetben általánosabb, másfelől speciálisabb az előbbinél [30]. Minden esetre a közgazdász-szakirodalomban komoly áttörést hozott, és számos további eredmény kiindulópontja lett.

A stabil párosításoknak mára már komoly irodalma van. A tudomány 2013 körüli állását csak az algoritmikus vonatkozások tekintetében foglalja össze Manlove impozáns könyve [29]. A jelen munka egy ennél sokkal szerényebb célt tűz ki maga elé: az olvasót egy unortodox módszer alkalmazásába vezeti be, és mutat rá annak néhány érdekes vonatkozására. Mintegy mellékesen igyekszik megváltoztatni a stabil párosítások „történelméről” alkotott képet is. Emlékezetes, hogy Gale és Shapley 1962-ben publikálták az első cikket a témában. Később Roth mutatott rá arra, hogy a lánykérő algoritmus egy változata már 1952 óta alkalmazásban van az USA-ban [32], a stabil párosítások ismert történelme tehát inkább ekkortól kezdődik. Mi arra teszünk kísérletet, hogy még korábbra, konkrétan 1928-ra datáljuk a történet kezdetét, amikoris Knaster és Tarski egy monoton halmazfüggvényekről szóló fixponttételt publikáltak (akkor még bizonyítás nélkül) [27]. Később, 1955-ben Tarski igazolt egy hálóelméleti általánosítást, aminek alkalmazhatóságát különféle, analízisből ismert középértéktételek levezetésével illusztrálta [39]. Kiderült, hogy a tételnek már a véges esetben is nemtriviális következményei vannak. Világosan megmagyarázza ugyanis, hogy miért is működik a lánykérő algoritmus, illetve a fixpontok hálótulajdonságából közvetlenül levezethetővé válik a stabil párosítások hálótulajdonsága. A stabil párosítások és a monoton leképezések fixpontjai közti kapcsolatot a Kelso és Crawford munkája nyomán bevezetett kiválasztási függvények alkalmazása teremti meg [24].

Terjedelmi okok miatt nem térünk ki a részletekre, csak megemlítünk néhány további, stabil párosítások általánosításaival kapcsolatos jelentős eredményt. Sokáig kérdés volt, hogy egy nem feltétlenül páros gráfban eldönthető-e polinomidejű algoritmussal a stabil párosítás létezése. A pozitív válasz Irvingtől származik, aki a lánykérő algoritmus lépéseiből álló első fázis után ún. rotációkat eliminál algoritmusa második fázisában, míg végül stabil párosítást talál, ha egyáltalán van ilyen a gráfban [23]. Tan később kiterjesztette Irving algoritmusát, és ennek segítségével igazolta stabil félpárosítások létezését, amelyek $\frac{1}{2}$ súlyú éleket is tartalmazhatnak [38]. Az is kiderült, hogy pontosan akkor van stabil párosítás egy gráfban, ha minden stabil félpárosítás stabil (egész)párosítás. Aharoni és Fleiner arra mutattak rá, hogy a stabil félpárosítás létezése a Scarf-lemma következményeként is felfogható, a Scarf-lemma pedig tekinthető a Brouwer-féle fixponttétel egy rokonának [3]. Ilyenformán a stabil párosítások fixpontokként is kezelhetők, páros gráf esetén egy monoton halmazfüggvény, nempáros gráf esetén egy ennél bonyolultabb leképezésként. Cechlárová és Fleiner a stabil b-párosítás keresésére adtak eljárást Irving algoritmusának általánosításával [8]. Biró szerzőtársaival a stabil párosítások változását vizsgálta abban az esetben, ha egy új játékos jelenik meg a piacon. Eredményei segítségével nempáros gráf esetén is definiálható egyfajta barát-ellenség viszony a játékosok között aszerint, hogy ha az egyikük távozik, akkor ettől a másik helyzete javul-e vagy romlik [6].

A jelen munka az alábbiak szerint épül fel. Az 1.1. részben a stabil párosításokkal kapcsolatos alapvető terminológiát tisztázzuk, és egy kevéssé ismert bizonyítást adunk a Gale–Shapley-tételre. Az 1.2. részben tárgyaljuk a további modellek szempontjából alapvető fontosságú kiválasztási függvényeket és azok számunkra fontos tulajdonságait. Az 1.3. részben arra mutatunk rá, hogy a lánykérő algoritmus kulcsa Tarski fixponttétele. Ez a megfigyelés rendkívül hatékony eszköznek bizonyul különféle általánosítások és kiterjesztések igazolásához. Ilyenekre látunk példát a 2. részben, aholis matroidokra, ill. részbenrendezésekre mutatunk be stabilitás-jellegű eredményeket. Ezután a 3. részben különféle kernelek hálótulajdonságával kapcsolatban mutatunk rá néhány érdekes tényre. Az ezt követő 4. rész további, időnként meglepő alkalmazásokra mutat be néhány példát. A Tarski-féle fixponttétel szerint monoton leképezés fixpontjai hálót alkotnak, ezért bizonyos stabil párosítás poliéderekre közvetlenül alkalmazható Hoffman-hálópoliéderekről szóló egyik eredménye. Az 5. részben ennek segítségével adjuk meg különféle általánosított stabil párosítás poliéderek egyfajta implicit karakterizációját. Ugyanitt említjük meg a stabil b-párosítás poliédernek egy kevésbé implicit leírását is, amely a stabil b-párosítások egy meglepő tulajdonságát aknázza ki. Végül a 6. rész foglalja össze az áttekintett anyagot.

1.1. Stabil párosítások

Legyen $G = (V, E)$ gráf, és legyen minden v csúcsra adott a v-re illeszkedő élek $E(v)$ halmazának egy $\preceq_v$ lineáris rendezése, amit preferenciarendezésnek is szokás nevezni. Azt mondjuk, hogy az e él *jobb* a v számára az f élnél, ha $e \preceq_v f$ teljesül. Élek egy $M \subseteq E$ halmaza *párosítás*, ha az M-beli éleknek nincs közös csúcsa, azaz $d_M(v) \leq 1$ teljesül minden $v \in V$ csúcsra. Tetszőleges $b : V \to \mathbb{N}$ korlátok esetén az $M \subseteq E$ halmazt *b-párosításnak* nevezzük, ha $d_M(v) \leq b(v)$ teljesül G minden v csúcsára. Világos, hogy a párosítás a b-párosítás speciális esete, mégpedig $b \equiv 1$ esetén. Azt mondjuk, hogy az M párosítás *dominálja* az $e = uv$ élt, ha M-nek van olyan m éle, amire $m \preceq_u f$, vagy $m \preceq_v f$ teljesül. Hasonlóan, az M b-párosítás *b-dominálja* az $e = uv$ élt, ha M-nek vannak olyan $m_1, \ldots, m_k$ élei, amire $m_i \preceq_u f$ teljesül minden $1 \leq i \leq k = b(u)$ esetén, vagy $m \preceq_v f$ teljesül minden $1 \leq i \leq k = b(v)$ esetén. Az e él akkor *blokkolja* az M (b-)párosítást, ha M nem (b-)dominálja e-t. Végül M akkor *stabil* (b-)párosítás, ha nincs blokkoló él, azaz, ha M minden M-en kívüli élt dominál. Ha például G

egy páratlan kör, és valamilyen körüljárás szerint minden csúcs a körüljárásban korábbi élt preferálja a későbbihez képest, akkor könnyen látható, hogy G-nek nincs stabil párosítása. Páros gráfok esetén azonban nem ez a helyzet, és ezt az alábbi tétel garantálja.

1.1. Tétel. (Gale és Shapley [18]) *Tetszőleges G páros gráfon tetszőleges preferenciák esetén létezik stabil párosítás.*

Gale és Shapley valójában a fenti tételt a $K_{n,n}$ teljes páros gráfra igazolták, azonban ezt az eredményt kiterjesztve azt is megmutatták, hogy mindig létezik stabil b-párosítás, ha $b \equiv 1$ teljesül a páros gráf egyik színosztályán. Gale és Shapley bizonyítása a lánykérő algoritmus, ami a probléma tetszőleges bemenetéhez hatékonyan talál egy stabil párosítást. Az algoritmus működése (fiú-lány-házasság terminológiában) az alábbi. Először minden fiú megkéri a számára legszimpatikusabb lány kezét. Ha minden fiú más-más lányt kér meg, akkor a lánykérésekből házasságok lesznek, és ez stabil. Ha azonban van olyan lány, akit egynél több fiú kér meg, úgy az ilyen lányok a legjobb kérőjük kivételével minden más kérőjüket kikosarazzák. Ha történt kikosarazás, úgy a fiúk ismételten megkérik a legszimpatikusabb olyan lány kezét, aki még nem kosarazta ki az adott fiút. Előbb utóbb nem lesz kikosarazás: ekkor az utolsó lánykérésekből házasságok lesznek, és az így kapott párosítás az algoritmus outputja.

Gale és Shapley cikkükben megjegyzik, hogy a tárgyalt eredmény kiváló ellenpélda arra a közkeletű vélekedésre, miszerint minden valamirevaló matematikai levezetés óhatatlanul nehéz számításokat és/vagy különféle obskurus képleteket tartalmaz. A lánykérő algoritmus leírása, ill. helyességének igazolása például mentes mindezektől, mégis egyértelműen egy „tisztességes" matematikai bizonyítás. Mindezt nem vitatva, az alábbiakban rámutatunk az algoritmus helyességének egy unortodox bizonyítására. Ez egyetlen, nempáros gráfokra is érvényes, apró megfigyelésen alapul.

1.1. Lemma. *Legyen $G = (V, E)$ (nem feltétlenül páros) gráf minden v csúcsához megadva a $\preceq_v$ preferenciarendezés a v-re illeszkedő élek $E(v)$ halmazán, valamint tegyük fel, hogy $e \prec_v f$ teljesül arra az $e = uv$ élre, ami első az u szerinti $\preceq_u$ rendezés szerint. Ekkor G-ben a stabil párosítások halmaza megegyezik a $G - f$ gráf stabil párosításainak halmazával.*

A lemma szerint tehát „ingyen" törölhetünk G-ből bizonyos éleket anélkül, hogy ettől akár csak egy stabil párosítás is eltűnne vagy keletkezne. Páros gráf esetén ezekkel a lépésekkel előbb-utóbb oda jutunk, hogy nem lehet további élt törölni, ezért mind a fiúk, mind a lányok más-más lányt, ill. fiút szerepeltetnek a preferenciasorrendjük élén. Könnyen látható, hogy ilyenkor mind a fiúk legjobb választásai, mind a lányok legjobb választásai egy-egy stabil párosítást határoznak meg az éltörlések utáni gráfban, így persze az 1.1. lemma többszöri alkalmazása miatt az eredeti G gráfban is. Sőt, az is azonnal látszik a gondolatmenetből, hogy a lánykérő algoritmus által szolgáltatott stabil párosítás *fiúoptimális*, ami azt jelenti, hogy abban minden fiú a számára stabil párosításban elérhető legszimpatikusabb lányt kapja feleségül. De az is következik mindebből, hogy ez az eljárás minden lány a számára lehető legrosszabb olyan férjet szolgáltatja, aki stabil párosításban az adott lány párja lehet.

A fent vázolt bizonyítás minimális módosítással igazolja a lánykérő algoritmus b-párosításokra történő értelemszerű kiterjesztésének helyességét, valamint azt is, hogy a megtalált stabil b-párosítás a fenti értelemben optimális lesz az ajánlatokat tevő oldal számára.

Gráfelméleti módszerekkel nem nehéz a fiúoptimális párosítás létezésének azt az általánosítását sem igazolni, amely szerint a stabil (b-)párosítások hálót alkotnak az alábbiak szerint. Ha M_1 és M_2 stabil (b-)párosítások, és minden fiú az $M_1 \cup M_2$-ből szabadon választja magának a (b-)párosítás él(eke)t, akkor az így választott élek ismét stabil (b-)párosítást alkotnak.

1.2. Kiválasztási függvények

Stabil párosítások és általánosításaik vizsgálatakor rendkívül hasznos segédeszköz a kiválasztási függvény fogalma, mely segítségével könnyen leírható az egyes játékosok preferenciája. Az alább leírt tárgyalásmód unortodoxiája a determinánsokra alapozott felépítés. Tetszőleges E alaphalmaz esetén az $\mathcal{F} : 2^E \to 2^E$ leképezés

- *kiválasztási függvény*, ha van olyan $\mathcal{D} : 2^E \to 2^E$ leképezés, amelyre $\mathcal{F}(X) = X \cap \mathcal{D}(X)$ teljesül az E minden X részhalmazára (az ilyen $\mathcal{D}$ leképezést az $\mathcal{F}$ *determinánsának* nevezzük), ill.
- *monoton*, ha $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{F}(Y)$ teljesül $X \subseteq Y \subseteq E$ esetén, valamint
- *antiton*, ha $\mathcal{F}(X) \subseteq \mathcal{F}(Y)$ teljesül $Y \subseteq X \subseteq E$ esetén, végül
- *komonoton*[1], ha $\mathcal{F}$ olyan kiválasztási függvény, aminek van antiton determinánsa[2].

Világos, hogy $\mathcal{F}$ pontosan akkor kiválasztási függvény, ha $\mathcal{F}(X) \subseteq X$ teljesül minden $X \subseteq E$ esetén, továbbá, hogy egyazon kiválasztási függvénynek számos különböző determinánsa létezhet, $\mathcal{F}$ például mindig determinánsa saját magának. A „tankönyvi” példa komonoton kiválasztási függvényre a fiúk kiválasztási függvénye a Gale–Shapley-modellben.

[1] Az angol nyelvű szakirodalomban „substitutable” tulajdonságnak nincs frappáns magyar neve, ezért most a komonoton kifejezést használjuk, utalva arra, hogy a ki nem választott elemek által definált kiválasztási függvény monoton.

[2] A komonoton tulajdonság szokásos definíciója azt kívánja meg, hogy tetszőleges $X \subseteq E$ és $e \in E$ esetén $X \cap F(X+e) \subseteq F(X)$ teljesüljön. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy ha egy lehetőség nem érdekel bennünket, akkor a választék bővülésétől ugyanez a lehetőség nem válik értékessé.

1.1. Példa. Legyen $G = (V, E)$ véges páros gráf, melynek színosztályait a fiúk F, ill. lányok L halmaza alkotja, és tartozzék minden $v \in V$ csúcshoz egy $\preceq_v$ lineáris rendezés a v-re illeszkedő élek $E(v)$ halmazán. Ekkor tetszőleges $X \subseteq E$ élhalmazból a fiúk által kiválasztott élek $\mathcal{F}_F(X)$ halmaza nem más, mint azon X-beli $e = fl$ élek halmaza, amelyre e az f fiú számára a legjobb él X-ben a $\preceq_f$ rendezés szerint.

Az 1.1. példában szereplő kiválasztási függvény egy könnyen láthatóan antiton determinánsa például a $\mathcal{D}_F(X) := \bigcup_{v\in F} \bigcap_{e\in X\cap E(v)} \mathcal{D}_F(v, e)$ leképezés, ahol $e \in E(v)$ esetén $\mathcal{D}_F(v, e) := \{e' \in E(v) : e' \preceq_v e\}$ azon élek halmaza, amelyek v számára a $\preceq_v$ preferencia szerint jobbak e-nél. A fenti példabelihez hasonlóan definiálható a lányok $\mathcal{F}_L$ kiválasztási függvénye és az ahhoz tartozó $\mathcal{D}_L$ determináns.

1.1. Megfigyelés. Az $S \subseteq E$ pontosan akkor stabil párosítás a $G = (V, E)$ páros gráfban, ha vannak olyan $X, Y \subseteq E$ élhalmazok, amelyekre $\mathcal{D}_F(X) = Y$ és $\mathcal{D}_L(Y) = X$ teljesül.

Kiválasztási függvényeknek a mi szempontunkból alapvető fontosságú tulajdonságai az alábbiak. Az $\mathcal{F} : 2^E \to 2^E$ kiválasztási függvény

- *IRC* tulajdonságú, ha tetszőleges $\mathcal{F}(X) \subseteq Y \subseteq X$ esetén $\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(Y)$ teljesül,
- *útfüggetlen*, ha $X, Y \subseteq E \Rightarrow \mathcal{F}(X \cup Y) = \mathcal{F}(X \cup \mathcal{F}(Y))$,
- *növekedő*, ha $X \subseteq Y$ esetén $|\mathcal{F}(X)| \leq |\mathcal{F}(Y)|$ áll.

1.2. Megfigyelés. Legyen E véges halmaz és $\mathcal{F} : 2^E \to 2^E$ komonoton kiválasztási függvény. Ekkor $\mathcal{F}$ pontosan akkor IRC tulajdonságú, ha $\mathcal{F}$ útfüggetlen. Továbbá, ha $\mathcal{F}$ növekedő, akkor $\mathcal{F}$ útfüggetelen (és így IRC tulajdonságú) is egyúttal.

1.2. LEMMA. (Fleiner, Jankó [16]) *Legyen E véges halmaz és $\mathcal{F} : 2^E \to 2^E$ komonoton kiválasztási függvény. Ekkor $\mathcal{F}$ pontosan akkor útfüggetlen, ha $\mathcal{F}$-nek létezik olyan $\mathcal{D}$ antiton determinánsa, amelyre*

$$\mathcal{D}(X) = \mathcal{D}(\mathcal{F}(X)) \text{ teljesül tetszőleges } X \subseteq E \text{ esetén.} \tag{1}$$

1.3. Tarski fixponttétele és a Gale–Shapley-algoritmus

Az $(L, \preceq)$ részbenrendezett halmazt (avagy posetet) *hálónak* nevezzük, ha bármely $x, y \in L$ elemnek van egy $x \wedge y$-nal jelölt legnagyobb alsó, és egy $x \vee y$-nal jelölt legkisebb felső korlátja. Ha a részbenrendezés világos a szövegkörnyezetből, akkor a beszélhetünk L hálóról. Az L háló akkor *teljes*, ha tetszőleges $X \subseteq L$

halmaznak van egy $\bigwedge X$-szel jelölt legnagyobb alsó és egy $\bigvee X$-szel jelölt legkisebb felső korlátja. Teljes háló esetén 0, ill. 1 jelöli a háló legkisebb és legnagyobb elemét, azaz $0 = \bigwedge L$, ill. $1 = \bigvee L$. Világos, hogy minden véges háló teljes, ám ez fordítva nem igaz, pl. az egész számok véges részhalmazai ugyan hálót alkotnak a tartalmazkodásra, de ennek a halmaznak nincs legnagyobb eleme, így ez a háló nem teljes. Az előző, 1.2. részben definiált fogalmak minden további nélkül definiálhatók hálókon azzal, hogy a $\subseteq$ reláció a háló $\preceq$ rendezésének, a $\cap$ és $\cup$ műveletek pedig a $\wedge$ és $\vee$ hálóműveleteknek felelnek meg. Teljes hálókról szól Tarski alábbi fixponttétele.

1.2. Tétel. (Tarski [39]) *Ha $(L, \preceq)$ teljes háló, és $\mathcal{F} : L \to L$ monoton leképezés, akkor $\mathcal{F}$ fixpontjainak halmaza nem üres, továbbá $\mathcal{F}$ fixpontjainak halmaza teljes hálót alkot a $\preceq$ rendezésre nézve.*

Megemlítjük, hogy a számunkra legfontosabb $(L, \preceq) = (2^E, \subseteq)$ esetre az 1.2. tételt Knaster és Tarski bizonyították [27]. Ugyancsak érdemes megfigyelni, hogy véges L háló esetén a legkisebb fixpont megkapható, mint a $0 \preceq \mathcal{F}(0) \preceq \preceq \mathcal{F}(\mathcal{F}(0)) \preceq \ldots$ lánc legnagyobb eleme. (Hasonlóan, a legnagyobb fixpont az $1 \succeq \mathcal{F}(1) \succeq \mathcal{F}(F(1)) \succeq \ldots$ lánc legkisebb eleme.) Tarski az 1.2. tétel alkalmazását végtelen hálókon különféle középértéktételek levezetésével illusztrálta. A másik jól ismert alkalmazás, a Cantor–Bernstein-tétel bizonyítása szintén végtelen hálók segítségével történik. Azonban az 1.2. tételnek már véges hálókon is izgalmas következményei vannak.

1.1. Következmény. ([10]) *Ha $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ komonoton kiválasztási függvények, akkor találhatók az E-nek olyan X, Y részhalmazai, melyre $Y = \mathcal{D}_\mathcal{F}(X)$ és $X = \mathcal{D}_\mathcal{G}(Y)$ teljesül, ahol $\mathcal{D}_\mathcal{F}$, ill. $\mathcal{D}_\mathcal{G}$ az $\mathcal{F}$, ill. a $\mathcal{G}$ egy-egy antiton determinánsa. Továbbá az ilyen tulajdonásgú (X, Y) párok hálót alkotnak a $\preceq$ rendezésre, ahol $(X_1, Y_1) \preceq (X_2, Y_2)$, ha $X_1 \subseteq X_2$ és $Y_2 \subseteq Y_1$.*

Az 1.1. következmény motiválja az alábbi definíciót.

1.1. Definíció. Legyenek $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ komonoton kiválasztási függvények. Az E alaphalmaz K részhalmazát *$\mathcal{F}\mathcal{G}$-kernelnek* nevezzük, ha léteznek olyan $X, Y \subseteq E$ halmazok, valamint az $\mathcal{F}$ és a $\mathcal{G}$-nek olyan $\mathcal{D}_\mathcal{F}$ és $\mathcal{D}_\mathcal{G}$ antiton determinánsai, amelyekre

$$K = X \cap Y,\ Y = \mathcal{D}_\mathcal{F}(X) \text{ és } X = \mathcal{D}_\mathcal{G}(Y) \tag{2}$$

teljesül.

Az 1.1. definícióban szereplő antiton determinánsok bár általában sokféleképp választhatók, útfüggetlen kiválasztási függvények esetén nem játszanak lényeges szerepet a definícióban. Ezt mutatja az alábbi lemma.

1.3. Lemma. ([10]) *Legyenek $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ útfüggetlen és komonoton kiválasztási függvények, K egy $\mathcal{F}\mathcal{G}$-kernel, $\mathcal{D}_\mathcal{F}$ és $\mathcal{D}_\mathcal{G}$ pedig az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ tetszőleges,* *az (1) tulajdonsággal rendelkező antiton determinánsai. Ekkor léteznek olyan X, Y részhalmazai E-nek, amelyre (2) teljesül.*

Az 1.2. és az 1.3. lemmák miatt útfüggetlen kiválasztási függvényekre az 1.1. következmény megfogalmazható a determinánstól független módon az alábbiak szerint.

1.2. KÖVETKEZMÉNY. ([10]) *Ha $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ útfüggetlen, komonoton kiválasztási függvények, akkor létezik $\mathcal{FG}$-kernel, továbbá az $\mathcal{FG}$-kernelek hálót alkotnak arra a $\preceq_{\mathcal{F}}$ részbenrendezésre, amire $X \preceq_{\mathcal{F}} Y$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathcal{F}(X \cup Y) = X$. Ráadásul az $\mathcal{FG}$-kerneleken a $\preceq_{\mathcal{F}}$ részbenrendezés pontosan a fordítottja a $\preceq_{\mathcal{G}}$ részbenrendezésnek.*

Ha a fentieken túl az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ kiválasztási függvények növekedők is, akkor tetszőleges K_1, K_2 $\mathcal{FG}$-kernelek esetén $K_1 \vee K_2 := \mathcal{F}(K_1 \cup K_2)$ és $K_1 \wedge K_2 := \mathcal{G}(K_1 \cup K_2)$ szintén $\mathcal{FG}$-kernelek, továbbá

$$\chi(K_1) + \chi(K_2) = \chi(K_1 \vee K_2) + \chi(K_1 \wedge K_2) \tag{3}$$

teljesül ezen kernelek karakterisztikus függvényeire.

Illusztrációként álljon itt egy példa az 1.2. következmény kernel létezéséről szóló részének alkalmazására.

1.2. Példa. (Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, 2007, 3. feladat) Legyen H a sík rácspontjainak tetszőleges véges halmaza. Ekkor H-nak bizonyosan létezik olyan K részhalmaza, melyre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

1. a sík bármely tengelypárhuzamos (azaz függőleges vagy vízszintes) egyenese K-t legfeljebb 2 pontban metszi,
2. $H \setminus K$ bármely pontja rajta van egy K-beli végpontokkal rendelkező, tengelypárhuzamos szakaszon.

Az 1.1. megfigyelésből és az 1.1. következményből azonnal adódik Gale és Shapely 1.1. tétele. Ennél azonban több is látszik. Az 1.1. megfigyelés miatt a stabil párosítások megegyeznek az $\mathcal{FG}$-kernelekkel, amelyek pedig egy monoton leképezés fixpontjaival azonosak. Az 1.2. tétel miatt a fixpontok teljes hálót alkotnak, így van a fixpontok között legkisebb és legnagyobb is. Innen közvetlenül adódik, hogy a stabil párosítások között van fiúoptimális (amelyben minden fiú a legjobb olyan partnert kapja, amelyet stabil párosításban megkaphat, és egyúttal minden lány a lehetséges legrosszabb stabil partnerével van párosítva), és lányoptimális is (amely szerepcserével definiálható). Az is kiderül, hogy a Gale–Shapley-algoritmus tekinthető az imént említett monoton függvény iterációjának (ami – mint láttuk – a legkisebb, ill. legnagyobb fixpontot találja meg). Blair hálótulajdonságról szóló eredményét sem nehéz igazolni az 1.2. következmény felhasználásával.

1.3. Tétel. (Blair [7]) *Legyen* $G = (V, E)$ *egy* F *és* L *színosztályokkal rendelkező páros gráf, és legyen* $\mathcal{F}_v : 2^{E(v)} \to 2^{E(v)}$ *IRC tulajdonságú, komonoton kiválasztási függvény minden* $v \in V$ *csúcsra. Legyen*

$$\mathcal{F}(X) := \bigcup\{\mathcal{F}_v(X \cap E(v) : v \in F\}, \text{ és } \mathcal{G}(X) := \bigcup\{\mathcal{F}_v(X \cap E(v) : v \in L\} \ .$$

Ekkor az $\mathcal{FG}$*-kernelek (teljes) hálót alkotnak a* $\preceq_F$ *részbenrendezésre nézve, ahol* $X \preceq_F Y$ *pontosan akkor teljesül, ha* $\mathcal{F}(X \cap Y) = X$.

2. Kernel-típusú eredmények

A bevezetésben leírt fixpont-alapú megközelítés segítségével számos korábbi eredményt kiterjeszthetünk, ill. általánosíthatunk. A $P_1 = (E, \leq_1)$ és $P_2 = (E, \leq_2)$ véges posetek K közös antiláncát P_1P_2*-kernelnek* mondjuk, ha bármely $e \in E$ elemre van olyan $k \in K$ elem, amelyre $e \leq_1 k$ vagy $e \leq_2 k$ teljesül. Sands Sauer és Woodrow [37] eredményéből könnyen levezethető az alábbi tétel első része. (Igaz továbbá az is, hogy a Sands–Sauer–Woodrow-tétel levezethető a 2.1. tétel első részéből.)

2.1. Tétel. ([10]) *Tetszőleges* $P_1 = (E, \leq_1)$ *és* $P_2 = (E, \leq_2)$ *véges posetek esetén létezik* P_1P_2*-kernel. Továbbá, a* P_1P_2*-kernelek hálót alkotnak a* $\prec_1$ *rendezésre nézve, ahol* $A \prec_1 A'$ *pontosan akkor teljesül két* P_1*-beli antiláncra, ha* A *minden elemének van* A'*-beli felső korlátja.*

A 2.1. tétel azon múlik, hogy a részhalmazhoz annak maximumait rendelő leképezés komonoton útfüggetlen kiválasztási függvény. A 2.1. tétel első részét illusztrálja az alábbi példa.

2.1. Példa. (Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, 2016, 2. feladat) A pozitív egész számok tetszőleges véges A halmazának van olyan B részhalmaza, amelyre fennáll az alábbi két feltétel.

– Ha b_1 és b_2 a B különböző elemei, akkor sem b_1 és b_2, sem pedig $b_1 + 1$ és $b_2 + 1$ nem egymás többszörösei, továbbá

– az A halmaz tetszőleges a eleméhez van B-nek olyan b eleme, amelyre a osztója b-nek, vagy $(b + 1)$ osztója $(a + 1)$-nek.

Aharoni, Berger és Gorelik igazolták a 2.1. tétel egy súlyozott változatát [2], melynek kimondásához néhány definícióra van szükség. Legyen $P = (V, \leq)$ véges poset, $w : V \to \mathbb{N}$ egy igényfüggvény, $f : V \to \mathbb{N}$ pedig egy súlyfüggvény. Tetszőleges $v \in V$ esetén legyen $f^{\uparrow}_{\leq}(v) = \max\{f(c_1) + f(c_2) + \ldots : v = c_1 < c_2 < \ldots\}$ a v-ből induló láncok összsúlyának maximuma. A fenti f súlyfüggvény $(\leq, w)$-*független*, ha

– bármely $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$ lánc esetén $\sum_{i=1}^{k} f(c_i) \leq \max\{w(c_i) : 1 \leq i \leq k\}$ teljesül, és

– bármely $v \in V$ esetén $f(c_1) \cdot f^{\uparrow}_{\leq}(v) \leq f(c_1) \cdot w(c_1)$ áll fenn.

(Az első feltétel azt jelenti, hogy egyetlen lánc összsúlya sem haladja meg a lánc elemeinek maximális igényét, míg a második szerint pozitív súlyú c_1 elemből induló lánc összsúlya nem haladhatja meg c_1 igényét.) Könnyen látható, hogy az $(\leq, 1)$-független súlyfüggvények pontosan az antiláncok karakterisztikus vektorai.

A fenti f súlyfüggvény w-*dominálja* a P poset c_1 elemét, ha létezik olyan $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$ lánc, amelyre $w(c_1) \leq \sum_{i=1}^{k} f(c_i)$ teljesül, azaz van olyan c_1-ből induló lánc, melynek összsúlya eléri c_1 igényét. Legyenek most $P_1 = (V, \leq_1)$ és $P_2 = (V, \leq_2)$ a V közös alaphalmazon két véges poset, és legyen $w_1, w_2 : V \to \mathbb{N}$ két igényfüggvény. E posetek (w_1, w_2)-*kernelén* olyan $f : V \to \mathbb{N}$ súlyfüggvényt értünk, amely egyszerre $(\leq_1, w_1)$-független és $(\leq_2, w_2)$-független, valamint$f$ a V alaphalmaz minden v elemét P_1-ben w_1-dominálja, vagy P_2-ben w_2-dominálja. Érdemes megfigyelni, hogy az $(1, 1)$-kernel épp a korábban definiált kernellel esik egybe. Immár kimondhatjuk a korábbban említett súlyozott kernelekről szóló tételt.

2.2. Tétel. (Aharoni, Berger, Gorelik [2]) *Legyenek* $P_1 = (V, \leq_1)$ *és* $P_2 = (V, \leq_2)$ *véges posetek, és legyen* $w : V \to \mathbb{N}$ *egy igényfüggvény. Ekkor e poseteknek létezik* (w, w)*-kernele.*

Az 1.2. tétel az 1.1. következményének hálókra történő kiterjesztésével és alkalmas hálók megfelelő kiválasztási függvényeit definiálva a 2.2. tétel általánosítható az alábbiak szerint.

2.3. Tétel. (Fleiner, Jankó [16]) *Legyenek* $P_1 = (V, \leq_1)$ *és* $P_2 = (V, \leq_2)$ *véges posetek, és legyen* $w_1 : V \to \mathbb{N}$ *és* $w_1 : V \to \mathbb{N}$ *igényfüggvények. Ekkor e poseteknek létezik* (w_1, w_2)*-kernele, továbbá a* (w_1, w_2)*-kernelek hálót alkotnak a súlyfüggvények azon* $\preceq_1$ *részbenrendezésére, amelyre* $f \preceq_1 g$ *akkor áll, ha* $f^{\uparrow}_{\leq_1} \leq g^{\uparrow}_{\leq_1}$*.*

Részbenrendezéseken kívül más struktúrákon is igazolhatók kernel típusú eredmények. Legyenek $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ és $\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ matroidok, valamint $\leq_1$ és $\leq_2$ a közös E alaphalmazuk lineáris rendezései. E két matroid közös K függetlenjét $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-*kernelnek* nevezzük, ha tetszőleges $e \in E \setminus K$ elemhez valamely $i \in \{1, 2\}$-re létezik az $\mathcal{M}_i$ matroidnak olyan C köre, amelyre $C \subseteq K \cup \{e\}$ és $c \leq_i e$ teljesül minden $c \in C - e$-re.

2.4. Tétel. ([10]) *Tetszőleges* $\mathcal{M}_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ *és* $\mathcal{M}_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ *matroidok esetén létezik* $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$*-kernel. Ha* $K_1, K_2 \subseteq E$ $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$*-kernelek, akkor a* $K_1 \cup K_2$ *halmazból a* $\leq_i$ *szerint* $\mathcal{M}_i$*-n futtatott mohó algoritmus* $i = 1, 2$ *esetén* $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$*-kernelt választ ki. E két operáció meghatározta műveletek az* $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$*-kernelek* *halmazán olyan hálót definiálnak, amelyben érvényes a (3) tulajdonság, továbbá tetszőleges K_1, K_2 $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernelekre fennáll, hogy $span_{\mathcal{M}_1} K_1 = span_{\mathcal{M}_1} K_2$, és $span_{\mathcal{M}_2} K_1 = span_{\mathcal{M}_2} K_2$.*

A 2.4. tétel kulcsa az 1.2. következmény mellett az, hogy a matroid részhalmazán futtatott mohó algoritmussal meghatározott kiválasztási függvény egyszerre komonoton és növekedő.

3. Kernelek struktúrája

Ebben a részben különféle $\mathcal{FG}$-kerneleknek struktúráját vizsgáljuk. Az 1.2. következmény második részének a hálótulajdonságon túl egy másik következménye az, hogy $\mathcal{FG}$-kernelek hatékonyan kikeresztezhetők.

3.1. Tétel. ([10]) *Legyenek $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ növekedő, útfüggetlen és komonoton kiválasztási függvények, és legyenek $K_1, K_2, \ldots, K_m$ tetszőleges $\mathcal{FG}$-kernelek. Ekkor létezik $\mathcal{FG}$-kernelek egy $K^1 \preceq_{\mathcal{F}} K^2 \preceq_{\mathcal{F}} \ldots \preceq_{\mathcal{F}} K^m$ lánca, amelyre teljesül, hogy $\sum_{i=1}^m \chi(K_i) = \sum_{i=1}^m \chi(K^i)$, továbbá, hogy $1 \leq j \leq m$-re $K^j = \mathcal{F}(supp(\sum_{i=1}^m \chi(K_i) - \sum_{i=1}^{j-1} \chi(K^i)))$.*

Stabil b-párosítások esetén a 3.1. tétel különösen egyszerű alakot ölt, ám ehhez hasznos ismerni a Roth–Sotomayor-féle összehasonlítási tételnek (Comparability Theorem) [34] Baïou és Balinski által adott alábbi általánosítását.

3.2. Tétel. (Baïou és Balinski [4]) *Legyen $G = (V, E)$ páros gráf, minden v csúcsra legyen $\preceq_v$ lineáris rendezés a v-re illeszkedő élek $E(V)$ halmazán, valamint legyen $b : V \to \mathbb{N}$. Ha S_1 és S_2 stabil b-párosítások és $v \in V$, akkor az alábbi két lehetőség valamelyike áll fenn.*

- *$S_1(v) = S_2(v)$ vagy*
- *$|S_1(v)| = |S_2(v)| = b(v)$ és $S_1(v) \cup S_2(v)$ halmaz $\preceq_v$ szerint legjobb $b(v)$ eleme vagy $S_1(v)$ vagy $S_2(v)$.*

A 3.2. tétel egy következménye, hogy bárhogy is adunk meg k db stabil b-párosítást és egy v csúcsot, a b-párosítások v-re illeszkedő élhalmazain v-nek lineáris rendezése van. Stabil b-párosításokra tehát az alábbi állítás szerint érvényes, hogy ha egy páros gráf k megadott stabil b-párosításából az egyik színosztályából mindenki a számára i-edik legjobb hozzárendelést választja, akkor stabil b-párosítást kapunk.

3.3. Tétel. ([9]) *Legyen $G = (V, E)$ egy B és G színosztályokkal rendelkező páros gráf, minden v csúcsra legyen $\preceq_v$ lineáris rendezés a v-re illeszkedő élek $E(V)$ halmazán, valamint legyen $b : V \to \mathbb{N}$. Legyenek $S_1, S_2, \ldots, S_k$ stabil* *b-párosítások, és legyen $1 \leq i \leq k$. Jelölje az $S_1(v), S_2(v), \ldots, S_k(v)$ élhalmazok $\preceq_v$ szerinti sorrendjét $S^1(v), S^2(v), \ldots, S^k(v)$. Ekkor $S^i := \bigcup\{S^i(v) : v \in B\}$ stabil b-párosítás.*

A fenti 3.3. tételt stabil párosítások esetére Teo és Sethuraman lineáris programozási eszközök felhasználásával igazolták [40], majd Klaus és Klijn (állításuk szerint a 3.3. tételt nem ismerve) adtak a miénkhez nagyon hasonló rövid bizonyítást egy speciális esetben [26].

Stabil b-párosításoknak van egy kevésbé ismert, ám rendkívül hasznos, ún. splitting tulajdonsága, ami például a stabil b-párosítás poliéder lineáris leírásához jön kapóra.

3.4. Tétel. ([11]) *Legyen a $G = (V, E)$ véges gráf minden v csúcsához megadva egy $\preceq_v$ lineáris rendezés a v-re illeszkedő élek $E(V)$ halmazán, valamint legyen $b : V \to \mathbb{N}$. Ekkor minden $v \in V$ csúcsra létezik egy olyan $E(v) = E_1(v) \cup \ldots \cup E_{b(v)}(v)$ partíció, melyre $|E_i(v) \cap S| \leq 1$ teljesül tetszőleges S stabil b-párosításra, v csúcsra és $1 \leq i \leq b(v)$ indexre.*

A 3.4. tételből igazolható, hogy tetszőleges csúcspreferenciákkal és csúcskorlátokkal ellátott G gráfhoz létezik egy olyan G' gráf, amelyből G megkapható bizonyos csúcshalmazok összeolvasztásával, és G minden stabil b-párosítása a G' egy stabil párosításnak felel meg. Bár e G' gráf hatékonyan előállítható G, a $\preceq_v$ preferenciák és a b csúcskorlátok ismeretében, ez a megfigyelés sajnos nem alkalmas arra, hogy a stabil b-párosítás keresését stabil párosítás keresésére vezessük vissza. Nem igaz ugyanis, hogy G' minden stabil párosítása G egy stabil b-párosításából adódik.

4. Alkalmazások

Ebben a részben a stabil párosításokról szóló, ismert és kevésbé ismert tételek néhány alkalmazását mutatjuk be. Viszonylag könnyen látható, hogy a Tarski-féle fixponttétel egyik sztenderd alkalmazása, a Cantor–Bernstein-tétel levezethető a (szintén a Tarski-féle fixponttétellel bizonyítható) stabil párosítás tétel végtelen változatából. Mivel a Cantor–Bernstein-tétel tekinthető a Mendelsohn–Dulmage-tétel végtelen változatának, nem meglepő, hogy ez utóbbi is igazolható stabil párosításokkal. A Mendelsohn–Dulmage-tétel matroidos általánosítása, a Kundu–Lawler-tétel pedig könnyen bizonyítható a matroidkernelekre vonatkozó 2.4. tételből. Korábban említettük, hogy az alábbi, gráfkernelekről szóló eredmény is levezethető Tarski-féle fixponttétel segítségével.

4.1. Tétel. (Sands, Saurer és Woodrow [37]) *Ha E_1 és E_2 két hurokélt nem tartalmazó irányított élhalmaz a V ponthalmazon, akkor létezik a V pontjainak olyan U részhalmaza, melyre teljesül az alábbi két tulajdonság.*

– *Két különböző U-beli csúcs között nem vezet sem E_1-beli, sem E_2-beli út, illetve*

– *bármely $v \in V \setminus U$ csúcsból vezet U-beli csúcsba E_1-beli vagy E_2-beli út.*

A Gale–Shapley-tétel egy talán kevésbé kézenfekvő alkalmazása Pym alábbi linking tételének bizonyítása.

4.2. Tétel. (Pym [31]) *Legyen a $D = (V, E)$ digráfban $\mathcal{P}$ és $\mathcal{Q}$ pontdiszjunkt irányított utak egy-egy halmaza. Ekkor létezik pontdiszjukt irányított utak egy $\mathcal{R}$ halmaza úgy, hogy*

– *minden $\mathcal{P}$-beli út kiindulópontjából indul $\mathcal{R}$-beli út, és minden $\mathcal{R}$-beli út kiindulópontja kiindulópontja egy $\mathcal{P}$-beli vagy $\mathcal{Q}$-beli útnak, és*

– *minden $\mathcal{Q}$-beli út végpontjában végződik $\mathcal{R}$-beli út, és minden $\mathcal{R}$-beli út végpontja végpontja egy $\mathcal{P}$-beli vagy $\mathcal{Q}$-beli útnak, valamint*

– *minden $\mathcal{R}$-beli út egy $\mathcal{P}$-beli út (esetleg üres) kezdőszeletének és egy $\mathcal{Q}$-beli út (esetleg üres) végszeletének összefűzésével jön létre.*

Stabil párosítások egyik legismertebb alkalmazása Galvinnak a Dinitz-sejtésre adott bizonyítása [19], mely a „Proofs from the book” című könyvben is megjelent. Galvin módszere az alábbi módon terjeszthető ki nem páros gráfokra.

4.3. Tétel. ([13]) *Legyen $G = (V, E)$ gráf, $c : E \to \{1, 2, \ldots, k\}$ pedig G egy k élszínezése. Legyen adott minden $e \in E$ élhez egy k méretű $L(e)$ színlista. Ha G egyetlen páratlan körének éleihez tartozó színlistáknak sincs közös eleme, akkor van G-nek olyan l élszínezése, amelyre minden élt a saját listájából színezünk, azaz $l(e) \in L(e)$ teljesül G minden e élére.*

Létezik Galvin tételének és a páros gráfok egyenletes színezéséről szóló tételnek is egy közös általánosítása.

4.4. Tétel. ([15]) *Legyen $G = (V, E)$ páros gráf, $c : E \to \{1, 2, \ldots, k\}$ pedig G éleinek egy tetszőleges színezése k színnel. Adott továbbá minden $e \in E$ élhez egy k méretű $L(e)$ színlista. Ekkor található G minden e éléhez egy $l(e) \in L(e)$ szín úgy, hogy az l színezés az alábbi értelemben jobb legyen a c színezésnél. A G bármely v csúcsára és bármely $n_1, n_2, \ldots, n_i$ színre léteznek $m_1, m_2, \ldots, m_j$ színek valamely $j \leq i$-re úgy, hogy a v-ből a c színezés szerint legalább annyi él kapja meg az $m_1, \ldots, m_j$ színek valamelyikét, mint ahány v-ből induló él az l színezés szerint az $n_1, \ldots, n_i$ színek valemelyikét kapja.*

A matroidkerneleknek egy gyakorlati szempontból is érdekes alkalmazásával zárjuk ezt a részt. Ehhez definiáljuk a 2LCSM-problémát (a rövidítés a szakirodalomban használt „2-sided laminar classified stable matching” megnevezésre utal).

Legyen $G = (V, E)$ páros gráf, melynek minden v csúcsához adott egy $\preceq_v$ lineáris rendezés $E(v)$-n, egy $\mathcal{C}_v$ lamináris halmazrendszer $E(v)$-n, valamint minden $C \in \mathcal{C}_v$ halmazra az $l(C) \leq u(C)$ alsó és felső korlátok. A G éleinek M részhalmaza akkor *lu-párosítás*, ha $l(C) \leq |M \cap C| \leq u(C)$ teljesül minden v csúcsra és $C \in \mathcal{C}_v$ halmazra. Az M lu-párosítás akkor *lu-dominálja* az $e \in E \setminus M$ élt, ha van e-nek olyan v végpontja és olyan $C \in \mathcal{C}_v$ halmaz, amelyre $|M \cap C| = u(C)$ és $m \preceq_v e$ teljesül minden $m \in M \cap C$ esetén. Az M lu-párosítás pedig akkor *lu-stabil*, ha minden $E \setminus M$-beli élt lu-domninál. A 2LCSM-probléma pedig az lu-stabil párosítás létezésének eldöntése. Ezzel a megközelítéssel általánosíthatjuk a Huang által bevezetett LCSM-problémát [22], melynek motivációja az egyetemi felvételi probléma egy, a gyakorlatot jobban közelítő leírása: szemben ugyanis a stabil b-párosítás problémával, a jelen modell kezelni tudja az olyasfajta feltételt is, amely szerint az egyes egyetemi szakok csak bizonyos minimális létszám elérésekor indulhatnak el, ill. bizonyos egyetemi szakok (a saját egyéni kvótájukon túl) közös kvótával is rendelkeznek. A 2LCSM-probléma egy lehetséges megoldása az alábbi eredmény alapján történhet.

4.5. Tétel. (Fleiner, Kamiyama [17]) *A $G = (V, E)$ gráfon megadott 2LCSM-problémához polinom időben konstruálhatók az $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ matroidok azzal a tulajdonsággal, hogy ha létezik lu-stabil párosítás, akkor az lu-stabil párosítások halmaza megegyezik az $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernelek halmazával. Igaz továbbá, hogy egy M $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernel pontosan akkor lu-stabil párosítás, ha M lu-párosítás.*

A 4.5. tétel szerint tehát elegendő egyetlen M $\mathcal{M}_1\mathcal{M}_2$-kernelt találni: ha M lu-párosítás, akkor kész vagyunk, hisz M lu-stabil, ha pedig M nem lu-párosítás, akkor egyáltalán nem létezik lu-stabil párosítás.

5. Stabil párosítás poliéderek

Természetes kérdés a stabil párosítás és a maximális súlyú párosítás keresésének az az ötvözete, amelyben adott élsúlyozás mellett kell a stabil párosítások halmazából egy maximális súlyút keresni. Egy természetesen kínálkozó út a stabil párosítások karakterisztikus vektorai feszítette politópon történő optimalizálás, és ehhez ennek a politópnak egy jó karakterizációjára, tipikusan egy lineáris leírására van szükség. Az első lépést Vande Vate tette meg azzal, hogy teljes páros gráf esetén megadott egy ilyen leírást [41]. Ezt követte Rothblum, aki tetszőleges páros gráfra adott karakterizációt [36], majd Baïou és Balinski adták meg páros gráf esetén a stabil b-párosítás politóp exponenciálisan sok feltételt tartalmazó leírását abban az esetben, amikoris a b korlát az egyik színosztályon azonosan 1-gyel egyenlő [5].

Az $\mathcal{FG}$-kernelek hálóstruktúrájának ismeretében azonban az előbbieknél sokkal általánosabb esetekben (például matroidkernelek esetében) is megadható lineáris karakterizáció, mégpedig Hoffman hálópoliéderekre igazolt tételeinek segítségével [21]. Néhány jelölésre lesz szükségünk. $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ kiválasztási függvények esetén jelölje $\mathcal{K}_{\mathcal{FG}}$ az $\mathcal{FG}$-kernelek halmazát, ill.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mathcal{FG}} &:= conv\{\chi(K) : K \in \mathcal{K}_{\mathcal{FG}}\},\\
\mathcal{P}_{\mathcal{FG}}{}^{\uparrow} &:= \mathcal{P}_{\mathcal{FG}} + \mathbb{R}^E_+,\\
\mathcal{P}_{\mathcal{FG}}{}^{\downarrow} &:= (\mathcal{P}_{\mathcal{FG}} + \mathbb{R}^E_-) \cap \mathbb{R}^E_+,\\
\mathcal{A}_{\mathcal{FG}} &:= \{A \subseteq E : |A \cap K| \leq 1 \quad \forall K \in \mathcal{K}_{\mathcal{FG}}\},\\
\mathcal{B}_{\mathcal{FG}} &:= \{B \subseteq E : |B \cap K| \geq 1 \quad \forall K \in \mathcal{K}_{\mathcal{FG}}\}
\end{aligned}$$

rendre az $\mathcal{FG}$-kernel politópot, annak felszálló burkát, a pozitív ortánsban alatta levő részt, az $\mathcal{FG}$-kernelek antiblokkoló, valamint blokkoló halmazait. Egy $x \in \mathbb{R}^E$ vektor és $Z \subseteq E$ esetén alkalmazzuk az

$$\widetilde{x}(Z) := \sum\{x(z) : z \in Z\}$$

jelölést. Ennek segítségével ki tudjuk mondani az alábbi eredményt.

5.1. Tétel. ([10]) *Ha $\mathcal{F}, \mathcal{G} : 2^E \to 2^E$ növekedő és komonoton kiválasztási függvények, akkor*

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mathcal{FG}}{}^{\uparrow} &= \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0, \quad \widetilde{x}(B) \geq 1 \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{FG}}\},\\
\mathcal{P}_{\mathcal{FG}}{}^{\downarrow} &= \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0, \quad \widetilde{x}(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{A}_{\mathcal{FG}}, \quad x(e) = 0 \quad \forall e \in E \setminus \bigcup \mathcal{K}_{\mathcal{FG}}\},\\
\mathcal{P}_{\mathcal{FG}} &= \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0, \quad \widetilde{x}(B) \geq 1 \quad \forall B \in \mathcal{B}_{\mathcal{FG}}, \quad \widetilde{x}(A) \leq 1 \ \ \forall A \in \mathcal{A}_{\mathcal{FG}}\}.
\end{aligned}$$

Az 5.1. tételben szereplő lineáris feltételek egy előnye, hogy a megfelelő lineáris programozási problémában fellépő mátrixokban csak 0 és 1 szerepel. Hátrányuk azonban, hogy a lineáris feltételek implicitek, és akár exponenciálisan sok is lehet belőlük. Mindazonáltal a szeparációs probléma könnyen megoldható, így sztenderd technikák alkalmazhatók az adott poliédereken történő optimalizációra. Stabil b-párosítások esetén azonban a 3.4. tétel segítségével jóval konkrétabban megadhatók a politópot leíró blokkerek és antiblokkerek.

5.2. Tétel. ([11]) *Legyen $G = (V, E)$ páros gráf, minden v csúcsra legyen $\preceq_v$ lineáris rendezés $E(v)$-n, valamint legyen $b : V \to \mathbb{N}$. Jelölje $\mathcal{P}(G, b)$ a G-beli stabil b-párosítások karakterisztikus vektorainak konvex burkát, valamint $1 \leq i \leq b(v)$ esetén $E_i(v)$ jelölje az $E(v)$ a 3.4. tétel szerinti részhalmazát. Ekkor*

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(G, b) = \{x \in \mathbb{R}^E : x \geq 0,&\\
&\widetilde{x}(E_i(v)) \leq 1 \quad \forall v \in V, \quad \forall 1 \leq i \leq b(v),\\
&\widetilde{x}(\Phi_{i,j}(uv)) \geq 1 \quad \forall uv \in E \quad \forall 1 \leq i \leq b(u), \quad \forall 1 \leq j \leq b(v)\}\ ,
\end{aligned}$$

ahol $\Phi_{i,j}(uv) = \{uv\} \cup \{uv' \in E_i(u) : uv' \leq_u uv\} \cup \{u'v \in E_j(v) : u'v \leq_v uv\}\ .$

6. Konklúzió

Jelen munka áttekintést adott a stabil párosításokkal és általánosításaikkal kapcsolatos néhány problémáról és alkalmazásról. Rámutattunk arra, hogy számos korábbról ismert jelenség jól magyarázható, ill. általánosítható kiválasztási függvények bevezetésével és Knaster és Tarski fixponttételének segítségével.

Köszönetnyilvánítás

Jelen munka az OTKA K108383 és az MTA KEP-6/2017 sz. kutatási projektek támogatásával készült. A szerző egyúttal köszönetet mond az MTA-ELTE Egerváry kutatócsoportnak.

Hivatkozások

[1] Hernán Abeledo and Yosef Blum: *Stable matchings and linear programming*, Linear Algebra Appl. **245** (1996), 321–333.

[2] Ron Aharoni, Eli Berger, and Irina Gorelik: *Kernels in Weighted Digraphs*, Order **31(1)** (2014), 35–43.

[3] Ron Aharoni and Tamás Fleiner: *On a lemma of Scarf*, J. Combin. Theory Ser. B **87(1)** (2003), 72–80.

[4] Mourad Baïou and Michel Balinski: *Many-to-many matching: stable polyandrous polygamy (or polygamous polyandry)*, Discrete Appl. Math. **101(1-3)** (2000), 1–12.

[5] Mourad Baïou and Michel Balinski: *The stable admissions polytope*, Math. Program **87(3, Ser. A)** (2000), 427–439.

[6] Péter Biró, Katarína Cechlárová, and Tamás Fleiner: *The dynamics of stable matchings and half-matchings for the stable marriage and roommates problems*, International Journal of Game Theory **36(3-4)** (2008), 333–352.

[7] Charles Blair: *The lattice structure of the set of stable matchings with multiple partners*, Math. Oper. Res. **13(4)** (1988), 619–628.

[8] Katarína Cechlárová and Tamás Fleiner: *On a generalization of the stable roommates problem*, ACM Trans. Algorithms **1(1)** (2005), 143–156.

[9] Tamás Fleiner: *Some results on stable matchings and fixed points*, Technical report, EGRES report TR-2002-8, ISSN 1587-4451, December 2002. `http://www.cs.elte.hu/egres`.

[10] Tamás Fleiner: *A fixed-point approach to stable matchings and some applications*, Math. Oper. Res. **28(1)** (2003), 103–126.

[11] Tamás Fleiner: *On the stable b-matching polytope*, Math. Social Sci. **46(2)** (2003), 149–158.

[12] Tamás Fleiner: *On stable matchings and flows*, Algorithms **7(1)** (2014), 1–14.

[13] Tamás Fleiner: *List colourings with restricted lists*, Technical Report QP-2017-01, Egerváry Research Group, Budapest, 2017. `www.cs.elte.hu/egres`.

[14] Tamás Fleiner: *Stable and crossing structures*, August, 2000, PhD dissertation, `http://www.renyi.hu/~fleiner`.

[15] Tamás Fleiner and András Frank: *Balanced list edge-colourings of bipartite graphs*, Technical Report TR-2010-01, Egerváry Research Group, Budapest, 2010. `www.cs.elte.hu/egres`.

[16] Tamás Fleiner and Zsuzsanna Jankó: *On weighted kernels of two posets*, Order **33(1)** (2016), 51–65.

[17] Tamás Fleiner and Naoyuki Kamiyama: *A matroid approach to stable matchings with lower quotas*, Math. Oper. Res. **41(2)** (2016), 734–744.

[18] D. Gale and L. S. Shapley: *College admissions and stability of marriage*, Amer. Math. Monthly **69(1)** (1962), 9–15.

[19] Fred Galvin: *The list chromatic index of a bipartite multigraph*, J. Combin. Theory Ser. B **63(1)** (1995), 153–158.

[20] Dan Gusfield and Robert W. Irving: *The stable marriage problem: structure and algorithms*, MIT Press, Cambridge, MA, 1989.

[21] A. J. Hoffman: *On lattice polyhedra. III. Blockers and anti-blockers of lattice clutters*, Math. Programming Stud. **(8)** (1978), 197–207. Polyhedral combinatorics.

[22] Chien-Chung Huang: *Classified stable matching*, In Proceedings of the Twenty-First Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pages 1235–1253, Philadelphia, PA, 2010. SIAM.

[23] Robert W. Irving: *An efficient algorithm for the „stable roommates" problem*, J. Algorithms **6(4)** (1985), 577–595.

[24] Jr. Kelso, Alexander S. and Vincent P. Crawford: *Job matching, coalition formation, and gross substitutes*, Econometrica **50** (1982), 1483–1504.

[25] Zoltán Király: *Better and simpler approximation algorithms for the stable marriage problem*, Algorithmica **60(1)** (2011), 3–20.

[26] Bettina Klaus and Flip Klijn: *Median stable matching for college admissions*, Internat. J. Game Theory **34(1)** (2006), 1–11.

[27] Bronisław Knaster: *Un théorème sur les fonctions d'ensembles*, Ann. Soc. Polon. Math. **6** (1928), 133–134.

[28] Donald E. Knuth: *Stable marriage and its relation to other combinatorial problems*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. An introduction to the mathematical analysis of algorithms, Translated from the French by Martin Goldstein and revised by the author.

[29] David F Manlove: *Algorithmics of matching under preferences*, volume 2. World Scientific, 2013.

[30] Michael Ostrovsky: *Stability in supply chain networks*, American Economic Review **98(3)** (2006), 897–923.

[31] J. S. Pym: *A proof of the linkage theorem*, J. Math. Anal. Appl. **27** (1969), 636–638.

[32] Alvin E. Roth: *The evolution of the labor market for medical interns and residents: A case study in game theory*, J. of Political Economy **92** (1984), 991–1016.

[33] Alvin E. Roth, Uriel G. Rothblum, and John H. Vande Vate: *Stable matchings, optimal assignments, and linear programming*, Math. Oper. Res. **18(4)** (1993), 803–828.

[34] Alvin E. Roth and Marilda Sotomayor: *The college admissions problem revisited*, Econometrica **57(3)** (1989), 559–570.

[35] Alvin E. Roth and Marilda A. Oliveira Sotomayor: *Two-sided matching*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. A study in game-theoretic modeling and analysis.

[36] Uriel G. Rothblum: *Characterization of stable matchings as extreme points of a polytope*, Math. Programming **54(1, Ser. A)** (1992), 57–67.

[37] B. Sands, N. Sauer, and R. Woodrow: *On monochromatic paths in edge-coloured digraphs*, J. Combin. Theory Ser. B **33(3)** (1982), 271–275.

[38] Jimmy J. M. Tan: *A necessary and sufficient condition for the existence of a complete stable matching*, J. Algorithms **12(1)** (1991), 154–178.

[39] Alfred Tarski: *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications*, Pacific J. of Math **5** (1955), 285–310.

[40] Chung-Piaw Teo and Jay Sethuraman: *The geometry of fractional stable matchings and its applications*, Math. Oper. Res. **23(4)** (1998), 874–891.

[41] John H. Vande Vate: *Linear programming brings marital bliss*, Oper. Res. Lett. **8(3)** (1989), 147–153.

Fleiner Tamás 1971-ben született Budapesten. A budapesti Fazekas Gimnázium speciális matematika tagozatán tett érettségit követően okleveles matematikus diplomát szerzett az ELTÉ-n, majd az amszerdami CWI-ben töltött 4 év után "Stable and crossing structures" című disszertációját az eindhoveni TU/e egyetemen 2000-ben védte meg. Egy évig az MTA RAMKI fiatal kutatója, majd Magyary Zoltán posztdoktori ösztöndíjas az ELTE Operációkutatási Tanszékén. 2003-tól Bolyai-ösztöndíjasként a BME Számítástudományi és Információelméleti Tanszék adjunktusa, 2006-tól docense, 2014-ben pedig habilitál. Kutatási területe a diszkrét matematika és közgazdaságtan határterülete, 65 tudományos közlemény szerzője, több mint 300 független hivatkozással. Több OTKA-pályázat témavezetője, nemzetközi kutatások résztvevője,

a Kürschák József Matematikai Tanulóverseny szervezőbizottságának elnöke. Jelenleg a BME-n és az AIT-n oktat, társasházi közös képviselő, kerékpár- és varrógépműszerész, valamint gerillakertész.

FLEINER TAMÁS
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi és Információelméleti Tanszék
1117, Budapest, Magyar tudósok körútja 2.
és MTA KTK (1097 Budapest, Tóth Kálmán u. 4)
fleiner@cs.bme.hu

WHAT ARE STABLE MATCHINGS GOOD FOR?
(STABLE MATCHINGS AND THEIR APPLICATIONS)

Tamás Fleiner

The notion of a stable matching have been introduced by Gale and Shapley in 1962. The notion turned out to be extremely succesful not only for its applicability to two-sided market economies but also because the approach based on (generalized) stable matchings led to success in case of several theoretical problems. The present work demonstrates how the existence and structure of stable matchings are related to a fixed point theorem by Knaster and Tarski and what kind of sometimes surprising applications are implied by the hence obtained results. This work is based on the invited talk given on the 23rd Hungarian Operations Research Conference organized in 2017 at Cegléd.