ANNALEN

DER

PHYSIK

UND

CHEMIE.

HERAUSGEGEBEN ZU BERLIN

VON

J. C. POGGENDORFF.

HUNDERTZWEIUNDFUNFZIGSTER BAND.

DER GANZEN FOLGE ZWEIHUNDERTUNDACHTUNDZWANZIGSTER.

NEBST SIEBEN FIGURENTAFELN.

LEIPZIG, 1874.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

1874. ANNALEN № 8.
DER PHYSIK UND CHEMIE.
BAND CLII.

I. *Ueber die Intensität der wahrgenommenen Schwingungen bei Bewegung der Schwingungsquelle und des Beobachters;*

von Dr. Baron Roland Eötvös,
Professor an der Universität in Pesth.

(Vorgelegt in einer Sitzung der mathem. naturwiss. Classe der ungarischen Academie, am 15. Juni 1874.

In einer der ungarischen Akademie der Wissenschaften am 19. Juli 1871 vorgelegten Abhandlung bestimmte ich auf theoretischem Wege die Intensität der Schwingungsbewegung für den Fall der gleichzeitigen Bewegung des Beobachters und der Schwingungsquelle. Die Formel, welche ich in dieser Arbeit zur Berechnung der Intensität feststellte, steht zwar mit der von Fizeau [1]) allerdings nur in einem sehr speciellen Falle gebrauchten, in Widerspruch; doch glaube ich nicht zu einer eingehenden Kritik dieser Untersuchung Fizeau's verpflichtet zu seyn, da ja hierin wohl das Quadrat der Amplitude ausgedrückt, die Frage aber, in welcher Beziehung diese Gröfse bei Bewegung von Quelle und Beobachter zur Intensität steht, gar nicht berührt wird. Seitdem veröffentlichte Professor Ketteler in den Bänden 144, 146, 147 und 148 dieser Annalen eine Reihe interessanter Abhandlungen über den „Einflufs der astronomischen Bewegungen auf die optischen Erscheinungen". Die erweiterte Sammlung dieser Arbeiten, die unter dem Titel „Astronomische Undulations-

1) *Cosmos*, *t. I*, *p.* 690. Pogg. Ann. Bd. 92, S. 652.

theorie“ [1]) im Jahre 1873 erschien, beschäftigt sich in einem Zusatz (S. 135) auch mit der „Verbreitung der Schall- und Lichtintensität im Raume bei Bewegung des Erschütterungscentrums und Beobachters“. Die Formel, die hier Professor Ketteler für die Intensität aufstellt, weicht von der von mir aufgestellten wesentlich ab, so dafs ich wohl gezwungen war, die Richtigkeit meiner Untersuchung einer strengen Prüfung zu unterwerfen, um so die Wahl zwischen der Ketteler'schen und meiner Formel treffen zu können.

Worin der Grund der Nichtübereinstimmung jener beiden Formeln hauptsächlich liegt, kann schon eine flüchtige Betrachtung zeigen. Bezeichnen wir mit a die gröfste Verrückung d. i. die Amplitude, mit α dagegen die gröfste Geschwindigkeit (Geschwindigkeits-Amplitude) der Schwingung eines Punktes, so werden a und α von der Entfernung abhängen, aus welcher die Schwingungsquelle dem Punkte ihre Schwingungen mittheilt. Insofern nun diese Entfernung bei der Bewegung der Lichtquelle verändert wird, müssen in Folge dessen auch a und α Veränderungen erleiden. Jedenfalls bleibt aber noch die Frage zu beantworten, ob a und α durch diese Bewegung wirklich *nur* in Folge der Veränderung jener Entfernung beeinflufst werden? Für beide Gröfsen ist diefs gewifs nicht der Fall, da sie ja etwa für Lichtschwingungen durch die bekannte Gleichung

$$\alpha = a \frac{2\pi}{T}$$

verbunden sind, wo T, die Schwigungsdauer, von der Geschwindigkeit der bewegten Lichtquelle abhängt. Professor Ketteler behandelte nun die Aufgabe als eine Fortpflanzung der Verrückungen und machte dabei stillschweigend die Annahme, dafs a sich nur insofern mit der Bewegung der Lichtquelle ändert, als durch diese die oben erwähnte Entfernung beeinflufst wird; Aehnliches that ich in Bezug

1) Astronomische Undulationstheorie oder die Lehre von der Aberration des Lichts von Dr. E. Ketteler. Bonn. Neusser 1873.

auf α, indem ich die Fortpflanzung der Schwingungen als Fortpflanzung von Geschwindigkeiten auffafste.

In dieser vorliegenden Arbeit will ich nun die Richtigkeit meiner Ansicht beweisen und den Irrthum darlegen, der in Prof. Ketteler's Behandlungweise liegt. Die Ableitung der Formel für die Intensität, wie ich sie hier geben will, wird unabhängig bleiben von jeder speciellen Annahme über die Art und Weise, wie sich das die Fortpflanzung bewirkende Mittel innerhalb der Schwingungsquelle oder des Beobachters bewegt. Diese Bemerkung zeigt, mit welchem Recht die gewonnene Formel zur experimentellen Entscheidung der Frage über die Aetherbewegung angewandt werden könnte.

§. 1.

Vor Allem will ich hier eine Ableitung des Doppler'schen Princips bekannt machen, die mir als Grundlage der folgenden Betrachtungen diente.

Betrachten wir ein homogenes isotropes Mittel, das sich in Ruhe befindet oder wenigstens nur als ein Ganzes bewegt, so dafs seine einzelnen Theile ihre relativen Lagen nicht ändern. Innerhalb dieses Mediums soll eine Schwingungsquelle Q isochrone Schwingungen ausführen, welche durch die Gleichung

$$U = Af(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

bestimmt werden, wenn U die Geschwindigkeit der Schwingungsbewegung des Punktes Q zur Zeit t, A die gröfste von diesem erreichbare Geschwindigkeit, d. i. seine Geschwindigkeitsamplitude und $f(t)$ eine um T, der Schwingungsdauer periodische Function der Zeit t bedeutet. Dieser schwingende Punkt Q soll nebenbei noch mit dem Körper, an dem er haftet, eine geradlinige und gleichmäfsige Bewegung ausführen, deren constante Geschwindigkeit innerhalb des ruhend gedachten Mediums mit g bezeichnet werden möge. Zerlegen wir nun die Schwingungsbewegung des Punktes Q in ihre der Zeit nach aufeinander folgenden und unendlich kleinen Zeitintervallen entsprechenden

Bewegungstheile, die wir auch kurz Stöſse nennen können; so wissen wir, daſs sich ein jeder dieser Stöſse im Medium in Kugelflächen fortpflanzen muſs. Wird von dem Einfluſs abgesehen, den die translatorische Bewegung der Schwingungsquelle auf ihre Schwingungsbewegung selbst ausüben könnte; so fogt, daſs die Stöſse, in welche diese zerlegt wurde, ihrer Gröſse, Richtung und Reihenfolge nach dieselben sind im Falle der Bewegung und im Falle der Ruhe. Daher ist auch die einzige Veränderung, welche durch die Bewegung hervorgerufen wird, nur die, daſs jeder einzelne jener, statt der ganzen Schwingung betrachteten Reihe von Stöſsen, im Falle der Bewegung aus einem anderen Punkte des Mediums ausgeht, als im Falle der Ruhe.

Die oben erwähnte Abstraction von dem Einflusse der translatorischen Bewegung der Schwingungsquelle auf seine Schwingungsbewegung, bildet bei Ketteler, so wie bei allen anderen Autoren, die sich vor ihm mit der Frage beschäftigten, eine nothwendige Annahme, der wir uns im Folgenden auch anschlieſsen werden.

Jeder einzelne der von der Schwingungsquelle ausgeführten Stöſse gelangt nun zu einem von dieser im Augenblicke des Stoſses um δ entfernten Punkte P des Mittels während des Zeitintervalls $\frac{\delta}{v}$, wenn nämlich v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Erschütterung bedeutet. Der Stoſs also, der in irgend einem Momente zum Punkte P gelangt, ist derjenige, welcher von der Schwingungsquelle um das Zeitintervall $\frac{\delta}{v}$ früher ausgeführt wurde. Diese Betrachtung führt zur Bestimmung der oscillatorischen Geschwindigkeit des Punktes P durch die Formel:

$$u = \alpha f\left(t - \frac{\delta}{v}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

worin α die gröſste während der Oscillation erreichte Geschwindigkeit, also die Geschwindigkeitsamplitude des Punktes P bedeutet, vorläufig aber ganz unbestimmt bleibt. Um dieses Gesetz der Schwingungen näher kennen zu ler-

nen, soll vor allem festgestellt werden, in welcher Weise δ von der Zeit abhängt. Diese Schwierigkeit, welche sich bei allen Fragen über die Fortpflanzung der Schwingungen im Falle der bewegten Schwingungsquelle darbietet, ist häuptsächlich der Umstand, dafs wir hierbei immer mit zwei verschiedenen Entfernungen der Schwingungsquelle zu thun haben, nämlich erstens mit ihrer Entfernung zur Zeit t, in welcher die Geschwindigkeit u bestimmt werden soll, und zweitens mit ihrer Entfernung in dem Momente als die Schwingungsquelle jenen Stofs ausführte, der zur Zeit t in P anlangte. Um jeden Irrthum zu vermeiden, werde ich die erst erwähnte jener Entfernungen in der Folge *momentane Entfernung* nennen und mit D bezeichnen, der anderen Entfernung aber, für welche schon das Zeichen δ eingeführt wurde, den Namen *active Entfernung* geben.

Betrachten wir nun vorläufig den Fall, dafs sich die Schwingungsquelle Q auf der Geraden QP mit der gleichmäfsigen Geschwindigkeit g bewegt, so ist, unter c die Geschwindigkeit ihrer Annäherung, d. i. die Componente der Geschwindigkeit g in der Richtung $\overleftrightarrow{QP}$ verstanden:

$$\delta - \frac{\delta}{v} = D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Ferner ist leicht einzusehen, dafs

$$D = D_0 - ct.$$

wenn D_0 die momentane Entfernung zur Zeit $t = 0$ bedeutet. Demnach folgt für den betrachteten Fall

$$\delta = \frac{v}{v-c}(D_0 - ct) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und in Folge dessen aus Gleichung (2)

$$u = \alpha f\left(\frac{v}{v-c}\, t - \frac{D}{v-c}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Da nun die Function f um T periodisch ist, so wird sie gleiche Werthe in Zeitpunkten annehmen, die von einander um

$$T' = \frac{v-c}{c}\, T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

abstehen, so dafs T' nichts anderes als die Schwingungsdauer im Punkte P bedeutet. Die Formel (5) zeigt aber auch, dafs zwei Punkte, die in der Geraden QP um

$$\lambda' = (v - c)\,T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

von einander abstehen, zur gleichen Zeit die gleiche Phase der Geschwindigkeit u besitzen, dafs also die Gröfse λ' die Wellenlänge der Schwingungen im Punkte P ist.

Eine einfache geometrische Betrachtung zeigt, dafs wir im Fall, dafs g klein gegen v ist, diese Folgerungen auch dann gelten lassen können, wenn sich Q nicht in der Geraden QP, sondern in einer Richtung bewegt, die mit $\overleftrightarrow{QP}$ den Winkel ψ einschliefst. Der Anfangspunkt der Zeit mufs dabei so gewählt werden, dafs gt klein gegenüber D sey. In diesem Falle ist selbstverständlich:

$$c = g \cos \psi.$$

Die soeben betrachtete Fortpflanzungsweise der Schwingungen in einem elastischen Mittel kann natürlich durch die Art ihrer Beobachtung nicht beeinflufst werden. Denken wir uns daher einen Beobachter B, der sich im Punkte P in Ruhe befindet, so empfängt er die Schwingungen der Schwingungsquelle stets aus einer activen Entfernung derselben, welche durch die Formel (4) gegeben ist. Bewegt sich aber auch der Beobachter auf der Geraden BQ d. i. PQ mit der constanten Geschwindigkeit g', so theilen ihm immer neue und neue Theilchen P des Mediums ihre Schwingungsphasen mit. Für jede dieser einzelnen Theilchen P besteht die Gleichung (3). Bezeichnen wir nun die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Beobachter der Schwingungsquelle nähert, also die Componente der Geschwindigkeit g' in der Richtung $\overleftrightarrow{BQ}$ mit c'; so ergiebt sich seine momentane Entfernung von der Schwingungsquelle

$$D = D_0 - ct - c't.$$

Man kann diese Entfernung D auch als die momentane Entfernung der an dem Beobachter gränzenden Theilchen des Mittels von der Schwingungsquelle ansehen, dann erhält man, den Werth von D in (3) gesetzt, für die active

Entfernung der Schwingungsquelle von jenen Punkten des Mittels die jederzeit mit dem Beobachter in Berührung stehen:

$$\delta = \frac{v}{v-c}(D_0 - ct - c't) \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Die Geschwindigkeit der Schwingungsbewegung dieser Punkte ist demnach in Folge der Gleichung (2):

$$u = \alpha f\left(\frac{v+c'}{v-c}t - \frac{D_0}{v-c}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Da nun die Function f um T periodisch ist, so zeigt diese Gleichung, dafs der Beobachter in zwei Zeitpunkten, die um das Zeitintervall

$$T'' = \frac{v-c}{v+c'}T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

von einander abstehen, mit Punkten des Mediums in Berührung kommt, für welche die Function f denselben Werth hat.

Die Zeitdauer T'' kann also mit Recht die beobachtete Schwingungsdauer genannt werden. Der in der Gleichung (10) enthaltene Satz ist nichts anderes als Doppler's Princip.

Zur sicheren Feststellung der Werthe von c und c' in allen speciellen Fällen wird es von Nutzen seyn, auf der Geraden QB einen zwischen Q und B gelegenen Punkt O des Mittels festzustellen, der im selben Bewegungszustand als die anderen Theile des Mittels verharrt. Es sind dann c und c' die Geschwindigkeiten, mit welcher sich die Schwingungsquelle Q, respective der Beobachter B diesem Punkte O nähern.

Lassen wir jetzt die Voraussetzung fallen, dafs sich der Beobachter in der Geraden BQ bewege, und nehmen vielmehr an, dafs die Geschwindigkeit g' mit der Richtung $\overleftrightarrow{BQ}$, oder was gleichbedeutend ist, mit der Richtung $\overrightarrow{BQ}$ den Winkel ψ' einschliefst; so behalten unsere Folgerungen nichtdestoweniger ihre Gültigkeit, wenn nur g' gegenüber v als klein anzusehen ist. Eine einfache geometrische Betrachtung zeigt die Richtigkeit dieser Behauptung; nur mufs

der Anfangspunkt der Zeit so gewählt werden, dafs man $g't$ gegenüber D_0 als klein betrachten könne.

Die allgemeine Lösung der Aufgabe, wenn g und g' gegenüber v nicht klein sind, führt auf demselben Wege zu Formeln, die jeder Eleganz entbehren und kaum von besonderem Interesse seyn können.

§. 2.

Die Gleichung (5) des §. 1 bestimmt wohl die Geschwindigkeit der Schwingung eines Punktes P insofern diese von der Phase abhängt, enthält aber in der Geschwindigkeitsamplitude α immer noch einen unbestimmten Factor. Für jede Richtung der Fortpflanzung wird nun Q von der Entfernung δ abhängig seyn.

Bedenken wir, dafs sich die lebendige Kraft jedes einzelnen von der Schwingungsquelle ausgehenden Stofses in concentrischen Kugelflächen ausbreitet, so gelangen wir leicht zum Schlufs, dafs α jetzt ebenso wie im Falle der ruhenden Schwingungsquelle, umgekehrt proportional seyn mufs der Entfernung des Punktes P von jenem Punkte des Mediums, aus dem der betreffende Stofs ausging. Wir sehen also, dafs:

$$\alpha = \frac{A_1}{\delta}$$

wenn A_1 die entsprechende Geschwindigkeitsamplitude auf einer Kugelfläche bedeutet, deren Radius der Einheit gleich ist. Nach der Annahme, welche der Ketteler'schen Arbeit zu Grunde liegt, wäre nun α von der Geschwindigkeit c nicht nur *implicite* (durch δ), sondern aufserdem noch *explicite* von dieser abhängig. Die Abhängigkeit vorläufig zugegeben, soll nun, um sie genauer bestimmen zu können, ein Fall betrachtet werden, in dem α von der Entfernung δ unabhängig ist, also jedenfalls nur explicite von c abhängig seyn kann. Ein solcher liegt uns aber vor, wenn sich Schwingungen im cylindrisch begränzten Raume fortpflanzen. Innerhalb dieses cylindrischen Raumes soll sich die Schwin-

gungsquelle in der Richtung der Axe mit gleichmäſsiger Geschwindigkeit g bewegen können.

Da nun nach der gemachten Voraussetzung die translatorische Bewegung der Schwingungsquelle von keinem Einfluſs auf ihre Schwingungsbewegung ist, so folgt, *daſs sie während jeder ihrer Schwingungen dem sie umgebenden Mittel in Form fortgepflanzter Schwingungen eine Menge lebendiger Kraft mittheilt, welche dieselbe ist im Falle ihrer Ruhe wie im allgemeineren Falle ihrer Bewegung.*

Dieser Satz ist an und für sich klar, da ja jede Veränderung in der dem Mittel in Form fortgepflanzter Schwingungen abgegebenen lebendigen Kraft, durch eine Veränderung in der Schwingungsbewegung der Quelle begleitet werden müſste.

Die lebendige Kraft, welche von der Schwingungsquelle während einer ihrer Schwingungen dem Mittel abgegeben wird, pflanzt sich im cylindrischen Raume in zwei entgegengesetzten Richtungen fort. Im Falle der ruhenden Quelle wird sie jederzeit in zwei gleich dicken Scheiben enthalten seyn, die auf beiden Seiten der Quelle liegen. Die Dicke jener Scheiben ist gleich der Wellenlänge

$$\lambda = vT.$$

Wir wollen nun eine dieser Scheiben in Lamellen von unendlich kleiner Dicke zerlegen, so daſs deren Endflächen den Gleichungen $D = D_1$, $D = D_1 + dD$, $D = D_1 + 2dD$ etc. genügen, wo unter D_1 die Entfernung der Erschütterungsquelle von jenen Punkten des Mittels verstanden wird, welche ihr unter allen, durch diese eine Schwingung bewegten, am nächsten sind. Jene Punkte des Mittels, die in einer solchen Lamelle liegen, können alle als mit gleicher Geschwindigkeit bewegt, angesehen werden, da ja dD beliebig klein gewählt werden darf. Die ganze Masse der in der Entfernung D von der Schwingungsquelle gelegenen Lamelle bewegt sich daher zur Zeit t mit der Geschwindigkeit

$$u = \alpha f\left(t - \frac{D}{v}\right).$$

Da die Masse einer Lamelle

$$\mu = \sigma q d D$$

ist, wenn q den Querschnitt des Cylinders und σ die Dichte des Mittels bedeutet, so erhalten wir zur Bestimmung der lebendigen Kraft einer Lamelle zur Zeit t den Ausdruck

$$\tfrac{1}{2}\sigma q \alpha^2 f^2\left(t - \frac{D}{v}\right) d D.$$

Wollen wir nun die lebendige Kraft kennen lernen, welche nach einer Richtung von der Quelle fortgepflanzt wird, so haben wir die lebendigen Kräfte aller Lamellen zu summiren, welche zu einer der genannten Scheiben gehören. Demnach ist diese

$$L_1 = \tfrac{1}{2}\sigma q \alpha^2 \int_{D_1}^{D_1 + vT} f^2\left(t - \frac{D}{v}\right) d D$$

Bei dieser Integration ist t natürlich als constant zu betrachten.

Gesetzt $t - \frac{D}{v} = x$ und $t - \frac{D_1}{v} = \Delta$, so folgt:

$$L_2 = -\tfrac{1}{2}\sigma q v \alpha^2 \int_{\Delta}^{\Delta - T} f^2(x) d x$$

Bemerkt man aber, dafs $f(x)$ um T periodisch ist, dafs also der Werth von Δ keinen Einflufs auf das Integral haben kann und erkennt man ferner, dafs die nach der anderen Seite der Quelle fortgepflanzte lebendige Kraft L_2 gleich L_1 ist; dann wird man leicht zum Ausdruck der gesammten lebendigen Kraft gelangen, welche von der Quelle während einer ihrer Schwingungen dem Mittel mitgetheilt wird. Diese lebendige Kraft ist

$$L = \sigma q v \alpha^2 \int_0^T f^2(x) d x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

In ähnlicher Weise können wir die im cylindrisch begränzten Medium fortgepflanzte lebendige Kraft auch im Falle der bewegten Schwingungsquelle bestimmen, nur ist

hierbei auf die Verschiedenheit von L_1 und L_2 besonders zu achten. Auch in diesem Falle wird sich jene einer Schwingung entsprechende lebendige Kraft zu jeder Zeit in zwei Scheiben befinden, deren Dicken gleich der ihrem Orte zukommenden Wellenlängen sind.

Die Dicke jener Scheibe, welcher sich die Schwingungsquelle nähert, ist demnach

$$\lambda' = (v - g)\,T$$

und die Dicke der anderen, von welcher sich die Schwingungsquelle entfernt

$$\lambda' = (v + g)\,T.$$

Suchen wir nun die lebendige Kraft L_1 zu bestimmen, welche in der ersten enthalten ist.

Die Endflächen dieser Scheibe werden den Gleichungen $D = D_1$ und $D = D_1 + (v - g)\,T$ genügen müssen. Zerlegen wir die Scheibe in Lamellen, deren unendlich kleine Dicke $dD = dD_0$ sey, so kann die lebendige Kraft einer solchen Lamelle auf ähnlichem Wege berechnet werden, wie es schon früher geschah. Zur Bestimmung der Geschwindigkeit der Punkte in der Lamelle dient hierbei die Formel (5), in der wir statt α das Zeichen α_1 zu setzen haben, damit die Möglichkeit einer Abweichung dieser Gröfse von dem Werthe α in der Formel (11) nicht schon *a priori* ausgeschlossen erscheine. Die lebendige Kraft einer solchen Lamelle ergiebt sich sodann

$$= \tfrac{1}{2}\sigma q \alpha_1^2 f^2 \left(\frac{v}{v-g}t - \frac{D_0}{v-g}\right)^2 dD.$$

Die lebendige Kraft der ganzen Scheibe ist daher

$$L_1 = \tfrac{1}{2}\sigma q \alpha_1^2 \int_{D_1}^{D_1 + (v-g)T} f^2 \left(\frac{v}{v-g}t - \frac{D_0}{v-g}\right) dD.$$

Gesetzt

$$\frac{v}{v-g}t - \frac{D_0}{v-g} = x,$$

so folgt, wenn wir darauf achten, dafs $f(x)$ um T periodisch ist:

$$L_1 = \tfrac{1}{2}\sigma q(v-g)\,\alpha_1^2 \int_0^T f^2(x)\,dx \quad . \quad . \quad (12).$$

Die lebendige Kraft, welche in der anderen, also in jener Scheibe enthalten ist, von welcher sich die Schwingungsquelle entfernt, kann auf gleichem Wege berechnet werden. Statt g mufs hier $-g$ und statt α_1 das Zeichen α_2 gesetzt werden, um die gesuchte Gröfse L_2 zu erhalten. Man findet so

$$L^2 = \tfrac{1}{2}\sigma q(v+g)\,\alpha_2^2 \int_0^T f^2(x)\,dx \quad . \quad . \quad (13).$$

Die genannte im cylindrisch begränzten Mittel verbreitete lebendige Kraft einer Schwingung ist nun $= L_1 + L_2$. Diese Gröfse mufs nach dem oben angeführten Satze unabhängig von der Bewegung der Schwingungsquelle seyn, so dafs die Gleichung besteht:

$$L_1 + L_2 = L.$$

Oder die Werthe dieser Gröfsen aus den Gleichungen (11), (12) und (13) eingeführt:

$$\alpha_1^2(v-g) + \alpha_2^2(v+g) = 2\,\alpha^2 v \quad . \quad . \quad (14).$$

Diese Gleichung soll nun darüber entscheiden, welche der beiden bereits oben erwähnten Annahmen, über die Abhängigkeit der Amplitude a, respective der Geschwindigkeits-Amplitude α von der Geschwindigkeit c als richtig zu betrachten sey.

Professor Ketteler bedient sich zur Darstellung der Schwingungen eines Punktes, dessen active Entfernung von der Schwingungsquelle $= \delta$ ist, der Gleichung:

$$\varrho = af\left(t - \frac{\delta}{v}\right)$$

worin ϱ die Verrückung des Punktes aus seiner Ruhelage zur Zeit t, und a den gröfstmöglichen Werth derselben, also die Amplitude im strengen Sinne des Wortes bedeuten. Stillschweigend setzt dann Prof. Ketteler voraus, dafs a wohl von δ abhängt, aber in einer bestimm-

ten Richtung und für einen bestimmten Werth der Entfernung δ von e unabhängig ist. Dieſs bedeutet wenigstens in seinem obenerwähnten Werke (S. 136) die Formel:

$$a = \frac{A_1}{\delta}. \quad ^{1)}$$

wo A_1 die entsprechende Amplitude auf der Kugelfläche bedeutet, deren Radius gleich der Einheit ist, und als von c unabhängig angesehen wird.

Diese Annahme wiederspricht aber der Gleichung (14).

Bei der Fortpflanzung der Schwingungen im cylindrisch begränzten Raume, wie sie soeben betrachtet wurde, müſsten nach Prof. Ketteler die Schwingungen der auf einer Seite von der Schwingungsquelle gelegenen Punkte durch die Gleichung:

$$\varrho_1 = af\left(\frac{v}{v-g}t - \frac{D_0}{v-g}\right)$$

bestimmt werden; für die Schwingungen der Punkte dagegen, welche auf der anderen Seite der Quelle liegen, müſste die Gleichung gelten:

$$\varrho_2 = af\left(\frac{v}{v+g}t - \frac{D_0}{v+g}\right).$$

Die entsprechenden Geschwindigkeiten der Schwingungsbewegung wären demnach:

$$\frac{d\varrho_1}{dt} = a\frac{v}{v-g}f'\left(\frac{v}{v-g}t - \frac{D_0}{v-g}\right)$$

und

$$\frac{d\varrho_2}{dt} = a\frac{v}{v+g}f'\left(\frac{v}{v+g}t - \frac{D_0}{v+g}\right).$$

Bedeutet daher φ den Maximalwerth der Function f', so ergeben sich die Geschwindigkeitsamplituden:

$$\alpha_1 = a\frac{v}{v-g}\varphi$$

und

$$\alpha_2 = a\frac{v}{v+g}\varphi.$$

Endlich wenn $g = 0$ ist; so wird:

$$\alpha = a\varphi.$$

1) Prof. Ketteler bezeichnet die Amplitude a mit A.

Diese Werthe in die Gleichung (14) eingeführt, folgt:

$$a^2 \frac{v}{v-g} + a^2 \frac{v}{v+g} = 2a^2.$$

Eine Gleichung der offenbar nicht genügt werden kann, so lange a als von der Geschwindigkeit g unabhängig angesehen wird. Hierauf gestützt werden wir Prof. Ketteler's Annahme als eine unrichtige verwerfen.

Dieselbe Gleichung (14) wird hingegen gewiſs erfüllt, sobald

$$\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$$

gesetzt, also angenommen wird, *daſs die Geschwindigkeitsamplitude nur insofern von der Bewegung der Schwingungsquelle abhängt, als diese auf ihre active Entfernung verändernd einwirkt.*

Mit vollem Recht werden wir also in der Gleichung:

$$\alpha = \frac{A_1}{\delta}$$

die Gröſse A_1 [1]) als von der Geschwindigkeit c unabhängig ansehen.

Diesen Werth von α setzen wir nun in (5) und erhalten dann mit Benutzung des Werthes von δ aus (3), die Gleichung der Schwingungsbewegung in einem Punkte des Mittels:

$$u = \frac{A_1}{D} \frac{v-c}{v} f\left(\frac{v}{v-c} t - \frac{D_0}{v-c}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 15),$$

worin

$$D = D_0 - ct.$$

Werden diese Schwingungen von einem ruhenden Beobachter aufgefangen, so bestimmt diese Gleichung auch die Schwingungsgeschwindigkeit, welche jederzeit zum Beobachter gelangt. Bewegt sich dagegen der Beobachter, so werden immer neue und neue Punkte des Mediums durch ihre Geschwindigkeiten auf ihn einwirken, deren Phasen durch die Gleichung (9) gegeben sind, und deren Geschwindigkeits-Amplituden jederzeit der activen Entfernung jener Punkte von der Schwingungsquelle entsprechen, die eben den Beobachter berühren. Die Geschwindigkeit, welche in diesem Falle in jedem Momente zum

1) Die Geschwindigkeitsamplitude auf der Kugelfläche, deren Radius = 1.

Beobachter gelangt, ist also durch die Gleichung (9) gegeben, wenn in ihr $\alpha = \frac{A_1}{\delta}$ und für δ der Werth aus (3) gesetzt wird:

$$u = \frac{A_1}{D} \cdot \frac{v-c}{v} f\left(\frac{v+c'}{v-c} t - \frac{D_0}{v-c}\right) \quad . \quad . \quad (16)$$

worin

$$D = D_0 - ct - c't.$$

Wir dürfen aber nicht denken, dafs die Gleichung (16) etwa die Schwingungen eines einzelnen Punktes bestimmt, sondern müssen stets darauf achten, dafs sie jederzeit die Geschwindigkeit jener Punkte ausdrückt, die eben mit dem Beobachter in Berührung stehen.

§. 3.

Ich gehe nun zur Bestimmung der Intensität der vom Beobachter empfangenen Schwingungsbewegung über.

Es bedarf wohl keiner näheren Erörterung, dafs im Falle der Bewegung von Schwingungsquelle und Beobachter die *Intensität* definirt werden mufs, *als jene lebendige Kraft, welche in der Zeiteinheit auf die der Wellenfläche parallele Flächeneinheit fallen würde, wenn alle Schwingungen derjenigen gleich wären, welche ihr von dem Augenblicke ab mitgetheilt wird, wo die Intensität bestimmt werden soll.* Wird sonach die jener ersten Schwingung entsprechende lebendige Kraft mit i bezeichnet, so ist die Intensität:

$$J = ni \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

wo n die Zahl der in der Zeiteinheit auf die Fläche fallenden einzelnen Schwingungen bedeutet.

Zur Berechnung von J soll nun die Flächeneinheit so gewählt werden, dafs ihre Dimensionen gegenüber D verschwinden, dafs also die Wellen als ebene Wellen betrachtet werden können. Ferner wollen wir uns auf Entfernungen D beschränken, welche grofs gegenüber der Wellenlänge sind.

Bei diesen gemachten Voraussetzungen ist es nicht schwer, die lebendige Kraft abzumessen, welche der zur

Intensitätsmessung bestimmten Flächeneinheit während der ersten Schwingung mitgetheilt wird. Diese gesuchte lebendige Kraft ist ja offenbar jene, welche sich im Momente der geforderten Intensitätsbestimmung in einer vom Medium erfüllten planparallelen Platte befindet, deren von der Schwingungsquelle entferntere Basis die zur Intensitätsbestimmung angewandte Flächeneinheit und deren Dicke die Wellenlänge der im Medium dorthin fortgepflanzten Schwingungen ist. Diese von der Bewegung des Beobachters unabhängige Wellenlänge im Medium ist, wie wir schon sahen

$$\lambda' = (v - c)\, T.$$

In welcher Weise die in einer solchen Platte enthaltene lebendige Kraft bestimmt werden kann, haben wir schon in §. 2 gezeigt. Nach Zerlegung der Platte in Lamellen von der Dicke dD folgt für die lebendige Kraft der einzelnen Lamelle:

$$\sigma \frac{A_1^2}{D^2} \frac{(v-c)}{v^2} f^2\left(\frac{v}{v-c} t - \frac{v}{v-c}\right) dD.$$

Da nun D von einer der zu betrachtenden Lamellen zur anderen übergehend nur um eine ihr gegenüber kleine Gröfse (kleiner als λ') verändert wird, so kann D^2 im Nenner mit Recht als constant angesehen werden. Die Summation von $D - \lambda'$ bis D ergiebt dann die lebendige Kraft i, welche in der soeben begränzten Platte enthalten ist. Mit Zugrundelegung der Betrachtungen im §. 2 folgt daher:

$$i = \sigma \frac{A_1^2}{D^2} \cdot \frac{(v-c)^2}{v} \cdot (v-c) \int_0^T f^2(x)\, dx \qquad (18).$$

Diese Einzelschwingung wird dem Beobachter im Falle seiner Ruhe in dem Zeitintervall $T' = \frac{v-c}{v} T$ mitgetheilt. Im Falle seiner Bewegung dagegen ist diese Zeitdauer, welche ja keine Andere als jene ist, die zwischen zwei gleichen Phasen der dem Beobachter angränzenden Punkte vergeht, durch die Gleichung

$$T'' = \frac{v-c}{v-c'} T$$

gegeben.

Die Zahl der einzelnen Schwingungen, welche in der Zeiteinheit zu dem Beobachter gelangen, ist sonach

$$n = \frac{1}{T''} = \frac{v+c'}{v-c} \cdot \frac{1}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Die in (18) und (19) enthaltenen Werthe in die Gleichung (17) gesetzt, gelangt man zum gesuchten Ausdruck der Intensität:

$$J = \frac{(v-c)^2}{v^2} (v+c') \sigma \frac{A_1^2}{D^2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f^2(x) dx.$$

Wenn $c = 0$ und $c' = 0$, so übergeht diese Gleichung in jene der Intensität für den Fall, dafs Schwingungsquelle und Beobachter in ihrer momentanen Entfernung D still stehend gedacht werden. Bezeichnen wir diese Intensität mit J_0, so ist ihr Werth:

$$J_0 = \sigma v \frac{A_1^2}{D^2} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T f^2(x) dx \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Demnach kann gesetzt werden

$$J = J_0 \frac{(v-c)^2}{v^2} \cdot \frac{(v+c')}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

oder entwickelt:

$$J = J_0 \left(1 - \frac{2c}{v} + \frac{c'}{v} + \frac{c^2}{v^2} - \frac{2cc'}{v} + \frac{c^2 c'}{v^3}\right) \quad (22).$$

Wir haben hier noch auf die Gränzen aufmerksam zu machen, innerhalb derer diese Gleichung ihrer Ableitung gemäfs gültig seyn kann.

Erstens ist zu bemerken, dafs ihre Gültigkeit nur für solche Werthe der Entfernung D bewiesen wurde, welche grofs gegenüber λ' sind.

Zweitens sieht man wohl, dafs sie zwar bei der Bewegung der Quelle und des Beobachters in einer und derselben Geraden für alle Werthe des g und des g' besteht, welche kleiner als v sind, dafs sie aber im Falle, wenn sich Quelle und Beobachter nicht in derselben Ge-

raden bewegen, nur insofern anwendbar ist, als g und g' für klein im Verhältnifs zu v angesehen werden dürfen.

§. 4.

Die soeben erhaltene Formel für die Intensität stimmt mit der in Professor Ketteler's Arbeit enthaltenen nicht überein. Es wurde aber schon in §. 2 gezeigt, dafs die Annahme, welche dieser letzteren zu Grunde liegt, unhaltbar ist, dafs also auch alle Folgerungen zu verwerfen sind, die aus ihr entspringen.

So führt unter Anderem die Ketteler'sche Formel für den Fall des ruhenden Beobachters zur Gleichung

$$J = J_0.$$

Ein Resultat, welches ebenso wie der hier folgende darauf begründete Satz als unrichtig bezeichnet werden mufs:

„*Wie immer die Bewegung der Fixsterne beschaffen seyn möge, die Intensität des in einer bestimmten Entfernung von ihnen wahrgenommenen Lichtes bleibt an einem im Raume als fest angenommenen Punkte die nämliche, als ob der Fixstern in der bezüglichen Entfernung in Ruhe wäre*“ [1]).

Unserer Formel (21) gemäfs ist in diesem Falle

$$J = J_0 \left(\frac{v-c}{v}\right)^2$$

und da aus der Gleichung (3)

$$\delta = \frac{v}{v-c} D$$

ist, so folgt

$$J = J_0 \frac{D^2}{\delta^2} = J_\delta,$$

wenn J_δ die Intensität in dem Falle bedeutet, dafs wir Schwingungsquelle und Beobachter in der ihrer momentanen Entfernung entsprechenden activen Entfernung feststehend denken.

Der oben angeführte Satz Ketteler's ist daher durch folgenden zu ersetzen:

1) Dr. E. Ketteler, Astronomische Undulationstheorie, S. 143.

Wie immer die Bewegung der Fixsterne beschaffen seyn möge, die Intensität des in einer bestimmten Entfernung (D) von ihnen wahrgenommenen Lichtes wird an einem im Raume als fest angenommenen Punkte die nämliche seyn, als ob der Fixstern in der jener Entfernung entsprechenden activen Entfernung (δ) in Ruhe wäre.

Die Kritik der Ketteler'schen Intensitätsformeln weiter zu verfolgen, halte ich nach dem bisher Gesagten für unnöthig. Die Ableitung der Gleichung (21), wie ich sie hier darlegte, wird wohl am besten auch zur Aufklärung der anderen widersprechenden Punkte dienen, die in der hierauf bezüglichen Arbeit Professor Ketteler's etwa noch enthalten sind.

§. 5.

Zum Schlufs will ich einige Folgerungen aus der oben gefundenen Gleichung (21) oder (22) mittheilen. Denken wir uns eine Tonquelle und einen Beobachter mit gleicher Geschwindigkeit g etwa in Luft bewegt, dann wird die beobachtete Tonhöhe, der Gleichung (10) gemäfs, dieselbe wie im Falle ihrer Ruhe seyn. Die Stärke der beobachteten Tonschwingungen hingegen wird in diesem Falle durch die Bewegung beeinflufst. Stellt nämlich der Beobachter die Tonquelle in der Richtung seiner Bewegung vor sich hin, so ist in der Gleichung (22) $c = -g$ und $c' = +g$ zu setzen, demnach ist dann annähernd

$$J = J_0 \left(1 + 3 \frac{v}{g}\right).$$

Stellt aber der Beobachter die Tonquelle in derselben Entfernung wie früher jedoch so auf, dafs die von dieser zu ihm gezogene Gerade mit der Richtung der Bewegung zusammenfalle, dann ist $c = +g$ und $c' = -g$ zu setzen und demnach:

$$J' = J_0 \left(1 - 3 \frac{g}{v}\right).$$

Wie grofs der Unterschied zwischen J und J' innerhalb der Gränzen ausführbarer Experimente werden kann, soll

in einem Beispiele gezeigt werden. Nehmen wir an, dafs sich der Beobachter und die Tonquelle mit der auf einer Locomotive erreichbaren Geschwindigkeit von etwa 30 Metern in der Secunde bewegen, dann ist der Bruch $\frac{g}{v}$ nahezu $= 0{,}1$. In diesem Falle ist sonach $J = 1{,}3 \,.\, J_0$ und $J' = 0{,}7 \,.\, J_0$, also annähernd

$$\frac{J}{J'} = 1{,}8.$$

Bei Ausführung eines solchen Versuchs dürfte dieses theoretische Resultat darum nicht erhalten werden, weil wir ja bei bewegten Tonquellen kaum von dem Einflusse der Reibung auf ihre Schwingungen absehen können.

Insofern aber die störenden Einflüsse der Reibung vernachlässigt werden dürfen, könnte die Beobachtung der Intensitäten J und J' zur Bestimmung der Geschwindigkeit dienen, mit welcher die gemeinsame Bewegung des Beobachters und der Tonquelle relative zur Luft geschieht.

Diese Bemerkung führt natürlich auf den Gedanken, die Tonquelle durch eine Lichtquelle zu ersetzen und unsere Formel zur Bestimmung jener Geschwindigkeit anzuwenden, mit welcher sich die mit der Erde bewegten Körper relative zum Aether der irdischen Atmosphäre bewegen.

Im Falle der Lichtschwingungen wird man auch von dem störenden Einflusse der Reibung, in Folge der geringen Masse des Aethers mit mehr Recht absehen können, als bei Tonschwingungen.

Bewegt sich der Aether gemeinschaftlich mit den Körpern, welche ihn enthalten, dann wird der irdische Beobachter das Licht einer in bestimmter Entfernung gelegenen irdischen Quelle immer gleich intensiv empfinden, ob diese in der Richtung der Bewegung der Erde vor ihm oder hinter ihm liegt. Dasselbe würde aber dann nicht geschehen, wenn der Aether im Weltraume feststände oder sich in irdischen Körpern, deren Geschwindigkeit g ist, nach Fresnel's Annahme nur mit der Geschwindigkeit $\frac{n^2-1}{n^2}\, g$

bewegte (unter n das absolute Brechungsverhältnifs im betreffenden Körper verstanden).

Allerdings scheint die letztere dieser Annahmen die gröfste Berechtigung zu haben, da sie die sämmtlichen Aberrationserscheinungen am besten zu erklären vermag. Nur darf nicht vergessen werden, dafs sobald wir die Bewegung des Aethers von der jener Körper trennen, in welchen er enthalten ist, wir dadurch seine wahre Existenz anerkennen; eine Annahme, die mir dem Criterium der Wahrscheinlichkeit kaum zu genügen scheint. Die experimentelle Entscheidung dieser noch immer offenen Frage auf dem hier angedeuteten Wege hat schon Fizeau i. J. 1852 [1]) vorgeschlagen. Die Berechnung zu diesem projectirten Experimente geschah aber nach der bereits in der Einleitung erwähnten unvollständigen Formel; daher erscheint es mir von Interesse, diese Berechnung mit Zugrundelegung der Formel (22) hier neuerdings auszuführen.

Fizeau gedenkt zwei Thermosäulen p und p' so aufzustellen, dafs ihre entgegengesetzten Pole einer, auf der sie verbindenden Geraden $p'p$ zwischen ihnen stehenden, Lampe zugekehrt seyen. Die Thermosäulen sind dann mit einem Galvanometer zu einer Schliefsung zu verbinden, so dafs die Galvanometernadel keinen Ausschlag zeigt, so lange die Lampe auf beide Pole p und p' dieselben Wärmemengen ausstrahlt. Lampe und Thermosäulen sollen endlich auf ein Stativ befestigt werden, welches sich um eine auf die Gerade pp' verticale Axe drehen läfst.

Bewegt sich nun dieses Stativ und alle ihr anhaftenden Gegenstände relative zum Aether mit der Geschwindigkeit g, so zwar, dafs die Richtung $\overleftrightarrow{pp'}$ mit der Richtung der Bewegung zusammenfällt; dann ist die in der Zeiteinheit auf p ausgestrahlte Wärmemenge unserer Formel gemäfs annähernd

$$= pJ_0\left(1 - 3\frac{g}{c}\right),$$

wo p die absorbirende Fläche der Thermosäule bedeutet.

1) *Cosmos, T. I, p.* 690, Pogg. Ann. Bd. 92, S. 652.

Die Wärmemenge dagegen, welche in derselben Zeit auf p' fällt, ist

$$= p' J'_0 \left(1 + 3 \frac{g}{v}\right).$$

Es soll nun die Entfernung der Thermosäulen von der Lampe so geregelt werden, dafs die Galvanometernadel keinen Ausschlag zeige, dann ist für diese erste Stellung des Stativs

$$p J_0 \left(1 - 3 \frac{g}{v}\right) = p' J'_0 \left(1 + 3 \frac{g}{v}\right) \quad . \quad . \quad (23).$$

Wenn aber hierauf das Stativ um ihre Axe mit 180° gedreht wird, so wird bei dieser zweiten Stellung auf p in der Zeiteinheit die Wärmemenge fallen

$$= p J_0 \left(1 + 3 \frac{g}{v}\right).$$

Auf p' dagegen die Wärmemenge

$$= p' J'_0 \left(1 - 3 \frac{g}{v}\right).$$

Bei dieser zweiten Stellung empfängt also p eine Wärmemenge von der Lampe, die um

$$p J_0 \left(1 + 3 \frac{g}{v}\right) - p' J'_0 \left(1 - 3 \frac{g}{v}\right)$$

gröfser als jene dem Pole p mitgetheilte ist. Der Werth dieses Ueberschusses ergiebt sich, mit Berücksichtigung der Gleichung (23) annähernd

$$= 12 p \frac{g}{v} J_0.$$

Würde nun der Lichtäther an der Bewegung der Erde gar nicht Theil nehmen, so könnte man $\frac{g}{v}$ nahezu $= \frac{1}{10000}$ setzen und dem entsprechend müfste auf die Thermosäule p um $\frac{p J_0}{833}$ mehr Wärme in der Zeiteinheit fallen als auf die Thermosäule p'. Das Resultat für den Fall, dafs die Geschwindigkeit des Aethers in irdischen Körpern $\frac{n_2 - 1}{n^2} g$ wäre, ist kaum von diesem abweichend, wenn nur das Experiment in Luft ausgeführt wird. Dieser Ueberschufs der

auf p fallenden Wärmemenge müſste nun durch den Ausschlag der Galvanometernadel meſsbar werden.

Das Experiment ist meines Wissens noch nicht gemacht, die Möglichkeit ihrer Ausführung gewinnt aber durch die Formel (22) an Wahrscheinlichkeit, da ja Ketteler und vor ihm Fizeau nur $\frac{1}{1250}$ der ganzen auf p fallenden Wärmemenge als jene bezeichneten, welche den Ausschlag der Nadel im besten Falle bewirken könnte.

II. *Einige experimentelle Untersuchungen über elektrische Schwingungen;*
von N. Schiller.

Die vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institute der Berliner Universität auf Veranlassung des Hrn. Geheimrath Helmholtz ausgeführt. Der Zweck derselben war die theoretischen Gesetze der alternirenden Ströme zu prüfen und einige mit den letzteren verbundene Erscheinungen zu untersuchen, welche bisjetzt aus Mangel an hinreichenden Methoden nicht beobachtet werden konnten. Ich benutzte dabei die von Helmholtz im Jahre 1871 gegebene Methode [1]), die wesentlich darin besteht, daſs man die abwechselnden elektrostatischen Ladungen an Enden eines alternirenden Stromes beobachtet.

1. Bevor ich jedoch zur weiteren Auseinandersetzung der Methode und der von mir gewonnenen Resultate schreiten werde, will ich kurz an die Theorie der alternirenden Ströme erinnern.

Stelle man sich zwei Rollen vor, von denen die eine als inducirende und die andere, deren Enden von einander getrennt und isolirt sind, als inducirte dient; es sey p das Potential der letzteren auf sich selbst, w deren galvanischer Widerstand, c deren elektrostatische Capacität, d. h. die

1) Monatsberichte d. Berl. Akad. 1871.