

ANNALEN  
DER  
PHYSIK UND CHEMIE.

REGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH  
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF.

NEUE FOLGE.

BAND 59.

DER GANZEN FOLGE 295. BAND.

UNTER MITWIRKUNG

DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT IN BERLIN

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK.

HERAUSGEGEBEN VON

G. UND E. WIEDEMANN. *Al.*

NEBST NEUN FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1896.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH.

(ARTHUR MEINER.)

MAGY. KIR. KÖZPONTI MÉRTÉKÜGYI INTÉZET.

Könyvtár           *A.*           tétel.

## 12. *Untersuchungen über Gravitation und Erdmagnetismus; von Roland v. Eötvös.*

Die vorliegende Abhandlung ist ein kurzer zusammenfassender Bericht über die Resultate meiner nun seit acht Jahren über Gravitation und Erdmagnetismus angestellten ausgedehnten Untersuchungen. Die äusserst empfindlichen Methoden, die ich besonders zur Messung der räumlichen Variationen dieser Kräfte eronnen habe, machten es möglich, mich solchen Aufgaben zuzuwenden, die bislang für unangreifbar gehalten werden durften. Da sich mir im Laufe der Untersuchungen stets neue der Lösung harrende Fragen aufdrängten, war es mir kaum möglich, die einstweiligen Resultate zu veröffentlichen. Die kurzen Berichte, die ich von Zeit zu Zeit der ungarischen Akademie der Wissenschaften vorlegen konnte, genügen kaum, die Resultate meiner Forschungen weiteren Kreisen zugänglich zu machen, und so möge denn die vorliegende, noch immer kurzgefasste und vorläufige Mittheilung mit Uebergang der in Einzelheiten gehenden theoretischen Ableitungen und Beobachtungsergebnissen klarlegen, was in meinen Untersuchungen für neu zu betrachten sei.

Es wäre ein Versäumniss, bei der Erwähnung meiner Arbeiten meiner Hilfsarbeiter zu vergessen. Durch Jahre hindurch fand ich an Dr. Rudolf v. Kövesligethy, nun a. o. Professor an der Universität in Budapest, einen eifrigen Gehülfen, und während der ganzen Zeit meiner Forschungen nahm an meinen Arbeiten zuerst als Hörer, später als Assistent des physikalischen Instituts Dr. Karl Tangl Theil. Nehmen beide Herren auch auf diesem Wege meinen Dank entgegen.

Alle bei den Forschungen nöthigen neuen Instrumente, von Hrn. Ferdinand Süss, Director der staatlichen mechanischen Lehrwerkstätte in Budapest, hergestellt, beweisen die hohe Sorgfalt, Präcision und Eleganz ihres Herstellers.

## I. Messung der räumlichen Variation der Schwere.

## 1. Feststellung der Aufgabe.

Unsere Kenntnisse über die räumlichen Variationen der Schwere sind wegen Unzulänglichkeit der sie messenden gebräuchlichen Instrumente bislang sehr lückenhaft. Das Pendel lässt dieselben in einer ihrer Kleinheit durchaus nicht angepassten Empfindlichkeit nur in grösseren Entfernungen erkennen, und die Waage, obwohl empfindlicher, bevorzugt nach Jolly's Verfahren nur eine einzige Richtung, indem sie bloss die Verticaländerung der Schwere gibt. Die Methoden und Instrumente, von denen in der Folge die Rede sein wird, erlauben das Abmessen der Variationen in kleinen Entfernungen von kaum einigen Decimetern und in verschiedenen Richtungen; sie ergänzen die mit dem Pendel und der Jolly'schen Waage angestellten Beobachtungen derart, dass nunmehr mit diesen zusammen die Schwerkraft der Grösse und Richtung nach nicht nur in einzelnen Punkten, sondern sogar in demjenigen Theile des Raumes als bekannt gelten darf, in welchem die Variation der Kraft als gleichmässig betrachtet werden darf. Mit Rücksicht auf dieses Ziel kann nun unsere Aufgabe näher umschrieben werden.

Bedeutend  $X, Y, Z$  die Beschleunigungscomponenten im Punkte  $x, y, z$ ;  $X_0, Y_0, Z_0$  deren Werthe im Coordinatenanfangspunkte, so bestehen für die rechtwinkligen Componenten der Schwerebeschleunigung im gleichmässig veränderlichen Felde die folgenden Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} X = X_0 + \frac{\partial X}{\partial x} x + \frac{\partial X}{\partial y} y + \frac{\partial X}{\partial z} z \\ Y = Y_0 + \frac{\partial Y}{\partial x} x + \frac{\partial Y}{\partial y} y + \frac{\partial Y}{\partial z} z \\ Z = Z_0 + \frac{\partial Z}{\partial x} x + \frac{\partial Z}{\partial y} y + \frac{\partial Z}{\partial z} z. \end{cases}$$

Stellt man die Schwerkraft als Resultante der Anziehung der die Erde bildenden Massen und der Centrifugalkraft dar, und bezeichnet mit  $V$  die Potentialfunction der Anziehung der Erdmasse, mit  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung,

mit  $r$  den Drehungsradius des Punktes  $x, y, z$ , mit  $U$  endlich die Kräftefunction der Schwere, so kann man schreiben:

$$(2) \quad \begin{cases} X = \frac{\partial}{\partial x} (V + \frac{1}{2} r^2 \omega^2) = \frac{\partial U}{\partial x} \\ Y = \frac{\partial}{\partial y} (V + \frac{1}{2} r^2 \omega^2) = \frac{\partial U}{\partial y} \\ Z = \frac{\partial}{\partial z} (V + \frac{1}{2} r^2 \omega^2) = \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

und hiernach ist:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \end{cases}$$

und weiter auch:

$$(4) \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2 \omega^2.$$

Wählt man nun das Coordinatensystem derart, dass die  $Z$ -Axe der Richtung der Schwere im Coordinatenanfangspunkte parallel sei, so wird

$$X_0 = 0, \quad Y_0 = 0 \quad \text{und} \quad Z_0 = g_0.$$

Die Gleichungen (1) drücken die Schwerebeschleunigung im ganzen gleichmässig veränderlichen Raume mit Hülfe von zwölf Constanten aus; da jedoch die  $z$ -Axe durch die Lothrechte bestimmt ist, mithin  $X_0$  und  $Y_0$  Null werden,  $Z_0$  aber unmittelbar durch das Pendel erhältlich ist, so bleiben noch neun Constanten, zwischen denen die Gleichungen (3) und (4) vier Relationen bestimmen, sodass im Endresultate zur völligen Lösung der Aufgabe noch fünf Constanten durch Messung zu bestimmen sein werden. Bevor ich auf die hierzu dienlichen Methoden eingehe, wird es gut sein, jene einfachen Beziehungen anzuführen, welche zwischen den hier auftretenden Grössen und der Niveaufläche  $U = \text{const.}$  der Schwere bestehen.

Bezeichnet nämlich im Anfangspunkte der Coordinaten  $\rho_x$  den Krümmungsradius eines Normalschnittes dieser Fläche in der Richtung der  $X$ -Axe,  $\rho_y$  dasselbe in der Richtung der  $Y$ -Axe, so ist

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\frac{g_0}{\varrho_1} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{g_0}{\varrho_2} \end{array} \right.$$

Nun kann aber unser Coordinatensystem um die  $Z$ -Axe auch derart gedreht werden, dass die  $X$ - und  $Y$ -Axe in die Richtungen der Hauptkrümmungsradien fallen; bedeuten dann  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  die beiden Hauptkrümmungsradien, so ist

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = -\frac{g_0}{\varrho_1}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{g_0}{\varrho_2}$$

und zugleich

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0.$$

Die beiden ausserdem noch zu bestimmenden Differentialquotienten  $\partial^2 U / \partial x \partial z$  und  $\partial^2 U / \partial y \partial z$  haben eine doppelte Bedeutung. Schreibt man einerseits

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial x} = \frac{\partial \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y}$$

so ersieht man sogleich, dass sie die Schwereänderungen längs der  $X$ - und  $Y$ -Axe darstellen. Wenn nun in der Niveaufäche das Bogenelement  $ds$  senkrecht zur Linie der constanten Schwere steht, so ist:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial s} \cos \alpha$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial s} \sin \alpha,$$

mithin kann die Bestimmung der Differentialquotienten  $\partial g / \partial x$  und  $\partial g / \partial y$  auf diejenige der Grössen  $\partial g / \partial s$  und  $\alpha$  zurückgeführt werden. Hierbei ist  $\partial g / \partial s$  das Maass der Schwereänderung in der Niveaufäche selbst,  $\alpha$  der die Richtung dieser Aenderung charakterisirende Winkel.

Schreibt man aber anderseits:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \kappa} = \frac{\partial \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)}{\partial \kappa} = \frac{\partial X}{\partial \kappa}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial \kappa} = \frac{\partial \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)}{\partial \kappa} = \frac{\partial Y}{\partial \kappa}$$

so gelangt man zur zweiten Deutung der links stehenden Quotienten. In einem um  $z$  unter dem Anfangspunkte gelegenen Punkte kommen nämlich zu der in der  $Z$ -Richtung wirkenden Schwere noch die Beträge  $(\partial X/\partial z)z$  und  $(\partial Y/\partial z)z$  hinzu, sodass in diesem Punkte die Resultirende um die ihrer Kleinheit halber mit der Tangente zu vertauschenden Winkel

$$E_x = \frac{1}{g} \frac{\partial X}{\partial \kappa} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \kappa} \quad \text{und} \quad E_y = \frac{1}{g} \frac{\partial Y}{\partial \kappa} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial \kappa}$$

von der  $Z$ -Axe abweicht. Geht man also in der Verticalen um die Längeneinheit abwärts, so findet man in der  $XZ$ -, beziehentlich  $YZ$ -Ebene die angeführten Richtungsveränderungen der Schwere gegen die  $Z$ -Axe. Wir haben somit das Maass der Richtungsänderung der Schwerkraft in der Verticalen gewonnen.

Die fünf, zur vollständigen Lösung unserer Aufgabe notwendigen Daten sind somit bestimmt, sobald die Hauptkrümmungsradien der Grösse und Richtung nach, ebenso die Schwereänderung der Grösse und Richtung nach in der Niveaufläche selbst bekannt sein werden. Da aber die Jolly'sche Wägung im Sinne der Gleichungen 4 schon den Werth von  $1/\rho_1 + 1/\rho_2$  ergibt, so genügt zur Bestimmung der Hauptkrümmungsradien die Beobachtung des Werthes  $1/\rho_1 - 1/\rho_2$ , von welcher weiter unten die Rede sein wird.

## 2. Die Methode.

Zur Lösung der nun genügend umschriebenen Aufgabe wurde die Coulomb'sche Waage benutzt.

Verlegt man die  $Z$ -Axe in die Axe des Aufhängedrahts der Coulomb'schen Waage, so lässt sich das Drehungsmoment

der Schwere auf den Waagebalken auf Grund der Gleichungen (1) und (3) in folgender Weise ausdrücken:

$$F = \int (Yx - Xy) dm = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \int xy dm + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \kappa} (x^2 - y^2) dm - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial \kappa} \int xz dm - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \kappa} \int yz dm,$$

wo die Integration auf alle dem Drahte angehängten Massen zu erstrecken ist.

Legt man nun ein mit dem Waagebalken sich drehendes, mit ihm fest verbundenes Koordinatensystem  $\xi, \eta, \zeta$  derart, dass die  $\zeta$ -Axe mit der Drehungsaxe  $Z$  des Aufhängerdrahtes zusammenfalle,  $\xi$  im Waagebalken mit der  $X$ -Axe den Winkel  $\alpha$  bilde, so wird das Drehungsmoment:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} F &= \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2\alpha}{2} \int (\xi^2 - \eta^2) dm \\ &+ \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \cos 2\alpha \int \xi \eta dm + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \int (\xi^2 \\ &- \eta^2) dm - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} 2 \sin 2\alpha \int \xi \eta dm \\ &+ \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial \kappa} \cos \alpha - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \kappa} \sin \alpha \right) \int \xi \zeta dm \\ &- \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial \kappa} \sin \alpha + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \kappa} \cos \alpha \right) \int \eta \zeta dm \end{aligned} \right.$$

dessen Ausdruck für jede beliebige Gestalt des Waagebalkens gültig ist.

Für das vorgesteckte Ziel kamen zwei Arten des Waagebalkens in Anwendung. Die erste Form war die eines einfachen cylindrischen Stabes, an dessen Enden kugel- oder cylinderförmige Massen befestigt waren; in der zweiten Form war eine der Kugel oder Cylindermasse am einen Ende des Stabes aufgehängt, daher tiefer liegend.

Fällt die  $\xi$ -Axe in die geometrische Axe des Stabes, so wird in beiden Fällen:

$$\int \xi \eta dm = 0, \quad \int \zeta \eta dm = 0$$

und ausserdem im ersten Falle:

$$\int \xi \zeta dm = 0$$

im zweiten Falle dagegen:

$$\int \xi \zeta dm = h l m,$$

wo  $l$  den Drehungsradius der aufgehängten Kugel,  $m$  deren Masse,  $h$  ihre verticale Entfernung von dem Stabe, bezüglich von der am anderen Ende des Stabes befestigten Kugel bedeutet.

Untersuchen wir nun gesondert für beide Formen des Balkens die mechanischen Verhältnisse der Coulomb'schen Waage.

Im ersten Falle, da beide Kugeln an den Enden des Stabes in gleicher Höhe liegen, wird nach (5)

$$F = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2\alpha}{2} \int (\xi^2 - \eta^2) dm \\ + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \int (\xi^2 - \eta^2) dm$$

und legt man die  $X$ - und  $Y$ -Axe wie oben so, dass sie in die Richtung der Hauptkrümmungsradien fallen, wodurch

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$$

wird, so wird einfacher:

$$F = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2\alpha}{2} \int (\xi^2 - \eta^2) dm$$

Wir setzen nun:

$$\int (\xi^2 - \eta^2) dm = K,$$

und weiter:

$$\int (\xi^2 + \eta^2) dm = K,$$

desgleichen:

$$\frac{K'}{K} = 1 - \varepsilon.$$

Hierbei bedeutet  $K$  das Trägheitsmoment des Stabes; ist derselbe länglich, so wird  $\varepsilon$  klein sein, in den meisten Fällen sogar ganz vernachlässigt werden können.

Erhält nun der Aufhängedraht der Coulomb'schen Waage durch das Drehungsmoment der Schwerkraft eine Torsion um den Winkel  $\vartheta$ , so wird

$$\tau \vartheta = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) K (1 - \varepsilon) \frac{\sin 2 \alpha}{2}$$

oder anders geschrieben:

$$\tau \vartheta = g \left( \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \right) K (1 - \varepsilon) \frac{\sin 2 \alpha}{2},$$

da  $\tau \vartheta$  das infolge der Torsion auftretende Drehungsmoment darstellt.

In einer einzigen Stellung des Waagebalkens lässt sich nun zwar der Winkel  $\vartheta$  nicht ablesen; dreht man aber den Waagekasten mitsammt dem Torsionskopfe um eine verticale Axe, sodass die Axe des Waagestabes mit der  $X$ -Axe den von dem früheren verschiedenen Winkel  $\alpha'$  bilde, so verändert sich auch der Torsionswinkel des Aufhängedrahts, und diese Veränderung von der Grösse  $\vartheta' - \vartheta$  kann mit Hülfe des an Stab und Kasten angebrachten Zeigers, oder besser durch Spiegelablesungen bestimmt werden.

Schon drei Stellungen des Waagebalkens genügen, um sowohl den Winkel  $\alpha$ , als auch den Werth von

$$\left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)$$

zu bestimmen. Jedoch erhält man ein übersichtlicheres und zur Berechnung geeigneteres Verfahren, wenn man die Waage in vier Lagen beobachtet, die einen Winkel von je  $45^\circ$  mit einander bilden. Sei in der Anfangslage:

$$\vartheta = \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2 \alpha}{2}$$

und senkrecht hierauf:

$$\vartheta' = - \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2 \alpha}{2}$$

In einer, von der anfänglichen um  $45^\circ$  abweichenden Richtung:

$$\vartheta_1 = \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\cos 2 \alpha}{2}$$

und hierauf senkrecht:

$$\vartheta_1' = - \frac{K(1-\varepsilon)}{\tau} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\cos 2 \alpha}{2}$$

aus welchen Gleichungen unmittelbar folgt:

$$\vartheta' - \vartheta = -\frac{K}{\tau}(1 - \varepsilon) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha$$

$$\vartheta_1' - \vartheta_1 = -\frac{K}{\tau}(1 - \varepsilon) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \cos 2\alpha$$

und

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\vartheta' - \vartheta}{\vartheta_1' - \vartheta_1}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\tau}{K(1 - \varepsilon)} \sqrt{(\vartheta' - \vartheta)^2 + (\vartheta_1' - \vartheta_1)^2},$$

wobei der ohnehin sehr kleine Werth von  $\varepsilon$  aus den Dimensionen des Balkens,  $\tau/K$  aber aus dessen Schwingungszeit bestimmt werden kann.

Im luftleeren Raume gilt für Schwingungen von unendlich kleiner Amplitude unter dem alleinigen Einflusse der Elasticität des Aufhänge drahtes die Gleichung

$$\frac{\tau}{K} = \frac{\pi^2}{T^2}.$$

Soll aber der Luftwiderstand und das aus der Schwereänderung entspringende Drehungsmoment Berücksichtigung finden, so schreiben wir die Differentialgleichung der Bewegung in der bekannten Form:

$$K \frac{d^2 \omega}{dt^2} + H \frac{d\omega}{dt} + F \omega = 0$$

wo  $\omega$  die Winkelongation,  $H$  eine von der Luftreibung abhängige Konstante, und  $K$  wie früher das Trägheitsmoment bedeutet. Hiermit wird die Elongation eines Punktes des Waagebalkens:

$$\omega = a e^{-\beta t} \sin \pi \frac{t}{T}$$

wobei

$$\beta = \frac{H}{2K}$$

gesetzt wurde, und

$$\frac{\pi^2}{T^2} = \frac{F}{K} - \beta^2$$

ist. In unserem Falle wird

$$F = \tau - \frac{\partial F}{\partial \omega} = \tau - \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) K(1 - \varepsilon) \cos 2\alpha$$

und daher auch

$$\frac{\pi^2}{T^2} = \frac{\tau}{K} - \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) (1 - \varepsilon) \cos 2\alpha - \beta^2.$$

Setzt man aber statt  $\alpha$   $\alpha + \pi/2$ , was einer, auf die frühere senkrechten Stellung des Waagebalkens entspricht, so ergibt sich:

$$\frac{\pi^2}{T'^2} = \frac{\tau}{K} + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) (1 - \varepsilon) \cos 2\alpha - \beta^2$$

und hieraus durch Addition:

$$\pi^2 \left( \frac{1}{T'^2} + \frac{1}{T^2} \right) = \frac{2\tau}{K} - 2\beta^2,$$

was sogleich auf den Werth von  $\tau/K$  führt.

Zugleich ersieht man aber hieraus, dass die Beobachtung der Schwingungszeiten schon an und für sich zur Lösung der Aufgabe genügt. Wir erhalten nämlich aus den für zwei aufeinander senkrechte Stellungen hier oben festgestellten Gleichungen:

$$\pi^2 \left( \frac{1}{T'^2} - \frac{1}{T^2} \right) = 2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) (1 - \varepsilon) \cos 2\alpha$$

und aus weiteren zwei aufeinander senkrechten, zu den früheren um  $45^\circ$  abstehenden Richtungen:

$$\pi^2 \left( \frac{1}{T_1'^2} - \frac{1}{T_1^2} \right) = 2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) (1 - \varepsilon) \sin 2\alpha,$$

woraus sowohl die Richtung  $\alpha$  der Hauptkrümmungen als der Werth:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = g \left( \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right)$$

berechnet werden können.

Wenn man lediglich leichterem Uebersicht halber die bei den verwendeten Instrumenten ohnehin stets kleine Grösse  $\varepsilon$  vernachlässigt und die Schwingungszeit der nur infolge der Elasticität des Drahtes schwingenden Waage mit  $T'_0$  bezeichnet, so kann näherungsweise das Resultat unserer Ueberlegungen in folgender Weise ausgesprochen werden: Dreht man die Coulomb'sche Waage als Ganzes, mit Kasten und Torsionskopf in zwei zu einander um  $90^\circ$  geneigte Lagen, so erhält der Aufhangedraht eine Torsion von der Grösse:

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{T_0'^2}{\pi^2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha = \frac{T_0'^2}{\pi^2} g \left( \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right) \sin 2\alpha$$

und zugleich verändert sich die Schwingungsdauer des Stabes bei dieser Drehung um den Betrag:

$$T' - T = -\frac{T_0^3}{\pi^2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \cos 2\alpha = -\frac{T_0^3}{\pi^2} g \left( \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right) \cos 2\alpha.$$

Wie zu ersehen wird  $\vartheta' - \vartheta$  ein Maximum für  $\alpha = 45^\circ$  und  $135^\circ$ ;  $T' - T$  ein Maximum für  $\alpha = 0$  und  $90^\circ$ , wobei zugleich die Relation besteht:

$$(T' - T)_{\max} = T_0 (\vartheta' - \vartheta)_{\max}.$$

Wir haben nun noch die zweite Form der Coulomb'schen Waage zu behandeln. Bei derselben ist eine der Massen um  $h$  unter dem Balken angebracht, somit ist, wie wir fanden

$$\int \xi \zeta dm = m l h$$

und somit:

$$R = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2\alpha}{2} \int (\xi^2 - \eta^2) dm + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \int (\xi^2 - \eta^2) dm \\ + \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} \cos \alpha - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} \sin \alpha \right) h l m.$$

Bringt man zunächst den Balken in die Richtung der  $X$ -Axe, sodass  $\alpha = 0$  wird, und dreht hierauf die Waage als Ganzes mit Kasten und Torsionskopf solange, bis  $\alpha = \pi$  wird, dann erhält der Aufhängedraht, den wir nun zum Unterschiede von dem das untere Gewicht tragenden Drahte Torsionsdraht nennen wollen, eine Torsion ( $\vartheta' - \vartheta$ ), dessen Werth sich aus der vorhergehenden Gleichung zu

$$\vartheta' - \vartheta = -\frac{2 h l m}{\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = -2 \frac{\partial g}{\partial y} \frac{h l m}{\tau}$$

berechnet. Bringt man aber den Balken zuerst in die Lage  $\alpha = \pi/2$ , hierauf  $\alpha = 3\pi/2$ , dann wird die Torsion zwischen beiden Lagen ähnlich durch:

$$\vartheta'_1 - \vartheta_1 = \frac{2 h l m}{\tau} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 2 \frac{\partial g}{\partial x} \frac{h l m}{\tau}$$

gegeben. Da hierbei  $l m / \tau$  leicht entweder aus den Abmessungen des Instrumentes, oder der Ablenkung des hängenden Gewichtes durch die Anziehung einer von aussen angebrachten Masse bestimmt werden kann, erhält man ohne weiteres  $\partial g / \partial x$  und  $\partial g / \partial y$ , die Horizontaländerungen der Schwere, mithin auch ihre Resultante nebst deren Richtung. Ausserdem bestimmt, wie wir wissen

$$E = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial s}$$

die Veränderung der Richtung der Schwere in der Verticalen.

Benützt man daher beide Formen der Coulomb'schen Waage nach den angegebenen Methoden, so gelangt man einerseits zur Kenntniss der Hauptkrümmungsrichtungen der Niveaufläche und der Differenz dieser Hauptkrümmungen:  $1/\varrho_1 - 1/\varrho_2$ , andererseits zur Kenntniss der Variation der Schwere in der Niveaufläche selbst, sowohl der Grösse, als auch der Richtung nach. Da weiter die Jolly'sche Wägemethode den Werth von  $\partial g/\partial z$  ergibt, so findet man mit Hülfe der aus Gleichung 4) entspringenden Relation

$$\frac{\partial g}{\partial x} = g \left( \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right) + 2 \omega^2$$

auch die Summe der Hauptkrümmungen, mithin die Hauptkrümmungsradien  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$ .

Ich bemerke zugleich, dass die vollständige Behandlung der Bewegung des in der Verticalebene schwingenden Pendels in ähnlicher Weise, wie es hier für die Coulomb'sche Waage geschah, auch zur Bestimmung von  $\partial g/\partial z$  vortheilhaftere Methoden an die Hand gibt, als wir in der Jolly'schen Wägung kennen. Die experimentelle Verwirklichung dieser auf das Pendel mit langer Schwingungsdauer sich beziehenden Methode scheiterte aber an den bekannten Schwierigkeiten, die jedem um eine horizontale Axe sich drehendem Instrumente anhaften.

### 3. Die Instrumente.

Die besprochenen Messungen konnten natürlich mit der erwünschten Genauigkeit nur mit solchen Instrumenten ausgeführt werden, deren Empfindlichkeit der Kleinheit der zu messenden Kräfteänderungen angepasst war. Um hierüber ein Urtheil zu gewinnen berechnen wir die zu messenden Grössen für eine schematische Erde, wie sie zur näherungsweise Darstellung der Erdgestalt und der Schwere zu dienen pflegt. Ein solches Schema liefert unter anderen Listing's Rotationsphaeroid, für welches

$$a = 637\,736\,500 \text{ C.} \quad \text{und} \quad b = 635\,529\,800 \text{ C.,}$$

weiterhin

$$g_{\varphi} = 978,0728 (1 + 0,0052013 \sin^2 \varphi)$$

ist.

Für die Breite  $\varphi = 47^{\circ} 30'$  von Budapest erhält man hieraus die folgenden Werthe:

$$g = 980,838$$

$$g \left( \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right) = 4836.10^{-12}$$

$$\frac{\partial g}{\partial s} = 7960.10^{-12}$$

$$E = \frac{\partial g}{g} = 8115.10^{-15}$$

oder

$$E = 0,000\ 001\ 673$$

Bogensekunden und endlich

$$\frac{\partial g}{\partial z} = 3080.10^{-9}.$$

Die Torsion des Aufhängerdrahtes der Coulomb'schen Waage erster Form wird ein Maximum, wenn die Stabaxe mit dem Meridian einen Winkel von  $45^{\circ}$  bildet. Zwischen zwei solchen, zu beiden Seiten des Meridians gelegenen Stellungen ist die Torsion

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{T_0^2}{\pi^2} g \left( \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right)$$

also wenn z. B.  $T_0 = 1000 s$  ist, so wird

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{1000^2}{\pi^2} \cdot 4836.10^{-12} = 0,000\ 490,$$

was 1,7 Bogenminuten entspricht.

Bezeichnet man weiter die Schwingungszeit um den Meridian mit  $T$ , in der Ostwestlinie mit  $T'$ , so wird

$$T - T' = T_0 (\vartheta' - \vartheta) = 0,493,$$

etwa eine halbe Secunde.

Für die zweite Form der Coulomb'schen Waage mit zwei in verschiedener Höhe angebrachten Massen wird die Torsion zwischen zwei auf den Meridian senkrechten Lagen des Balkens

$$\vartheta' - \vartheta = 2 \frac{\partial g}{\partial x} \frac{h \ l m}{r},$$

was mit den Abmessungen eines meiner Instrumente:  $h = 100$  C.  
 $l = 13\frac{1}{3}$  C.  $m = 30$  g und  $\tau = 0,4$

$$\vartheta' - \vartheta = 2 \cdot 7960 \cdot 10^{-12} \cdot 100\,000 = 0,001\,492$$

gibt, was beiläufig 5 Bogenminuten entspricht.

Es ist hiermit klar, dass bei der Construction für unseren Zweck genügend empfindlicher Instrumente das Hauptaugenmerk auf die Herstellung langer Schwingungsdauer gerichtet sein muss und dieser Ueberlegung ist es zu danken, dass ich jene kleinen Kräfteänderungen nicht nur beobachten, sondern auch messen konnte, die bisher unter Anwendung von Instrumenten kleiner Schwingungsdauer ganz unbemerkt bleiben mussten.

Meine Instrumente besitzen eine Schwingungsdauer von 10 bis 20, in manchen Fällen noch mehr Minuten und bei dieser bisher kaum erreichten Empfindlichkeit konnte sowohl die Gleichgewichtslage, als die Bewegung des Balkens wahrhaft bewunderungswürdig stabil, beziehentlich regelmässig gemacht werden; und dies nicht nur in gut geschützten Kellerräumen, sondern in jeder beliebigen Localität des Laboratoriums, ja sogar bei Nacht auch im Freien unter einem einfachen Leinwandzelte.

Der einzige Kunstgriff — wenn schon dieses Wort benützt werden soll, den ich anwendete, bestand darin, dass ich den Waagebalken in doppelwandige, denselben möglichst eng umschliessende Metallkästen aufhing. Im Laufe meiner Untersuchungen bediente ich mich verschieden geformter Kästen: bald eines horizontalen Rohres, welches den Waagebalken eng umschloss, bald eines länglichen flachen Parallelepipeds, bald eines niedrigen Kreiscylinders. Die letztere Form wurde als die vortheilhafteste befunden, da in ihr der Balken ganz frei schwingen kann und in jeder Lage zu den Wänden des Kastens symmetrisch bleibt.

Die durch eine  $\frac{1}{2}$ —1 cm dicke Luftschicht voneinander getrennten Kastenwände bestehen aus 2—4 mm dicken Messingbleche und ebensolche doppelwandige, ebenso dicke und voneinander getrennte Wände bilden auch das Rohr zur Aufnahme des Aufhängedrahtes. Auf diese Weise ist in dem inneren Kasten die Wirkung einseitiger Erwärmung möglichst verkleinert, und äussere Temperaturänderungen dringen durch die allerseits gleich dicken Metallwände und Luftschichten von

allen Seiten fast gleichzeitig in den inneren Raum hinein. Auch dürften in dem höchstens 2—3 cm hohen inneren Schwingungsraume die Wirkung verticaler Luftströmungen durchaus unmerklich bleiben. Nimmt man noch hinzu, dass auch die allseitig gut leitende Umkleidung äussere electriche Einwirkungen vollkommen ausschliesst, so dürfte die, den bisherigen Erfahrungen gegenüber wohl Wunder nehmende Stabilität meiner so äusserst empfindlichen Waagen zur Genüge erklärt sein.

Der Balken hing meistens an einem 100—150 cm langen Platindraht, der schon Monate vorher durch angehängte Gewichte gestreckt war. Der zumeist benützte Draht hatte einen Durchmesser von  $\frac{1}{25}$  mm, eine Tragfähigkeit von 120—130 g, während der daran hängende Waagebalken 80—100 g wog. Für eine Meterlänge des Drahtes war im Durchschnitte der Torsionscoefficient  $\tau = 0,3$  C. G. S.

Nach dem Beispiele Boys' stellte ich auch Versuche mit Quarzfäden gleicher Länge und Tragfähigkeit an. Da dieselben sogleich nach ihrer Anfertigung eine ganz bewunderungswürdige constante Elasticität besitzen, bieten sie entschiedene Vortheile, doch schien es mir gerathen bei meinen tragbaren Apparaten vorläufig noch die vorhergehend gestreckten Platindrähte bei zu behalten, da die bei dieser grossen Tragfähigkeit ziemlich starren Quarzfäden gar zu leicht brechen. Auch ist ihre Empfindlichkeit geringer als die der Platinfäden, es gelang mir kaum einen Quarzfaden von 100 g Tragfähigkeit herzustellen, dessen Torsionscoefficient für ein Meter Länge kleiner gewesen wäre, als die Einheit. Meine mehrere Monate hindurch gestreckten und schwer belasteten Platindrähte zeigten ebenfalls durchaus genügende Constanz, und wenn sie auch nach der Neu-aufstellung der Waage einigen Gang aufwiesen, so konnte dieser seiner Regelmässigkeit halber leicht in Rechnung gezogen werden.

Da sich im Laufe meiner Untersuchungen die Zahl meiner Instrumente bedeutend mehrte, mögen dieselben, um sie leichter unterscheiden zu können, besonders benannt werden.

Die Coulomb'sche Waage erster Form, welche den Werth von  $g(1/\rho_1 - 1/\rho_2)$  ergibt, möge *Krümmungsvariometer*, die Waage zweiter Form, welche die Aenderung der Schwere in der Horizontalen und zugleich die Richtungsänderung der Schwere nach unten anzeigt, möge *Horizontalvariometer* genannt werden.

An dieser Stelle soll nur das wesentliche über die Einrichtung dieser Instrumente hervorgehoben werden.

Das Krümmungsvariometer (Fig. 1 und 2) besteht aus einem cylindrischen Waagekasten, welcher in einem festen Holzringe auf an diesem befestigten Metallarmen ruht. Zur horizontalen Einstellung des Kastens dienen drei Stellschrauben.

Der Holzring selbst steht auf drei, 120 cm hohen Spreizfüßen. Der cylindrische Waagekasten ist um eine verticale Axe über einem getheilten Kreise drehbar. Am unteren Ende des Aufhänge draht einschließenden Rohres befindet sich ein rundes Fenster, dessen eine Hälfte durch einen an das Rohr befestigten fixen Spiegel verdeckt ist, während die andere Hälfte

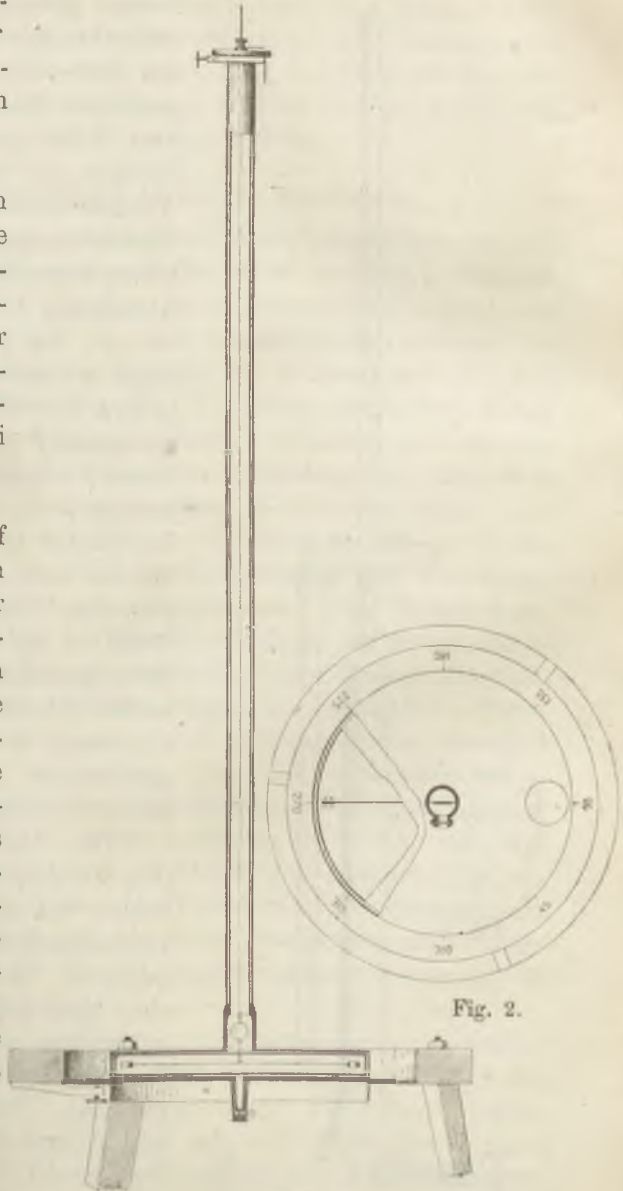


Fig. 2.

Fig. 1.

den auf dem schwingenden Balken befestigten Spiegel sehen lässt. Der fixe am Rohre befestigte Spiegel lässt sich durch Stellschrauben so einstellen, dass das Bild einer vor das Fenster gestellten Scala zugleich mit dem Bilde des schwingenden Spiegels im Gesichtsfelde des Ablesefernrohres erscheine. Die Verschiebung der beiden Spiegelbilder gegeneinander dient zur Abmessung des Torsionswinkels  $\vartheta' - \vartheta$ . Am Ende des Balkens liegen cylindrische Gewichte von je 30 g, ihre Mittelpunkte stehen voneinander 34 cm ab. Der innere Durchmesser des Kastens beträgt 40 cm seine Höhe 2 cm. Die Deckel sowohl des inneren als des äusseren Kastens sind abhebbar. Der 150 cm lange Draht ist an beiden Enden an Metallplättchen gelöthet, die mittels Schrauben einerseits an die Stange des Torsionskopfes, andererseits an den Waagebalken befestigt werden.



Fig. 4.

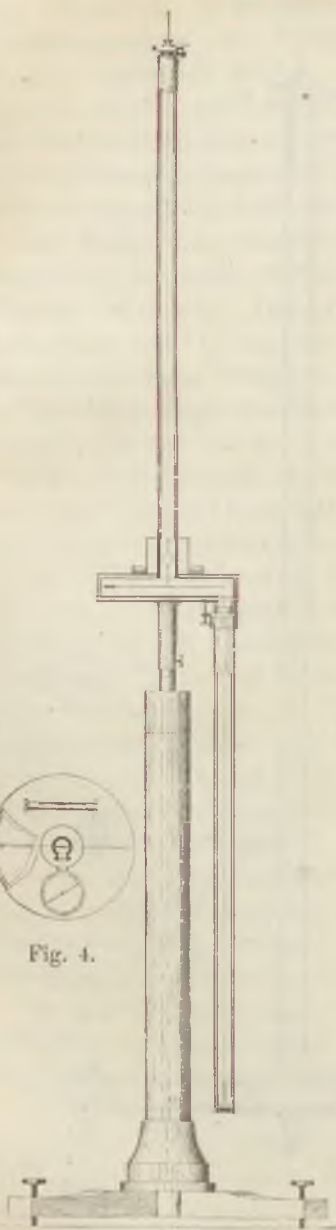


Fig. 3.

Das Horizontalvariometer (Fig. 3 und 4) ist auf einer 140 cm hohen, mit einem Kreuzgestell verbundenen Säule drehbar angebracht. Der Kasten ist wie oben cylinderförmig und trägt auf seinem oberen Deckel eine Bussole zur Bestimmung seiner Drehung. Das dem einen Ende des Waagebalkens angehängte cylindrische Gewicht ist in ein doppelwandiges Rohr ge-

geschlossen, welches durch an den Boden des Kastens angebrachten Stellschrauben vertical eingestellt werden kann. Die zur Ablese der Torsion dienenden Spiegel sind ganz so eingerichtet, wie es vorher beschrieben wurde. Der Torsionsdraht ist bei diesem Instrumente 110 cm lang, das hängende Gewicht wiegt 30 g, sein Drehungsarm ist 13,2 cm und die Länge des (unteren) Aufhängedrahtes beträgt 100 cm.

#### 4. Resultate der bisherigen Messungen.

Die oben kurz mitgetheilten Messungsmethoden wurden zunächst im physikalischen Institute der hiesigen Universität erprobt, und zwar wurden beide Instrumente, sowohl das Krümmungsvariometer als auch das Horizontalvariometer an verschiedenen Stellen des Kellers, des Erdgeschosses und des ersten Stockwerkes aufgestellt. Die beobachteten Variationen entsprachen im allgemeinen der Massenvertheilung des Gebäudes und besonders war die scheinbare Abstossung des unter dem Gebäude sich hinziehenden länglichen Kellers bemerkbar. Die ersten Messungen ausserhalb des Institutes wurden am Fusse des Blocksberges in Ofen im Erdgeschoße des Directionsgebäudes des Bruckbades vorgenommen. Das Krümmungsvariometer ergab hier als Schwingungsdauer des Waagebalkens um die gegen den Berg gerichtete Gleichgewichtslage 564,6 sec. und darauf senkrecht die Schwingungsdauer von 572,2 sec. Eben-dasselbst betrug die Torsion des Aufhängedrahtes zwischen zwei aufeinander senkrechten, mit den vorherigen einen Winkel von  $45^{\circ}$  einschliessenden Richtungen 45 Bogenminuten. Dieser letztere Werth weicht kaum um 1 Minute von dem aus den Schwingungszeiten berechneten Werthe ab. Die aus diesen Daten sich ergebenden Variationen der Schwere entsprechen der Gestalt und der Masse des Berges, soweit diese beiden Factoren bei ihrer Unregelmässigkeit überhaupt in Rechnung zu ziehen sind.

Hierauf wurde das Horizontalvariometer in meinem Garten in Szent-Lőrincz im Freien, unter einem wasserdichten Leinwandzelte aufgestellt. Bei Tage zeigte die Waage, hauptsächlich unter der Wirkung der auf das Zelt fallenden Sonnenstrahlen einen fortdauernden, bald langsamen, bald rascheren Gang, der die Beobachtung unmöglich machte. Nachts über

dagegen gestaltete sich alles günstiger: der Waagebalken nahm seine Gleichgewichtslage ebenso sicher und stabil an wie im Laboratorium.

Die während mehrerer Nächte fortgesetzten Beobachtungen ergaben ein unter sich durchaus gut stimmendes Resultat. Namentlich war die Wirkung des sanft ansteigenden Terrains bemerkbar, auf dem mein Garten liegt.

Nach diesen vorbereitenden Studien schien es nun möglich, systematische Beobachtungen der Schwereänderungen auch im Freien anzustellen. So begaben sich denn mit meinen Apparaten versehen, die Herren Prof. Ludwig von Bodola, Dr. Rudolf von Kövesligethy und Dr. Karl Tangl, denen später ich selbst folgte, auf den neben Kis-Czell sich erhebenden Ságberg. Derselbe ist ein abgestutzter, aus der Ebene isolirt bis 150 m Höhe anfragender Basaltkegel, dessen Gestalt und ziemlich homogene Masse einen verhältnissmässig einfachen und leicht zu untersuchenden Fall der Massenanziehung verwirklicht. Zudem ist der Berg gerade für das Studium der Variationen der Schwere auch schon deshalb besonders interessant, da der unermüdliche Meister der Pendelmessungen, Oberstlieutenant R. v. Sterneck den Berg genau erforschte und zu dem Resultate zu kommen schien, dass zwei auf der flachen Platte des Berges nahe in demselben Niveau liegende voneinander nur 150 m entfernte Punkte einen Schwereunterschied gleich dem  $\frac{1}{30\,000}$  tel des Gesamtbetrages aufwiesen. Eine so grosse Veränderung könnte unsere Theorie der Schwere kaum erklären.

Obwohl die obengenannten Herren über ihre nach meinen Methoden auf dem Ságberge angestellten Beobachtungen besonders berichten werden, glaube ich doch soviel schon jetzt erwähnen zu sollen, dass nach diesen Beobachtungen zwischen den beiden Sterneck'schen kritischen Punkten Schwereänderungen von dem angeführten Betrage nicht bestehen, dass vielmehr die gewonnenen Resultate mit der Theorie im besten Einklange stehen.

Es mag noch erwähnt werden, dass das Krümmungsvariometer auch zur Beantwortung der Frage zugezogen wurde, ob die materielle Constitution der Körper auf die von der Erdmasse erlittene Anziehung Einfluss habe?

Werden zu dem Zwecke an den beiden Enden des Waage-

balkens Körper verschiedener Substanz, z. B. Kupfer und Korkholz, befestigt, so müsste sich nach einer Drehung der Waage um  $180^\circ$  der etwaige Einfluss in der Richtungsänderung der Schwere fühlbar machen. Da aber meine diesbezüglichen Untersuchungen selbst mit diesen ausserordentlich empfindlichen Methoden keinen merklichen Unterschied der Schwere ergaben, fühle ich mich zu dem Schlusse berechtigt, dass die Anziehung der Erde für jene Stoffe dieselbe ist oder doch höchstens eine weit ausserhalb der Gränze des Beobachtbaren liegende Verschiedenheit zeige. Die Unterschiede in der Massenanziehung müssten sich nämlich auch in der Verschiedenheit der Schwerkraft offenbaren, da ja die Schwere die Resultante der Massenanziehung und der von der stofflichen Beschaffenheit unabhängigen Centrifugalkraft ist. So konnte ich zu dem Schlusse gelangen, dass wenn überhaupt eine Differenz in der Schwere der Körper von gleicher Masse, jedoch verschiedener Substanz vorhanden wäre, diese in Bezug auf Messing, Glas, Antimonit und Korkholz jedenfalls kleiner sein müsste als ein Zwanzigmillionstel, in Bezug auf Luft und Messing aber gewiss kleiner als ein Hunderttausendstel.<sup>1)</sup>

## II. Ueber die Messung der räumlichen Variationen der erdmagnetischen Kraft.

Ich stellte mir weiter die Aufgabe, die räumlichen Variationen der erdmagnetischen Kraft in jener Vollständigkeit messbar zu machen, die ich in Bezug auf die Schwerkraft mit gutem Erfolge anstrebte.

Die Componenten  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  der auf die Einheit der magnetischen Flüssigkeit wirkenden Kraft (magnetische Intensität) lassen sich unter entsprechender Deutung ebenfalls durch die Gleichungen (1) der I. Abtheilung ausdrücken; bedenkt man ferner, dass auch diese Kraft eine Potentialfunction besitzt, so übersehen wir sogleich, dass die vollständige Lösung der Aufgabe die Bestimmung folgender sechs Daten erheischt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial Z}{\partial z};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z};$$

1) Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn VIII, 1890; Beiblätter 15. p. 688. 1891.

zwischen denen für ausserhalb der wirkenden magnetischen Massen gelegener Punkte die Beziehung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

besteht.

Bei der oben bezeichneten Aufgabe ist unser Augenmerk in erster Linie auf jene translatorische Kraft zu richten, welche sich als die ganze auf einen Magnet wirkende Kraft zu erkennen giebt, wenn wir die Empfindlichkeit der Beobachtung soweit steigern, dass sie die räumlichen magnetischen Intensitätsänderungen verräth. In der That betrachtete ich auch als zunächst anzustrebendes Ziel das Abmessen dieser translatorischen Kraft.

Auf Grund der Gleichungen (1) der vorhergehenden Abtheilung, lassen sich die Componenten der translatorischen Kraft leicht für einen Magnet berechnen, dessen Moment durch die Componenten  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  gegeben ist. Man hat nämlich

$$(1) \begin{cases} P_x = M_x \frac{\partial X}{\partial x} + M_y \frac{\partial X}{\partial y} + M_z \frac{\partial X}{\partial z} \\ P_y = M_x \frac{\partial Y}{\partial x} + M_y \frac{\partial Y}{\partial y} + M_z \frac{\partial Y}{\partial z} \\ P_z = M_x \frac{\partial Z}{\partial x} + M_y \frac{\partial Z}{\partial y} + M_z \frac{\partial Z}{\partial z} \end{cases}$$

Zunächst legen wir unser Coordinatensystem derart, dass die  $Z$ -Axe nach abwärts, die  $X$ -Axe in den magnetischen Meridian nordwärts, die  $Y$ -Axe in die magnetische erste Verticale westwärts zu liegen komme. Beschränken wir uns einstweilen auf den Fall, dass die Axe des Magneten mit dem Meridian den sehr kleinen Winkel  $\varepsilon$  einschliesst, so können wir die uns hier ausschliesslich interessirende Horizontalcomponente der erdmagnetischen Kraft in folgende Form bringen:

$$\begin{aligned} P_x &= M_h \frac{\partial X}{\partial x} + \varepsilon M_h \frac{\partial X}{\partial y} + M_v \frac{\partial X}{\partial z} \\ P_y &= M_h \frac{\partial Y}{\partial x} + \varepsilon M_h \frac{\partial Y}{\partial y} + M_v \frac{\partial Y}{\partial z} \end{aligned}$$

wenn  $M_h$  und  $M_v$  die horizontale, resp. verticale Componente des magnetischen Momentes bedeutet.

Zur Abmessung dieser horizontalen Kraftcomponenten benützte ich ein auf dem Princip der Coulomb'schen Waage

beruhendes Instrument, welches das *magnetische Translatometer* genannt werden mag, (und welches durch die Fig. 5 in verticalem,

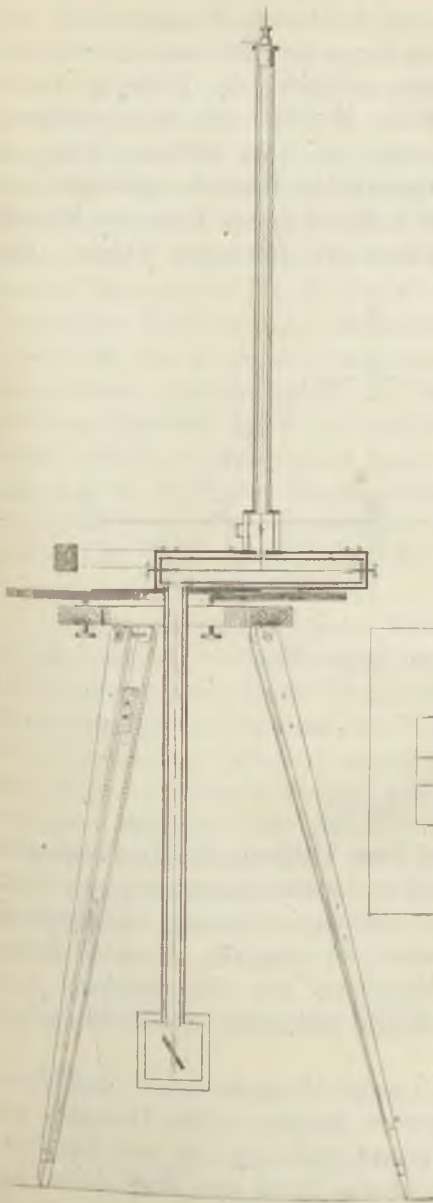


Fig. 5.

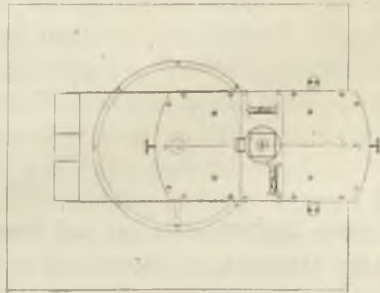


Fig. 6.

durch Fig. 6 in horizontalem Durchschnitte dargestellt wird.) Der äusseren Form nach ähnelt das Instrument dem Horizontalvariometer, doch hängt am Ende des Waagebalkens ein Magnetstab, dessen Neigung gegen die Horizontale verändert werden kann. Des weiteren geschieht die Drehung dieser Waage nicht um die verticale Mittelaxe des Waagebalkens, sondern um dessen Ende, resp. um jenes verticale Rohr, in welchem der Draht des aufgehängten Magneten geborgen ist. Sowohl dieses Rohr, als auch der an dessen Ende den Magnet umschliessende Kasten bestehen aus eisenfreiem Kupfer. Bei

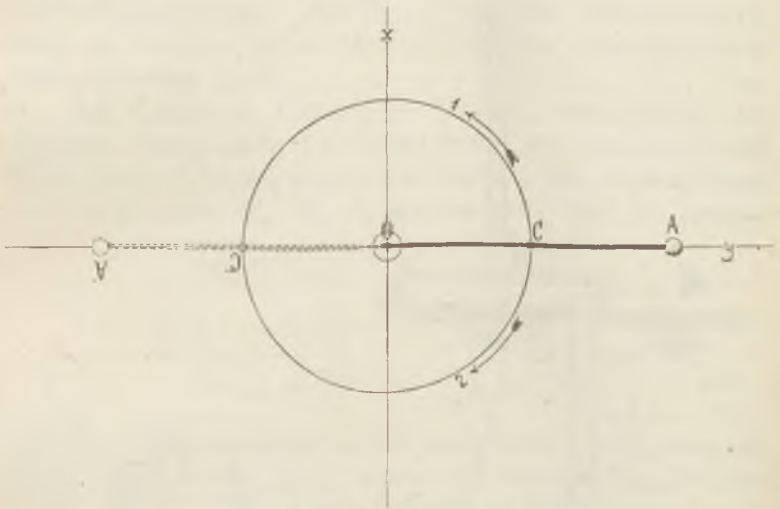


Fig. 7.

diesem Instrumente ist auf feine Theilung des Torsionskopfes mehr Gewicht zu legen und es ist wünschenswerth, an demselben wenigstens die Minute ablesen zu können. Die Drehung des Waagebalkens als Ganzes ist ebenfalls an einer Kreistheilung ablesbar, die Ablenkung des Waagebalkens dem Kasten und dem Torsionskopfe gegenüber durch Spiegelablesung messbar.

In Fig. 7 bezeichnet  $OA$  den Waagebalken,  $C$  den Fusspunkt des denselben tragenden Drahtes. Die Drehung der Waage geschieht um den Punkt  $O$  derart, dass der Punkt  $C$ , mithin auch der Torsionskopf den Kreis vom Radius  $OC$  beschreibt.

Dies Instrument wird zur Messung der translatorischen Kraft folgenderweise benützt:

Durch geeignete Aufstellung des Kastens und Rectification des Aufhängedrahtes mittels des Torsionskopfes wird der Waagebalken in die auf den magnetischen Meridian senkrechte Lage  $OCA$  gebracht (Fig. 7), so zwar, dass der unten aufgehängte Magnet mit dem magnetischen Meridian einen der Null möglichst nahe kommenden Winkel ( $\varepsilon$ ) einschliesse. Der obere den Waagebalken tragende Draht, der kurz Torsionsdraht genannt werden möge, wird in diesem Falle durch zwei Kräfte tordirt; die eine ist die  $X$ - oder Meridiancomponente der translatorischen Kraft, die am Hebelarme  $l$  wirkt, die andere die Drehkraft der hängenden Magneten unter dem Einfluss der horizontalen Componente  $H$  der erdmagnetischen Intensität. In dieser Stellung des Waagebalkens ist mithin der Torsionsdraht gedreht, und bezeichnet wieder  $\vartheta$  den Torsionswinkel, so hat man im Falle des Gleichgewichtes:

$$\tau \vartheta = l M_h \frac{\partial X}{\partial x} + l M_h \frac{\partial X}{\partial y} \varepsilon + l M_x \frac{\partial X}{\partial z} - M_h H \varepsilon = l P_x - M_h H \varepsilon.$$

Nun drehe man die ganze Waage sammt Kasten um 180 Grade und zwar zunächst in der Richtung des Pfeiles 1 (Fig. 7) also entgegen dem Gange des Uhrzeigers. Durch Drehung des Torsionskopfes wird hierauf der Waagebalken genau in die Lage  $OC'A'$  gebracht. Dabei ist natürlich auch das obere Ende des den Magnet tragenden Drahtes um  $180^\circ$  gedreht worden, die Axe des Magneten tritt aus ihrer früheren Lage gegen den Meridian heraus und bildet jetzt mit ihm den Winkel  $\varepsilon - \alpha$ . Bei Benützung meiner feinen Drähte bleibt  $\alpha$  stets unter 1—2 Graden, so dass auch für die neue Gleichgewichtslage geschrieben werden kann:

$$\tau \vartheta'_1 = -l P_x + l M_h \alpha \frac{\partial X}{\partial y} - M_h H \varepsilon + M_h H \alpha.$$

Dreht man endlich das ganze Instrument in der Richtung des Pfeiles 2 (Fig. 7) durch die erste Lage  $OCA$  wieder in die Lage  $OC'A'$ , wobei natürlich der Waage eine volle Umdrehung ertheilt wurde und stellt man den Waagebalken mit Hülfe des Torsionskopfes wieder genau ein, so hat man:

$$\tau \vartheta_2' = -l P_x - l M_h \alpha \frac{\partial X}{\partial y} - M_h H \varepsilon - M_h H \alpha$$

und aus den drei vorhergehenden Gleichungen ergibt sich:

$$\tau (\vartheta - \vartheta_1') = 2l P_x - l M_h \alpha \frac{\partial X}{\partial y} - M_h H \alpha$$

$$\tau (\vartheta - \vartheta_2') = 2l P_x + l M_h \alpha \frac{\partial X}{\partial y} + M_h H \alpha,$$

und weiter

$$P_x = \frac{\tau}{4l} \left[ (\vartheta - \vartheta_1') + (\vartheta - \vartheta_2') \right].$$

Die Torsionswinkel  $\vartheta - \vartheta_1'$  und  $\vartheta - \vartheta_2'$  werden am Torsionskopfe abgelesen, insofern wir jene Winkel suchen, um welche das obere Ende des Torsionsdrahtes gedreht werden musste, um den Waagebalken nach den mit 1 und 2 bezeichneten Drehungen in die Anfangsstellung relativ zum Waagekasten zu bringen. Insofern eine so genaue Einstellung des Waagebalkens mit Schwierigkeiten verbunden ist, können die entsprechenden Torsionswinkel aus den für zwei engbenachbarte Stellungen gültigen Daten durch Interpolation berechnet werden. In ähnlicher Weise, wie die nordwärts gerichtete Horizontalcomponente der translatorischen Kraft  $P_x$ , kann auch die östlich gerichtete Componente  $P_y$  bestimmt werden, wenn nur der Waagebalken statt in die erste Verticale in die Richtung des magnetischen Meridians gestellt und weiterhin dem früheren analog verfahren wird.

Bisher hatten wir unser Augenmerk bloß auf die erdmagnetische Kraft gerichtet, obwohl den früheren Erfahrungen gemäss die Lage des Waagebalkens auch durch die Variationen der Schwere mit beeinflusst wird. Dieser Einfluss kann leicht erkannt und vollständig eliminirt werden, wenn man an Stelle des aufgehängten Magneten eine nicht magnetische Masse anbringt und das Instrument als Horizontalschwerevariometer benutzt.

Die Bestimmung der magnetischen Translationskraft kann zugleich zur Kenntniss der räumlichen Intensitätsänderung führen, und zwar am vortheilhaftesten auf die Weise, dass man die Messung zuerst mit einem abwärts, hernach mit einem aufwärts geneigten Magneten vornimmt. Ist z. B. der Neigungs-

winkel der Magnetaxe gegen die Horizontale zuerst  $i$ , dann  $-i$ , so ist für den ersten Fall:

$$M_h = M \cos i, \quad M_v = M \sin i,$$

für den zweiten Fall dagegen:

$$M'_h = M \cos i, \quad M'_v = -M \sin i.$$

Indem wir eine genaue Einstellung voraussetzen, sodass  $\varepsilon = 0$  genommen werden darf, werden die Horizontalcomponenten der Translationskraft bei abwärts geneigtem Magnete:

$$P_x = M \cos i \frac{\partial X}{\partial x} + M \sin i \frac{\partial X}{\partial \kappa}$$

$$P_y = M \cos i \frac{\partial Y}{\partial x} + M \sin i \frac{\partial Y}{\partial \kappa}$$

und ähnlich für den zweiten Fall, eines aufwärts geneigten Magnetes:

$$P'_x = M \cos i \frac{\partial X}{\partial x} - M \sin i \frac{\partial X}{\partial \kappa}$$

$$P'_y = M \cos i \frac{\partial Y}{\partial x} - M \sin i \frac{\partial Y}{\partial \kappa},$$

woraus durch passende Verknüpfung die Werthe der gesuchten Aenderungen in der Form

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{P_x + P'_x}{2M \cos i}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \kappa} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \kappa} = \frac{P_x - P'_x}{2M \sin i}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{P_y + P'_y}{2M \cos i}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \kappa} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial \kappa} = \frac{P_y - P'_y}{2M \sin i}$$

folgen.

Von den sechs, zur vollständigen Lösung der vorgelegten Aufgabe nothwendigen Bestimmungsstücken sind somit auf dem vorher beschriebenen Wege vier Daten gewonnen und somit bleiben noch zwei, oder mit Hinsicht auf die Gleichung  $\Delta V = 0$  noch ein Stück unbekannt.

Diesem Zwecke dient das *astatische Variometer* (dessen einfachen Bau Fig. 8 in verticalem, Fig. 9 in horizontalem Durchschnitte darstellt). Auch dieses Instrument ist eine Coulomb'sche Waage, an dessen feinem Drahte ein aus leichten

Aluminiumröhren zusammengesetztes Kreuz hängt. Die Enden der Kreuzbalken tragen vier sich gegenseitig möglichst astasirende Magnete derart,

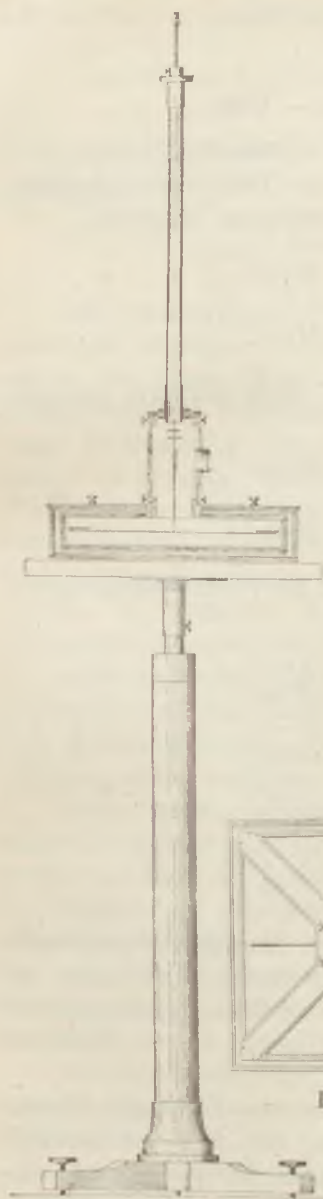


Fig. 8.

dass zwei sich gegenüber liegende Magnete die Nordpole nach aussen, die anderen beiden nach innen kehren, wie dies auch Fig. 10 versinnlicht. Zur möglichst genauen Astasirung dienen kleine Hilfsmagnete, welche auf den Balken gelegt werden können. Der kreuzförmige Waagebalken sowohl, als auch der aus eisenfreiem Kupfer oder aus Holz hergestellte Waagekasten trägt einen Spiegel zur Winkelmessung und die ganze Waage ruht auf einem um eine verticale Axe drehbaren Tische.

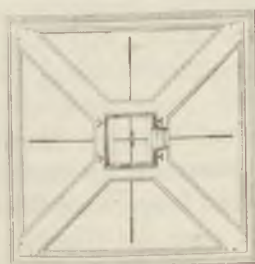


Fig. 9.

Ein nicht zu unterschätzender Vortheil der gewählten besonderen Form des Waagebalkens besteht in der völligen Unabhängigkeit von allen drehenden Kräften, die aus Schwereänderungen oder dem in den Magnetstäben inducirten Magnetismus herrühren. Aus dem ersten Abschnitte dieser Untersuchung

erhellt zur Genüge, dass das Drehungsmoment der Variation der Schwere auf einen kreuzförmigen Waagebalken verschwindet. Weiter zeigten besondere von Dr. Karl Tangl auf mein Veranlassen im physikalischen Institut der Universität zu diesem Zwecke angestellte Versuche, dass die Induction der erdmagnetischen Kraft einem astatischen Nadelpaare ein Drehungsmoment ertheilt, das in der Form  $C \sin 2\alpha$  dargestellt werden kann. Für zwei aufeinander senkrechte Nadelpaare hat man somit:

$$C \sin 2\alpha + C \sin 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

wodurch auch der zweite Theil unserer Behauptung erhärtet ist.

Man hat also bei Berechnung des Drehungsmomentes eines ähnlich gebauten

kreuzförmigen

Waagebalkens

durchaus nur die magnetische Kraft in Betracht zu ziehen und kann deren Wirkung ganz so bemessen, als ob die Mag-

nete frei von Induction blieben, also constant wären.

In dem engen Rahmen dieses Berichtes glaube ich die Rechnungen übergehen zu sollen, welche ich für Magnete beliebiger Gestalt und auf dem Kreuze eingenommener beliebiger Lage anstellte. In dem einfachen Falle, wo die Axen der Magnete parallel den Kreuzbalken liegen, gilt für das Drehungsmoment desjenigen einfachen Magneten, dessen Nordpol nach aussen gerichtet ist, die Gleichung:

$$P = -M H \sin \alpha + M l \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + 2 M l \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha,$$

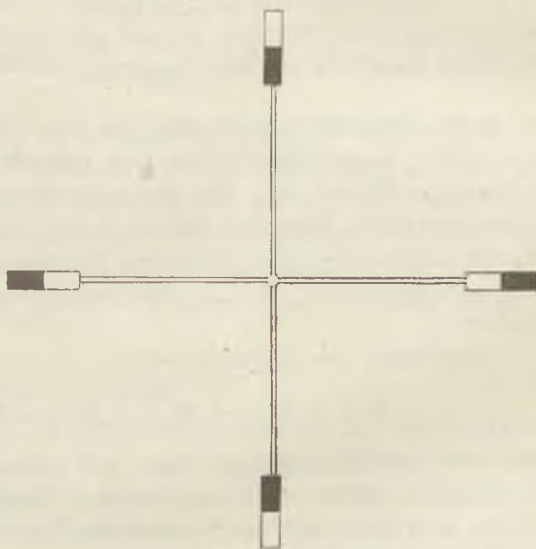


Fig. 10.

wobei, wie früher, die  $X$ -Axe in den magnetischen Meridian nordwärts fällt und  $\alpha$  den Winkel bezeichnet, den der Drehungsradius des Magnetcentrums mit der  $X$ -Axe einschliesst.  $H$  ist weiter die Horizontalcomponente der Intensität und  $l$  der Drehungsradius des Mittelpunktes des Magnetstabes.

Ist der Nordpol des auf dem Kreuzarme liegenden Magneten nach innen gekehrt, so hat man einfach  $-M$  an Stelle von  $M$  in obiger Gleichung zu setzen. Man erhält so durch betreffende Addition für das Drehungsmoment des aus vier Magneten bestehenden Systemes:

$$F' = -\mu H \sin \gamma + (M_1 l_1 + M_2 l_2 + M_3 l_3 + M_4 l_4) \left[ \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \sin 2\alpha + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \right],$$

wo  $\mu$  das Gesammtmoment der aus vier Magneten bestehenden nahezu astatistischen Combination bedeutet und  $\gamma$  der noch unbekannt Winkel ist, den die magnetische Axe dieses zusammengesetzten Magneten mit der  $X$ -Axe einschliesst.  $M_1, M_2, M_3, M_4$  bezeichnen die absoluten Werthe der Momente der einzelnen Magnete,  $l_1, l_2, l_3, l_4$  die Drehungsradien ihrer Mittelpunkte.

Setzt man der Kürze halber

$$M_1 l_1 + M_2 l_2 + M_3 l_3 + M_4 l_4 = 4 M l,$$

was vier gleichmomentigen und auf dem Kreuze von der Drehungsaxe gleich weit angebrachten Magneten entsprechen würde, und berechnet die Drillung des Torsionsdrahtes in den durch die verschiedenen Werthe von  $\alpha$  gekennzeichneten Stellungen, so erhält man die folgende Tabelle:

$$\begin{aligned} \alpha = 0 \quad \tau \vartheta_0 &= -\mu H \sin \gamma + 8 M l \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \\ \alpha = \pi \quad \tau \vartheta_\pi &= +\mu H \sin \gamma + 8 M l \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \\ \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \tau \vartheta_{\frac{\pi}{4}} &= -\mu H \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \gamma + \cos \gamma) + 4 M l \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) \\ \alpha = 3 \frac{\pi}{4} \quad \tau \vartheta_{3\frac{\pi}{4}} &= -\mu H \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sin \gamma + \cos \gamma) - 4 M l \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right), \end{aligned}$$

aus welcher sich durch geeignete Combination

$$2\mu H \sin \gamma = \tau (\vartheta_{\pi} - \vartheta_0)$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \mu H \sin \gamma - 8 M l \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) = \tau \left( \vartheta_{\frac{3\pi}{4}} - \vartheta_{\frac{\pi}{4}} \right)$$

ergiebt. Misst man also auf eine schon früher ausführlich vorgetragene Weise die Torsionswinkel des Aufhangedrahtes zwischen den vier angegebenen Lagen, so erhält man hieraus den Werth der noch fehlenden Angabe  $\partial^2 V / \partial y^2 - \partial^2 V / \partial x^2$ .

Es könnten natürlich zu eben diesem Zwecke auch andere vier Lagen gewählt werden, ja durch Hinzuziehung einer fünften Stellung wäre auch der Werth von  $\partial^2 V / \partial x \partial y$  messbar. Die mit dem Translatometer angestellten Messungen machen dies jedoch überflüssig, da sie die Aufgabe durch den Werth von  $\partial^2 V / \partial y^2 - \partial^2 V / \partial x^2$ , zusammen mit der Gleichung  $\Delta^2 V = 0$ , vollständig lösen.

Um beurtheilen zu können, wie hoch die Empfindlichkeit meiner Instrumente gesteigert werden kann, möge ein Beispiel dienen. Nach unseren magnetischen Karten vergrößert sich die Horizontalcomponente der erdmagnetischen Intensität um beiläufig 0,001 C. G. S., wenn man von Budapest um 20 Kilometer nach Süden geht. Es kann daher beiläufig gesetzt werden

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{0,001}{2\,000\,000} = 5 \cdot 10^{-10}.$$

Der Draht meines Translatometers erlaubt die Aufhängung eines Magneten von 30—35 g Gewicht, dessen Moment  $M = 1000$  gesetzt werden kann; da weiter der Drehungsradius des Magneten  $l = 20$  cm, der Torsionscoefficient des Drahtes  $\tau = 0,25$  ist, so kann von anderen Veränderungen abgesehen der Torsionswinkel

$$\vartheta = \frac{l}{\tau} M \frac{\partial X}{\partial x} = 0,000\,04$$

gesetzt werden. Bei einer Drehung des Instrumentes um  $180^\circ$  wächst dieser Winkel auf das Doppelte, beträgt also rund  $\frac{1}{4}$  Bogenminute.

Meine Instrumente entstanden nicht aus dem Wunsche, mit ihnen der kartographischen Aufnahme der magnetischen Elemente eines Landes oder gar eines Erdreiches zu dienen, sondern sie sollen vielmehr nur jene Variationen angeben, welche nahe Massen, Berge, Thäler oder unterirdische mag-

netisch wirkende Gesteine in der erdmagnetischen Kraft bewirken. In diesem Sinne mögen sie der Geologie gute Dienste leisten. Zu diesem Zwecke genügt aber schon eine bedeutend geringere Empfindlichkeit. So reichte bei den Messungen, die ich bisher im physikalischen Laboratorium und später im Herbste des Jahres 1895 in meinem in Szent-Lőrincz gelegenen Garten anstellte, stets schon die Aufhängung solcher Magnete völlig aus, deren Moment bloß 200 C. G. S. betrug, die Empfindlichkeit also  $\frac{1}{5}$  der im Beispiele angeführten Empfindlichkeit ausmachte.

Im physikalischen Institut erhielt ich auch so noch auf mehrere Grade sich belaufende Torsionen. In Szent-Lőrincz beobachtete ich im Freien, unter einem Zelte, gerade so, wie mit dem Schwerevariometer und zwar zumeist bei Nacht; an trüben regnerischen Tagen konnte auch tagsüber gut beobachtet werden.

Ich halte meine Methode zum Studium der nahe unter der Erdoberfläche cirkulirenden electricischen Erdströme für besonders geeignet, da diese nun selbst an Ort und Stelle, nicht aber wie es bisher geschah, bloß in den bekannten Plattenleitungen erforscht werden können. Entfernt man nämlich an einem Orte, wo die erdmagnetischen Variationen schon gemessen wurden, einen Theil der umgebenden Bodenmassen, z. B. durch Aushebung eines Grabens, so werden die infolge dessen sich in der magnetischen Kraft verrathenden Aenderungen nicht bloß der Entfernung der Bodenmassen entsprechen, sondern zugleich eine Folge der Ausschaltung jener die besagten Massen durchfließenden Stromtheile und der Modification der ganzen Stromvertheilung sein. Im Laufe meiner in Szent-Lőrincz angestellten Versuche, bei welchen das astatiche Variometer 150 cm. hoch über dem Erdboden aufgestellt war, liess ich anderthalb Meter vom Fusspunkte des Instrumentes entfernt einen 2 m langen, 1 m breiten und ebenso tiefen Graben ziehen. Die hierdurch veranlasste Aenderung im Stande des Instrumentes entsprach der Wirkung eines in die Mitte des Grabens versetzten Magneten von etwa 100 C. G. S. - Momenteinheiten. Heftige Schneefälle bei Eintritt des Winters machten meinen Untersuchungen ein Ende, so dass ich nicht feststellen konnte, welcher Theil der besagten Aenderung auf Rechnung der etwa

magnetisch beschaffenen sandigen Bodenmasse und welcher der sie durchfliessenden Erdströme zuzuschreiben sei.

Eine interessante Frage, deren Lösung ebenfalls von meinen Instrumenten zu erwarten ist, bilden die zeitlichen Variationen der magnetischen Kraftänderungen. Vor der Hand wurde im physikalischen Institute Monate hindurch der Gang des Translatometers, d. h. die zeitliche Variation der translatorischen Kraft auf photographischem Wege registriert. Die auffällig hervortretende tägliche Periode dieser Variationen ist sicherlich zum grossen Theil eine Folge der Ströme, welche durch die unterirdisch gelegten elektrischen Leitungen auch dem Erdboden in der Stadt überliefert werden. Jedenfalls wäre die Wiederholung ähnlicher Beobachtungen ausserhalb der Stadt, also bei Ausschluss dieser künstlichen Stromquellen sehr erwünscht.

### III. Bestimmung der Gravitationsconstante.

Beobachtungen über Gravitation sind seit dem Jahre 1888 im physikalischen Institute der hiesigen Universität fast alltäglich geworden. Ausser den eigentlichen Untersuchungen haben auch meine Hörer sowohl während des Vortrages als auch im Laufe der Uebungen genugsam Gelegenheit, sich aus eigener Erfahrung mit der gegenseitigen Anziehung der Massen bekannt zu machen.

Der erste Apparat, mit dem es mir im Jahre 1888 in einem populären Vortrage gelang, die Erscheinung der Massenanziehung einem grösseren Hörerkreise sichtbar zu machen, war ähnlich dem Quadrantelektrometer gebaut. Unter dem in seinem Metallkasten gut geschützten Coulomb'schen Waagebalken befindet sich ein in Quadranten getheiltes cylindrisches Metallgefäss, dessen zwei gegenüberliegende Quadranten mit von unten zugeführtes Quecksilber abwechselnd gefüllt werden können. Das Instrument war schon bei einer Schwingungsdauer von 3—4 Minuten genügend empfindlich und zeigte selbst im geheizten und erleuchteten Lehrsale eine überraschende Stabilität. Die Berechnung der Anziehung der Quecksilberquadranten ist wohl etwas langwierig. Eine lange und abwechslungsreiche Reihe von Messungen wurde seitdem bald mit kugelförmigen, bald parallelepipedischen Bleimassen an-

gestellt, deren Gewicht in manchen Versuchen 50—100 Kilogramm, in anderen 1 Kilogramm oder noch weniger betrug.

Für diese, ihrer Methode nach dem Cavendish'schen Verfahren übrigens ähnlichen Messungen ist besonders hervorzuheben, dass die anziehenden Massen meistens mit dem Waagebalken nicht in derselben Höhe, sondern auf einer unter demselben in horizontaler Ebene drehbaren Tischplatte angebracht werden. Diese Anordnung ist schon deshalb vortheilhaft, weil hierbei der Waagebalken in einen für seinen vollkommenen Schutz so sehr geeigneten flachen cylindrischen Metallkasten geschlossen werden kann, wie dies in der I. Abtheilung des näheren erörtert wurde. Ein weiterer Vortheil ergibt sich daraus, dass die Anordnung so gewählt werden kann, dass die Aenderung der abzumessenden Kraft während der Ablenkung des Waagebalkens vollkommen vernachlässigt werden kann. Die anziehenden Massen können nämlich auf der unter dem Waagebalken befindlichen Platte in eine solche Lage gebracht werden, dass ihre Wirkung auf den Balken ein Maximum wird. Das geschieht z. B. bei der Anziehung von Kugeln in dem Falle, dass die auf den Balken senkrechte Verbindungslinie zwischen den Mittelpunkten der anziehenden und der dem Balken aufgesetzten Kugeln mit der Horizontale einen Winkel von nahe  $55^{\circ}$  bildet. In dieser, dem Maximum der Wirkung entsprechenden Lage genügt es zur Bestimmung der relativen Stellung der aufeinander wirkenden Massen bloss auf die Abmessung des verticalen Abstandes Sorge zu verwenden, was ohne besondere Schwierigkeiten möglich ist.

Dass bei einer solchen Anordnung die abzumessende Kraft kleiner wird, als sie im Falle mit dem Balken gleich hoch angebrachter Massen wäre, kommt bei der Empfindlichkeit meiner Apparate nicht in Betracht, da bei einer Schwingungsdauer von 10 oder mehr Minuten auch so noch Ablenkungen von über 2—3 Grad erzielt wurden. Um überzeugende Belege des regelmässigen Verlaufes der ganzen Erscheinung zu gewinnen, wurden photographische Aufnahmen derselben verfertigt, welche dadurch entstanden, dass vom Spiegel des Waagebalkens reflectirtes Licht auf eine mit lichtempfindlichem Papier bezogene, durch ein Uhrwerk gleichmässig gedrehte Walze fiel.

Bei den Messungen selbst bediente ich mich zumeist der

Poggendorff'schen Scalenablesung, die photographische Methode wurde eher zur beweiskräftigen Demonstration meiner Behauptungen oder aber in den Fällen herangezogen, wo die über-grosse Empfindlichkeit der Instrumente ein Annähern an dieselbe verbot. Von solchen Fällen soll noch später die Rede sein.

Ich komme nun zur Darlegung einer wesentlich neuen Methode, die sich mir während meinen Untersuchungen über die Variationen der Schwere darbot. Das Wesen dieser zur Bestimmung der Gravitationskonstante dienenden Methode besteht nämlich darin, dass nicht die Kraft selbst, sondern nur deren Aenderung gemessen wird, also nicht die Ablenkung des Waagebal-kens, sondern einzig dessen Schwingungsdauer und deren Veränderung benutzt wird.

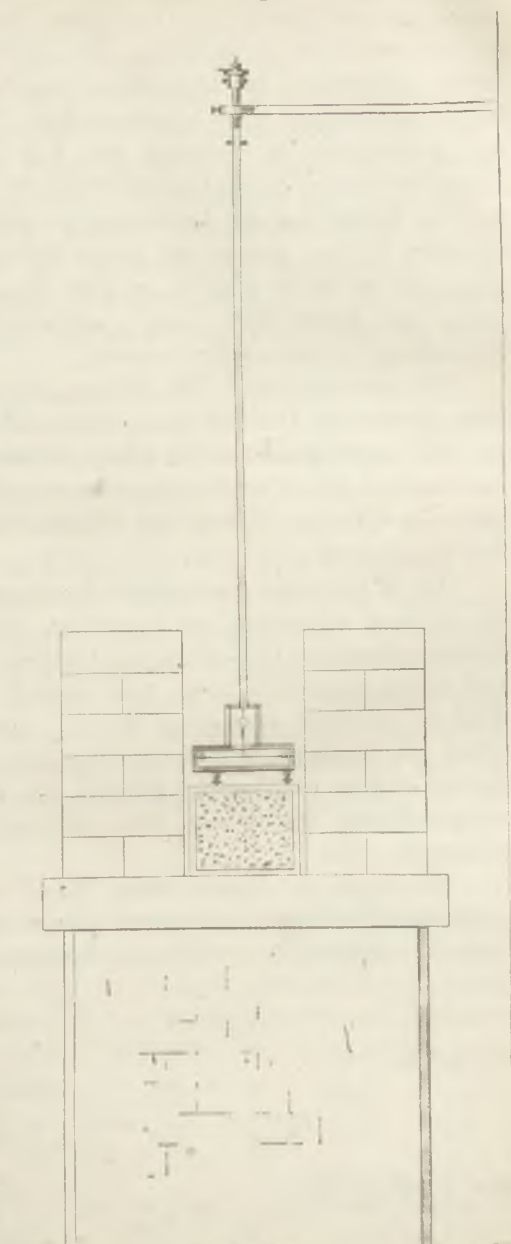


Fig. 11.

Zu dem Ende wurde die in ihrem doppelwandigen Metallkasten gut geschützte Coulomb'sche Waage zwischen zwei auf quadratischer Grundfläche sich erhebende verticale Bleisäulen aufgestellt; der leere Raum zwischen den beiden Säulen besass gleichfalls einen quadratischen Grundriss. (Die Art der Aufstellung ist übrigens aus Fig. 11 ersichtlich.) Die Basis der Säulen beträgt nahezu  $30 \times 30$  cm, die Höhe 60 cm und die Entfernung der gegeneinander gekehrten Säulenflächen ebenfalls 30 cm, sodass die ganze Bleimasse als eine 90 cm lange, 30 cm dicke und 60 cm hohe Wand betrachtet werden kann, aus deren Mitte eine quadratische Säule von 30 cm Seitenlänge herausgehoben wurde.

Die Schwingungen des Balkens wurden um zwei aufeinander senkrechte Gleichgewichtslagen beobachtet: nämlich eine um eine longitudinale, in die Längsrichtung der Wand fallende, und um eine darauf senkrechte, transversale Lage. In der longitudinalen Stellung betrug die Schwingungsdauer 641 Sec., in der transversalen 860 Sec.

Die Wahl dieser eigenthümlichen Anordnung der anziehenden Massen entsprang aus folgender, auf einen idealen Fall Bezug nehmenden Ueberlegung. Denken wir uns eine unendlich lange, unendlich hohe, aber endlich dicke, parallelepipedische, verticale homogene Wand, und legen durch deren Mitte als Anfangspunkt ein orthogonales Coordinatensystem, dessen  $Z$ -Axe nach unten gekehrt ist, dessen  $Y$ -Axe in die Längsrichtung der Wand fällt, während die  $X$ -Axe darauf senkrecht steht.

Für einen im Innern dieser Wand vom Anfangspunkt in endlicher Entfernung gelegenen Punkt  $(x, y, z)$  ist die Anziehung senkrecht zur verticalen Längswand und mithin wird

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

weiterhin

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0$$

und somit bleibt:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -4\pi f\sigma,$$

wo  $\sigma$  die Dichte der homogenen Wand,  $f$  die Constante der Gravitation bedeutet, d. h. jene Anziehungskraft, die im Sinne der Newton'schen Gesetzes die Masseneinheit auf die Masseneinheit in der Einheit der Entfernung ausübt.

Es kann daher die Mitte des Wandinnern als gleichmässig veränderliches Kraftfeld angesehen werden und wenn der Waagebalken im Innern der Wand in der  $XY$ -Ebene frei drehbar gedacht wird, können auf seine Schwingungen die Gleichungen der Abth. I angewendet werden. Bezeichnet daher  $T_l$  die Schwingungsdauer um die longitudinale, der Längsrichtung der Wand entsprechenden Gleichgewichtslage,  $T_t$  die Schwingungsdauer für die darauf senkrecht transversale Lage, so wird

$$\pi^2 \left( \frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2} \right) = 2(1 - \varepsilon) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)$$

oder mit Rücksicht auf die vorhergehende Gleichung

$$\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2} = \frac{8\pi f\sigma}{\pi^2} (1 - \varepsilon)$$

Diese Gleichung wird aber auch dann noch richtig bleiben, wenn wir aus der unendlichen Wand eine verticale Säule mit quadratischem Querschnitte derart herausheben, dass deren Mittelpunkt in die Drehungsaxe des Waagebalkens falle und dieser nun in der That frei drehbar wird. Bezeichnet man nämlich das Drehungsmoment für die longitudinale bez. transversale Gleichgewichtslage im Falle der vollen Wand mit  $f_l \omega$  und  $f_t \omega$ , für die unterbrochene Wand mit  $f'_l \omega$  und  $f'_t \omega$ , so ist, wie leicht einzusehen:

$$f'_l \omega - f'_t \omega = f_l \omega - f_t \omega$$

da der Waagebalken in beiden aufeinander senkrechten Lagen der herausgehobenen quadratischen Säule gegenüber in derselben relativen Lage steht und sonach die Entfernung dieser Masse in beiden Fällen das Drehungsmoment der anziehenden Kräfte um dieselbe Grösse verändert. So besteht mit entsprechenden Bezeichnungen die Gleichung:

$$\frac{\pi^2}{T_l^2} - \frac{\pi^2}{T_t^2} = \frac{\pi^2}{T_l'^2} - \frac{\pi^2}{T_t'^2} = \frac{f_l - f_t}{K}$$

welche unsere Behauptung und die zweitvorangehende Gleichung bewahrheitet.

Für die Säulen von endlichen Dimensionen, welche auf die früher beschriebene Weise aufgestellt und bei den Versuchen thatsächlich verwendet wurden, sind ähnliche Ueberlegungen anwendbar; der einzige Unterschied besteht darin, dass in der erwähnten Gleichung an die Stelle  $8\pi$  der Zahlenwerth 13,427 tritt. Zunächst gilt diese Zahl streng genommen nur für die beiden am Ende des Waagebalkens befestigten Kugeln, beansprucht aber bei den gewählten Abmessungen der Waage für die der Drehungsaxe nahegelegenen Theile des Balkens nur sehr kleine Verbesserungen. Es wird sonach

$$\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T_0^2} = \frac{13,427}{\pi^2} f \sigma (1 - \varepsilon')$$

wobei  $\varepsilon'$  eine Correctionsgrösse, kleiner als ein Proc. bedeutet, die von den Dimensionen des Balkens und der nicht unendlichen Ausdehnung der Wand abhängt.

Die Beobachtung der Schwingungsdauer kann mit überraschender Sicherheit und Genauigkeit bewerkstelligt werden. Die Herren Dr. Rudolf v. Kövesligethy und Dr. Karl Tangl bestimmten aus 59 vom 26. Januar bis 26. März 1891 sich erstreckenden Beobachtungsreihen den Werth der Grösse  $1/T_1^2 - 1/T_2^2$ . Jede Beobachtungsreihe umfasste 8 Schwingungen um die longitudinale und ebensoviele um die transversale Gleichgewichtslage.

Die äussersten Werthe der Schwingungsdauer dieser langen Beobachtungsreihen, während welcher die Temperatur des verfinsterten Kellerraumes von 2° C. auf 5° C. stieg, sind 640,97 und 641,28 Sec. für die longitudinale, und 859,29 und 860,32 Sec. für die transversale Stellung. Bei der Berechnung der Beobachtungen fasste ich die Werthe der Schwingungsdauer für beide Lagen von je einem Tage zusammen und erhielt als Mittelwerth der 59 Beobachtungen

$$\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} = 0,000\,001\,080\,31.$$

Unter den 59 Werthen ist nicht einer, der vom Mittel auch nur um ein Tausendstel des Betrages abweicht, und der wahrscheinliche Fehler des Mittels beträgt nur vier Einheiten der letzten Decimale, also etwa  $\frac{1}{25\,000}$  des Ganzen. Bestimmt man darauf die Schwingungsdauer für beide Richtungen auch bei

weggenommenen Bleisäulen, so erhält man  $T_l = 742,82$  Sec. für die longitudinale und  $T_t = 759,07$  Sec. für die transversale Lage, welcher Unterschied offenbar eine Folge der Anziehung der den Beobachtungsraum umgebenden Wände und Bodenmassen ist. Obwohl ich auch die oben mit  $\epsilon'$  bezeichnete Correction in Rechnung zog, konnte ich doch die Aufgabe bis heute nicht vollständig und endgültig lösen, da ich noch nicht Gelegenheit fand einen Factor, nämlich den Einfluss der während der Schwingung vom Waagebalken in Bewegung gesetzten Luft mit der hier geforderten Genauigkeit aufzudecken. Versuche, die mit ebenderselben Coulomb'schen Waage, jedoch nicht zwischen den Bleipfeilern, an einem anderen Orte, unter einem besonders hierzu angefertigten, das ganze Instrument bedeckenden Recipienten in verdünnter Luft angestellt wurden, zeigten, dass die Bewegung der Luft in diesem flachen Kasten selbst bei sehr langsamen Schwingungen einen bedeutend grösseren Einfluss auf die Schwingungsdauer ausüben, als es aus Bessel's Untersuchungen bezüglich des Pendels zu erwarten war. Bei einem Stab, der z. B. in Luft von normalem Drucke eine Schwingungsdauer von 648,92 Sec. besass, verringerte sich dieselbe in Luft von 20 mm Druck auf 648,00 Sec. Diese und ähnliche Versuche gewährleisteten aber noch nicht die genügend genaue Bestimmung der nöthigen Correction, da nach meinen Erfahrungen die Bewegung des Waagebalkens in der Luft auch von der Höhe desselben im Kasten abhängt und zudem wäre jedenfalls zu überlegen, ob die Aenderung der anziehenden Kräfte im Inneren des Kastens diese Wirkung der Luft nicht in irgend einer Weise beeinflusse.

Es wäre daher für die Lösung der Aufgabe sicherlich zweckdienlicher, diese heiklen Fragen ganz zu umgehen und die Messungen schon zwischen den Pfeilern in luftleerem Raume anzustellen, was ich jedoch bei den Dimensionen der mir zu Gebote stehenden Instrumente zu thun bisher nicht in der Lage war.

Theils aus dieser Ursache, theils weil die Homogenität der benutzten Bleimassen doch immerhin fraglich bleibt, gehe ich auf Grund meiner bisherigen Beobachtungen nicht weiter mit derjenigen Genauigkeit auf die Bestimmung der Gravitationsconstante ein, welche unter Anwendung meiner Methode sicher-

lich zu erwarten ist. Daher nur die Bemerkung, dass meine bisherigen Beobachtungen den Werth dieser Constante von

$$f = 0,000\ 000\ 066\ 5$$

um kaum  $\frac{1}{500}$  des Betrages abweichend festsetzen.

In dieser Abhandlung lege ich jedoch nicht auf diesen Zahlenwerth, sondern vielmehr auf die Methode das Hauptgewicht, da mir dünkt, dass die schon jetzt erlangte Genauigkeit in der Beobachtung der Schwingungsdauer Gewähr leiste, dass diese überaus wichtige Constante mit derselben Genauigkeit bestimmt werden könne, mit welcher die Schwerebeschleunigung aus Pendelschwingungen ableitbar ist. Dazu gehört aber ausser der richtigen Beobachtung der Schwingungszeiten noch luftleerer Raum und statt des unzuverlässigen Bleies, wirklich homogenes Quecksilber.

#### IV. Zwei Hilfsmittel zum Studium der Gravitation.

##### 1. Der Gravitationscompensator.

Bei allen Instrumenten, mit denen die vorher beschriebenen Untersuchungen angestellt wurden, setzte der Empfindlichkeit die Grösse des Torsionscoefficienten des den Waagebalken tragenden Platindrahtes oder Quarzfadens eine Grenze. Indem ich noch grössere Empfindlichkeit anstrebte, wendete ich mich dem Hilfsmittel der Compensation zu und verwendete zu diesem Zwecke die Massenanziehung selbst, die ihrer Beständigkeit zufolge zweifelsohne hierzu dienlicher war, als irgend eine andere Kraft.

Die durch ihre Anziehungskraft compensirenden Massen wurden an beiden Seiten nahe dem Ende des Balkens so angebracht, dass in der Gleichgewichtslage desselben die Kraft selbst Null oder wenigstens sehr klein, ihre Aenderung dagegen bei einer Ablenkung des Balkens sehr bedeutend werde. Das Drehungsmoment sämmtlicher auf den Balken wirkenden Kräfte wird dann bei der kleinen Elongation  $\omega$  desselben  $(\tau \pm \varphi)\omega$  sein, d. h. je nach der Anordnung der compensirenden Massen grösser oder kleiner, als es der Drahtelasticität allein entspräche. Auf diese Weise gelang es mir in der That ein Instrument zu bauen, dessen Empfindlichkeit ganz nach Belieben bis zur Unendlichkeit, d. h. bis zum Eintreten des labilen Gleichgewichtes gesteigert werden kann.

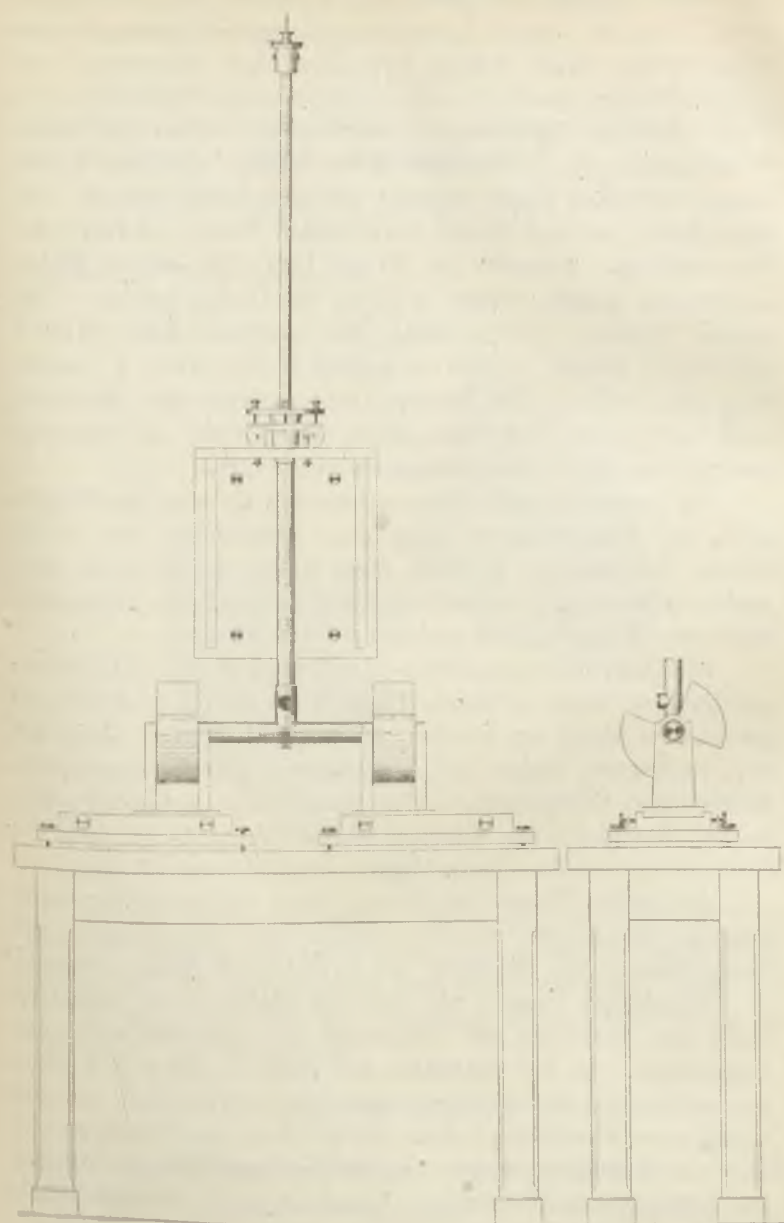


Fig. 12.

Fig. 13.

Dieser Apparat ist durch die Figuren 12 und 13 dargestellt. Der an seinen Enden mit Kugeln belastete leichte Waagebalken wurde behufs zweckdienlicher Anordnung der compensirenden Massen in eine doppelwandige Metallröhre von 4 cm äusserem Durchmesser verschlossen, sodass der ganze Waagekasten ein  $\perp$ -förmiges Rohr bildet. In dem 1,5 m langen verticalen Theile befindet sich der Aufhängedraht oder Quarzfaden; in dem 55 cm horizontalen Theile schwingt der Waagebalken. Derselbe ist 50 cm lang, die seinen Enden angesetzten Kugeln wiegen je 30 g; das Drehungsmoment des ganzen Systems betrug ohne die compensirenden Massen  $0,1478 \omega$ . Sodann enthält er natürlich (vgl. Abth. I.) ausser dem der Drillung des Drahtes entgegenwirkenden Momente auch noch jenen Drehungsmoment, welcher aus der Variation der Schwere am Beobachtungsorte entspringt.

Die compensirenden Bleigewichte sind an eine das Schutzrohr des Waagebalkens umgebende Metallhülse von 5 cm lichtem Durchmesser gelöthet; diese Hülse ruht in einem horizontalen Axenlager, sodass die Gewichte um das horizontale Rohr des Waagebalkens gedreht werden können.

Die Compensationsmassen erhielten die Form von Cylinderquadranten, deren mittlerer Theil durch die Metallhülse abgeschnitten sind, an welcher sie angelöthet sind. Zwei auf der erwähnten Hülse sich gegenüber liegende Quadranten bilden einen Compensator. Die Dimensionen desselben sind: innerer Radius 2,5 cm, äusserer Radius 12 cm, Dicke, d. h. der Abstand der beiden ebenen Begrenzungsflächen, 9,5 cm.

An beiden Enden der Waage kann je ein solcher Compensator angebracht werden, sodass sich die Kugeln des Waagebalkens um die Mitte der Cylinderquadranten bewegen.

Sowohl die Kugeln als der Stab stehen unter dem Einflusse der Anziehung der beiderseits sich gegenüber stehenden Quadranten. In der Mittellage des Balkens halten sich diese von entgegengesetzten Seiten kommenden und im Falle gleicher Quadranten ebenfalls gleichen Kräfte zwar das Gleichgewicht, aber die Kräfteänderungen um die Gleichgewichtslage bringen, als mit gleichen Vorzeichen behaftet, auch gleichgerichtete Wirkungen hervor.

Bedenkt man nun, dass der Mittelpunkt der dem Waage-

balken aufgesetzten Kugeln bei unendlich kleinen Elongationen das horizontale Bogenelement

$$\delta s = l \delta \omega$$

beschreibt, so ist die nahe der Gleichgewichtslage in der Richtung der Bewegung ablenkende Kraft:

$$f^m \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} \delta s = f^m \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} l \delta \omega$$

und deren Drehungsmoment:

$$f^m \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} l^2 \delta \omega.$$

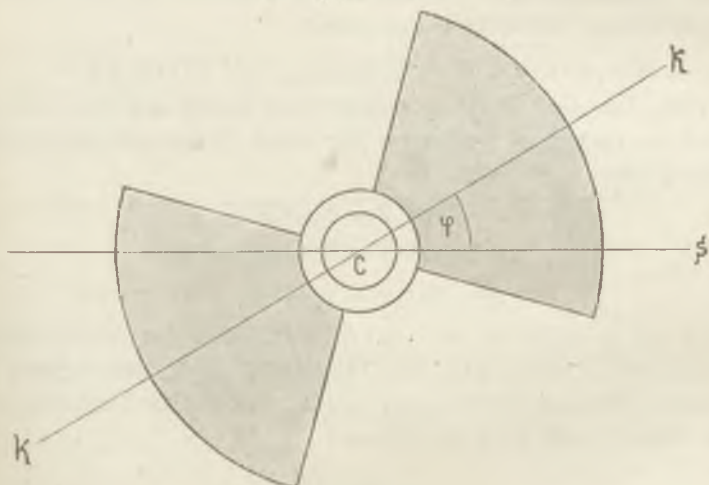


Fig. 14.

Es ist leicht einzusehen, dass sich der Werth  $\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$  mit der Neigung der Quadranten gegen die Horizontale verändert und durch Rechnung lässt sich nachweisen, dass, mit  $\varphi$  den Neigungswinkel der Mittellinie  $kk$  der Quadranten bezeichnend, die Beziehung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = a + b \cos 2\varphi$$

zu Recht besteht. Hierbei sind  $a$  und  $b$  Constanten, welche lediglich von den Abmessungen und der Dichte der Quadranten und dem Werthe der Gravitationsconstante abhängen; für mein Instrument ergaben sich:

$$a = 0,000001190$$

$$b = 0,000003722$$

Setzt man dann  $m = 30$  gr.,  $l = 25$  cm, so wird das die Elongation des Balkens vergrößernde Drehungsmoment der gesamten Compensationsmassen:

$$F\omega = (0,04462 + 0,13957 \cos 2\varphi)\omega.$$

Ohne die Compensationsmassen war aber, wie schon erwähnt:

$$\tau\omega = 0,1478\omega$$

sodass das Drehungsmoment, welches den Waagebalken des mit Compensatoren versehenen Instrumentes in die Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt

$$F\omega = (\tau - F)\omega = (0,10315 - 0,13957 \cos 2\varphi)\omega$$

wird. Um das Drehungsmoment und damit die Empfindlichkeit zu verändern, bedarf es nur einer Neigungsänderung der Quadranten. So ist z. B.

$$\text{bei } \varphi = 90^\circ \quad F = 0,24272$$

$$\varphi = 45^\circ \quad F = 0,10315$$

$$\varphi = 25^\circ \quad F = 0,01344$$

und bei  $\varphi = 21^\circ 10' 45''$  gar  $F = 0$ , d. h. der Waagebalken wird labil. Setzt man das Trägheitsmoment des Balkens in runder Zahl zu 38000 und sieht vom Luftwiderstande ab, so ergibt sich nach der Formel

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{F}}$$

die Schwingungsdauer für

$$\varphi = 90^\circ \quad T = 1243 \text{ Sec.}$$

$$\varphi = 45^\circ \quad T = 1907 \text{ Sec.}$$

$$\varphi = 25^\circ \quad T = 5283 \text{ Sec.}$$

Wegen des Widerstandes der Luft kamen aber diese über eine Stunde langen Schwingungen in der That nicht mehr zu Stande, gingen vielmehr in aperiodische Bewegung über.

Bei solch empfindlicher Einstellung nimmt das Instrument nur an möglichst geschütztem Orte, z. B. in einem gut temperirten und verdunkelten Keller, eine sichere Gleichgewichtslage ein und die Beobachtung selbst kann nur noch auf photographischem

Wege mit der erforderlichen Genauigkeit bewerkstelligt werden. Unter diesen Vorbedingungen entspricht aber die Waage allen Erwartungen. So gelang es durch die im Keller aufgestellte Waage die Anziehung einer im benachbarten Hofe in 5 Meter Entfernung angebrachten Masse von 300 Kilogramm nachzuweisen. Wurde die Masse in derselben Entfernung auf die Seite entgegengesetzter Wirkung übertragen, so erlitt der

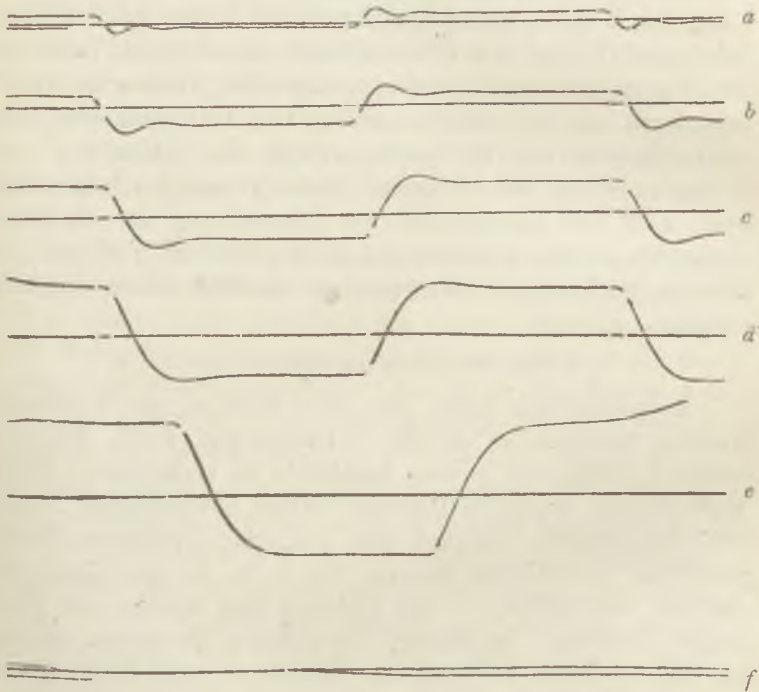


Fig. 15.

Waagebalken, wie es die vorhergehende Rechnung erheischte, eine Ablenkung von über 4 Bogenminuten. (Siehe Fig. 15, f.)

Die durch die Neigung der Quadranten gesteigerte Empfindlichkeit des Instrumentes wird durch die Figur 15 zum Ausdruck gebracht. Die Kurven *a, b, c, d, e* beschrieb der Balken stets unter der Wirkung der Anziehungskraft einer Masse von 5 Kilogramm in 0,5 Meter Entfernung, die von einer Seite auf die Seite entgegengesetzter Wirkung überführt wurden; doch waren dabei die Neigungswinkel  $\varphi$  der Quadranten verschieden und zwar  $90^\circ$  bei *a*,  $45^\circ$  bei *b*,  $35^\circ$  bei *c*,

30° bei  $d$  und 27,5° bei  $e$ . Zugleich ersieht man, wie die bei  $a$  noch schwingende Bewegung sich bei  $d$  und  $e$  in eine aperiodische sich verwandelt.

Zur Beurtheilung der erreichbaren Empfindlichkeit meiner Instrumente möchte ich noch eines erwähnen. Sollte sich einst Gelegenheit bieten, mein Instrument neben einem Flusse, See oder dem Meere so aufzustellen, dass es von den verticalen Ufern um 1 Meter abstehe, während der Balken mit der Uferlinie einen Winkel von 45° einschliesst, so würde die Zunahme der Wasserhöhe um 1 Centimeter bei einer Neigung der Compensatoren von 45° einen Ausschlag von 1 Bogenminute, bei einer Neigung von 25 Graden schon eine Ablenkung von 7 Bogenminuten hervorbringen. Daher könnte das Instrument ganz wohl zur photographischen Registrirung der Gezeiten verwendet werden und dies mit um so grösserem Vortheile, da es auch bei bewegtem Wasser stets den Mittelstand angeben würde.

## 2. Der Gravitationsmultiplikator.

Es gelang mir auch, die unter Einfluss der Massenanziehung entstehenden kleinen Schwingungen durch Multiplication in solche von grosser Amplitude zu verwandeln. Diese Multiplication wurde in folgender Weise bewerkstelligt: unter dem Waagebalken befinden sich auf einer drehbaren Tischplatte die anziehenden Massen, die z. B. in ihrer Anfangsstellung den Balken in der Richtung des Ganges des Uhrzeigers ablenken. Im Moment der grössten Elongation werden die Massen durch Drehung des Tisches in eine Stellung gebracht, in der die Anziehung eine entgegengesetzte Ablenkung verursacht; ist auch in dieser Richtung die grösste Elongation erreicht, so werden die Massen wieder in die erste Stellung umgelegt etc. Bei dieser Art der Multiplication, wo die Schwingungen des Balkens abwechselnd um zwei Gleichgewichtslagen vor sich gehen, wird der Grenzwert der durch mehrfache Wiederholungen vergrösserten Amplitude

$$A = a \frac{1 + \vartheta}{1 - \vartheta}$$

wo  $a$  die Entfernung der beiden Gleichgewichtslagen voneinander und  $\vartheta$  das Dämpfungsverhältniss bedeutet, das bei

Schwingungen um eine feste Gleichgewichtslage bekanntlich durch den Quotienten zweier aufeinander folgenden Elongationen bestimmt wird.

Die photographischen Aufnahmen der so multiplicirten Schwingungen legen sprechenden Beweis dafür ab, in welchem Maasse es mir gelang, bei meinen Instrumenten alle die störenden Factoren fern zu halten, welche sonst die Zuverlässigkeit der Coulomb'schen Waage so zweifelhaft machten. Auf diese Weise wurden sowohl längere Schwingungen von 10 Minuten, als auch kürzere von nur 1 Minute multiplicirt. Die Endelongation konnte im ersten Falle auf das zwanzigfache, in zweiten Falle sogar auf das 150fache der einfachen Ablenkung mit immer gleicher Sicherheit und Constanz vergrössert werden.

Diese Methode der Multiplication wird zweifelsohne auch beim Studium der Gasreibung gute Dienste leisten können.

Mir schwebte vor der Hand ein anderes Ziel vor, indem ich die Multiplication als sehr empfindliche Methode zur Bestimmung der Schwingungsdauer und deren Aenderung benutzte. Ist nämlich  $T$  das Zeitintervall der periodischen Umlagerung der Massen, also die Periode der Aenderung der Kraft nicht identisch mit der Schwingungsdauer  $T'$  des Waagebalkens, so kommen Schwingungen zu Stande, deren Endelongation  $A$  nicht bloss vom Abstände  $a$  der Gleichgewichtslagen und der Dämpfung  $\theta$ , sondern auch vom Werthe der beiden Perioden  $T$  und  $T'$  abhängen. Der Balken wird in diesem Falle seinen Hin- und Hergang nicht mehr während einer Periode seiner eigenen Schwingung, sondern in der ihm durch die Kraftänderungen aufgezwungenen Zeit vollführen. Ich nenne daher diese Schwingungen, welche aus Theilen zweier einfachen, um die jeweilige Gleichgewichtslage vor sich gehender Schwingungen zusammengesetzt sind, erzwungene Schwingungen.

Wird ein Waagebalken von der constant bleibenden Schwingungsdauer  $T'$  durch Massenumlagerung verschiedener Periode in erzwungene Schwingungen versetzt, so ist klar, dass die Werthe der Endelongationen Daten liefern werden, aus welchen die eigene Schwingungsdauer bestimmt werden kann. Und ebenso klar ist es, dass bei constant bleibender Periode der

Massenumlagerung Veränderungen in der eigenen Schwingungsdauer des Waagebalkens sich in der schliesslichen Grösse der Elongationen kundgeben werden. Wie empfindlich diese Endelongationen für Aenderungen der Perioden  $T$  und  $T$  sind, möge aus folgendem Beispiele ersehen werden:

Mit  $T=611$  Sec. und  $T=611$  Sec. wird  $A=252$  Bogenminuten  
 $T=611$  Sec. „  $T=600$  Sec. „  $A=225$  „ „  
 $T=611$  Sec. „  $T=590$  Sec. „  $A=180$  „ „

sodass eine Verkleinerung von 10 Sec. in der Zeit  $T$  die Endelongation um 45 Bogenminuten verringert, was durchschnittlich 4,5' auf 1 Secunde ergibt.

Aus der Abmessung der Endelongationen dieser erzwungenen Schwingungen können daher in der That Schwingungszeiten bestimmt werden, und diese Methode wird besonders da mit grossem Vortheile benutzt werden können, wo bei grosser Dämpfung eine längere Reihe von Schwingungen nicht beobachtet werden könnte.

Behufs Erleichterung der thatsächlichen Ausführung der Methode, und besonders um die bei längeren Schwingungen wahrlich geistestödtende Arbeit der Massenumlagerung zu vermeiden, construirte ich einen elektromagnetischen Multiplicator, eine Maschine, welche die Multiplication mit der Genauigkeit der Uhr bewerkstelligt. Auch dieses Instrument wurde von Hrn. Ferdinand Süss, Director der staatlichen mechanischen Lehrwerkstätte, mit der ihm eigenen Geschicklichkeit ausgeführt.

Budapest, Juli 1896.