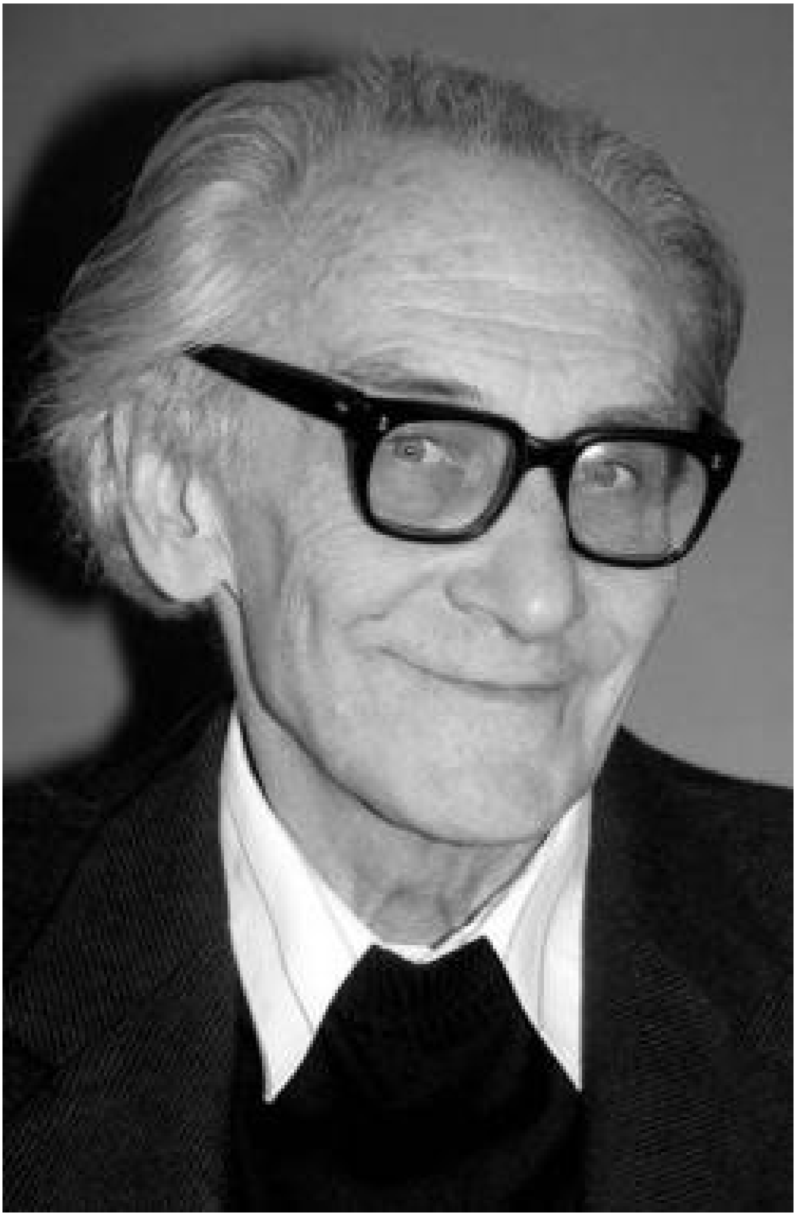
A MAGYAR TUDOMÁNYTÖRTÉNETI INTÉZET
TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI 6.

Vekerdi László

Az újkori matematika és fizika megszületése

A 2010-ben a Magyar Tudománytörténeti Szemle Könyvtára sorozatban azonos címen megjelent mű online változata

Magyar Tudománytörténeti Intézet
Budapest, 2014



Vekerdi László nyomtatásban megjelent nagyobb önálló művei

Kalandozás a tudományok történetében. Művelődéstörténeti tanulmányok.
Bp., 1969. Magvető.

Németh László alkotásai és vallomásai tükrében. Bp., 1970. Szépirodalmi.

Befejezetlen jelen. Tudománytörténeti tanulmányok. Bp., 1971. Magvető.

A matematikai absztrakció történetéből. Bukarest, 1972. Kriterion.

Így élt Newton. Bp., 1977. Móra.

Európa születése. Európa a IV–XIII. században. (Társszerző: Varga Domokos).
Bp., 1977. Móra.

Vigh Tamás. Bp., 1983. Corvina.

A világ kereke. Az ember útja az őskortól az újkorig. (Társszerző: Varga Domokos).
Bp., 1985. Móra.

Németh László: Négy könyv. Vál. és szerk.: Németh Judit. Sajtó alá rend.: Vekerdi László.
Bp., 1988. Szépirodalmi.

Tudás és tudomány. Vál.: Terts István. Bp., 1994. Typotex.

„A Tudománynak háza vagyon". Reáliák a régi Akadémia terveiben és működésében.
Sajtó alá rend.: Gazda István. Bp.–Piliscsaba, 1996. MATI – TKME.

A véges végtelen. (Társszerző: Herczeg János). Bp., 1996. Typotex.

A sorskérdések árnyékában. Kalandozások Németh László világában.
Vál. és szerk.: Monostori Imre. Tatabánya, 1997. JAMK.

Így él Galilei. Bp., 1997. Typotex.

Az elsüllyedt katedrális. Hatvan év versei. (Válogatás Jánosy István költeményeiből).
Vál.: Vekerdi László. Bp., 1999. Magyar Írószövetség – Belvárosi Könyvkiadó.

A közértelmesség kapillárisai. Tata–Tatabánya, 2001. Sollers – JAMK.

Fülep Lajos levelezése. Tatabánya, 2009. JAMK.

Magyarországi és erdélyi pestisjárványok a XVIII. században. Bp., 2009. MATI.

Az újkori matematika és fizika megszületése. Bp., 2010. MATI.

Csillagórák Vekerdi Lászlóval. Összeáll.: Herczeg János. Bp., 2011. Typotex.

Magyar világ – tudós világ. Tudománytörténészek és művelődéstörténészek
gyűrűjében. Sajtó alá rendezte: Gazda István. Bp., 2011. MATI.

A mű sajtó alá rendezését a Magyar Tudományos Akadémia támogatta.

Az online változat elkészítését a Nemzeti Kulturális Alap támogatta.

Nemzeti Kulturális Alap
Nemzeti Kulturális Alap Igazgatósága

Sajtó alá rendezte:
†dr. Scharnitzky Viktor

Szaklektor:
dr. Szabó Péter Gábor

Felelős szerkesztő:
dr. Gazda István

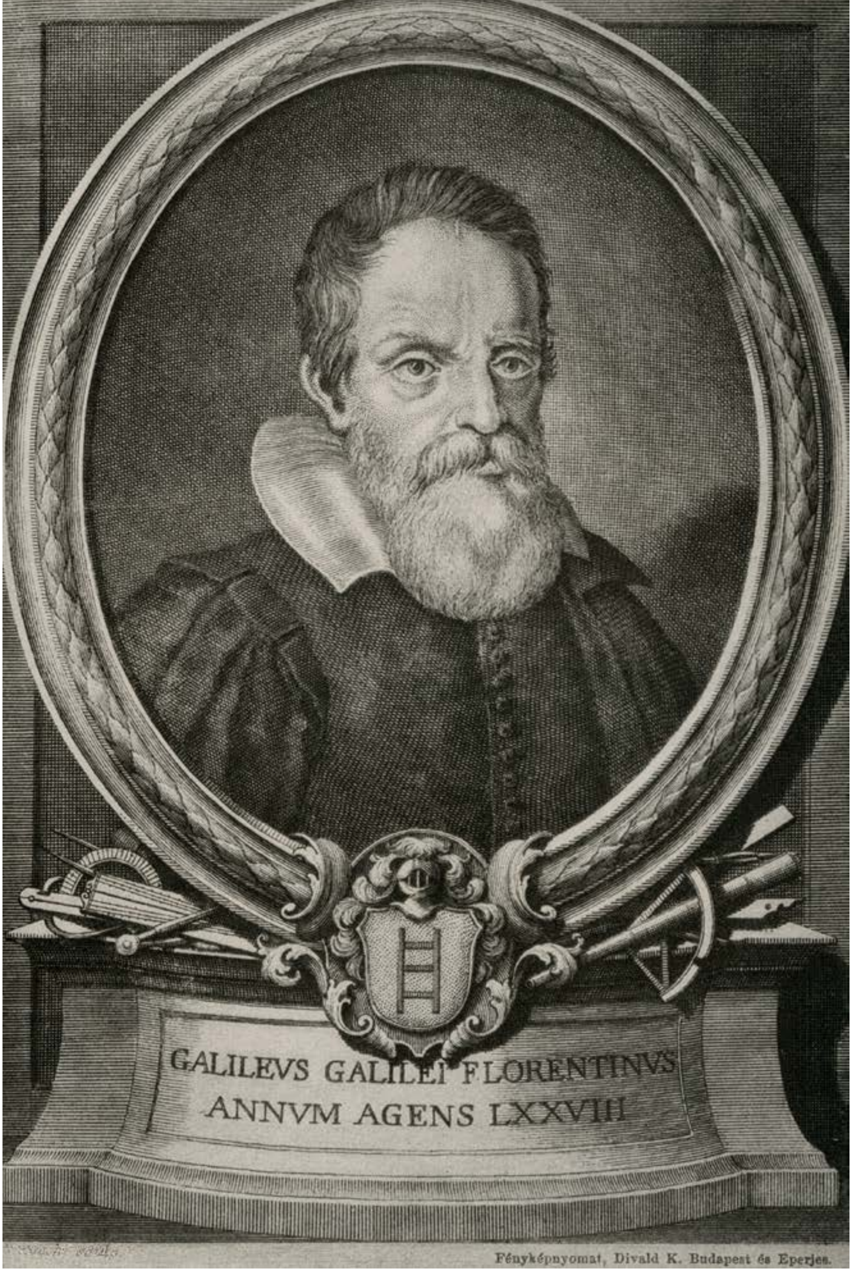
Szakszerkesztő:
Bodorné Sipos Ágnes

A nyomtatott változat ISBN száma: 978-963-9276-88-8

Tördelés, illusztrációk: Tordas és Társa Kft.

Informatikai szerkesztés: Zakuszka & Zacher Kft.

TARTALOM



Fényképnyomat, Divald K. Budapest és Eperjes.

GALILEI

GALILEI ERETNEKSÉGE[1]

Most, hogy a Gallimard méltán híres történelem-sorozatában franciául is megjelent Pietro Redondi könyve, a *Galileo eretico,* bizonyára rövidesen világsiker lesz belőle. Elsősorban tán nem is azért, mert a mai tudománytörténet-írás legnagyobb érdeklődéssel kísért szociológiai-filozófiai irányába esik; azért inkább, mert meghökkentően új dolgokat tud mondani – ugyanarról másképpen, napjaink élvonalbeli historiográfiájának szabályai szerint. Máris messze a szűkebb szakmai határokon túl elterjedt a könyv híre, a nyelvi korlátok – az olasz végtére kis nyelv – ellenére; éspedig éppen ebből az „ugyanarról másképpen" szempontból legérdekesebb eredménye terjedt el: a nagy pör radikális újraértelmezése.

Galilei 1633-as procedúrája persze szinte csábít az újraértelmezésre, hiszen jóformán csak végeredménye ismert, az oktalan és kegyetlen ítélet; az eljárás részleteit a Szent Hivatal mélységes homálya fedi. Redondi szerencsés hasonlattal tudománytörténeti fekete dobozról beszél, amelynek csak a kimenete ismert. És az input? No persze az is, legalábbis nagyjából: az egyik összetevője (a megsértődött és politikailag amúgy is szorongatott helyzetbe került) Orbán pápa, a másik a megdühödött jezsuiták (Dialogó-val fölpiszkált) antikopernikánizmusa. Érthető, hogy input és output ismeretében a történészek eleddig a fekete doboz titkának a megfejtésével fáradoztak, ezzel töltöttek meg könyvtárnyi tanulmánytömeget. Meddő mesterkedés, véli Redondi. Micsoda történész-elbizakodottság úgy képzelni, hogy át tudunk látni azon a sűrű hálón, amit oly mesterien szőttek ügyes kezek a rejtőzködés, a titkolódzás, a képmutatás, az áltatás, a látszatkeltés, a különféle tisztességes és tisztességtelen disszimulációk nagy századában! Mit tehet egy mai történész a „larvatus prodeo" akkori mesterei ellenében? Mindenekelőtt, véli Redondi, tisztelheti a rejtőzködés tudományát; nem szabad avatatlan kézzel a fekete dobozba piszkálnia. Nem csinálhat persze semmit a jól ismert outputtal

[1] Előzménye: Vekerdi László: Galilei eretneksége. = Természet Világa 117 (1986) No. 6. pp. 246–249.

sem. De a bemenő csatlakozásokat megvizsgálhatja; kereshet az ismert végeredményhez jobban illő inputokat.

De a Galilei-pör esetében nem könnyű az eddigieknél se tetszetősebb, se történeti adatokkal jobban alátámasztható indokokat találni. De hátha épp ez a tetszetősség és az adatok nyilvánvalósága a gyanús? Hiszen ne feledjük, a rejtőzködés századában keresgélünk! Hátha csak úgy kitalálták – a per konstrukciós jellege sohasem volt kétséges – a kopernikánizmus vádját, hogy egy sokkal súlyosabb vádat rejtsenek, illetve mentsenek általa? Ez Redondi jogos kérdése, s a könyv akár erre adott válasznak is felfogható. A válasz – az „ugyanarról másképpen" játék alapszabályai szerint – meghökkentő és egyszerű: Galileit eredetileg sokkal súlyosabb váddal, főbenjáró teológiai eretnekség gyanújával kívánta pörbe fogni a Szent Hivatal, s a pápának csak nagy nehezen sikerült megmentenie öreg barátját egy sokkal enyhébb vád ravasz kieszelésével és elfogadtatásával, ha már az eljárást – közismerten szorult politikai helyzetében – megakadályozni nem is tudta. A sikernek persze alapfeltétele volt, hogy az eredeti súlyos vád ki ne derülhessen: még a nyomait is el kellett tüntetni. Nem csoda, ha eddig még csak nem is gyanakodtak rá a történészek. És az se csoda, hogy annyi tintát pazaroltak hiába az ítélet, illetve a vád nyilvánvaló következetlenségeinek a magyarázatára. Ellentétes a pörben bemutatott 1616-os inkvizítori dekrétum szövege, amely a kopernikuszi tanok „bármily módon" való terjesztését tiltja, a Galilei által fölmutatott Bellarmino-levéllel, amely csupán azt tiltja meg, hogy a napközepű világrendszert az esetleges későbbi igazolásáig – bizonyított tudományos igazságként tárgyalják?

Hát persze hogy ellentétes, hiszen a Dialogo, hipotetikusként ismertetve Kopernikusz elméletét, az utóbbi tilalmat nem szegi meg. De csak betű szerint nem, hiszen a vak is láthatja, hogy érvei és egész szelleme Kopernikusz rendszerét igazolja, szavaival és antikopernikánus nyilatkozataival ellentétben. Csakhogy a kor eszmecsőszeit éppen a szavak és a nyilatkozatok érdekelték, még az áttértektől se követeltek meg ennél többet. Az „őszinteséget" amolyan (a maga módján úgy lehet nem kevésbé álszent) jelenkori értelemben még csak nem is ismerték; az elhallgatások és a „tisztességes hazugságok" művészete hozzá tartozott a kor szellemi klímájához, e nélkül még közepes tollforgató sem lehetett senki. A közismert, ámde nyilvánosan tagadott kopernikánus szimpátia nem volt elég a vádhoz; Galileinek meg kellett szegnie egy kifejezett inkvizitórikus rendeletet ahhoz, hogy érvényesen elítélhető legyen. S méghogy Galilei megsértette volna Őszentségét, Simplicio szájába adván a Föld forgása ellen fölhozott érveit? Először is Simplicio korántsem az az együgyű hülye, akinek okos tudománytörténészeink hiszik, azután meg az óvatos Galilei, aki nagyon jól ismerte a pápa hiúságát, éppen itt ne tudta volna fékezni a nyelvét? És különben is miért mondotta Riccardi atya, a Szent Palota háznagya a firenzei nagykövetnek, hogy „nem matematikai dolgokról van itt szó, hanem a Szentírásról, a vallásról és a hitről”? És miért beszélnek eleinte mindig Galilei könyveiről, többesszámban, ha kezdettől fogva, mint az ítéletben, egyedül a Dialogó-t hibáztatták? S nem förmedt-é rá maga a pápa a nagykövetre, amikor az szelíden kifogásolta, hogy az eljárás előkészítésére összehívott különleges bizottságban egyetlen matematikus vagy csillagász sincsen, nem förmedt-é rá, hogy „Galilei oda merészkedett, ahová nem lett volna szabad; a legsúlyosabb s legveszedelmesebb dolgokhoz nyúlt, amiket ezekben az időkben egyáltalán fel lehet hozni”? Örüljön, hogy nem dobták nyomban az inkvizíció törvényszéke elé!

Száz szónak is egy a vége, a nagy pör szokásos értelmezése esetében csakugyan ezernyi kisebb-nagyobb következetlenség marad, amik mind sokkal érthetőbbek, ha föltételezzük, hogy a Galilei ellen eredetileg fölhozott vád nem a Dialogo tilalomsértő kopernikánizmusa volt, hanem valami sokkal súlyosabb eretnekség, valami igazi nagy teológiai eretnekség, ami a katolicizmus egész dogmarendszerét alapjaiban fenyegette, amivel – ellentétben a kopernikánizmussal – sohasem lehetett volna kiegyezni. Redondi meg is találja ezt a sokkal veszélyesebb eretnekséget a Saggiatore atomizmusra épülő, szenzualista materializmusában.

A Saggiatore atomizmusát és szenzualista episztemológiáját természetesen nem kellett fölfedezni; ezzel mindig is tisztában volt a tudománytörténet-írás, habár részletesebben William R. Shea 1972-ben megjelent könyvéig nemigen elemezték. Redondi azonban valami merőben mást csinál. Azt ismeri fel világosan és érteti meg páratlan szuggesztivitással, hogy miért kellett ennek az atomizmusnak és episztemológiának szükségképpen ellentétbe, sőt élethalálharcba keverednie az Egyház – tridenti zsinaton szankcionált – hivatalos filozófiájával.

Szokásához híven itt is ismert adatok általánosan elfogadott értelmezéseiből indul ki Redondi. Megnézi, hogy mi történik az értelmezésekkel, ha megforgatja egy kicsit az adatokat és megpróbálja XVII. századi szempontok szerint megérteni. Mit akart például mondani Galilei tanítványa és első életrajzírója, Vincenzo Viviani azzal, hogy mestere minden nyomorgatásának és üldöztetésének az üstökösök ürügyén kirobbant vita volt az oka? Csakugyan csak azt – amint a szokásos magyarázat állítja –, hogy a Saggiatoréval engeszthetetlen ellenségévé tette Orazio Grassit és általában a jezsuitákat? És különben is, a Saggiatore kirobbanó sikert aratott, maga a pápa tapsolt neki lelkesen, s később se róttták fel soha Galileinek, legalábbis ami a nyílt felelősségre vonást illeti. Miért hangsúlyozza akkor Viviani, aki Galilei utolsó éveiben mellette élt, hogy úgyszólván minden bajnak ez a régi vitairat a forrása? Ma persze nemigen figyelnek a tudománytörténészek Viviani megjegyzésére, de a XVIII. században Montucla, a nagy matematikatörténész még úgy tudja, hogy vitájuk miatt Grassi atya jócskán hozzájárult az inkvizítorok Galilei elleni felpiszkálásához. Ehhez az azóta elfelejtett „szenzációs értesülés”-hez csatlakozik Redondi, s mesteri detektívmunkával deríti ki, hogyan járult hozzá ez a befolyásos jezsuita Galilei üldöztetéséhez.

Se hely, se szükség nincsen itt rá, hogy kitérjünk az 1618-ban föltűnt három üstökös kapcsán kirobbant vitára. Sokan ismertették, köztük Drake tán még jobban is Redondinál. Itt csupán emlékeztessünk rá, hogy Grassi atya a jezsuiták tudományos fellegvárában, a Collegio Romanóban még ez évben előadott a tárgyról, s ez a konferencia nyomtatásban is megjelent, névtelenül, 1619 elején. Galileinek római barátai már a kéziratot elküldték Firenzébe, s egyik tanítványa, Mario Guiducci közreműködésével s neve alatt a mester 1619 nyarán már meg is jelentette róla meglehetősen éles kritikáját. Grassi – Lothario Sarsi álnéven – decemberre jött ki a Libra astronomica ac philosophica címet viselő válasszal, amelyben legfőbb célja gyanánt Arisztotelész üstökösökre vonatkozó konklúzióinak a védelmét tűzte ki. A Librá-ra válaszol, jó néhány éves késéssel, az 1623-ban megjelent Il Saggiatore.

A késést részint Galilei betegeskedése okozta, azonban még sokkal inkább a rendkívül gondos és körülményes előkészítés. A Saggiatore ugyanis nem akármilyen könyv. Az Accademia dei Lincei kiadásában és égisze alatt jelent meg, sőt – amint Redondi hangsúlyozza – egyenesen kezdeményezésére s tervei szerint. 1620 májusában összegyűlt Cesi herceg (Urbino közelében fekvő) aquaspartai palotájában a „Hiúzok” akadémiájának „operatív magva” – Cesi, Ciampoli, Cesarini –, és elhatározták, hogy az üstökösök ürügyén egy epikus-szatirikus vitairatot íratnak Galileivel Sarsi arisztoteliánus nézeteinek cáfolására és a maguk modern antiarisztoteliánus eszméinek a terjesztésére. Galilei személy szerint jó barátjuk volt, s az Akadémia büszkesége; tehetsége és nagy tudományos tekintélye eleve garantálta a „Sarsi-hadművelet” sikerét. A kézirat 1620 őszére elkészült. Virginio Cesarini, a Hiúzok afféle eszmei koordinátora, átnézte és számos javítást indítványozott. A kijavított kéziraton Cesi herceg s még néhány tekintélyesebb akadémikus is simított itt-ott. 1623 tavaszán kezdték el nyomtatni – Riccardi atya magasztalásnak beillő engedélyezésével – a könyvet, melynek híre közben már messze szállt, s nagy izgalommal várták a megjelenését az ellenség főhadiszállásán, a Collegio Romanóban.

Az események gyorsan pörögtek ezekben az izgatott húszas években; Redondi filmszerű vágásokkal sorjázza a legfontosabbakat. 1620 májusában az Index-kongregáció betiltotta Kepler Epitomé-ját, ugyanakkor a De revolutionibus alkalmas megcenzúrázását javasolta, hogy végre engedélyezhessék. 1621. szept. 17-én meghalt Bellarmino kardinális, az ellenreformációs egyház nagy ideológusa. 1623 nyarán meghalt az öreg pápa, és a firenzei Maffeo Barberinit, a Hiúzok és Galilei nagy barátját választották VIII. Orbán néven helyébe. Fiatalon bíborossá kinevezett unokaöccsét, Francesco Barberinit 1623 szeptemberében a Hiúzok Akadémiája tagsággal tüntette ki. Vagy inkább ő az Akadémiát? A Hiúzok mindenképpen a hatalom közvetlen közelébe kerültek, és soha egyetlen Galilei-életrajz sem mulasztja el ecsetelni a lehetőségek így kialakult „csodálatos konjunktúrá”-ját. Október végén jelent meg, az új pápának szóló ajánlással és a Barberiniek háromméhes címerével a Saggiatore. Redondi is természetesen alaposan körüljárja a „csodálatos konjunktúrát”. De ő nem a szokásos kopernikánus perspektívából nézi a dolgokat. Az ő Hiúzai és az ő Galileije nem azt a lehetőséget látják fölvillanni, hogy most végre elfogadtathatják az egyházzal Kopernikusz tanítását. Még Drake is, aki pedig napról napra ismeri Galilei életét, a Dialogo kopernikanizmusa felől vizsgálja ezeket az éveket. Nem így Redondi. Őt inkább olyasféle kérdések érdeklik, hogy kik is voltak ezek a Hiúzok? Jó, úri és nagyúri tudománykedvelők; de mit jelentett ez egy olyan korban, amikor a tudomány – egyebek közt Bruno máglyája is mutatta – elválaszthatatlanul összefonódott vallással és világnézettel? Mit akartak elérni a Hiúzok a Saggiatoré-val?

Nem könnyű a válasz, hisz – ne feledjük – a tettetések és az életfontosságú látszatok korában járunk. Redondi sem tud lényegesen többet kihámozni a Saggiatore filozófiájából elődeinél. De ő nem elégszik meg a híres rész idézésével, hogy a „Természet könyve” geometriai alakzatokból álló „betűkkel” íródott; látja jól, hogy a különféle titkos írások és a természetben mindenfelé felfedezni vélt jelek megfejtésének nagy korában ez a kép egyáltalán nem látszhatott olyan meglepőnek, mint ma. Az érzékszervi tapasztalás Galilei-féle elméletét se annyira a későbbi szenzualista materializmus szemszögéből vizsgálja, mint inkább a középkor s kivált Ockham nominalizmusa felől. A babilóniak kötelességszerűen idézett parittyáját pedig, amivel Galilei a tekintélyre hivatkozó kauzális érvelését (s meglehet az annyit emlegetett „Vera causa” bizonyítást) figurázta ki, Redondi csupán általánosságban, futólag említi. Összegezi viszont részletesen, éspedig a XVII. század szempontjainak megfelelően, Arisztotelész természetfilozófiáját: „A természet, egy arisztoteliánus számára, érzékelhető kvalitások terminusaiban íródott. Mindezek a kvalitások – mint pl. a meleg, a keménység, a szín, a szag – valamilyen szubsztanciához tartoztak, valódi kvalitások voltak vagy szubsztanciális formák. Csak csoda választhatta el a kvalitást a maga szubsztanciájától.” Valóságosnak tekintett kvalitások neveinek komplex kombinációja volt tehát a tudományos nyelv grammatikája, s a nyelvtan szabályait az arisztotelészi logika rögzítette: egy nyelv, amely fogalmi változókhoz kötött puszta nevekből állt.

Ezzel a kvalitatív peripatetikus nyelvvel állított szembe a Saggiatore egy merőben másfélét, s azt állította, hogy a természetről csak ezen a merőben másféle nyelven érdemes beszélni. Dehát milyen volt a Saggiatore nyelve? Nem szükséges itt bővebben kitérnünk rá, Redondi értelmezése inkább csak részleteiben s hangsúlyaiban tér el az eddigiektől. Nem annyira kvantitatív és geometriai jellegét hangsúlyozza, mint inkább következetesen fizikai atomizmusát, amit jó előre szembe is állít a Discorsi matematikai (tehát a kor felfogása szerint hipotetikus) atomizmusával. Ez a fizikai, ha úgy tetszik szubsztanciális atomizmus határozza meg a Saggiatore ismeretelméletét, puszta nevekké degradálva mindenféle kvalitást. De jól vigyázzunk! Nem valamilyen ténylegesen létező dolog vagy folyamat elnevezésévé, ami még összeegyeztethető lenne valamilyen módosított arisztotelianizmussal. A fizikai világban semmi olyasmi nem létezik, mint „íz”, „szag”, „szín”; a valóságban, objektíven, szubsztanciálisan egyáltalában nem létezik semmiféle kvalitás. „A tűz meleg” – mondotta az arisztoteliánus fizika. „A tűz mibennünk a meleg érzetét kelti” mondja az új, szabadon hagyva s vizsgálandóként a kérdést, hogy miféle mechanizmus által. Galilei a meleg esetében is atomisztikus mechanizmust tételezett fel: sebesen mozgó „tűz-parányok” apró részecskéikre „oldják” a szilárd testeket s a folyadékokat, s ezek a részecskék keltik azután, a test pórusain behatolva, mozgásukkal a „meleg” érzését. „Meleg” tehát csak számunkra létezik, szubjektíve. A világban, objektive, csak különféle fajtájú, összetételű és alakú részecskék mozgása létezik. Nekünk persze mindez trivialitásként hangzik s nyomban Locke-ot juttatja eszünkbe. Akkor azonban, mikor szubsztanciához tapadt valódi kvalitások keverékeként látták s élték meg a világot, akkor ez a nézet meghökkentően új volt, s Démokritoszt, Epikuroszt, Lucretiust, Platón Timaioszát, Telesiót, Brunót, Campanellát, Ockhamot juttatta az emberek eszébe; csupa olyan szerzőt – figyelmeztet Redondi –, akiket cseppet se kedvelt az Egyház. Ám ennek ellenére épp ez idő tájt az efféle tanok határozott divatjáról beszélhetünk. Giordano Bruno máglyahalála nem szegte sorát az ő hermetikus-kabbalisztikus atomizmusa által inspirált műveknek, az egyik ilyen könyvet épp Firenzében publikálta – hangsúlyozta Redondi – a sienai egyetem professzora, Esteban Rodrigo de Castro, 1621-ben. Nem mintha Redondi nem látná Bruno és Galilei atomizmusa közt a különbséget, de az újkorelőt tárgyaló tudománytörténet-írás nagy „hermetikus fordulata” láthatóan nem múlt el felette se nyomtalanul, s ha nem is idézi explicite Yates kisasszonyt, Galileije – ha tán fenntartásokkal is – mégiscsak az ő „keresztény kabbalistái”-t juttatja az ember eszébe. De nem ez a lényeg. Annyi sokféle Galilei után az embert tán még egy rózsakeresztes Galilei se lepné meg nagyon. Redondi azonban valami sokkal fontosabbat mutat meg: azt, hogy miért kellett szükségképpen összeütköznie a Saggiatore reális kvantitásokat tagadó episztemológiájának a katolikus Egyház tridenti ideológiájával.

Ideológiája fellazult sorait a Tridenti zsinaton újrarendező Egyház egész hitvilágának sarkalatos tételeként állította előtérbe az eukharisztikus dogmát. Redondi Raffaello „Disputa az oltári szentségről” elnevezésű híres freskójából kiindulva mutatja be ragyogóan a dogma lényegét s reneszánsz kori történetét, s megérteti, hogy Trident után, miután a leghalványabb ökumenikus remény is szertefoszlott, szó sem lehetett többé semmiféle disputáról. Talán semmin olyan jól le nem mérhető az egyház tridenti megmerevedése, mint épp az eukharisztikus dogmán. Igen, ezentúl vitathatatlan igazságként kellett elfogadni, hogy az ostya, mikor a pap megszenteli, átlényegül Krisztus valódi testévé és vérévé, habár íze, színe, illata, minden kvalitása változatlan marad. Ehhez kell épp a megszentelés csodája: a szubsztancia elválasztásához a kvalitásaitól. Ha ugyanis a szubsztancia elvált a kvalitásaitól, akkor már nyugodtan átlényegülhet anélkül, hogy a kvalitásoknak is meg kellene változniuk. Nyilvánvaló azonban, hogy a csoda csak addig hatásos, amíg kvalitások valóságosan léteznek, nem csoda, hogy az egyház körmeszakadtáig ragaszkodott az ő Arisztotelészéhez.

De hát miért nem támadták akkor meg rögtön, nyíltan és radikálisan a Saggiatore valódi kvalitásokat tagadó természetfilozófiáját? Nem eszik a kását olyan forrón, feleli Redondi. Mindig is éltek az Egyházban Dionüszosz Aeropagitára és Augustinusra hivatkozó spirituálisabb vagy egyenesen misztikus tendenciák, amelyek a peripatetikus logiko-teológiával szemben a bensőséges hitre és a lélek transzcendens áhítatára helyezték a hangsúlyt. Galilei római barátai – afféle világi és egyházi arisztokraták, mint Cesi, Cesarini, Ciampoli – ennek a bensőségesebb és spirituálisabb – mondhatni „prae-janzenista” – katolicizmusnak voltak a hívei, s hajlott felé Maffeo Barberini, márcsak erős francia szimpátiái miatt is. Az 1620-as években egy pillanatra még az sem látszott lehetetlennek, hogy a katolicizmus jövője érdekében sikerülni fog végül is enyhíteni a tridentiánus szigoron. Ez volt a Saggiatore pillanata, a „mirabil congiuntura”. Igen jellemző és Redondi nem is mulasztja el részletesen ismertetni, hogy az előkelő és magas egyházi méltóságokkal ékes római „Accademia dei Desiosi”-ban 1625 farsangján Giuliani Fabrici – a pápa udvari költője – a Saggiatore alapján támadta Arisztotelész filozófiáját, nagy tetszés közepette. A konjunktúra oly kedvezőnek tűnt, hogy Galilei elérkezettnek látta az időt újra síkra szállani Kopernikusz rendszerének elfogadtatásáért.

Mario Guiducci, aki Galilei barátja – s megbízottjaként figyelte az eseményeket Rómában –, elküldötte mesterének 1624-ben Francesco Ingoli atya 1616-ban írt, de nyomtatásban meg nem jelent értekezését a kopernikanizmus ellen, s Galilei egy baráti, de a nyilvánosságnak szánt levélben hosszan válaszolt rá, fizikai érvek – köztük az árapály fizikai magyarázata – alapján cáfolva Ingoli antikopernikánus állításait. Barátjaik nagy tetszéssel fogadták a levelet, ám magának Ingolinak – akinek végül is szánta Galilei – Guiducci nem merte megmutatni, mert úgy hallotta, hogy valamiféle próbálkozások történtek „a Saggiatore betiltatására vagy korrigáltatására, azzal vádolva a könyvet, hogy dicsértetik benne Kopernikusz Föld mozgására vonatkozó doktrínája”. Nagy bajba keveredhettek volna, ha a derék Giovanni di Guevara atya, akinek vizsgálatra kiadták az ügyet, úgy nem ítél, hogy „a mozgás azon doktrínáját, még ha tán tartatik is, ő nem látja kiátkozandónak”. A részletek Favaro alapvető Guiducci-tanulmánya óta jól ismertek, idézik is őket bőven, de mindig a kopernikanizmus vádjával kapcsolatban. De hátha – kérdi Redondi – felületes volt Guiducci, hátha nem járt kellően utána a dolognak, s a Saggiatoré-t följelentő iratban egyáltalában nem is a Föld mozgásáról volt szó? Kétségkívül jogos kérdés, hisz a Saggiatore csakugyan kínos gonddal kerüli a kopernikanizmusnak még a látszatát is. Az aztán már a történész szerencséje, hogy Favaro kutatásai óta a Szent Hivatal levéltárát rendezték, s Redondi megkeresésére nyomban kiugrott a Saggiatore címszónál egy névtelen följelentés, amely csakugyan az atomok – s nem a Föld – mozgására hivatkozó tan miatt tartja a katolikus vallásra veszélyesnek és eretnekségként kiátkozandónak a könyvet, lévén ez a tan a kvalitások realitásának tagadása miatt eleve összeegyeztethetetlen az oltári szentség dogmájával. De ha az eretnekség súlyos és az Egyház szempontjából valóban megalapozott vádja merült fel a könyv ellen, hogyan úszhatta meg büntetés és inkvizíciós vizsgálat nélkül? Hogyan tehette ad acta az ügyet az egyáltalában nem elnézőnek ismert Szent Hivatal? És egyáltalában: kit rejthet a névtelen feljelentés? Ezekkel a kérdésekkel a Galileo eretico legizgalmasabb fejezeteihez érkeztünk.

Redondi mindenekelőtt újraolvastatja és újragondoltatja a jól ismert Guiducci-levelezést. Látjuk, hogyan környékezi meg a ravasz Orazio Grassi a jóhiszemű firenzei ügyvédet – aki maga is jezsuita iskolába járt egykor –, hogy kiszedje belőle Galilei titkolt nézeteit, míg Guiducci gyanút nem fog, s most már ő próbálja kikémlelni a jezsuita szándékait. Megismerjük egyre közelebbről Grassi atyát, ezt a fanatikus, ám szép tehetségekkel megáldott embert, aki vallása és rendje elszánt szolgálatában tán nem kevesebbre tört, mint a nagy Bellarmino halálával keletkezett hiány betöltésére. Ez a szándék adja a kezébe a tollat a Galilei elleni feljelentés megfogalmazására.

Mert a névtelen feljelentést – Redondi ezt számtalan külső és belső érvből szőtt hálóval demonstrálja – minden bizonnyal Grassi atya írta. Galilei mindig is legádázabb ellenségeihez számította őt, de persze a följelentésről nem tudott. A legsúlyosabb vádakat viszont ismerte, hiszen Grassi szinte szó szerint megismételte a Saggiatoré-ra válaszoló Ratio ponderum Librae et Simbellae címen 1626-ban Párizsban megjelent művében. Nyilvánosan is elhangzott tehát az eretnekség súlyos vádja, hogyan lehetséges mégis, hogy a vád nyomán Galileinek haja szála se görbült? Sőt, Galilei és barátai még azt se látták szükségesnek, hogy válaszoljanak.

Fogas kérdés, de csak nekünk. A rejtőzködések ama századában ugyanis egy nyílt denunciálás sohasem ért fel egy titkos feljelentéssel. Azután meg miért Párizsban jelent meg Grassi könyve? Nyilván mert Rómában nem jelenhetett meg. De miért? A válasz persze önként kínálkozik: a „mirabil congiuntura" miatt, a tridentinusnál szabadabb, bensőségesebb katolicizmust kívánó erők időleges előretörése miatt. Redondi itt remekel csak igazán, ahogyan elibénk varázsolja ezt az egész kényes erőegyensúlyt, bemutatja ennek a furcsa római reformkatolicizmusnak a szereplőit, rövid tündöklését és bukását.

Eddig is ismertük persze, kivált Giorgio de Santillana Galilei-kutatásai óta, az 1620-as éveknek ezt a liberális római pillanatát, amikor a Barberini-pápát nagyratörő tervei és francophil politikája – saját érzelmeivel egybehangzóan – az újabb tudományos nézetek protektorává tették. Redondi azonban mást, többet mutat meg. Azt keresi elsősorban, hogy egy ilyen diktatúrában, mint amilyen a pápai volt, miféle esélyei lehetnek az egymással vetélkedő hatalmi csoportosulásoknak az események irányítására, a politikai és az ideológiai irányítás módosítására. A Saggiatore a reformtörekvések manifesztuma volt, szerzője a pápa nem hivatalos filozófusa. Amíg a pápa a reform oldalán állott vagy legalábbis nem ellenezte, Galileinek nem eshetett baja. Ezért küldte ki a pápa a Saggiatore elleni feljelentés kivizsgálására a Galilei híveként ismert s egyébként is a reformhoz húzó Guevarát, ezért nem jelentethette meg Grassi a Saggiatoré-t diffamáló művét Rómában.

De a reform ellen kezdetektől tekintélyes erők tömörültek, Rómában s szerte a katolikus világban egyaránt. Redondi túllát az itáliai belpolitikát hagyományosan megosztó francia–spanyol viszályon, s a Dialogo drámája mögött fölvillantja Európa hatalmas vallási vajúdását a magyar és a cseh végektől az Atlanti-óceánig. A spanyol párt feje, Borgia kardinális eszköze volt inkább, mintsem oka a római krízisnek, melyet a Habsburg és a katolikus érdekek azonosulásával egyre türelmetlenebbé váló régi szigorú vonalnak mindenképpen ki kellett robbantania. A hatalmi mérleg újból és erőteljesen a jezsuiták oldalára billent, Rómában is. A liberalizmus szép napjainak egy csapásra vége. S ha ebben a nehéz pillanatban följelentés érkezik a Szent Hivatalhoz a Dialogo ellen ugyanazzal a váddal, mint néhány éve a Saggiatore ellen, mit tehet most a pápa? Legfeljebb annyit, hogy gyorsan összehív egy különbizottságot, azzal a titkos föladattal, hogy a súlyos eretnekség vádja helyett találjon ki egy enyhébbet: a kopernikanizmus tilalom ellenére való hirdetését.

Így történt-e valójában? Ki tudja? A Dialogó-t följelentő írást nem sikerült megtalálni. A Saggiatore keletkezésének, fogadtatásának, följelentésének meggyőző elemzésével ellentétben Redondi a nagy pör újraértelmezésében merész hipotézisekre és az adatok szokásos történész-manipulálására kényszerül. Cseppet sem valószínű például, hogy VIII. Orbán, ez a kíméletlen és ravasz diktátor csakugyan annyira szívén viselte volna öreg barátja ügyét, mint Redondi föltünteti. És az se hihető, hogy ebben az egész komplikált perben kizárólagosan a római színtér számítana, és – mint ahogyan Redondi teszi – említést se érdemelne Firenze. Az ideológiai frontok se rendeződtek valószínűleg olyan szépen és egyszerűen inkvizitorikus jezsuitizmusra és liberális reformkatolicizmusra, mint ahogyan Redondi ábrázolja. Újabb adatok alapján például úgy látszik, hogy épp a Supremus Inquisitor Generalis, Bentivoglio bíboros igyekezett megvédeni Galileit a pápa ellenében... Ki tudja? Ma még nyilvánvalóan távol vagyunk tőle, hogy tisztán lássuk a nagy pör mozgató erőit, összetevőit, személyes indítékait; meglehet, sohasem fogjuk látni tisztán. A pör államügy volt, hatalma tán leginkább veszélyeztetett pillanatában rendezte meg egy diktatúra elsőrendű politikai mutatványul, afféle hatalomfitogtatás és elrettentés gyanánt. Méghozzá – figyelmeztet folyton Redondi – a titkolódzás nagymestereinek századában! Hogyan remélhetnők hát, hogy világosan átlássunk a hálóján? De mindig előkerülhetnek újabb dokumentumok, és egyre precízebben, egyre nagyobb történeti hűséggel vázolhatók az ügy körülményei, mint például az új tudományos filozófia összeütközése az oltári szentség dogmájával. De megéri-é az efféle obskurus dogmatörténeti körülmények kutatására annyi fáradtságot fordítani, mikor a természettudomány fejlődését csak hátráltatták? Azt igen, feleli Redondi, de föltárnak ezek a kutatások valami mást is, s ezért olyan fontosak. Megértetik és tudatosíthatják, hogy a kutatás és az értelem autonómiája „nem a platóni ideák egéből szállt le a Földre, hanem a XVII. század során kellett kemény küzdelemben kivívni, mint minden más emberi szabadságot. Közkincs, amit meg kell őrizni”.

GALILEI – JEZSUITÁK TANÍTVÁNYA?[2]

„A történelem ismétli önmagát, a történészek ismétlik egymást” – írta 1980-ban, a Nature november 10-i számában John D. Barrow egy jellegzetesen „medium-brow” (azaz amolyan igényes népszerűsítő jellegű) tudománytörténet recenziójában. Úgy látszik azonban, hogy a magasröptű „high-brow” monográfiák esetében sem lehet sokkal jobb a helyzet; kivált a túlontúl szorgosan művelt területeken. „Az az irodalom (írja a *New Perspectives on Galileo* című tanulmánygyűjteményben 1978-ban Peter Machamer), amely Galilei metodológiája, vagy ha úgy tetszik, tudományfilozófiája körül virágzik, hemzseg vagylagos terminusok ismételgetésétől, melyek Galilei művét szükségképpen, illetve nagyobbrészt egy bizonyos típus egyik esetének tekintik. Így Galilei munkásságának a jellemzésére többek között a »Platonizmus – Arisztotelianizmus«, »Matematikai – Experimentális«, »Racionalista – Empirista« kifejezéspárok egyik vagy másik felét használták. Én ellenben ebben a tanulmányban egy olyan nézőpontot választok, amely eltünteti ezeket a vagylagosságokat, ugyanakkor hűségesebb lesz a metodológiai diszkussziók XVI. századi, XVII. század eleji hagyományához. Azt remélem valószínűsíthetni, hogy Galilei ugyan valóban egy tradíció kereteiben gondolkozik, melyet azonban eddig nemigen ismertek fel és épphogy csak elkezdték a tanulmányozását.”

A kevert tudományok (mixed sciences) tradíciójáról van szó, amely éppen azért „kevert”, mert matematikát és fizikát (avagy természetfilozófiát), platoni (vagy neoplatonikus) és arisztoteliánus elemeket, rációt és megfigyelést ötvöző tradíció. Ezt a tradíciót veszi át Galilei a késő XVI. századi gondolkozóktól és ez észlelhető minden munkájában, még az annyiszor tanulmányozott Discorsiban is.

Ne törődjünk vele, hogy tézisét mennyire sikerül igazolnia Machamernek, mennyire nem. (Ha egy tudománytörténet-filozófus valamit igazolni akar, az különben is mindig sikerül neki.) A hosszú idézet egyelőre

[2] Előzménye: Vekerdi László: Galilei – jezsuiták tanítványa? = Természet Világa 124 (1993) No. 10. pp. 447–449.; No. 11. pp. 494–496.

csupán azt a célt szolgálja, hogy bemutassa, a tudós történészek is jócskán „ismétlik" egymást. A „mixed sciences" tradíciója ugyanis (többnyire „scientiae mediae" néven) nagyon régóta és egyáltalában nem csak úgy „alig" volt ismert a tudománytörténet-írásban. A. C. Crombie Grossetestéről szóló könyvében már 1953-ban „platonizmus" és „arisztotelianizmus", „racionalizmus" és „empirizmus", „matematikai" és „kísérleti" épp efféle ötvözetét tartotta a késő XII. és a XIII. századi párizsi, illetve oxfordi filozófia nagy eredményének, ama új és nagy jövőjű irány fő jellegzetességének, amely Arisztotelész Második Analitikájának a megismerése nyomán megkülönböztette „a tények tapasztalati ismeretét a tények okának racionális vagy teoretikus tudásától". Leírja Crombie részletesen (a maga még akkor elég világos értelmezésében) azt a módszert, a regressus, azaz a resolutio-composito módszerét is, amellyel ez az elvi megkülönböztetés praktikus metodológiai eszközzé volt fejleszthető, és amely módszer (különféle és egyre bonyolultabb értelmezésben) akkora nagy szerephez jutott a hetvenes és nyolcvanas évek „Galilei-iparában"; egyebek közt tán azért is, mert nemigen definiálható pontosan és így roppant rugalmasan interpretálható. Majd még (sajnos) kell foglalkoznunk vele, most azonban elégedjünk meg annyival, hogy elsősorban ez a módszer tette lehetővé az arisztotelészi bonyolult okstruktúra lényeges operatív leegyszerűsítését úgy, hogy Galilei (a modern „új Perspektivás" tudománytörténet-filozófusok és tudományfilozófia-történészek Galileije) megteremthette segítségével az újkori fizika alapjait vagy legalábbis csíráját. „Csak ha Galilei egy olyan tradícióból jött – írja Machamer –, ahol ezek az elvek adottnak vétettek, csak akkor érthetjük meg használatukat általa. A vizsgált szövegekből [a Dialogo és a Discorsi szövegrészleteiből] láthatóan ez olyan tradíció, amely elsősorban finális, formális okokkal dolgozik. Olyan tradíció, amely alig alkalmaz extrinsic efficiens okokat (külső hatóokokat). Ebben a tradícióban helye van a tapasztalatnak, de nem követeli meg minden esetben a tapasztalatot. Ez a tradíció a formális okokat matematikai tulajdonságokkal azonosítja, és képes formális okok azonosságát elegendő alapként kijelölni ama tulajdonság középső terminusként való használatára valamely magyarázatban. Ez éppen a »mixed sciences« tradíciója, melyben Arkhimédész, Arisztotelész és Euklidész egyesülnek."

Szinte szóról szóra ugyanezt állapította meg még 1953-ban Crombie a Grosseteste által megalapozott metodológiáról, melynek az volt a feladata, hogy „felfedezze és definiálja oly pontosan, amint csak lehet, azt az eljárást, amely bizonyításhoz vezethetett egy szillogizmus középső terminusa által és így a megfigyelt hatások okainak a megismerésére (propter quid)". Ezzel az eljárással – idézi Crombie Grossetestét – „»megismerszik a dolog természete (Quid est) és eléretik a demonstratív középső terminus«", amely azután „a megfigyelt jelenségek vagy attribútumok

»formális okaként« szolgál, »és megadja a vizsgált konklúzió magyarázatát (propter quid)«”. Ami a formális okok matematikai tulajdonságokkal való azonosítását illeti, Grosseteste – Crombie Grossetestéje – kétségkívül nem megy el addig, mint Machamer; a matematika fizikában játszott szerepének megítélésében ő még Arisztotelészt követi: jóllehet a fizikai világ nem érthető meg matematika nélkül, a geometria nem elegendő a dolgok ontológiai természetének és valódi okainak a definiálására. S bár neoplatonizmusból táplálkozó fénymetafizikájának hatására Grosseteste – Crombie Grossetestéje – hajlott rá, hogy optikájában matematikai tulajdonságokkal azonosítsa a formális okokat, ezt a nagy lépést általánosságban Galileire hagyta: az ő „monumentális változtatása volt, más platonizáló matematikusokkal együtt, mint Kepler, azonosítani a való világ szubsztanciáját a jelenségek leírására használt elméletekben tartalmazott matematikai entitásokkal”. Avagy ugyanezt a „középkori tradíció” nyelvén elmondva a „formális okokat matematikai tulajdonságokkal”, ahogyan Machamer, Galilei műveiből vett példák alapján (a „mixed sciences”-re vonatkoztatva) írta.

Ám létezett már Galilei előtt is egy ilyen explanatorikus-demonstrációs tradíció, amihez néki csak „csatlakoznia” kellett? Létezett az arkhimédészi és az arisztotelészi tradíciók olyan ötvöződése, amely a XVI. században lehetővé tette kvantitatív matematikai tulajdonságok beilleszthetőségét a hagyományos kauzális fizikai magyarázatokba? Machamer magabiztos – bár persze kellően körülményes – igennel felel. Teheti nyugodtan, az utóbbi évtized szaporodó kutatásai alapján, melyek Galilei pisai korszakából származó írásaiban a Collegio Romano professzorainak a hatását, sőt megfogalmazásait ismerik fel, azét a „progresszív arisztotelianizmusét”, amelyben – elsősorban Clavius körében és mintájára – felértékelődött a „mixed sciences” szerepe és a hagyományos arisztotelianizmussal szemben szigorú bizonyításokkal bíró „igazi tudományként” (verae scientiae) ismertettek el. Ez a jezsuita tudományos tradíció Galilei metodológiájának a forrása, ez határozta meg későbbi nagy műveiben is tudományról alkotott képét, a tudományos bizonyításról vallott felfogását. Kissé sarkítva: ebben az „új perspektívában” Galilei a jezsuiták áldozatából, legalábbis filozófiája tekintetében, követőjükké, sőt hűséges tanítványukká változott. Azaz arisztoteliánussá, ha persze nem is ortodox peripatetikussá. És éppen a tudománya tette azzá, a tudománya, melynek újságára annyira büszke volt, amely azonban módszereit, bizonyítási eljárásait, egész ideálját tekintve végestelen végig arisztoteliánus maradt. Galilei, aki a XVIII. és XIX. század gondolkozóinak az arisztotelianizmus lerombolójaként vagy legalábbis ellenségeként jelent meg, napjainkra lassan belesimult az arisztoteliánus módszerek hosszú történetébe? De melyik Galilei, és melyik arisztotelianizmuséba?

Mert bár maga Arisztotelész nagy véleménnyel volt a matematikáról, s megismerésről vallott nézeteire – Tóth Imrétől tudjuk – még annál is erősebben hatott, mint általában hiszik, a fizikában, a természetfilozófiában nem tartotta használhatónak.

Legpontosabban tán, de mindenképp legérthetőbben Fehér Márta fogalmazta meg ezt, Galilei demonstratív tudomány-ideálját vizsgáló okos dolgozatában: „Jól tudott, hogy Arisztotelész nem helyeselte a matematika használatát konceptuális eszközként a természet tudományában, mivel önmagának való tudománynak tartotta, amely ideális (örök és változhatatlan) matematikai objektumokkal dolgozik, nem pedig (véges és változó) valóságos objektumokkal. Amint a Metafizikában mondja: »Nem mindenben demonstrálható matematikai pontosság, csak olyan dolgokban, amelyekben nincsen anyag. Ezért ez a (matematikai) módszer nem a természettudományoké, mert feltehetően minden természet matériával áll vonatkozásban.« Megengedte ellenben a matematika használatát az úgynevezett mixed sciences-ben, mint amilyen az asztronómia, a mechanika, az optika és a harmonisztika, de ezekben is csupán a számítás és nem a bizonyítás vagy magyarázat eszköze gyanánt. Így hát a matematikát (geometriát) Arisztotelész a valóságos természeti jelenségek vizsgálatában (többé-kevésbé) inadekvát konceptuális eszköznek tartotta, amelynek az alkalmazásával épp a természeti jelenségek legsajátosabb jellegzetessége vész el.”

Azt, hogy mit tartott Arisztotelész a természeti dolgok legsajátosabb jellegzetességének, nem lenne könnyű megmondani. Szerencsére nincsen is rá szükség, mert (bár valószínűleg épp ezen a ponton lenne relevánsan vizsgálható a kora újkori tudomány viszonyulása az arisztotelianizmushoz) a modern kutatások inkább Galilei metodológiájára, a tudományos bizonyításról és általában a tudományról vallott felfogására, mai szóval (és nem kevés anakronizmussal) tudományfilozófiájára vonatkoznak. Tudományelméletek és tudományfilozófiák nagy előretörése idején ez a tudományfilozófia-történeti érdeklődés tán természetes; már Crombie elsősorban ebből a szempontból vizsgálta Grossetestéjét, de akkor még – Koyré hatása alatt is tán – Galileijét épp matematikára alapozó valóságképe miatt kiemelte az arisztoteliánus tradícióból. „Arisztotelész ama elképzeléséből, hogy létezik a matematika hatáskörén kívül valamiféle »fizika« mint tudomány, Galilei kiküszöbölte a legrosszabb kellemetlenségeket azáltal, hogy ama fizika által posztulált szubsztanciákat és okokat merő nevekké deklasszálta.” De már ekkor inkább csak rövid kivételes pillanatnak tekintette Crombie Galilei matematikai ontológiáját, s úgy látta, hogy már Newton ismét élesen megkülönbözteti a matematikai leírást a fizikai valóságtól, s matematikai módszere lényegében ugyanúgy viszonylik a megfigyelésekhez, mint a latin Arisztotelész-kommentátoroké. „A magyarázó erő hatalmas növekedése ellenére, melyet az új matematika hozott a XVII. században, a kísérleti tudomány problémái és logikai struktúrája lényegében ugyanaz maradt modern történetének valami négy évszázaddal korábbi kezdete óta.” Ugyanaz: azaz arisztoteliánus. Lényegében ez már az „Új perspektíva”, már csak be kellett ide illeszteni, és az egész folyamat töretlen metodológiai kontinuitását dokumentáló filozófussá kellett varázsolni Galileit. Vélekedjék az eredményről az ember bármiképp, kétségtelen, hogy ez az egész XX. századi historiográfia legérdekesebb vállalkozásainak egyike volt.

Több gyökérből is táplálkozott a nagy vállalkozás; a legfontosabbnál mások mellett megint Crombie nevével találkozunk. Mint mindenütt, itt is mély a történelem kútja, de hát minden mesét el kell kezdeni valahol, s tán nem egészen indokolatlan abból kiindulni, hogy a század közepén a renaissance filozófia újrafelfedezésével és újraértékelődésével jócskán megnövekedett az itáliai renaissance gondolkozók, kiváltképpen a firenzei humanizmus és a padovai arisztotelianizmus tekintélye és jelentősége. 1940-ben, egy épp akkor induló és hamar igen tekintélyessé növekedett eszmetörténeti folyóirat hasábjain John Herman Randall Jr. egy azóta is gyakran idézett tanulmányban vélt szoros szálakat szőhetőnek Galilei tudományfelfogása és bizonyítási módszere meg a „padovai averroizmus”, kiváltképp Giacomo Zabarella (1532–89) logikája között. A háború után Randall Ernst Cassirer-rel és Paul Oscar Kristeller-rel együtt jegyzett egy válogatást renaissance filozófusokból, s a bevezető esszé külön kiemeli az itáliai „kritikai arisztotelianizmus” szerepét „a tudományosan orientált filozófiai gondolkozás” kifejlődésében. Egészen Galilei napjaiig – hangsúlyozzák – Padova Európa vezető egyeteme, az arisztotelészi kvalitatív fizikai gondolkozás fellegvára s nevelője azoknak, akik mint Galilei, elhagyták ezt a szemléletet. De ha fizikájában nem is, filozófiájában maga Galilei is végig az itáliai arisztotelianizmus keretei között marad. Zabarella e téren a mestere, aki logikájában „tökéletesítette elődei metodológiai javításait és készen adta át a módszereket Galileinek”. A platonizáló és miszticizmusba hajló firenzei humanizmussal szemben ezt a padovai arisztotelianizmust racionalista, naturalista, világias, sőt antiklerikális tendenciák jellemezték; Randall Galileije tehát jóllehet „arisztoteliánussá” változott, XVIII. és XIX. századi „felvilágosultságát” és „liberalizmusát” még nem veszítette el. Ilyenként mutatta be népszerű életrajzában Ludovico Geymonat.

Ám meddig lehet ép jégre metszett kép? A padovai arisztotelianizmust kiválóan ismerő Bruno Nardi mindig is erélyesen tiltakozott Zabarella-hatások sejtése ellen Galilei műveiben; William F. Edwards pedig, aki Zabarella logikájáról írta doktori disszertációját, megvizsgálta Galilei fiatalkori filozófiai traktátusait és úgy találta, hogy bár nem kevés helyen hasonlítanak Zabarella téziseihez, sem a kifejezések, sem a megfogalmazás nem egyezik annyira, hogy közvetlen hatásról vagy pláne átvételről beszélhetnénk, lévén amúgy nagyon is széleskörűen elterjedt eljárásokról szól, mint például a regressus széltében-hosszában és ezernyi apróbb-nagyobb változatban pertraktált módszere. A hatvanas évek végén azután Adriano Carugo, a Discorsi mintaszerű kritikai kiadásán megedződött szemmel, azonosított Galilei latin nyelvű fiatalkori természetfilozófiai és metodológiai traktátusainak a forrásaiból kettőt Benito Pereira és Franciscus Toletus jezsuita atyák munkáiban. 1971-ben pedig Crombie a Collegio Romano még egy professzorára mutatott rá forrásként: Claviusra. Itt kapcsolódott a munkába William A. Wallace, aki a következő két évtizedben példátlan szorgalommal, leleményességgel és erudícióval tárta fel Galilei logikai, bizonyításelméleti, metodológiai, természetfilozófiai nézeteinek jezsuita forrásait.

A hosszú és bonyolult kutatás összegezéséül is tekinthető akár, ahogyan legutóbb Wallace Galilei (egész „módszeréhez” inkább, mintsem csupán) ifjúkori arisztoteliánus Logikai traktátusai-hoz fűzött (vaskos kötetté dagadt) kommentárjáról megjegyzi: „Végtére is könyvem centrális felismerése meglehetősen egyszerű: A Collegio Romano jezsuita atyáinak az előadási jegyzetei révén jutott Galilei a Padovai Arisztoteliánusok demonstratív regressusához, amelyet azután az asztronómia és a mechanika megszülető tudományában őáltala felfedezett új jelenségek kauzális magyarázatára alkalmazott. Galilei úgy érezte, hogy ezek a magyarázatok igaz és biztos tudásra vezetnek, ugyanolyan igaz és biztos tudásra, mint a természet világában szerzett köznapi tapasztalataink. Többnyire napjai »mixed science« tradíciójának matematikai és fizikai érvelést nyíltan kombináló módszerével dolgozott.” Ez a felismerés – véli Wallace – egy csapásra megoldja a bizonytalanságokat és talányokat, amelyek Vivianitól napjainkig zavarták a tudománytörténészeket. Ugyanis „a rejtvények mindig titokzatosak azoknak, akiknek nincs hozzájuk kulcsuk”; ilyenkor a megoldók óhatatlanul bonyodalmakat teremtenek a kulcs keresésében. Így Galilei esetében voltak, akik őt empiristaként jellemezték, és nem vették észre gondolkozásának racionalista elemeit; mások ellenkezőleg: platonistát faragtak belőle, figyelmen kívül hagyva ragaszkodását a megfigyeléshez és a kísérlethez; megint mások ingadozni látják racionalizmustól empirizmusig és szkepticizmusig és vissza racionalizmusig; akadnak, akik kanti keretekbe próbálják gyömöszölni; végül vannak, akik kétértelműséggel és következetlenséggel vádolják, mivel makacsul ragaszkodott a tudomány olyan ideáljához, amelyet ők az ember által örökké elérhetetlennek tekintenek. Ám Galilei ezen jellemzések egyike szerint sem tudta volna látni magát. Logikai metodológiáját világosan kifejtette egyik első jegyzetfüzetében, és ami még figyelemreméltóbb, újra megerősítette egyik utolsó levelében. Megtalálva a rejtvény utolsó darabját, jelen esetben az MS 27-et, nyomban érthetővé válik életműve, valamint helye a tudományos gondolkozás történetében.

„MS 27” Galilei logikai és bizonyításelméleti kéziratainak a jelzete a

Firenzei Központi Nemzeti Könyvtárban; utolsó leveleinek egyikében pedig, 1640. szept. 14-én azt írja egy tudományos kérdésben hozzá forduló szigorúan arisztoteliánus, ám amúgy jószándékú természetfilozófusnak, Fortunio Liceti-nek, hogy ő is Arisztotelésztől tanulta a logikát, a következtetés művészetét, a bizonyítás biztosságát, s e tekintetben máig peripatetikusnak vallja magát. „Nem túlzott elvárás talán – írja Wallace az MS 27-et a kor jezsuita skolasztikájában elhelyező vaskos kötetéről – értékét azon lemérni, hogy mennyire segíti Galilei eme testamentumának készpénzként való elfogadását.” Mert csak ez adhatja meg a kulcsot a fenti vagylagos bonyodalmak feloldására. Hiszen ha a „mixed sciences” peripatetikus tradíciója alapján „meg tudnánk érteni, miként következhet a Hold fázisainak gondosan elemzett megfigyeléséből az az apodiktikus [tökéletesen bizonyos] tudás, hogy egy olyan távoli tárgy, mint a Hold, gömb, akkor semmi nehézséget nem okoz elfogadni azokat a meglepő magyarázatokat, amelyeket Galilei adott a távcsövén látottakra: hegyek a Holdon, más holdak keringése a Jupiter körül, a Vénuszé a Nap körül. És ugyanezen geometriai-fizikai típusú bizonyítás, a regressus modellbe illő arkhimédészi típusú suppositiókra alapozva, tette képessé Galileit, hogy túllépjen a régi statikán egy új kinematikához vagy dinamikához, amely a lokálisan mozgó vagy nyugvó testek váratlan tulajdonságait bizonyította.”

Azaz „módszer” tekintetében, hála a jezsuita atyák „mixed science” tradíciójának és demonstratív regresszusának, tökéletesen helyreállott a tudományos gondolkozásban a kontinuitás. Artisztotelész az új természettudományokban is megmaradhat „a tudományos gondolkozás atyja”, és Wallace-nak nem okoz nagyobb nehézséget átírni Galilei nagy felfedezéseit, a Jupiter-holdakét például, vagy az időnégyzetes törvényét szabályos peripatetikus regresszusokba, a Collegio Romano progresszív peripatetizmusa, elsősorban Paulus Vallius 1587–88-as logikai kurzusa és későbbi könyvei alapján.

Ám aki nem jártas a modern és posztmodern peripatetizmusokban, aligha tudja könnyen követni vagy pláne elfogadni Wallace átírásait; nem lehet elkülöníteni, hol érvel Vallius-Wallace és hol Galilei. Meglehet, Wallace kulcsa végül is ugyanúgy álkulcs, mint a többieké; meglehet, igazi kulcsot a rejtélyhez – hacsak nem peripatetikus az ember – nem is lehet találni? A kérdés az, hogy miként vált Galilei – Wallace Galileije – „módszer” tekintetében Arisztotelész és a jezsuita atyák hűséges tanítványává.

Mint annyiszor a modern tudománytörténet-írás történetében, most is Koyrétól kell kiindulni.

„Koyré – írja Wallace – jó szövegelemző volt, s szépen és meggyőzően írt; gondosan megvizsgálta Galilei ingákkal és lejtőkkel végzett kísérletekre hivatkozó eredményeit, és meggyőződött róla – s vele együtt sok olvasója –, hogy Galilei tudománya nem empirikus megalapozású volt, hanem lényegében saját intellektuális meglátásából fakadt. Az írásaiban említett kísérleteket vagy gyatrán, vagy egyáltalában nem végezte el, hiszen a nekik tulajdonított eredmények nem igazolhatók, szögezte le Koyré.”

*

Az antiempirikus, szélsőségesen racionalista Galilei-képet felvázoló Koyré-könyv óta – elsősorban kéziratos kutatások alapján – kiderült, hogy Galilei nagyon is elvégezte a kísérleteket, mégpedig meglehetősen pontos mérésekkel és eredményekkel. De Galilei empirizmusa nem a XIX. századi természettudományé volt, nem pozitivista és nem hipotetiko-deduktív módszer. Merőben más módszertani keretbe illettek az ő kísérletei, amint azt a középkori, a skolasztikus és a renaissance gondolkozásba magukat beásó tudománytörténészek időközben kiderítették, illetve kideríteni vélték.

Akárcsak Crombie, Wallace is Koyré tanítványa volt, a franciából princetonizálódott mesteré, aki egy egész tudománytörténész-nemzedéket tanított meg a forrásokat úgy olvasni próbálni, mintha szerzőik kortársaink lennének. Ez persze lehetetlen: az ember nem bújhat ki a saját korából, de az erőfeszítések újszerű és teljesebb interpretációk végtelen lehetőségét nyitotta meg invenciózusabb történészek előtt. Wallace a hatvanas évek végén Domingo de Soto titkát – Koyré-téma volt ez is – kutatta: miként fedezhette fel a Párizsban tanult spanyol dominikánus professzor fél évszázaddal Galilei előtt a szabadesés időnégyzetes törvényét, pontosabban – korhű olvasatban – miként jutott arra a gondolatra, hogy a mertoni középértéktétel segítségével értelmezze az uniformiter difformis (egyenletesen növekvő vagy csökkenő) változást, és ezt éppen az egyenletesen gyorsuló mozgással példázza. A rendkívül bonyolult, részben korhű, részben modern jelölésekkel és fogalmakkal dolgozó eszmetörténeti rekonstrukcióban a kulcsszerep a XV. század végi–XVI. század eleji párizsi egyetemnek jut, ahol a Johannes Maior körül felvirágzó késő skolasztikus szinkretizmusban nominalista logikai módszerek keveredhettek realistább tendenciákkal, amelyek a megokadatolt tények (propter quid magyarázatok) tudományára (vera scientia) törekedve tényleges jelenségekre igyekeztek alkalmazni az oxfordi kalkulátorok absztrakt sémáit, mindenekelőtt a mélységében elemzett változáskategóriákat, s egyebek közt az uniformiter difformis változásra érvényes középértéktételt. A spanyol dominikánustól aztán természetesnek tűnhetett meglelni az utat a Collegio Romano részben szintén Hispániából származó professzoraihoz, kivált Wallace-nak, akinek a hetvenes évek elején jelent meg nagy műve a kauzalitás szerepéről a természettudományos magyarázatban, a középkort és a kora újkort tárgyaló első kötet 1972-ben. Ebben a veretes, nehéz tudományfilozófiai és neothomista elemzésekkel teljes monográfiában Wallace a korabeli források korhű – azaz arisztoteliánus – értelmezésére építve fejtette ki, hogy az új természettudomány – ellentétben Duhem tézisével – nem az arisztotelészi okok elhagyásával, hanem éppen mélyebb értelmüknek a megértésével és kibontakozásával fejlődött ki, épp így válhatott alkalmassá a matematika integrálására a fizikai magyarázatokba. „Arisztotelész XVI. századi követőinek nem az volt a hibája, hogy okokat kerestek, hanem az, hogy túlságosan hamar föladták a keresést és megtorpantak az »igazi okok« előtt, amiket majd csak az »új tudomány« kezd föltárni, amelyre végül Galilei jutott." Galileinek pedig a jezsuita filozófiaprofesszorok közvetítették azt a módszert, amely lehetővé tette, hogy az „igazi okokig" hatoljon. Ez nyomban világossá vált, mihelyst Adriano Carugo, majd Crombie fölismerte, hogy Galilei fiatalkori latin nyelvű logikai, metodológiai, természetfilozófiai traktátusai a Collegio Romano professzorainak, név szerint Benito Pereira, Francisco Toletus és Clavius lekcióit követik, s ugyanerre a meggyőződésre jutott Wallace. Keletkezett is ebből – ha nem is prioritásharc – egy kis kölcsönös neheztelés és szemrehányás, de hamar elsimult, hisz végül is Wallace és Crombie a kérdés más-más részletében találta meg igazi kutatási területét.

Wallace mindenekelőtt ragyogó mikrofilológiai vizsgálódások sorával igazolta, hogy Galilei természetfilozófiai és logikai traktátusai semmi esetre sem olyan értelemben Juvenilia, ahogyan Antonio Favaro értette az Editio Nazionale-ban. Ezek az írások nem 1584-ben keletkeztek és nem kijegyezte vagy éppen másolta azokat ifjú egyetemi hallgatóként Galilei, hanem jóval később, 1590 körül állította össze immár fiatal pisai professzorként, források alapján és gyakran meglehetősen ragaszkodva hozzájuk, de saját szempontjai szerint és saját jellegzetes (a forrásainál lényegesen egyszerűbb, primitívebb) latinjában. Így ezek joggal tekinthetők saját műveinek, s bármi is volt velük a célja (a matematikainál jobban fizető és nagyobb presztízsű filozófiai katedrára pályázott, netán Clavius megbecsülésére, vagy egyszerűen épp ezek a kérdések érdekelték?), érvényesen és sajátjaként vállaltan utalnak arra a filozófiai irányzatra, ami szerint tájékozódott. Wallace lépésről lépésre haladva az írások forrásainak földerítésében, rekonstruálta ezt az egész irányzatot, a Collegio Romano professzorainak progresszív arisztoteliánizmusát. Bőven volt miből, mert a jezsuita professzorok általában nem tanítottak egy helyütt sokáig: a Collegio Romanóban professzorok hosszú sora tanított logikát és természetfilozófiát a XVI. század második felében. Ezen időszakban „a Collegio Romanóban hároméves ciklusokban folyt a filozófia tanítása: az első évben a logikáé, a másodikban a természetfilozófiáé, a harmadikban a metafizikáé. Általában az a professzor vitte a másik két évben tovább az osztályt, aki elkezdte tanítani az első évben. Így folytonosabb lehetett a kurzus, és a professzor is bepótolhatta azt, ami az előző évben esetleg kimaradt. Matematikát általában a második évben tanították, és ez a többletteher a sok természetfilozófiához járulva azt eredményezte, hogy az utóbbi disciplinából sok átcsúszott a harmadik évre. Valószínűleg minden kurzushoz voltak tankönyvek, de a legtöbb professzor saját előadási jegyzeteit részesítette előnyben, és ezekről készült reportationes írására biztatta a hallgatókat, személyes használatukra. A jezsuita diákoknak külön időt hagytak – professzoraik jegyzeteire és egyéb forrásokra hivatkozó – jegyzetek készítésére. Valószínűleg a legtöbb professzor kurzusa befejeztével a Collegio könyvtárában helyezte el előadásainak végleges változatát. Ha csakugyan így történt, az ilyen kódexek ismételt másolása megmagyarázhatja a Collegio Romano előadásairól készült reportationes feltűnően nagy számát szerte Európa könyvtáraiban".

A professzorok névsorát az 1559–1560-as tanévtől az 1597–1598-asig csaknem hiánytalanul összeállító táblázatból egyebek közt kiderül, hogy míg a logikai, természetfilozófiai és metafizikai kurzusokat csaknem mindig új professzorok tanították, a matematikait, ami akkor Euklidészt, a ptolemaioszi asztronómiát és az optikát jelentette, csaknem mindig Christopher Clavius tartotta. Clavius nagy tekintélyét tekintve ez tán önmagában is a matematika jelentőségének a megnövekedésére utal a rend curriculumában, s ha még azt is figyelembe vesszük, hogy Clavius a matematikának alárendelt tudományokat, a mixed science-ket, amilyen az optika, az asztronómia, a mechanika, teljes értékű bizonyításra képes vera scientianak tekintette, akkor gyanítható, hogy a Collegio tantárgyszerkezete felelhetett meg legjobban a kor általános felsőoktatási igényeinek, vagy legalábbis ez követhette leginkább a természettudományok korabeli növekvő fontosságát. Jó szemmel vette mintául Pázmány Péter a nagyszombati egyetemhez, s Galilei, fiatal pisai professzorként, hová is fordulhatott volna egyebüvé? Netán a sokkal elmaradottabb pisai egyetem reformjára gondolt? Vagy csak afféle levelező hallgatóként – mint Wallace véli, Clavius biztatására és segítségével – kívánta kitanulni a Collegio kurzusait?

A természetfilozófiához több professzor könyvét, illetve kéziratos reportatióját használta. A kéziratos jegyzeteket Claviustól kapta, mikor 1587-ben felkereste Rómában. Claviusnak Sacrobosco Spherajához írt kommentárjaiból többnyire szó szerint idéz Galilei. A többiek esetében nehezebb kinyomozni a hatást, de Wallace sorra azonosította vagy valószínűsítette a forrásokat, s 1977-ben kiadta Galilei természetfilozófiai jegyzeteit angol fordítással, filológiai és életrajzi jegyzetekkel. A könyv túlságosan nagy feltűnést nem keltett. Arisztotelész Fizikájához, De caelo-jához, De genaratione et corruptione-jéhez, Meteorológiájához írt Galilei kommentárokat, mintáihoz hasonlóan, első látásra a szokásos formában és szellemben, ezért is gondolhatta Favaro, hogy tán pisai egyetemi hallgató korában jegyezhette le professzora előadásait.

Tüzetesebb vizsgálódással persze itt is találhatók eltérések a szokványos Arisztotelész-kommentároktól, az igazi feltűnést azonban a logikai kérdések vizsgálata jelentette. Itt azonban a források kérdése nehézséget okozott. Azt már Carugo észrevette, hogy Galilei logikai kérdései igen hasonlítanak Ludovicus Carbone perugiai professzor Additamenta ad commentaria D. Francisci Toleti in Logicam Aristotelis című könyvéhez. Franciscus Toletus a Collegio Romano legelső filozófiaprofesszorainak egyike volt, az 1559–60-as tanévben adott elő logikát, logikai kurzusa 1576-ban nyomtatásban is megjelent Velencében, s aztán sokszor újranyomták. Toletus kétségkívül szolgálhatott forrás gyanánt Galileinek is, de az Additamenta nem, hiszen 1597-ben jelent meg Velencében. Wallace azonban észrevette, hogy a Collegio Romano egyik jeles professzora, Paulus Valla (latinos nevén Vallius) 1622-ben Lyonban megjelent kétkötetes Logikájának az előszavában céloz rá, hogy valaki csekély változtatással kiadta harmincnégy évvel ezelőtt, azaz 1588-ban tartott logikai Introductióját a saját neve alatt, s a második kötet előszavában újból megjegyzi, hogy logikai kurzusának több fejezetét kiadta ugyanez a valaki Toletus logikájához írt Additamenta formájában. Ez a valaki nyilvánvalóan csak Carbone lehet, és ahogy ő hozzájuthatott Valla 1587–88-as logikai kurzusának a kéziratához, miért ne juthatott volna ugyanúgy hozzá már 1589-ben Galilei? Wallace gondos filoszhoz illően természetesen átnézte a többi professzor megmaradt nyomtatott vagy kéziratos lekcióit is. „Ámde annyi sok hasonlóság akad Galilei jegyzetei és a Valla 1587–88-as előadásaiból Carbone által plagizált anyag között, hogy nem látszik szükségesnek tárgyalni ezeket a lehetőségeket.” Elegendő Valla-Carbone és Galilei összehasonlítására szorítkozni. A hasonlóság olykor tényleg elég nagy, ám közvetlen bizonyíték nincs, mert a kézirat, amiből Wallace szerint mind a ketten dolgoztak, nincsen meg. Így aztán Crombie merő spekulációnak tekinti Wallace rekonstrukcióját, s mások se igen fogadják el.

De annyi kétségtelen, hogy Galilei a Collegio Romano logikáját dolgozta fel magának. Ugyanazok a fogalmak és eljárások kerülnek elő nála, mint a jezsuita professzoroknál, s ugyanaz a tudománykép, ugyanaz a Második analitikára támaszkodó bizonyításelmélet. Így például a demonstratív regressus lehetőségének a kérdése az Additamentában ugyan nem szerepel, de Valla Logikája részletesen tárgyalja. „A kérdés egy korábbi expozíciója található Toletus logikai szövegében, lényegesen rövidített formában, és minden jezsuita, aki csak tanított a Collegio Romanóban, áldozott időt rá – és mind a lehetősége mellett foglalt állást, akárcsak Galilei.” Arisztotelésztől származik az a nem tökéletesen záródó körkörös bizonyítási eljárás, „amelyben olykor a konklúzióból egy quia demonstrációval a premisszákra lehet következtetni, és aztán ugyanazt a konklúziót le lehet vezetni a premisszákból egy propter quid demonstrációval – egy kétszeres progressus vagy két progressio, amely demonstratív regressus néven vált ismertté”. Sokan, Avicenna nyomán, tagadták a lehetőségét, de a jezsuiták a padovai averroista tendenciájú arisztoteliánusokat – mindenekelőtt Agostino Nifot és Jacopo Zabarellát – követve a regressus lehetősége mellett törtek lándzsát. „Galilei nem említi a tradíció forrását, csupán magának Arisztotelésznek tulajdonítja, de Valla teljes elismeréssel idézi Zabarellát, és aligha kétséges, hogy végső soron Galilei érvei is ettől a szerzőtől származnak."

De miért kellett volna Galileinek Zabarellát idézni, mikor lényegében ugyanezt a módszert már Grosseteste alkalmazta? A resolutio és compositio módszere – ahogyan ő nevezte – Arisztotelész nyomán felállított különbségre alapul egy tény empirikus tudása (demonstratio quia) és a tény okának elméleti vagy racionális tudása (demonstratio propter quid) között. Ezzel a módszerrel – összegez Crombie – „Grosseteste megmutatta, hogyan lehet felfedezni a megfigyelt események vagy attribútumok formáját, formális definícióját vagy »formális okát«. Így »a definíció, vagyis ami maga a dolog, ezekből a quidditásba belépő tulajdonságokból tevődik össze, és megfordítható (convertibilis)«, és a »quidditás«, vagyis a dolog természete az oka a tények empirikus kapcsolatának. Ennek a »formának« vagy »természetnek« a definíciója aztán középső tag lehet egy demonstratív szillogizmusban", azaz egy propter quid bizonyításban. Vagyis a compositio az általánostól a partikuláris felé halad, a resolutio a partikuláristól az általános felé. A compositio a leguniverzálisabból, a legegyszerűbből indul ki, és differenciáló attribútumok hozzáadásával halad a partikuláris és összetett felé. A resolutio fordítva halad. A két progressio együtt szolgál bizonyítás gyanánt.

Nagyon hasonló, csak kauzálisra átfogalmazott és sokkal bonyolultabb (hiába, az ötvenes évektől sokat fejlődött a szakma!), ahogyan Wallace Galilei regressusát rekonstruálja: „A regressusban szereplő első progressusban ok és hatás külön értődnek és nincsenek formálisan viszonyítva, és így lehetséges a hatás ismerete az ok nélkül; ha ez az eset, a hatás létezése használható az ok létezésének a bizonyítására. És megint csak, ha az ember felfedez egy okot, nem kell ezt pontosan viszonyulni látni valamely hatáshoz, ámde vizsgálódva rájöhet az ember, hogy szükségszerűen összefügg valami addig nem ismerttel vagy fel nem ismerttel. Ha ez történik, készen áll az ember a regressusban szereplő második progressusra, mert ekkor az újonnan felderített ok egy propter quid demonstráció alapjául szolgálhat". Azaz Galilei az 1589-ből származó logikai kérdéseiben a regressus lehetőségét két progressus kapcsolatában látja: „az egyik egy hatásból-okra érveléssel dolgozik és egy demonstratio quia formájában fogalmazódik meg, a másik egy okból-hatásra érveléssel következtet és egy propter quid demonstrációban jelenik meg. Ezt a metodológiát alkalmazva a matematikai fizika bonyolultabb problémáira, Galilei újítása lényegében az első progressusban lokalizálható. Ez szolgálna suppositióinak és közelítő elveinek a biztosítására, és így azt az alapot adhatja, amelyre felépítheti második progressusát a nuova scienzaját alkotó tételek és propozíciók formájában”. Azaz kísérletekkel, megfigyelésekkel és rengeteg töprengéssel Galilei – Wallace Galileije – a partikuláris tapasztalatokból eljutott valami általánosig és egyszerűig, amiből azután levezethette a kísérletesen jó megközelítéssel igazolható vagy egyszerűen evidens tételeit. Ezért jegyzi meg a könyvről írt recenziójában Winifred L. Wisan, hogy lám, végül Wallace visszatért az általánosan elfogadott nézethez. „Azaz a mechanikában (ideálisan) közvetlen tapasztalatból kell megismerni az alapelveket.” De nincs egészen igaza. Wallace nem egyszerűen ismétel. A jezsuita professzorokon keresztül Zabarella regressusához visszahajlítva Galilei bizonyítás-felfogását, Wallace egy – Horányi Özséb kifejezését és fogalmát alkalmazva – „symbolikus aktus”, a bizonyítás-aktus „sikerfeltételeit” fogalmazza meg és írja körül. Jó neotomistaként, hiszen éppen efféle feltételek analízisével és rendszerezésével foglalkozott mindig is az arisztoteliánus logika. Sikerült így bekapcsolnia Galileit az „örök arisztoteliánizmus” nagy áramába? Bizonyos mértékig igen. Hiszen Galilei csakugyan rengeteg partikuláris megfigyelés, kísérlet és spekuláció útján jutott el egy általános elvig, amiből aztán számos tétel és állítás levezethető volt, s megint rengeteg szellemes kísérlet, mérés és nehéz fogalomcsiszolás árán egy másik, még általánosabb és egyszerűbb elvig, amiből aztán maga az előbbi elv is levezethető volt. Csak éppen ez az általános elv nem holmi bizonytalan valami volt többé, nem forma, nem finális ok, nem is egyszerűen elv, hanem konkrét kvantitatív ráció, azaz arányosság út és idő, illetve sebesség és idő között: az első progressusban az időnégyzetes törvény, illetve a „sebesség-arányos-az-idővel” összefüggés, melyek azután rációi, azaz ha úgy tetszik, „okai” gyanánt szolgálhattak a második progressusban a megfelelő propter quid bizonyításoknak. A nagy, a cseppet sem arisztotelészi tett ennek a két rációnak a felfedezése és egymásra vonatkoztatása volt. Ez és csak ez tette lehetővé, hogy a mozgásjelenségek meglepően nagy és bonyolult köre kvantitatíve (tehát mérhetően) levezethető legyen egy olyan egyszerű összefüggésből, hogy az egyenletesen változó mozgásban a sebesség egyenesen arányos az idővel. Ehhez persze előbb meg kellett tudni pontosan mondani, hogy mi az a sebesség, és meg kellett sejteni változók közötti összefüggések összefüggésének a levezethetőségét egymásból (mai szóval az „infinitézimális kalkulust”), ez azonban már más történet. Itt csak azt kell kiemelni belőle, hogy mindezt a jezsuita professzoroktól megtanulni nem lehetett. De ez nem föltétlenül jelenti azt, hogy veretes arisztoteliánus traktátusaik ifjonti áttanulmányozása Galileinek merő haszontalanság lett volna. Amint Horányi Özséb írja: „A sikerfeltételek nem szükségszerűen függetlenek egymástól: köztük különböző logikailag leírható viszonyok lehetnek”. A maga módján nem épp ilyesmi leírásával kísérletezik Wallace? És (részben más logikai viszonyokkal) a Galilei-kutatás új perspektíváit művelő egész metodikatörténet-írás és tudományfilozófia-történet-írás? Annyi mindenesetre bizonyosnak látszik, hogy a Collegio Romano nagy felsőoktatási reformja, forradalma nem volt közömbös az újkori gondolkozás kialakulása szempontjából. És degradált formában, többnyire csak káros vonásaiban, politikává szekularizáltan, még mintha ma is itt kísértene a nagy Rend konok küldetéstudata, önelégültséggé torzult magabiztossága, türelmetlen térítőkedve, valóságot látszattal keverő propagandakészsége.

Nem hiába emeltek maguknak Róma szívében olyan hatalmas épületet, hogy két térre és két utcára néző négyszögében ma kényelmesen elfér az E. Q. Visconti Lyceum, a Biblioteca Nazionale hivatala, a Centro Nazionale d'informazione bibliografiche, Lazio és Umbria tartomány bibliográfiai felügyelősége, s jut hely még az Agrárökológia központjának is. És persze a tömb északnyugati sarkában az impozáns Szent Ignác székesegyháznak, ami Galilei nagy ellenfelének, Orazio Grassi atyának a tervei szerint és részben vezetése alatt épült 1562-től. 1650-ben szentelték fel a pápa jelenlétében, aki külön gratulált az építésznek. Aki különben nem lehetett végig jelen az építkezésnél, őt is száműzte VIII. Orbán Galilei elleni haragja, csak 1645-ben térhetett vissza Rómába, rendbe tenni a nélküle alaposan elrontott építkezést. Az általa tervezett emeletes ablakos kupola, ahol áramolnia kellett volna befelé a fénynek, így sem készülhetett el. Helyére 1685-ben festett álkupolát Andrea Pozzo a Jézus Társaságának univerzális diadalát ábrázoló ravasz perspektívájú freskóval. Ma kimerevedett nyakkal bámulják a turisták: mennyivel magosabbnak látszik, mint amilyen, egyenesen az égbe látni rajta át! A tervezett kupola egyik testes tartópillérére a racionális XIX. században csillagvizsgálót építettek. Maga a templom a valódi kupola hiányában homályos, titokzatos, sötét; pengeszerűen vágják át a homlokzat felől beszabaduló fénysugarak a hatalmas főhajó aránytalanul nagy terét. A keleti oldal középső kápolnájából szúrós szemmel nézi az embert Roberto Bellarmino kardinális, a nagy rend vezérlő teológusa, a tridenti intranzigencia kérlelhetetlen, de nemes szívű őrizője. A sekrestyében mindössze ötszáz líráért árulja a képet egy reszkető kezű vénséges vén padre. Olcsó: biztos nem épp Bellarmino kardinális portréját keresik nála általában.

JEGYZETEK GALILEI MECHANIKÁJÁRÓL[3]

Galilei neve elválaszthatatlanul összeforrott a mechanika születésével. A szabadesés, a ferde hajítás, a lejtőn való mozgás, a tehetetlenség törvénye, a mozgás relativitásának az elve, a sebesség és gyorsulás közötti összefüggés felismerése, a tömeg és sebesség szorzatából összetevődő impulzus bevezetése, az ingamozgás megfejtése s a mechanika annyi más elemi törvénye fűződik az ő nevéhez, hogy jogos rá, mint a mechanika megteremtőjére hivatkozni.

A mechanika és a belőle kinőtt fizikai-matematikai elméletek az újkori európai kultúra egyik legjellemzőbb vonásává váltak. A XVIII. század második felétől kezdve a mechanika egyre általánosabb, egyre absztraktabb matematikai elvekig jutott el, elvekig, amelyek túlélték az elméleti fizika két nagy XX. századi forradalmát, a relativitáselméletet és a kvantummechanikát is. A relativitáselmélet,[4] illetve a kvantummechanika[5] ezeknek az általános elveknek kozmikus illetve atomi méretekben való alkalmazása, mint ahogy a kettő közötti, közepes méretekben való alkalmazásuk volt a klasszikus newtoni mechanika. Érthető, hogy a mechanika fejlődésének kezdeténél álló Galilei az újkori természettudomány, s ezen keresztül a modern tudományos kor reprezentáns alakjává vált. Az egyházzal vívott harcának drámai körülményei még alkalmasabbá tették erre a szerepre.[6] A sötét és visszahúzó erőkkel szemben a természettudomány érdekében kiálló Galilei az egyre inkább összefonódó tudományos és társadalmi haladás szimbólumává növekedett.

A tudománytörténet-írás úgyszólván kezdeteitől fogva így értékeli Galilei működését. Ez természetesen nem azt jelenti, hogy Galilei munkásságának ne lennének előzményei. Az újkori természettudomány meg-

[3] Előzménye: Vekerdi László: Jegyzetek Galilei mechanikájáról. = Magyar Tudomány 71 (1964) No. 10. pp. 609–623.

[4] Lásd pl. Schrödinger, Erwin: Space – time structure. London, 1954.

[5] Igen világosan és könnyen érthetően tárgyalja ezt a kérdést P. A. M. Dirac: „Harmitonian methods and quantum mechanics." Proceeding of the Royal Irish Academy, Section A, Vol. 63. 1964. 49–59. old.

[6] Santillana, Giorgo de: The crime of Galileo. Chicago, 1955.

születése hosszú és nehéz harc eredménye volt. Ennek a – sokszor leplezett és föld alatti – harcnak a kezdetei sok területen a középkor és az antikvitás századaiba nyúlnak vissza. Még nagyobb jelentőségű a modern természettudomány megszületése szempontjából az itáliai reneszánsz szerepe. A reneszánsz századai alatt újraszerzett antik tudás és a művész-mérnökök által felhalmozott tapasztalatok döntő hatással voltak az egész természettudományos világkép megszületésére.

A következőkben – anélkül, hogy a „Galilei elődei" néven ismertté vált hatalmas vitát akárcsak érinthetnénk is – megkíséreljük vázolni Galilei mechanikájának a viszonyát 1., a reneszánsz humanisták által feltárt antik hagyományhoz. 2. kora mérnök-fizikusainak az empirizmusához és 3., a középkori skolasztikus matematikához.

GALILEI ÉS AZ ANTIK HAGYOMÁNY

A görög matematika sajátos kialakulása[7] és fejlődése miatt a mechanikai problémák matematizálására nem volt alkalmas. Az általa megteremtett axiomatikus, deduktív struktúrában ugyanis nem volt leírható a mozgás. A mechanika három nagy fejezetéből kettő így eleve kimaradt a görög matematika látóköréből. A görög matematika csak a statika axiomatizálására volt képes, a kinematika és a dinamika más módszereket igényeltek. Pedig a mozgás úgyszólván kezdettől fogva a görög gondolkozás egyik legnagyobb problémája volt. Zénón híres paradoxonaiban a korai megoldási kísérletek első összefoglalását láthatjuk: a mozgás fogalma az egzakt, matematikai gondolkozás számára ellentmondást jelent, így a mozgás nem létezhet valójában, a lét megérthető lényege a változhatatlanság, a mozgás – mint helyváltoztatás – csak látszat.

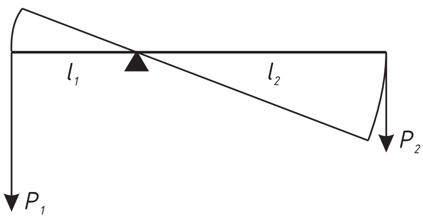
A mozgásprobléma megoldásában a következő nagy lépést Arisztotelész jelentette. Arisztotelész fizikája is kiküszöböli a mozgást, de úgy, hogy feloldja egy matematizálásra eleve alkalmatlan, metafizikailag értelmezett változás fogalmában. Az arisztotelészi természetmagyarázatban az egész univerzum összefüggő organizmus volt, amiben minden természetes változás szükségszerű, de egyben célszerű is. A dolgok nem csak azt jelentették, amik egy adott pillanatban valóban (aktuálisan) voltak, magukban foglalták mindazokat a lehetőségeket is, amikké (potenciálisan) válhattak. A változás nem egyéb, mint ezeknek a lehetőségeknek a megvalósulása: a potencia aktualizálódása. A természetben bekövetkező mozgások azért szükségszerűek, mert lehetőségként eleve benne rejtőznek már a dolgokban.

A mozgás csak egyik speciális esete ennek az általánosan értelmezett

[7] Szabó Árpád: Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá? = Matematikai Lapok 8 (1957) pp. 8–36, 232–247.

változásnak. Az élettelen testek mozgásában Arisztotelész két alcsoportot különböztetett meg, a „természetes” és az „erőszakos” mozgásokat. A természetes mozgás megint kétféle lehet: a nehéz testek egyenes vonalban történő esése a Föld középpontja felé és a könnyű testek egyenesvonalú mozgása felfelé, a periféria felé. Szabadesést az arisztotelészi fizika nem ismer: minden mozgót mozgat valami. Az eső testet a közeg, amelyben esik.

Az erőszakos mozgás törvényét Arisztotelész a Fizika VII. könyvének V. fejezetében fogalmazza meg. Ezt a törvényt modern interpretátorok $v \sim K/p$ alakban szokták visszaadni, ahol v a mozgó test sebessége, K a mozgató erő, p a mozgó test súlya. Ez a törvény ilyen formában hamis, mert az erő nem a sebességgel, hanem a gyorsulással arányos, s ez utóbbi fogalmát Arisztotelész nem ismerte. De Arisztotelész nem dolgozik a sebesség, erő és súly fogalmával sem, és a mozgás idézett törvénye az arisztotelészi fizikában nem is annyira a mozgás, mint inkább a nyugalom megalapozására szolgál. Egy Arisztotelész iskolájából kikerülő, s az egész középkoron át igen nagy hatású mű, az ún. *Mechanikai Problémák* ezt az arisztotelészi mozgástörvényt használja fel a mérleg egyensúlyi feltételének a meghatározására.



1. ábra

Az arisztotelészi erőtörvény szerint v_1p_1 és v_2p_2 a mértéke az l_1 és l_2 kar végén ható erőknek (1. ábra). Egyensúly esetében a két erő egyenlő kell legyen egymással, azaz $l_1p_1 = l_2p_2$. Ha ugyanis az l_1, l_2 karú mérleg a megtámasztásai pont körül elfordul, a végpontok által leírt körívek s így a végpontok v_1, v_2 sebességei is úgy aránylanak egymáshoz, mint a karok.

Az arisztotelészi mechanika szerzője a kör „mágikus” tulajdonságában keresi ennek az elvnek a magyarázatát: „Ennek a jelenségnek az oka a körben keresendő. Ez természetes, mert mindenképpen érthető, hogy valami figyelemre méltó eredjen valami még figyelemre méltóbból és a legfigyelemreméltóbb tény az ellentétek összeesése egymással. A kör ilyen ellentétekből áll, mert… van benne valami, ami mozog és valami, ami állandó marad.”[8]

[8] Dugas, R.: A history of mechanics. Neuchatel 1955, 19.

Így a mérleg és az emelő a „legfigyelemreméltóbb” geometriai idom, a kör tulajdonságaiból vezethető le, s mivel az emelő segítségével az összes többi egyszerű gép működése megérthető, az arisztotelészi mechanika végső fokon a körnek tulajdonított metafizikai jellegzetességeken épült fel.

Az arisztotelészi *Mechanikai Problémák* statikája mellett élt az ókorban egy egészen másfajta statikai tradíció is, az Arkhimédészé. Ez a statika szigorú, matematikai definíciókon és axiómákon alapul. Akhimédész nem hivatkozik intuitív elvekre és a kör „csodálatos” tulajdonságaira, hanem a matematikai tételek mintájára posztulátumokkal és axiómákkal írja körül az emelő működését: hét további olyan axiómát fűz a geometriaiakhoz, amelyek az egyensúlyban levő súlyok távolsági és súlypont viszonyaira vonatkoznak. Ezekből vezeti le a statika alaptételeit, és VI. propozícióként az emelő elvét: „összemérhető mennyiségek akkor vannak egyensúlyban, ha fordított arányban állanak azokkal a távolságokkal, amelyekben fel vannak függesztve”.[9]

Nagyon jellemző, hogy miután ezt a tételt bebizonyította összemérhető, kommenzurábilis mennyiségekre, igazolja azt inkommenzurábilis mennyiségekre is. Voltaképpen nem fizikai, hanem tiszta matematikai mennyiségekkel dolgozik, az axiomatizált statika az euklidészi geometria részévé válik a kezében.

Az antik mechanikának ez a két fő iránya igen nagy hatással volt a középkori, illetve a reneszánszkori gondolkozás fejlődésére. A középkor századai alatt szinte kizárólagosan az arisztotelészi fizika hatott,[10] Arkhimédésznek inkább csak a nevét ismerték. Az ő munkáinak s általában a görög matematikának az értékelése a platonista tendenciájú humanizmussal kezdődött.

A RENESZÁNSZ-PLATONIZMUS ARKHIMÉDÉSZ-KULTUSZA

A reneszánsz filozófiája bonyolult gondolkozási irány volt. Az antikvitás nagymesterei – különösen Platon és később Arkhimédész – utolérhetetlen tartalommal töltötték meg, és filozófiai spekulációik nem hasonlítottak jobban a görög és a római példákra, mint Leon Battista Alberti rimini-i S. Francescója a görög templomokra. Az antik formák és szövegek új kontextusba kerültek, ráépültek a középkor századai alatt gyűjtött tudásra, elfeledték azt és szövődtek vele. Az antik minták mellett egyre inkább hatott a mindennapi tapasztalat, a megfigyelés.

[9] Dijksterhuis, E. J.: Archimedes. Copenhagen, 1956. 289–290.
[10] Duhem, P.: Les origines de la statique. I. Paris, 1905.

Az antik módszer segítségével elméleti, absztrakt szintre emelt tapasztalat volt a fiatal Galilei szellemi fejlődését megszabó firenzei platonizmus eszményképe is. Ennek a jegyében született már Kopernikusz életműve is, és ez hatja át a XVI. századi fizika arisztokratikus mestereinek, Guido Ubaldo del Monte hercegnek és Giovanni Battista Benedettinek, a fiatal Galilei patrónusának, illetve tanítójának a munkásságát. A kor mechanikájának kérdését, a mozgás problémáját akarták megoldani Arkhimédész pontos, axiomatikus, de csak a statikai problémák kezelésére alkalmas módszerével. A középkor Arisztotelész-tiszteletét a reneszánszban valóságos Arkhimédész-kultusz váltotta fel. Arkhimédész módjára geometriai, azaz axiomatikus módon építették fel legkülönbözőbb tárgyról szóló értekezéseiket, s ezt az axiomatikus, deduktív módszert vélték legalkalmassabbnak új ismereteik felfedezésére is. Nem tudták, hogy maga Arkhimédész nem így találta legnagyobb eredményeit, hanem intuitív heurisztikus eljárással. S csak a már megtalált eredményt igazolta utólag a körülményes módszer segítségével.[11]

A reneszánsz számára Arkhimédész a geometriai szigorúság jelképe volt. Ennek a jegyében támadták a fiatal Galilei mesterei, Guido Ubaldo és Benedetti az arisztotelészi intuitív erőtörvényekre alapított mechanikát, és megkísérelték Arkhimédész nyomán megérteni a mozgások elméletét. A mozgás azonban Arkhimédész fizikájában csak a nyugalom határesete volt: az egyensúlyából kibillentett mérleg elmozdulása, vagy – az úszás. Az Arkhimédész fizikájából ma is mindenki által ismert törvény – amihez a híres *heuréka* legenda tapad – lehetővé tette egy speciális mozgásféleség: a testek úszásának, süllyedésének és emelkedésének a megértését. Galilei egy fiatalkori, Pisában írt értekezésében[12] az arkhimédészi hidrosztatika segítségével magyarázta meg – Benedetti nyomán – a testek „természetes" mozgását. Ő is, mint Arisztotelész, kétféle, lefelé és felfelé történő természetes mozgást különböztet meg, de ezeknek a mozgásoknak a leírására arkhimédészi elveket alkalmaz, és minden adódó alkalommal élesen kritizálja Arisztotelész mozgáselméletét. A testek nem „saját természetes helyüket" keresve mozognak felfelé vagy lefelé egy hierarchikusan elrendezett univerzumban, a lefelé, ill. felfelé történő „természetes" mozgás is „erőszakos" mozgás, és a mozgást létrehozó erő a

[11] Arkhimédész erre vonatkozó módszerét csak a XX. század elején találta meg egy kivakart és keresztény szöveggel átírt kéziraton J. Heiberg dán filológus. Az antik axiomatikus, geometriai módszerek XV. és XVI. századi Firenzében való elterjedésére jellemző, hogy pl. a XVI. század végén a nagyhercegi udvarban külön tanár, név szerint Ostilio Ricci tanította az apródoknak Euklidész Elemeit. Az akkor már a pisai egyetemen medicinát tanuló Galileivel is ő kedveltette meg 1582-es firenzei tartózkodása alatt a matematikát.

[12] De motu. Az Antonio Favaro által gondozott Nemzeti Kiadás (Opere di Galileo Galilei. Edizione Nazionale. Vol. I–XX. Firenze 1890–1909) első kötetében a 251–419. lapon.

test és a közeg fajsúlya közötti különbségben keresendő. „Nyilvánvaló ezért – írja Galilei a mozgásról írott pisai értekezésében –, hogy a testek természetes mozgása a súlyok mérlegen történő mozgására vezethető vissza. A természetesen mozgó test a súly szerepét játssza a mérleg egyik karján, és az eső test térfogatával egyenlő térfogatú közeg jelenti a másik súlyt a mérleg másik karján. Így, ha a közegnek az eső test térfogatával egyenlő térfogata súlyosabb, mint a mozgó test, és a mozgó test könnyebb, mint a közeg, mint könnyebb súly, felfelé fog mozogni. De ha a mozgó test súlyosabb, mint a közeg azonos térfogata, akkor lévén a nehezebb súly, lefelé fog mozogni. És végül, ha a közeg mondott térfogata egyenlő súlyú a mozgó testével, utóbbi sem felfelé, sem lefelé nem fog mozogni éppen úgy, mint ahogy a súlyok sem esnek vagy emelkednek a mérlegen, ha egyenlőek egymással.”[13]

Az értekezés kéziratának egy későbbi változatában még jobban kidolgozta az esésnek ezt a hidrosztatikai modelljét. A felfelé való mozgást nem tekinti többé „természetesnek”, mert „nem lehet azt állítani, hogy a felfelé történő mozgásnál is a test és a közeg súlya közötti különbség oka önmagában véve a mozgásnak, mint a lefelé való mozgásnál. Mert a mozgó test abszolút súlya önmagában véve a lefelé mozgásnak, és csak járulékos sajátság az, hogy ez a súly meg kell haladja a közeg súlyát, mint ahogy az is csak járulékosan történik, hogy a test lefelé mozog egy olyan közegben, aminek súlya van. Mert ha a közegnek egyáltalán nem lenne súlya, és így a súlyos test nem haladhatná meg súlykülönbségben a közeg súlyát, a súlyos test akkor is lefelé mozogna, mert a lefelé mozgásnak belső oka van. De ugyanezt nem állíthatjuk a súlyhiányról. Mert a súlyhiány, azaz a nem-súlyosság, magában véve semmi. Ahhoz, hogy a testben súlyhiányt észlelhessünk, egy olyan közegre van szükség, amelyik súlyosabb mint maga a test”.[14]

Az idézetek mutatják, milyen nehézségekkel kellett küzdeni még Galileinek is a mozgás megmagyarázásában. Mert a hidrosztatikai modellben nem lenne szabad elvi különbséget tenni a lefelé és felfelé történő mozgás között. Hiszen az esést is a közeg és a benne eső test közötti fajsúlykülönbségre vezeti vissza. Azt lehetne mondani, hogy az esés mint sikertelen úszás jelentkezik, amit a közeg „lehajtó ereje” vált ki. A lefelé mozgás „belső okára” való célzás egy egészen más természetű mozgás-modellre utal, az ún. impetus fizikára, amit későantik és arab kommentátorok nyomán a XIV. századi párizsi egyetem skolasztikusai dolgoztak ki. De ez már egy egészen más világba vezet, mint az arkhimédé-

[13] Galileo Galilei On motion and on mechanics. Comprising De Motu (ca. 1590) translated with introduction and notes by I. E. Drabkin and Le Meccaniche (ca. 1600) translated with introduction and notes by Stillman Drake. Madison 1960, 23.

[14] Uo. 119.

szi, és következetes kifejtése, amit Galilei pisai mesterei, Francesco Bonamici és Benedetti kíséreltek meg, épp úgy nem vezetett a szabadesés fogalmához, mint a hidrosztatikai modell. A szabadesés, aminek a megoldása az újkori dinamika megszületését jelenti, a Galilei mesterei által közvetített antik módszerekkel nem volt megmagyarázható. Az antikvitás és a mindennapi tapasztalat ötvözése, ami a művészetek területén olyan nagy eredményekhez vezetett, a természettudományokban nem volt annyira eredményes. Nem a firenzei platonizmus szolgáltatta azt a hátteret, amelyben Galilei új tudománya megszületett.

GALILEI ÉS AZ ITÁLIAI TECHNIKAI-EMPIRIKUS TRADÍCIÓ

A páduai egyetemen egészen más világba került Galilei, mint Firenze egyetemén volt. A páduai egyetem a Velencei Köztársaság főiskolája volt, s ez szabta meg az egyetem jellegét. Velence sohasem szakított olyan élesen saját középkori fejlődésével, mint Firenze. A nagy kereskedőváros az volt a XVI. század végén is, ami a XIV. században:[15] egy gazdag arisztokrata-réteg által uralt, a Földközi-tenger keleti medencéjében szétszórt gyarmatbirodalom felett uralkodó állam. Ezt a birodalmat teljes egészében a kereskedelem tartotta fenn és tartotta össze. Elsősorban átmenő kereskedelem; Velence a Levante s a távolkelet áruit osztotta el Európa felé s Észak-Itália termékeit szállította keletre. Így a hajópark fenntartása és növelése mellett nagy szerepet játszottak életében a raktározás problémái is. Ezek természetesen újabb technikai-mechanikai feladatokat jelentettek. A törökkel és a szomszédaival való állandó háborúskodása miatt igen fontosak voltak a hadászati kérdések, elsősorban a XVI. század során egyre tökéletesedő ágyúharc gyakorlati és elméleti problémái.

Ezek a körülmények erősen hozzájárultak ahhoz, hogy Velencében másfajta tudományos élet alakuljon ki, mint Firenzében. A tudomány itt a gyakorlati élet igényeivel telítődött, s az antik minták tisztelete sohasem homályosította el a mindennapi élet tapasztalatait. Daniele Barbaro velencei humanista, aki 1556-ban adta ki Vitruvitus *De architectura*-ját, kommentárjában a velencei építészetből és a híres velencei Arzenálból vett példákkal világosítja meg az antik szöveget, sőt magába a szövegbe is beépíti kora technikai gyakorlatából vett hasonlatait és elnevezéseit.[16]

[15] Braudel, F.: La Méditerranée et le monde méditerranéen à l'époque de Philippe II. Paris 1949.

[16] Zoubov, Vassili Pavlovitch: „Vitruve et ses commentateurs du XVI^{e} siècle." = La science au seizième siècle. Colloque de Royaumont 1957. Paris 1960, 67–90.

A XVI. századi velencei tudomány módszere a józan ész által vezetett tapasztalat. A mindennapi élet olyan új problémák elé állítja a tudósokat, amelyeknek a megoldását hiába keresik az antik szerzőkben. A XVI. század egyik legnagyobb matematikusa és fizikusa, Nicolo Tartaglia szinte programszerűen fejezi ki ezt az 1546-ban, Velencében kiadott *Quesiti et Inventioni diverse* című, a mozgásról írott könyvében, amelynek ajánlása azoknak szól

> „Kiket új dolgok égő vágya izgat
> Mikről nem tudtak Platon sem Plotinosz
> Sem semmi régi görögök s latinok
> S csak Munka, Mérés, Ész hozott világra."[17]

Arkhimédész axiomatizálása helyett a munka és mérés ész által rendszerezett világaként jelentkezik a Velencei Köztársaság egyetemére kerülő Galilei előtt is a mechanika. Ebben a szellemben írta meg első páduai előadásait, a kéziratban megmaradt, és először Mersenne által, francia nyelven kiadott *Mechanikát*.

Galilei páduai *Mechanikája* egészen más világba vezet, mint pisai értekezése. Nincs benne szó filozófiai meghatározásokról és Arisztotelész elleni elvi küzdelemről. Új elméletekről sincs, mert a fiatal páduai professzor az antikvitás mechanikai műveiből, a középkori kommentátorokból, és Tartaglia mechanikájából indul ki. Azonban elődeivel szemben az addigi szétszórt és alkalomszerűen felhasznált részletekből egységes egészet kovácsol, az egyszerű gépek működésének és alkalmazásának a megértésére szolgáló tankönyvet.

Az egész könyvön centrális elvként vonul végig az arisztotelészi *Mechanikai Problémák*-ból megismert mérleg-elv. Ez az elv voltaképpen csak az ő kezében válik kifogástalanul definiált és nemcsak egyensúlyi, hanem mozgás-problémák tárgyalására is alkalmas módszerré. Ezt azáltal éri el, hogy pontosan meghatározza az egyébként már Tartaglia által is sejtett és körülírt „momentum" fogalmát: „momentum az a lefelé való mozgási tendencia, amit nemcsak a mozgó test súlya okoz önmagában véve, hanem az az elrendezés is, amelyben különböző súlyos testek egymáshoz képest állanak. Ez által a momentum által lehetséges, hogy egy könnyebb test ellensúlyoz egy súlyosabbat, mint ahogy egy egyenlőtlen karú mérlegen egy kisebb súly fenntart igen nagy súlyokat, nem a súlykülönbség által, hanem a mérlegen való felfüggesztésének a távolsága által. Ez a távolság a kisebb súly nehézségével együtt, növeli annak a momentumát és lefelé irányuló impetusát, és ezzel együtt meghaladhatja a má-

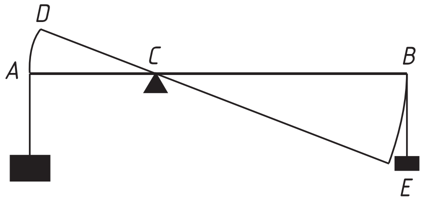
[17] Cit. Mieli, A.: Panorama general de historia de la ciencia V. La ciencia del Rinacimiento. Matemática y ciencias naturales. Buenos Aires–México 1952, 21.

sik, nehezebb súly momentumát. Így a momentum az a lefelé irányuló impetus, ami súlyosságból, helyzetből és bármi egyébből, ami ilyenféle tendenciát okozhat, tevődik össze.”[18]

A „bármi egyéb”, amire Galilei ebben a momentum definícióban céloz, a sebesség.

Ezt világosan kimondja pár oldallal később, miután megmutatta, hogyan vezethető le a momentum fogalmának a segítségével az egyensúly feltétele, és az új fogalmat a mérlegre alkalmazza:

„Tekintsük a *C* pontban két egyenlőtlen részre osztott *AB* mérleget, amelyre az *A* és *B* pontban a *BC* és *CA* távolságok arányának megfelelő súlyok vannak felfüggesztve (2. ábra).



2. ábra

Már levezettük, hogy ebben az esetben egyik súly ellensúlyozza a másikat és következésképpen ha az egyikhez csak a legcsekélyebb súlymomentumot is adnánk, az lefelé mozogva felemelné a másikat. Így egy észlelhetetlenül kicsiny súlynak a *B* súlyhoz való adásával a mérleg elmozdulna, a *B* pont *E* felé süllyedne és a mérleg másik, *A* vége *D* felé emelkednék. És mivel ahhoz, hogy a *B* súly lefelé mozduljon el, bármily kicsiny súly hozzáadása elegendő, eltekintünk ettől az észlelhetetlenül kicsiny mennyiségtől és nem teszünk különbséget egyik súlynak a másik súlyt kiegyensúlyozó képessége és mozgató képessége között.

Már most összehasonlítva azt a mozgást, amit a *B* súly végez, miközben leszáll az *E* pontba és amit az *A*, miközben felemelkedik *D*-be, kétségkívül azt találjuk, hogy a *BE* távolság annyiszor nagyobb, mint az *AD* távolság, ahányszor a *BC* távolság nagyobb, mint a *CA.* Ugyanis a *C* középpontban két egymással egyenlő *DCA* és *ECB* szög képződik és így a *BE* és *AD* körívek hasonlóak és olyan arányban állanak egymással, mint az őket leíró *BC* és *CA* sugarak. Így a lefelé mozgó *B* súly mozgásának a sebessége annyiszor lesz nagyobb, mint a másik, emelkedő *A* súly sebessége, amennyiszer az utóbbi súlyosabb, mint az előbbi. Nem meglepő így, hogy az *A* súly nem emelhető fel még lassan sem *D*-be, hacsak a másik *B* súly nem mozog nagyobb sebességgel *E*-be; és a természet törvényei sze-

[18] Galileo Galilei On motion and on mechanics… 151.

rint való, hogy a *B* súly mozgása kiegyenlíti az *A* súly mozgását, ha ez utóbbi lassabban mozog *D*-be és a másik gyorsabban száll le *E*-be. És megfordítva, ha *D*-be helyezzük az *A* súlyt és a másikat *E*-be, világos, hogy az előbbi lassan esve *A*-ba, a másikat gyorsan felemeli *B*-be, pótolva súlyosságával azt, amit a mozgás lassúságával veszít. És ebből a meggondolásból felismerhetjük, hogy a mozgás sebessége ugyanolyan arányban képes növelni a mozgó test momentumát, mint amilyen arányban nő a mozgás sebessége."[19]

Az arisztotelészi és a középkori mechanikák egyensúlyra alkalmazott, statikai elvéből Galileinél dinamikai elv lett. Megszületett az a felismerés, hogy a mozgásban a „súly" (a tömeg fogalmát Newton előtt a fizika nem különíti el a súlytól) és a sebesség szorzatából adódó mennyiség alapvető fontosságú tényező. A pontos, axiomatikus, de csak statikai problémákra alkalmazható arkhimédészi módszer mellé Galilei újból bevezeti az arisztotelészi mechanika intuitív, a mindennapos megfigyelések általánosításán alapuló dinamikai elveit, s Tartaglia nyomán jól megalapozott elméleti szintre emeli sok évszázad technikusainak a tapasztalatait.

Arisztotelész nem ellenfele többé, mint pisai értekezésében volt, hanem segítője. Az arisztotelészi módszer itt Páduában tisztábban állott rendelkezésére, mint bárhol másutt. Egy több mint évszázadra visszamenő páduai tradíció gondosan eltávolította a Mester munkájáról a részben kommentátorai által hozzá toldott metafizikai járulékokat, és tisztán kidolgozta Arisztotelész empirista, a valóságos világ megfigyelésén alapuló módszerét.[20]

Később maga Galilei is több helyen említi, milyen sokat köszönhet Arisztotelész – helyesebben a páduai arisztotelizmus – megismerésének. Egész életművét összefoglaló nagy könyvének, a *Beszélgetések és matematikai bizonyítások két új tudományról* című, 1638-ban Leydenben megjelent műnek a bevezetésében pedig költői szavakkal nyugtázza a velencei Arzenál mesteremberei iránt érzett háláját: „a gondolkozó értelemnek igen nagy teret nyújt, velencei urak, a ti híres Arzenálotok szüntelen

[19] Uo. 156.

[20] The Renaissance phylosophy of man. Ed. by E. Cassirer, P. O. Kristeller, J. H. Randall Jr., Chicago 1954. A páduai arisztotelizmusnak Renan alapvető műve (Averroes et l'averroisme. Paris 1852) óta óriási irodalma van. Már Renan felhívta rá a figyelmet, hogy ebben a filozófiában milyen erősen élnek tovább a középkori tendenciák. A kérdés azonban ma sem tekinthető lezártnak (vö. B. Nardi: „La fine dell'Averroismo." = Saggi sull'Aristotelismo padovano del secolo XIV al XVI. Firenze 1958. 443–455). Már Favaro kiemelte a páduai egyetem nagy jelentőségét Galilei gondolkodásának a kialakulásában (Galileo Galilei e 100 studio di Padova. I–II. Firenze 1883), újabban pedig J. H. Randall Jr. teljesen a páduai arisztotelizmusban vélte felfedezni Galilei természettudományos módszerének a gyökereit („The development of scientific method in the school of Padua." Journal of the History of Ideas, I, 1940, 177–206).

munkálkodása, kiváltképpen ami a mechanikát illeti; mivel állandóan mindenféle eszközöket és gépeket készít ott nagyszámú mesterember, akik között sokan, részben elődeik megfigyeléseire támaszkodva, részben a saját maguk által folytonosan tapasztalt dolgokon tanulva, a legtapasztaltabb és a legkitűnőbb értelmekké növekedtek."[21]

A SZABADESÉS TÖRVÉNYE

Az empirikus módszer vitte közelebb Galileit a kor egyik legnagyobb problémájának, a szabadesés kérdésének a megoldásához. Egy hagyomány, amelyik Galilei életrajzírójára, Vincenzo Vivianira nyúlik vissza, úgy tartja, hogy még Pisában különböző súlyú golyók egyszerre való leesését észlelve elvégezte az idevonatkozó alapvető kísérletet. A pisai kísérlet abban a formában, ahogyan azt Viviani és nyomában a történészek legnagyobb része előadta, sohasem történt meg.[22] Többek között azért sem, mert Galilei, mint Pisában írt értekezéséből kitűnik, ekkor még azt hitte, hogy különböző fajsúlyú testek különböző sebességgel esnek – helyesebben „süllyednek" – a Föld középpontja felé. Egyébként is az egyszerre való leesés ténye még nem adhatta kezébe az esés matematikai törvényét, s Galileit éppen ez a *matematikai törvény* érdekelte.

Másféle, jobban megközelíthető és többet mondó kísérletre volt szükség a szabadesés törvényének a megállapításához. A Páduába való érkezésekor írott *Mechanikájában* Galilei az általa definiált momentum és a virtuális sebességek elvének a segítségével egzakt módon levezette a lejtőn való mozgás törvényét. Megállapította, hogy ebben a mozgásban a mozgó test súlyának csak a lejtő aljára merőleges, vertikális irányba eső része számít, a vízszintes irányba eső nem. S így a lejtő úgy fogható fel, mint egy lelassított szabadesés. De amit a szabadon eső testen az esés túlságos gyorsasága miatt nem lehet megfigyelni, azt a lejtőn könnyű regisztrálni: „a természetes mozgásban megtett utak úgy aránylanak egymáshoz, mint a megtételükre szükséges idők négyzetei, és következésképpen az egyenlő időközök alatt megtett utak úgy aránylanak egymáshoz mint egytől kezdve a páratlan számok".

Galilei ezt a törvényt, amit mi $s = \frac{g}{2}t^2$ alakban írunk le, egy 1604-ben Paolo Sarpi-nak írott levelében közli.[23]

[21] Galileo Galilei: Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nouve scienze. A cura di Adriano Carugo e Ludovico Geymonat. Torino 1958, 13.
[22] Cooper, L.: Aristotle, Galileo, and the leaning tower of Pisa. Ithaca (New York) 1935.
[23] Galileo a Paolo Sarpi in Venezia, Padova 16 ottobre 1604. Opere, ed. Naz. X. 115.

Harminc évvel később, a *Beszélgetések*-ben azt is részletezi, hogyan jutott hozzá. „Egy 12 könyök hosszú, fél könyök széles, 3 hüvelyk vastag deszkának a vékony oldalába egy hüvelynél valamivel mélyebb csatornát véstünk. Vigyáztunk, hogy nagyon egyenes legyen és hogy a felület jól csiszolt és sima legyen, belülről egy igen tiszta és fényes pergamentet ragasztottunk rá; ebben a csatornában azután egy igen kemény, teljesen kerek és csiszolt bronz golyót eresztettünk le. Úgy rendeztük el a dolgot a deszka felállítása után, hogy az egyik felét megemeltük egy, majd két könyök magasságra, akkor azután esni hagytuk a golyót a csatornában, és feljegyeztük az alábbiakban részletezett módon azt az időt, amit az egész lefutás igényelt, gyakran megismételve a kísérletet, hogy pontosan meghatározhassuk az idő mennyiségét, és sohasem találtunk különbséget még egy pulzusütés tizedrésznyinek megfelelőt sem. Miután pontosan rögzítettük ezt a műveletet, ugyanezt a golyót csak a csatorna negyed hosszúságára engedtük lefutni; és megmértük a futás alatti időt, azt találva, hogy mindig legpontosabban a fele volt az előbbinek. Azután elvégeztük a kísérletet más utakkal, és összehasonlítottuk az egész hosszúság idejét a félhosszúság idejével vagy a kétharmadéval, vagy a háromnegyedével, vagy végül bármely más törtrészével, és a kísérleteket jó százszor megismételve mindig azt találtuk, hogy a megtett utak úgy aránylanak egymáshoz, mint az idők négyzetei; és a lejtő, azaz a csatorna, amelyben a golyó futott, minden hajlására állott…”[24]

Azután hosszan részletezi, hogyan mérte a szükséges pontossággal az időt. Felfüggesztett egy nagy csöbröt és a fenekébe fúrt kis lyukon át vizet folyatott ki egy edénybe a golyó vályúban való futása, illetve annak részei alatt, és az így összegyűlt vízmennyiségeket megmérte egy nagyon pontos mérlegen. Ezeknek a vízmennyiségeknek a súlyai közötti arányok adták meg az idők közötti arányokat „mégpedig olyan pontossággal – írja –, hogy mint mondottuk, ezek a műveletek százszor és százszor megismételve sohasem adtak számottevő különbséget”.[25]

GALILEI ÉS A KÖZÉPKORI FIZIKA

A kísérlet, az empirikus, arisztotelianus módszer Galilei kezébe adta a szabadesés matematikai törvényét. De ő többet keresett, a matematikai törvény mögött rejtőző lényeget s ez első páduai évei után, 1604-ben még nem volt a kezében. A Paolo Sarpinak írott levelében ugyanis ez áll: „A dolog elve a következő: a természetes mozgással eső test sebessége olyan arányban nő, amilyen arányban távolodik az esésé kezdőpontjától.

[24] Discorsi… 199–200.
[25] Uo. 200.

Például, ha egy súlyos test az *A* pontból esik az *ABCD* vonalban, felteszem, hogy a *C*-ben elért sebesség úgy aránylik a *B*-ben elérthez, mint ahogy a *CA* távolság aránylik a *BA*-hoz, és következésképpen: *D*-ben annyiszor lenne nagyobb a sebessége, mint a *C*-ben, ahányszor nagyobb a *DA* távolság, mint a *CA*."[26]

Azaz 1604-ben Galilei megadta a szabadesést leíró helyes matematikai törvényt, amit kísérletekkel igazolt, és hozzá fűzött egy teljesen helytelen magyarázatot, ti. azt, hogy az eső test sebessége az esés alatt megtett úttal arányos. Ebből a feltevésből a fenti helyes törvény semmiképpen sem vezethető le.

Ernst Mach-tól kezdve Alexandre Koyré-ig számos tudománytörténész törte a fejét ennek az ellentmondásnak a megoldásán.[27] Mach Galilei „pozitivizmusában", Koyré „platonizmusában" vélte megtalálni a rejtély kulcsát. Mach[28] szerint Galilei 1604-ben túlságosan a kísérlet hatása alatt állott. Koyré[29] szerint el sem végezhette azt a leírt módon, és csak a kísérlethez ragaszkodó arisztotelianus ellenfelei kedvéért „találta ki" az egész szép kísérletet.

Természettudományos elméletek és tények interpretációja nagyon nehéz kérdés. Galilei esetében különösen, mert a kézirataiban történt nagy veszteségek és a személye körül fonódott legenda ma már szinte lehetetlenné teszik gondolatai genezisének a feltárását. Valószínűleg még páduai évei alatt eljutott a szabadeséstörvény helyes levezetéséhez szükséges feltevésekhez: az eső test sebessége nem az úttal, hanem az esés megtételére szükséges idővel arányos.

Ez a habozás, hogy vajon az úttal vagy az idővel arányosnak kell-e venni az eső test sebességét, nem Galileinél jelentkezik először. Már a XIV. századi oxfordi és párizsi egyetem skolasztikusai is küzdöttek ezzel a kérdéssel, és ugyanúgy nem tudták megoldani, mint 1604-ben Galilei.

26 Opere, Ed. Naz. X. 115.

27 Lásd pl. Cohen, I. B.: „Galileo's dejection of the possibility of velocity changing uniformly with respect to distance." Isis, 47, 1956, 231–235.

28 Mach, E.: Die Mechanik in ihrer Entwicklung. Leipzig 1883. – Mach szerint Galilei az egyenletes mozgásra érvényes $\frac{\text{út}}{\text{idő}} = \frac{s}{t}$ fogalmat változó sebességű mozgásoknak pillanatnyi sebességére érvényes $v = \frac{ds}{dt}$ differenciálhányadossá módosítja, s itt az egyenletesen változó sebesség $v = gt$ törvényét figyelembe véve, integrálással kapja a jól ismert $s = \frac{g}{2}t^2$ képletet. „Ha ennek a fogalomnak a kifejezett megformulázása – írja Mach – sokkal Galilei után is következett csak be, azonnal látható mégis, hogy ezt a fogalmat alkalmazza gondolatban." (Mach, i. m. [7]1921, 136.)

29 Koyré, A.: Études Galiléennes. I–III. Paris 1939, II, 71–72.

A skolasztikus fizikusoknál azonban egészen más összefüggésben merült fel a probléma, mint Galileinél. Náluk az esés csak példaként szolgált egy sokkal általánosabb változás fogalom megvilágítására. A skolasztika számára a mozgás nem helyváltoztatás, hanem „potencia átmenete aktusba vagy megfordítva és mindenütt megtalálható, ahol ugyanazon formai meghatározottság keretén belül adva van a potenciális és aktuális létezés lehetősége".[30] Pontatlanabbul, de talán érthetőbben azt lehetne mondani, hogy a skolasztika szerint minden lehetőségnek a megvalósulása és minden ténylegesen létezőnek az elmúlása „mozgás". Mozgás a születés és halál. Mozgás egy test lehűlése és felmelegedése, de nem az atomjaié, hanem a test „melegéé", meleg kvalitásáé. Mozgás egy testnek a fehéredése vagy ahogy a skolasztika kifejezte: „a fehérség kvalitásának intenziója". Mozgás a test fehérségének csökkenése, azaz a skolasztika nyelvén „a fehérség kvalitásának remissziója". Mozgás, ha egy szobrász egy kőtömbből szobrot farag, de nem a szobrász vagy a véső mozgása, hanem a kőtömb „formájának" a mozgása a szobor „formájába". Egyik forma fokozatosan megsemmisül s megvalósul helyette egy másik. Az arisztotelészi világ mozgó világ, de nem az anyag mozog benne, hiszen ez passzív, hanem a forma. A skolasztika a változó formák világa. De a változó formáké-e vagy a formák változásáé? Változó forma, „forma fluens"-e a mozgás, vagy a forma változása: „fluxus formae"? Ez volt a skolasztika nagy mozgásproblémája.

A skolasztika Aquinói Tamástól kezdve William Ockham-ig többféle elméletet dolgozott ki a kérdés megoldására. Ezek közül – a mi szempontunkból – a Henry de Gand XIII. századi németalföldi filozófus által képviselt a legfontosabb. E szerint valamely kvalitás intenzitásának a növekedése abban áll, hogy a kvalitás egy végcélhoz közeledik, ahol tökéletességet ér el. A kvalitás intenzitásának a növekedése magában a formában foglaltatik, a potenciából aktusba való átmenet következménye. Azt a keretet, ami között a kvalitás intenzitása változhat, Henry de Gand „latitudo"-nak nevezte.

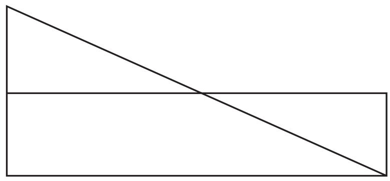
Utóbbi fogalom, illetve ennek bizonyos továbbfejlesztései centrális jelentőségűvé váltak a XIV. századi skolasztikában. Használták a kifejezést egyes intenzitásfokok jelölésére, később pedig egy intenzitásváltozás lefolyásának az egészére, arra az alakzatra, amivel az intenzitásváltozás ábrázolható volt. Így lehetővé vált különböző latitudók összehasonlítása és olyan szabályok felállítása, amelyek a különböző geometriai alakzatokkal jellemzett latitudók között egyenlőséget állapítottak meg.

A legfontosabb ilyen szabályt az oxfordi Merton college matematikusai állították fel a XIV. század első felében.[31] Eszerint egy egyenletes in-

[30] Mairer, A.: Die Vorläufer Galileis im 14. Jahrhundert. Roma 1949, 9.

[31] Lásd pl. Clagett, M.: The science of mechanics in the middle ages. Madison 1959, 203–205.

tenzitásváltozáshoz tartozó latitudó, ami egy derékszögű háromszöggel ábrázolható, ekvivalens egy olyan változatlan intenzitás megoszláshoz tartozó és egy négyszöggel reprezentálható latitudóval, amelyben a változatlan intenzitás egyenlő az egyenletes intenzitásváltozáshoz tartozó latitudó végintenzitásának a felével (3. ábra).



3. ábra

Ez a nehéznek ható szöveg voltaképpen egy derékszögű háromszög és egy négyszög területének az egyenlőségét mondja ki abban az esetben, ha a négyszög egyik oldala a háromszög alapja, másik a háromszög magasságának a fele. A latitudó ebben a geometriai reprezentációban nem egyéb, mint a terület. A két terület egyenlőségét kimondó Merton-szabály azonnal érthető.

A skolasztika a mozgást és annak egyik speciális esetét jelentő helyváltoztatást is intenzitásváltozásra képes formának tekintette és a sebességet ezen forma intenzitáslatitudójának. Ha a Merton-szabályt egyenletesen változó sebességű mozgásra alkalmazzuk, azonnal megkapjuk a mozgás latitudóját: akkora lesz, mintha az egyenletesen növő sebességgel mozgó test az így elért végsebességének a felével tette volna meg az egész utat.

Már maguk az oxfordi matematikusok tisztában voltak ennek az alkalmazásnak a lehetőségével, és az iskola egyik vezető filozófusa, William Heytesbury[32] tételszerűen ki is mondotta ezt az eredményt, miután definiálta az egyenletes és az egyenletesen változó mozgást.

A XIV. századi párizsi egyetem[33] nagy fizikusa, Nicole Oresme is alkalmazta a mozgásra a Merton-szabályt – amire egyébként több bizonyítást is adott –, de nem tudta eldönteni, hogy egyenletesen változó sebességű mozgás esetében mit tekintsen a mozgás latitudóját reprezentáló

[32] Wilson, C.: William Heytesbury. Medieval logic and the rise of mathematical physics. Madison, 1960.

[33] A XIV. századi párizsi egyetem fizikájának a legjelentősebb alkotása az impetus-fizika. Jean Buridan egyetlen mozgásféleségre, a helyváltoztatásra szűkíti le a skolasztikában túlságosan tágan értelmezett mozgásfogalmat, és hallgatólagosan visszatér a mozgás primitív meghatározásához: a mozgás folyamatos helyváltoztatás. A mozgást mint magában a mozgó testben helyet foglaló kvalitás jellegű faktort képzeli el, a mozgás sebességét pedig mint ennek a kvalitásnak az intenzitását.

derékszögű háromszög alapjának: a mozgás idejét vagy pedig a mozgás alatt megtett utat.

A XIV. században egy spanyol skolasztikus, Domingo de Soto[34] kifejezetten az esésre alkalmazta a Merton-szabályt éspedig úgy, hogy az esés idejét vette az informálandó szubjektumnak (a latitudót reprezentáló háromszög alapjának), az esés végsebességét a végső intenzitásfoknak, és megkapta a helyes törvényt: az eső test végsebessége akkora, mintha felével tette volna meg egyenletesen az egész utat.

Akárcsak ezek a skolasztikus fizikusok, Galilei is a Merton-szabályt alkalmazta először a szabadesés megoldására. Azonban tévesen, mert a sebességet az úttal tekintette arányosnak, amint azt 1604-ben feltette, a Merton-szabály alkalmazásával nem lehet eljutni a kísérlet által igazolt út és idő közötti összefüggéshez. Még Páduában, 1610 előtt rájött erre és kiigazította tévedését. Később a *Beszélgetések*ben utal ezekre a fiatalkori próbálkozásaira s éppen a Merton-szabály alkalmazásával mutatja ki, hogy eredeti feltevése lehetetlen eredményekhez vezet.[35]

GALILEI MATEMATIKÁJA

A helyes megoldást azonban nem a Merton-szabály egyszerű *alkalmazásával*, hanem annak zseniális *átértelmezésével* nyerte. Ez az átértelmezés jelenti az újkori matematika és mechanika leghatalmasabb módszerének, az infinitézimális számításnak a születését. Ismerte az infinitézimális módszereket a görög matematika is. Sőt a nagy görög geométerek elvileg pontosabban bántak ezekkel a módszerekkel, mint a XIX. század elejéig bárki. Azonban a görög matematikus nem kapcsolta össze az infinitézimális módszereket a változás, a mozgás fogalmával, s így ezek pusztán geometriai problémák, pl. területszámítás megoldására alkalmas eljárások maradtak, és nem voltak a mozgás tanára alkalmazhatók.

A görög matematika végtelen fogalma Eudoxosz által az i. e. IV. században felállított rendezési elven alapult: megfelelő módon elrendezett arányok segítségével tetszés szerint meg lehet közelíteni bizonyos értékeket – pl. a kör területét – anélkül, hogy a keresett értéket valaha is elérnénk, kimerítenénk. A görög matematika végtelen fogalma ez a kimeríthetetlen, s hosszú kerülő után ehhez tér vissza végeredményben a XIX. századi matematika is.[36] De közben még nagy utat kellett megjárnia, amelyikre Galilei indította el s amelyik a mozgás, a változás folyamatá-

[34] Clagett, i. m. 255.
[35] Discorsi… 186–187.
[36] Waerden, B. L. van der: Erwachende Wissenschaft, Basel–Stuttgart 1956,

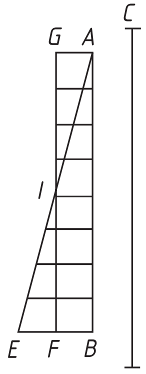
nak az analízisén keresztül az infinitézimális módszerek helyett az infinitézimális *számítás* megteremtéséhez vezetett.

Láttuk, hogy a középkori matematika és logika egyik centrális problémája éppen a változás volt, de a különféle változásokat csak egészében, globálisan tudták osztályozni és áttekinteni. Nem rendelkeztek olyan matematikai módszerrel, amelyik alkalmas lett volna folytonosan változó mennyiség értékének adott pillanatban való meghatározására. Ismerték a különféle változások formáját, típusát, de képtelenek voltak lehatolni a változás folyamatának a lényegéig. Nem tudták – egyes speciális esetektől eltekintve[37] –, hogyan létesíthető matematikai kapcsolat a változásban szereplő mennyiségek között, s még kevésbé azt, hogyan függenek össze ezek a pillanatnyi értékek magának a változásnak az egészével, a változás alakjával, latitudójával.

Galilei nagy felfedezése abban állott, hogy az infinitézimális módszereknek a mozgás fogalmára való alkalmazásával megteremtette ezt a kapcsolatot. A *végtelenül sok* – a görög kimeríthetetlen-végtelen – fogalmának a segítségével világította át a Merton–Oresme-szabályban megadott latitudo átalakításokat. Ahogyan ma mondanánk, megadta a Merton-szabály által definiált területtartó transzformáció differenciális alakját és egy fizikailag helyesen választott változó, az idő szerint integrálta azt.

A *Beszélgetések* harmadik napján, miután definiálta az egyenletes (állandó sebességgel történő) és az egyenletesen gyorsuló mozgást, és megkapta, hogyan kell összehasonlítani két különböző egyenletes mozgást az út és a megtételére szükséges idő hányadosaként definiált sebességnek a segítségével, következőképpen folytatja:

„Az az idő, amely alatt egy test nyugalmi helyzetéből kiindulva egyenletesen gyorsuló mozgással megtesz bizonyos utat, egyenlő azzal az idővel, amely alatt ugyanez a test ugyanezt az utat olyan egyenletes mozgással tette volna meg, melynek a sebessége egyenlő lenne az előbbi egyenletesen gyorsuló mozgás legvégső, legnagyobb sebesség értékének a felével."



4. ábra

„Legyen *AB* az az idő, amely alatt a test *C* nyugalmi helyzetéből kiindulva egyenletesen gyorsuló mozgással megteszi a *CD* utat (4. ábra); tüntessük fel az *AB* idő egyes pillanataiban folyamatosan növekvő sebesség értékeket, amelyek közül a végső *EB* (merőlegesen *AB*-re); húzzuk meg *AE*-t és több *EB*-vel párhuzamos, egymástól egyenlő távolságban levő vonalat, ezek ábrázolják a növekvő sebesség ér-

[37] Maier, A.: Metaphysische Hintergründe der Spätscholastischen Naturphilosophie. Roma 1955, 373–376.

tékeket. Felezzük meg *EB*-t *F*-ben, húzzuk meg a *BA*-val párhuzamos *FG*-t és az *FB*-vel párhuzamos *GA*-t. Az *AGFB* négyszög egyenlő lesz az *AEB* háromszöggel, mert a *GF* oldal felezi az *AE*-t az *I* pontban: ugyanis, ha az *AEB* háromszögben felvett párhuzamos vonalakat meghosszabbítjuk a *GIF* egyenesig, a négyszögben foglalt párhuzamosoknak az összessége (aggregatum parallelarum omnium) egyenlő lesz azokéval, amelyek az *AEB* háromszögben foglalnak; mert az *IEF* háromszögben fekszenek, egyenlőek a *GIA* háromszögben foglaltakkal, amik pedig az *AIFB* trapézban vannak, közösek. Mivel továbbá az *AB* idő minden pillanatának megfelel az *AB* vonal egy-egy pontja, amelyekből az *AEB* háromszögbe húzott párhuzamosak a változó sebesség növekvő fokait ábrázolják, míg ugyanezen párhuzamosak a négyszögön belül az egyenletes, nem növekvő sebesség ugyanennyi értékét adják meg, világos, hogy az egyes sebességmomentumokat a gyorsuló mozgásnál az *AEB* háromszög növekvő párhuzamosai adják meg, az egyenletes mozgásnál a *GB* négyszög párhuzamosai: ugyanis, ami a mozgásmomentumokból a gyorsuló mozgás idejének első felében hiányzik (ti. hiányoznak az *AGI* háromszög párhuzamosai által reprezentált momentumok), azt pótolják az *IEF* háromszög párhuzamosai által reprezentált momentumok. Következésképpen két test ugyanazon idő alatt ugyanazt az utat teszi meg, ha az egyik nyugalmi helyzetéből kiindulva egyenletes gyorsulással mozog, a másik pedig ebben a gyorsuló mozgásban elért legnagyobb sebesség értéknek a felével egyenlő állandó sebességgel, ami bizonyítandó volt."[38]

A tétel természetesen ugyanazt mondja, amit a középkori fizikusok a Merton-szabállyal fejeztek ki. Az új a bizonyítási mód, ahogy Galilei a pillanatnyi sebességek (párhuzamos vonalak) és azok összessége (*AEB* háromszög, ill. *AGFB* négyszög) közötti összefüggést megtalálja. A Merton-szabályban csak a háromszög és a négyszög területének az összehasonlításáról volt szó. Galileinél azonban az *AE* és *GF* egyenesek kerülnek előtérbe. Ezek pedig nem egyebek, mint az idő (*AB*) és a sebesség (*EB*-vel párhuzamos vonalak) közötti összefüggést megadó függvények. A Merton-szabály csak az ábrákat, az alakzatok *formáit* látta, Galilei az ábrákat az őket alkotó – ahogyan ma mondanánk – *sebesség ordinátákra* bontotta fel.

A következőkben az így bebizonyított Merton-szabály segítségével kissé körülményesen, de elvileg egyszerű módon levezeti az 1604-ben kimondott tételt: az egyenletesen gyorsuló mozgásban a megtett út arányos az idő négyzetével. S azáltal, hogy megadja egy előírt módon változó sebességű ($v = gt$) mozgás minden időpillanatához (t) tartozó utat $s = \frac{g}{2}t^2$,

[38] Discorsi… 192–194.

elvégzi azt a műveletet, amit mi integrálásnak nevezünk, helyesebben megkeresi egy derivált függvény primitív függvényét.[39]

Galilei közvetlen és közvetett itáliai tanítványai – Cavalieri, Torricelli, Stefano degli Angeli, Ricci kardinális – a mesterük által lerakott alapokon tovább dolgozva, kiépítették ennek az új matematikai-fizikai módszernek az elemeit. Nyomukban francia és németalföldi matematikusok – elsősorban Descartes, Hudde, Sluse és Pascal – az újonnan bevezetett változó matematikai mennyiségek pontosabb analízisével és a rájuk alkalmazható számítási módszer, az infinitézimális kalkulus alkalmazási feltételeinek a tisztázásával a XVII. század közepén megteremtették az alapot ahhoz, hogy a század második felében egységes, jól definiált és saját szimbolikával rendelkező módszerré álljon össze az új matematika. Ennek a módszernek a segítségével lépésről lépésre megérthetővé vált a természetben végbemenő mozgások legnagyobb része.

A „természet” az organikus, emberszabású antik kozmoszból, a középkor kinyilatkoztatott univerzumából és a reneszánsz titokzatos matematikai harmóniák által uralt világából racionális módszerekkel leírható mechanizmus lett.

Galilei hatalmas életművében a mozgáselmélet csak egyik fejezet, de talán a legfontosabb fejezet. Mert a mozgás lényegének a racionális és materialista megértése tette lehetővé, hogy Galilei távcsővel végzett felfedezései után teljes határozottsággal kiálljon a kopernikuszi világrend fizikai realitása mellett, s örökre eltörölje az égi és földi mozgások között az egyház által féltő gonddal őrzött különbséget.[40]

[39] Toeplitz, O.: Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. I. Berlin–Göttingen–Heidelberg 1949, 79–81.

[40] Vekerdi László: A skolasztikus világkép és az újkori természettudomány. = Világosság 5 (1964) No. 3. pp. 169–173.

A GALILEI-KÉP VÁLTOZÁSAI[41]

Alig két-három évtizede könnyű volt áttekinteni, egyszerűnek látszott megérteni Galilei szerepét a „modern tudományos világkép” kirajzolódásában. Giorgio de Santillana könyve tisztázta Galilei nagy pörének a részleteit, és feltárni látszott ellenségei indítékait a kopernikánizmus körül vívott hosszú küzdelemben. Anneliese Maier évtizedes, minuciózus kutatásai felderítették, hogy mit is vehetett át voltaképpen Galilei a XIV. századi párizsi magiszterektől és az oxfordi calculatoroktól. Alexandre Koyré imponálóan nehéz, ám lassacskán egyre jobban megértett tanulmányaiból pedig az infinitézimális számítás rejtelmeiben nem nagyon járatos tudománytörténészek is elképzelni vélték, miként volt képes Galilei a szabadesés – tehát egy időbeli jelenség – „geometrizálásával” kísérletek nélkül máig érvényesen megteremteni az új fizika modern matematikai értelemben vett „terét”. Minden világos volt és egyszerű; a tudománytörténészek szilárdan megalapozottnak vélt fölényük tudatában jóindulatú mosollyal tekinthettek az afféle csacskaságokra, mint a pisai ferdetornyos kísérlet legendája, vagy a „mégis mozog” dacos dobbantása. Úgy látszott, hogy a kutatóknak ezen a területen már csak a kisebb, legjobb esetben is legfeljebb érdekes részletek feltárása maradt, mint ahogyan azt a fiatal Stillman Drake kezdte csinálni vég nélküli Galileo-gleanings-eiben az ISIS hasábjain. S hogy a hatvanas években szinte kötelező „deheroizáció” se maradjon el, a Nagy Toszkán születésének négyszázadik évfordulójára megjelent Arthur Koestler Alvajárók-ja, alaposan lerántva a keresztvizet a modern tudományos gondolkozás megteremtőjének durva „redukcionizmus”-áról, amivel persze csak növelte a tudományfilozófusok hódolatát Galilei józan „racionalizmusa”, illetve „hypothetico-deduktív” módszere iránt.

Azután lassacskán szépen megváltozott a tájék. Először a Koyré tézisein felcseperedett tudománytörténész-generáció szedte ízekre igen meg-

[41] Előzménye: Vekerdi László: A Galilei-kép változásai. = Természet Világa 123 (1992) No. 8. pp. 352–354.

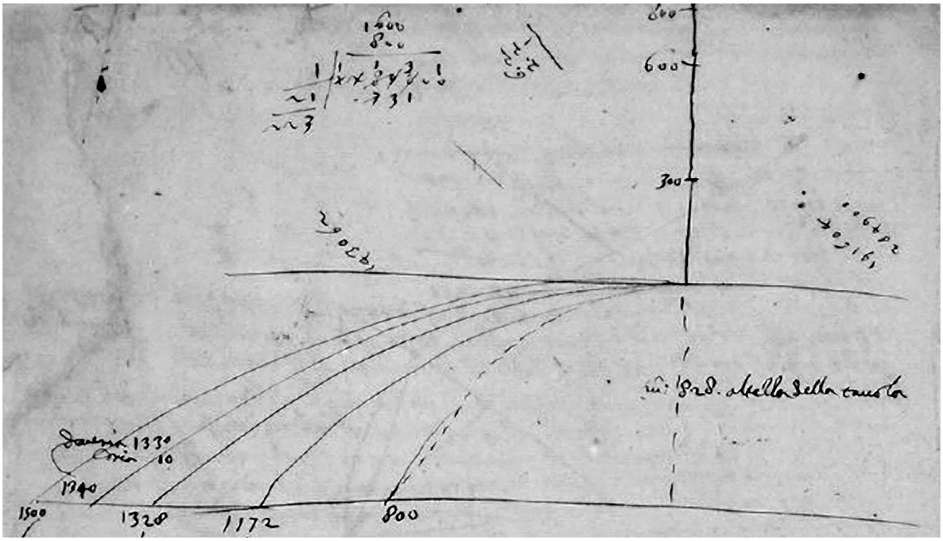
győzően a mester „szélsőségesen platonista” Galilei-rekonstrukcióját (ami különben magában mutatja, hogy milyen nagy professzor volt Koyré). Aztán kiderült, hogy Galilei nem annyira a középkori filozófusok műveiből, mint inkább a korabeli és jórészt véle egykorú jezsuita professzorok jegyzeteiből tanult. A Koyré írásaihoz méltóan nehéz antikoyréista fejtegetéseket inkább csak a beavatottak értették, ellenben ez a jezsuitáktól tanuló peripatetikus Galilei már kisebbfajta szenzációt keltett, legalábbis szakmai körökben. Szűkebb szakmai körökön túlterjedő érdeklődést és izgalmat azonban csak az váltott ki, amikor Pietro Redondi egy pompásan fölépített monográfiában azt bizonygatta, hogy Galileit tán nem is kopernikánizmusa miatt ítélték el; ezt csak afféle barokk színfalként húzták elő, éppen az ő érdekében, veszedelmesebb vádak leplezésére.

Redondi tézisét a szakma szinte egyöntetűen elutasította, de legalább gondosan tanulmányozta. Az arisztoteliánus jezsuita-tanítvány Galileit – láthatóan különösebb gondolkozás nélkül – a szakma széleskörűen elfogadta. Elfogadta a napjainkra hivatalból antikoyréistává vált tudománytörténet-írás a mozgás tanát gondosan kitervelt kísérletekkel megalapozó új „experimentalista Galileit” is, ám ezt a körülményes kéziratvizsgálatokra és kísérletrekonstrukciókra támaszkodó képet a kidolgozásában résztvevők szűk körén túl aligha követi valaki; az embernek gyakran az az érzése támad, hogy olykor még a beavatott résztvevők sem értik egymást. De hát ez nem újság napjaink egyre inkább „önkifejezésre” törekvő tudományos életében.

Ennyivel tán el is intézhetnénk a kérdést; aktuális és egyre gyötrőbb gondjaink közepette – a szerkesztőség szíves noszogatásán túl – ugyan mi értelme lehet nekivágni a Galilei-kutatás dzsungelének? Mert a modern vagy inkább tán posztmodern Galilei-kutatás valóságos dzsungel; a tekintetben legalábbis, hogy sokkal könnyebb eltévedni, mint tájékozódni benne. Bár ma inkább mintha eltévedni lenne divatosabb, mintsem tájékozódni; egyebek közt tán ez magyarázhatja Németh László feltűnő „időszerűtlenségét”. Csakhogy eltévedni is többféleképpen lehet. Vannak jókedvű eltévedések, amikor ugyan egyáltalában nem oda jut az ember, ahová menni akart, de a föltáruló táj bőven kárpótolja újdonságával és szépségével. Sőt: gyakran még a jobb és teljesebb tájékozódás lehetőségével is megajándékozza az embert az ilyen vidám eltévedés. Vannak aztán komor és következetes eltévedések, amikor föl se merül többé a tájékozódás igénye, hisz az eltévedők konokul hiszik, hogy jó úton járnak, hogy csak ők járnak a jó úton. Eleinte sajnos nem mindig könnyű eldönteni, hogy a kétféle eltévedés közül melyikben leledzik az ember, később meg már épp a végzetes eltévedések szoktak könnyen kézenfekvő igazságként csábítani. De ne lopjuk az időt és (ha ugyan van még) az olvasó türelmét, vágjunk neki a Galilei-kutatásnak. Induljunk ki a legnehezebb pontból, Galilei mozgásvizsgálatainak az újraértelmezéséből.

Azt szokás hangoztatni, hogy ez az újraértelmezés Thomas B. Settle kísérleteivel indult el, aki – Koyré állításával ellentétben – úgy találta, hogy Galileinek Discorsi-ban leírt kísérlete nemcsak elvégezhető, hanem meglepően pontos is. Az akkoriban még erősen „koyréista" klímában ez az állítás és Settle 1964-ben megjelent doktori disszertációja még nem keltett különösebb visszhangot; ám egy évtized múlva Winifred L. Wisan a mozgáselmélet megalapozását újraértelmező iszonyatosan nehéz monográfiájában már a Galilei-kutatás Thor Heyerdahljaként ünnepelte Settlet, mint aki visszaadta a Galilei-kutatóknak a kísérlet értékébe vetett bizalmat. Ám Vermes tanár úr alias Muki bácsi valószínűleg csak kuncogna az efféle tudománytörténészi csacskaságokon; hisz tudománytörténésznek kell lenni ahhoz, hogy valaki úgy megfeledkezhessen az iskolában látott lejtőkísérletről, hogy tudományos értekezésben kelljen figyelmeztetni rá. Az én emlékeimben legalábbis máig elevenen él diákkorunk hosszú zöld vályúja, amint a fizikai előadóterem rézcsapokkal ékes nagy asztalán méltóságteljes lassúságból hirtelen felgyorsulva száguldott benne lefelé a nagy fehér golyóbis, a páratlan egész számok arányában felrótt vastag fekete vonalak környékén bóklászva a bólogató metronóm egymást követő ütéseinél. Amint gyorsult, annál feltűnőbben csak valahol a környékén, de Magyari tanár úr – alias Kulus – megmagyarázta, hogy ez azért van így, mert nagyon bajos a golyót meg a metronómot pontosan egyszerre elindítani. Galilei ügyesebb lehetett. Igaz, ő nem ilyen fránya metronómmal bajlódott hanem egy nagy lyukas fazekat használt, amint azt oly hihetően részletezi a Discorsi-ban. Akiben megőrződött valamicske az egykori diákból, – még ha később netán tudománytörténész lett is – aligha kételkedhetett, hogy Galilei a kísérletet csakugyan elvégezte, ám de ő bizonyosan ugyanúgy nem ebből jött rá az időnégyzetes törvényre, mint mi. Nem Settle amúgy csakugyan figyelemre méltó rekonstrukciója okozta tehát a nagy fordulatot a Galilei-kutatásban, hanem inkább tán az, hogy kezdték új szemmel nézni a Galilei-kéziratok 72. kötetében összegyűjtött mozgástani feljegyzéseket, számításokat, vázlatokat.

Látta ezeket már Antonio Favaro is, hogyne látta volna, egyikét-másikát közölte is monumentális Nemzeti Kiadásában. De filológiai és életrajzi érdekességen túl semmiféle jelentőséget nem tulajdonított nekik. Stillman Drake ismerte föl a jegyzetek fontosságát, és a lehető legpontosabban igyekezett datálni mindet. Bámulatos filológiai detektívmunka volt ez a datálás, és nem kevésbé bámulatosak – ám most már nem föltétlenül csak dicsérőként értve a szót – azok a következtetések, amiket az általa megfejtett – vagy megfejteni vélt – feljegyzésekből és számításokból Drake Galilei mozgástanáról, illetve mozgásra vonatkozó elképzeléseinek a kialakulásáról és változásáról magának – és nekünk – levont. Szerencsére Drake vállalkozásáról nem kell itt külön szólni, aki akar, magyar nyelven is jól tájékozódhat róla. Itt elég egyelőre a 116v jelű fóliáns értelmezésére emlékeztetni.



5. ábra. Részlet a Galilei-kéziratok 72. kötetének 116v fóliánsából

Ezen az azóta híressé vált fóliánson egy vízszintes síkról leeső öt parabolapálya látható, a földet érésnél számokkal: 800, 1172, 1328, 1340, 1500. Az első kivételével – amelyikhez a parabola szaggatott vonallal van meghúzva – mindhez hozzá van írva egy másik szám: 1131, 1306, 1330, 1460. Hozzá van írva az is, hogy ennyinek kellett volna lenniök az első értékeknek, a 800-nak megfelelően kiszámítva. Fel vannak tüntetve a különbségek is: 41, 22, 10 és 40. A parabolapályák közös kiindulópontjánál meg van húzva fölfelé egy függőleges, és rajta kijelölve 300, 600, 800 és 1000. Fel van még tüntetve a pályák vízszintes irányú kiindulásának a magassága is a szintén vízszintes leesési sík fölött: 828 „punti”. Ezek a „puntik” voltak feltüntetve Galilei vonalzóján; egy „punto” valamivel kisebb volt 1 mm-nél. Van azután a lapon egy csomó számítás meg a bal alsó sarokban egy kör, a bal felső környegyedbe írt két húrral, amik láthatóan egy kicsi meg egy nagy hajlásszögű lejtőt képviselnek. Nem lehet kétséges, hogy itt valóban elvégzett kísérletről van szó. 300, 600 stb. vertikális magasságból eresztette le Galilei a golyót a vályún, hogy aztán az így nyert különböző sebességekkel vízszintes irányba terelten lökődjék ki az asztal szélén, s különböző pályákat leírva érjen újból vízszintes síkra. De mit akart Galilei ezzel a kísérlettel igazolni? Egyáltalában: igazolni akart valamit vagy netán inkább keresett? Drake úgy vélte, hogy Galilei, miután egy másik kísérlettel – mely a 152r fóliánson maradt meg – többszöri nekifutás után tisztázta, hogy az eső test sebessége nem lehet a függőlegesen megtett úttal arányos és tudta már, hogy az arányosság az út négyzetgyökével áll fenn, a 116v fóliánson ennek ismeretében a horizontális mozgás megőrződésének és a sebességek összetevődésének az elvét akarta igazolni. Sikerült is ezt igazolnia, s a kísérlet egyben a parabolapálya-fölfedezésre vezetett. Amint azután Drake egyre jobban megismerte, hogy milyen pontos és gondos kísérletező volt Galilei, nemigen tudta többé elfogadni, hogy csak úgy megjegyzés nélkül lenyelt volna ekkora különbségeket számított és mért értékek között. Ez csak úgy történhetett, véli Drake, hogy Galilei előre számított ekkora különbségekre. Ez csak úgy volt lehetséges, hogy Galilei ekkor már pontos mérésekkel igazolta az egyenletes horizontális és a gyorsuló vertikális mozgás összetevődését, és amikor a 116v kísérletben fölismerte a parabolapályát, már nem bajlódott tovább ennek a kísérletnek a finomításával, hanem egy másik, bonyolultabb pályavizsgálatra alkalmas kísérleti elrendezésre tért át. Drake természetesen meglelte ezt is, a 114v, illetve a 81r fóliánsokon. Mindkét esetben ferde hajításról van szó. „A horizontális projekció jegyzőkönyvéből – írja Drake – még a lejtő hajlásszögét se tudtam megállapítani. Most, a 114v és a 81r fóliánsok mögött rejlő munka rekonstruálásával, az adatok matematikai analízise nyomán meglehetősen biztonsággal állapíthatom, hogy a [horizontális kilökődés sebességét megadó] lejtő meredeksége *arctn 1/2* volt.”

A két esetben az a közös, hogy a golyó horizontális eltérítés nélkül, a lejtő irányában röpül tovább a levegőben. A 114v kísérletben szemmel láthatóan arról van szó, hogy egyre magasabbról engedve szabadjára a golyót a lejtőn, egyre távolabb fog becsapódni a lejtő ferde irányú elhagyása után a vízszintes síkon. A lejtő hajlásszöge valószínűleg *arctn 1/2* = 26.57° lehetett, nemcsak a könnyű megszerkeszthetőség miatt, hanem mert így „a mozgás horizontális komponense pont kétszerese a lefelé irányuló komponensnek, és Galilei egyszerű arányokat keresett elvégezni szándékozott mérései között”. Ebben a várakozásában ugyan csalatkoznia kellett Galileinek, de nem kellett csalatkoznia Drake-ben, aki 2%-os eltérésen belül pompásan reprodukálta Galilei kísérleti adatait. Az nem egészen derül ki Drake leírásából, hogy Galilei voltaképpen mire akart kilyukadni ezzel a kísérletével, csak sejteti, hogy ez készíthette elő a következő, 81r kísérletet.

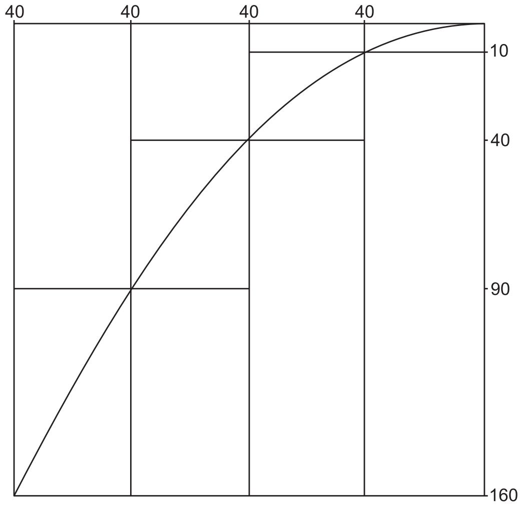
Ebben a kísérletben nem a gurulás hossza, hanem az indítólejtő hajlásszöge és a golyó szabadon esésének a vertikális távolsága változik. A legrövidebb távolság 53 „pont”, ezt követi még három szint. A legalsó szinten a legmeredekebben eső golyó 250 puntó-ra, a laposabban futó golyó 500-ra, a leglaposabban eső 750-re kötött ki az esés vertikális talppontjától. De ne kövessük Drake fejtegetését, úgysem derül ki belőle, hogy mit akart véle Galilei, ám ha ilyen körülményesen dolgozott volna, aligha maradt volna ideje egyébre; különben is abbahagyta a kísérleteket, véli Drake, mert távcsöves fölfedezései épp ez idő tájt terelték figyelmét az asztronómiára.

Ámde Ronald H. Naylor úgy véli, hogy ez a kísérlet jóval régebbi, még 1605-ből származik. Ő is rekonstruálta a kísérletet, három más hajlásszöggel (20° 30', 7° és 3,5°), és úgy találta, hogy „egy ilyen kísérlet kezébe adhatta Galileinek az eszközt a pálya geometriai alakjainak a megállapítására, és így kideríthette, hogy meglehetősen kicsiny kísérleti hibákkal – a pályák parabolikusak". Miután ezt kiderítette, tért rá „a viszony tüzetes vizsgálatára a pálya parabolikus alakja és elméletének két alapvonása, az inertiaelv és az esési törvény között". Naylor is kitér persze itt a 116v kísérletre és más, nehezebben interpretálható fóliánsokat is felsorakoztat, de amúgy igen érdekes fejtegetéseitől egyelőre tekintsünk el, mert még a Drake-énél is körülményesebbek.

A közérthetőséget (és a humort) kedvelő Galileinek bizonyosan jobban tetszett volna David K. Hill – egyébként nem kevésbé nehezen érthető – dolgozata, ami szerint „egy olyan jó megfigyelő, mint Galilei, aki méghozzá kiválóan ismerte Arkhimédész és Apollóniosz kúpszeletekről szóló írásait, úgyszólván bármiből rájöhetett a parabolikus pálya elvére, a szökőkutak, a vízsugarak alakjából, vagy hogy egy még sokkal gyakoribb példát tekintsünk, a férfi vizeléséből". Azért persze Hill se hagyja el a kéziratelemzést, ő is a 81r kísérletből indul ki, ámde őszerinte Galilei három különböző hajlásszögű (24–26°, 12–13°, 11°) lejtővel úgy állította be a projekciót, hogy a legalsó szintet mindhárom esetben 250 puntónál messe a golyó pályája. A három felsőbb szinten kimérve a metszéspontokat – a golyók leesési pontjait – aztán már könnyen megállapíthatta, hogy a pálya erre a közös alapvonalra vonatkoztatva a legkisebb hajlásszögű lejtő esetében közelíti meg legjobban a parabolát. Természetesen Hill is rekonstruálja a kísérletet, és az eredmények egyetlen megmagyarázható eltéréstől eltekintve, az ő rekonstrukciójában is meglepően jól egyeznek Galilei adataival. Miután a 81r kísérlettel megállapította a vízszintes irányú hajítás pályájának parabolaalakját, Hill Galileije valami még fontosabbat igazol. A számítógépes szimuláció kiderítette, hogy egy 11,5–13 fokos hajlásszögű lejtővel, 329,5 puntós esési magasságot feltételezve a lejtő hosszaiban mért 400, 800, 1200, 1600, 2000, 2400 és 2800 puntós gurulási távolságokkal a kísérlet eredményei pontosan egyeznek a Galilei által feltüntetett adatokkal. De ennek a hét számnak az aránya 1:2:3:4:5:6:7. Olyan egyszerű, hogy nem is volt szükséges külön feljegyezni. És ha a sebesség a megtett úttal egyenes arányban növekedne, akkor mondjuk egy négyszeres növekedés nagyjából négyszer akkora projekciós távolsághoz vezetne. Azonban a kísérlet azt mutatja, hogy a gurulási távolság 400-ról 1600-ra való növekedésével a projekciós távolság 253 puntóról mindössze 451 puntóra nő. És ez azt sugallja, hogy új fölfedezése az igaz, hogy ti. a sebesség a távolság négyzetgyökével arányosan nő, hiszen ha egyenes arányban nőne, 1012 körül mozogna az érték; a négyzetgyökös arány szerint viszont csak $253 \times \sqrt{4}$ azaz 506 lenne, ami sokkal közelebb van a 451-hez, s az eltérést – ezt Galilei is tudta jól – a kísérleti elrendezés bőven magyarázza. Épp ezért tervezte meg s végezte el a 116v kísérletet, folytatás-, és javításképpen, ugyanezzel a hosszú lejtővel. „A 81r kísérlet pompásan megerősíti a parabolikus pálya hipotézisét; a 114v jó, de valamivel gyengébb megerősítése a [négyzetgyökös] sebességtörvénynek. Galilei tisztán láthatta, hogy az utóbbi kísérlet pontatlanságait ki lehet küszöbölni teljesen horizontális projekcióra berendezkedve, a ferde mozgás teljes impetusát horizontális impetussá alakítva át. A golyó így mindig vertikális impetus nélkül lökődne ki, bármekkora a projekciós gurulása és sebessége, és így mindig azonos repülési idő után érne földet. A horizontális impetus pedig mindig állandó maradna a projekciót követően. Különböző konstans sebességekre a vízszintesen megtett távolságok nyilvánvalóan a sebességekkel arányosak, hiszen a repülési idők egyenlők. Galilei horizontális projekciói így megadnák a különböző gurulási távokból nyert sebességek arányát. Ezeket a kísérletből nyert arányokat azután össze lehet hasonlítani az új sebességtörvényből számított arányokkal. A 116v vizsgálata azt mutatja, hogy Galilei épp ezt az összehasonlítást végezte el. Ha a 300 puntós gurulást követő horizontális projekció (828 puntós vertikális esés után) 800 puntós projekciót ad, akkor – ha az új sebességtörvény helyes – a következő projekciókat a lejtőmagasság-különbségek arányainak a négyzetgyökével kell növelni. A számok mutatják, hogy Galilei milyen jó megfelelést talált kísérleti adatai és a sebességtörvény között, megcáfolva így a régi sebességtörvényt és igazolva az újat.” Most már – véli Hill – világos az összefüggés 81r, 114v és 116v között. A 116v a 114v pontosítása, és egyben a 81r-en elkezdett parabolapálya-analízisnek is a tökéletesítése. „Ha ezt észrevesszük, nyomban nyilvánvalóvá válik, hogy Galilei nem egyszerűen kísérletek sorozatát konstruálta, hanem egy valódi experimentális programot dolgozott ki, amely állja az Evangelista Torricelli, Blaise Pascal és Isaac Newton későbbi programjaival való összehasonlítást”.

Ezt a megállapítást Ronald Naylor persze nem hagyhatta annyiban. „Amint 1980-ban jeleztem – írja 1990-ben –, a 116v fóliáns csakis a lövedék pályájára vonatkozó kutatási program kulminációjaként érthető meg, és bármiféle próbálkozás a kéziratnak holmi »felfedezési dokumentum«-ként való kezelésére ez idáig figyelembe nem vett következményekkel járhat.” Naylor szerint így jár el Hill, aki akárcsak Drake és Wisan, „elszigetelten”, „önmagában” próbálja megérteni a 116v fóliánst.

Nem egészen érthető ugyan, hogy miért vádolja Naylor Hillt a 116v „elszigetelt” kezelésével, a lényeg azonban inkább az, hogy ő az „experimentális program” helyébe egy szabályos lakatosi „kutatási program”-ot iktat. A kutatási program szerint Galilei, miután a 81r kísérletben felismerte a lövedék parabolikus pályáját, elébb papíron ceruzával matematikai analízissel tisztázta, hogy ebből a kísérletileg talált jelenségből mi következhet, illetőleg, hogy miféle princípiumokból vezethető le, s csak azután látott neki ellenőrizni a matematikai következtetéseit a 116v kísérlettel. Ezt a gondolati munkát őrzi a 117r fóliáns.



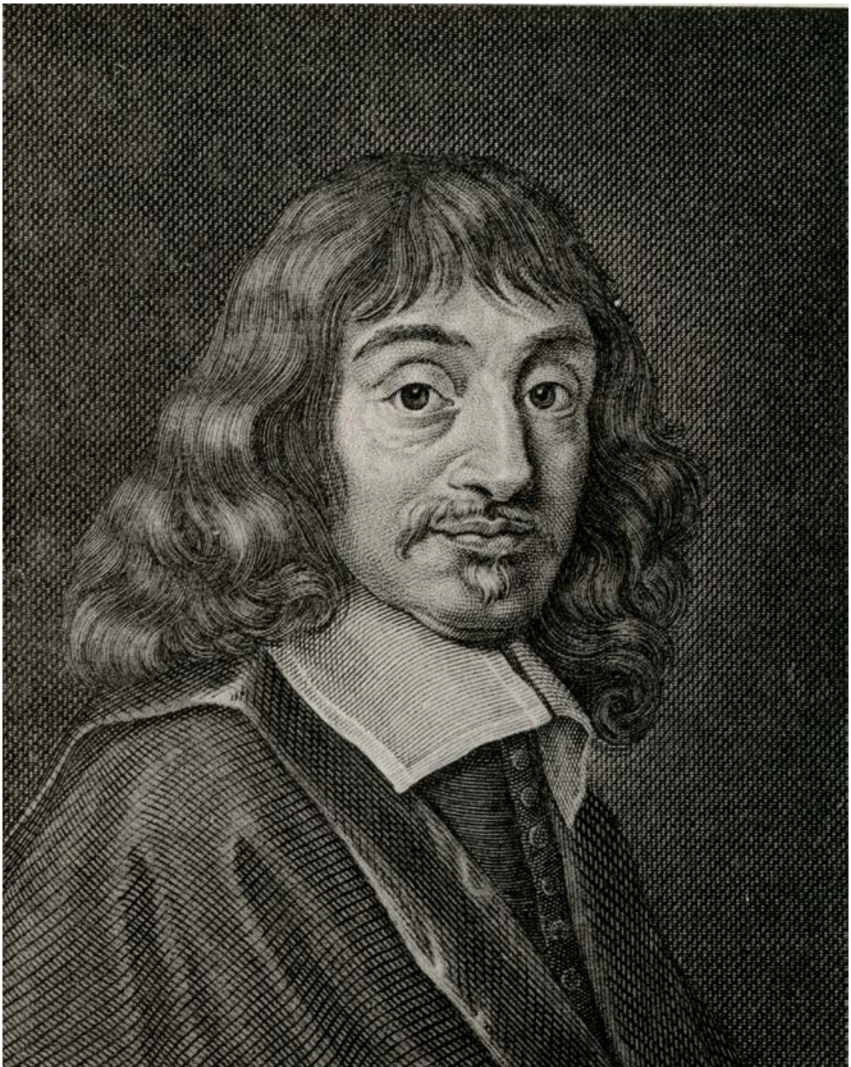
6. ábra. A Galilei által készített 117r kéziratlapon lévő illusztráció rekonstruált változata R. H. Naylor feldolgozásában

A 117r a parabolikus pályán történő mozgás geometriáját elemzi, mindenekelőtt a horizontálisan kilökődő golyóét. Ekkor Galilei tudta már, hogy a horizontális és a vertikális mozgás független egymástól, a horizontális momentum megőrződik, a vertikális mozgás pedig az időnégyzetes törvény szerint történik; ezt a tudást foglalja össze a fóliáns felső részén középen elhelyezkedő ábra, egymás után négyszer 40 egységgel horizontálisan és 10, 30, 50, 70 egységgel vertikálisan felmért vonalaival. Azonnal látható, hogy épp az így kijelölt rácsba illik bele a parabola. De láthatók más számok is az eredeti fóliánson: 100, 121, 155 és 196, illetve 41, 34, 21. A számok egyszerűen értelmezhetők, ha Galilei az „átlagos sebesség” növekedését kereste a parabolapálya mentén. Az első pályaszakaszban az „átlagos sebesség” $\sqrt{10^2 + 40^2} \approx 41{,}23$, a másodikban $\sqrt{30^2 + 40^2} = 50$, a harmadikban $\sqrt{50^2 + 40^2} \approx 64$, a negyedikben $\sqrt{70^2 + 40^2} \approx 80{,}6$.[42] Átszá-

[42] Az átlagos sebesség a golyó által megtett út és az ehhez szükséges idő hányadosa. Az itt szereplő „átlagos sebesség” a parabolapálya mentén mozgó golyó által megtett út lineáris közelítésén alapszik, amelyet a Pitagorasz-tétel alkalmazásával határozhatunk meg. *(A lektor kieg.)*

mítva ezt a sort, 41,2-t véve 100-nak, a fenti sorozatot kapjuk. A sebességnövekedések: 121–100=21, 155–121=34, 196–155=41 adják a másik számsorozatot. A sebességnövekedések változásai: 34–21=13, 41–34 =7 csökkenő számsorozatot adnak, ami nem lenne lehetséges, ha a szabadesésben a sebesség az úttal arányosan növekedne. Így csak a másik lehetőség jöhet számításba: a sebesség az idővel arányosan nő. „Ha valami, hát a 117r a cruciális dokumentum – írja Naylor –, nem a 116v. A 117r-en ugyanis Galilei a parabolapálya három elvét annak a megállapítására használja, hogy a mozgás melyik definíciója helyes. Nyilvánvaló, hogy az elveket szilárdabban megalapozottnak látta, mint a mozgás definícióját, melynek, ha helyes definíció, meg kellett egyeznie a parabolapálya elveivel. Galilei akkor »fedezte fel« a mozgás helyes definícióját, amikor végre felismerte, hogy miként illenek mindezek a fogalmak az elméletébe – és ebből következett, hogy a régi definíciót mint összeegyeztethetetlent el kellett vetnie. A 117r fóliáns ezt a folyamatot mutatja működésben”. A 116v kísérlet azután ezt az egész teóriát, elveket és definíciót együtt igazolja, a parabolikus pályát használva „kutatási eszköz” gyanánt. „Hiszen a 116-os fóliáns a pályát problémamentesként kezeli, ami aligha történhetne, ha Galilei még nem értette volna a fizikai szituációt, vagy ha bizonytalan lett volna, hogy milyen viszonyban áll a pálya azon alapprincípiumával, hogy a sebesség egyenesen arányos az idővel. Ez a követelmény kizár bármiféle feltételezést, hogy Galilei a 116v fóliánson a sebességnövekedésre vonatkozó valamiféle kérdést fedezett volna fel vagy oldott volna meg.” Ezért nem zavarták a meglehetősen nagy eltérések a számított és a mért értékek között. Különben is volt még egy garanciája a parabolapálya mellett: Naylor szerint Galilei a 116v kísérletben két lejtőt használt egyszerre, erre utalna a fóliáns bal alsó sarkában a kör a bal felső negyedében egy nagy meg egy kis hajlásszögű lejtővel, amelyek arányát véve a golyó egyszerre ér az ejtőasztal szélére, ahonnét azután egyszerre fog koppanni az alsó deszkán, hisz az esés magassága egyforma, és a horizontális meg a vertikális mozgás függetlensége miatt csakis ez határozza meg az esés idejét, ha a golyó horizontálisan, vertikális momentum nélkül ért az asztal szélére.

Kinek a rekonstrukciója valószínűbb? Érdemes egyáltalában bajlódni ezekkel a nehezen érthető modern rekonstrukciókkal, mikor megjelent műveiben maga Galilei még csak meg sem említi a fóliánsokon található kísérleteket és spekulációkat? Meglehet, elsősorban éppen ezért érdemes. Először is Galilei, bár nem említi, nagy becsben tarthatta ezeket a feljegyzéseket, hiszen végig megőrizte őket. A feljegyzések nélkül meg se lehet érteni, miképpen jutott Galilei a mozgás új elméletéhez. Teljes pontossággal persze a feljegyzésekkel se, hiszen éppen ezt mutatja a sokféle rekonstrukciós lehetőség. Épp ez a sokféleség mutatja viszont, no meg a rekonstrukciók bonyolultsága és nehezen érthetősége, hogy miféle konceptuális és experimentális nehézségekkel kellett Galileinek megbirkóznia, amíg eljutott a mozgás új felfogásához. Összehasonlítva a rekonstrukciókat a Discorsi szövegével és ábráival, szépen látszik továbbá a különbség a felfedezés meg a közlés kontextusa közt, amire David K. Hill nyomatékosan figyelmeztetett is: „Úgy tűnik, hogy a Discorsi formális mozgáselméletében Galilei részletes kísérleti hivatkozásokat inkább csak különféle rések betömésére használt, nem pedig azért, hogy megerősítsen specifikus elveket, amelyekre kéznél voltak meggyőző geometriai érvek." Tehát a Discorsi mozgáselméletében ragaszkodott a klasszikus axiomatikus felépítéshez, amint azt a korabeli matematikai humanizmus mesterei Euklidésztől és Arkhimédésztől tanulták. Így járt el Tartaglia, így Guidobaldo del Monte és így jóval Galilei után a Principiában Newton. Ebben a klasszikus axiomatikus köntösben azonban igenis megjelennek a fóliánsok kísérletei; a 116v például a Negyedik nap számos tételében és propozíciójában fölismerhető, persze teljes geometriai, helyesebben arányelméleti általánosságban, konkrét számítások és kísérleti adatok nélkül. E tekintetben valószínűleg Wisannak van igaza, aki egyazon hatalmas arányelméleti rekonstrukció keretében tárgyalta a fóliánsok kísérleteit és a Discorsi axiomatikus mozgáselméletét. Nem annyira holmi „ellentétről" van tehát szó a „felfedezés" és a „közlés" kontextusa között, arról inkább, hogy Galilei pontosan tudta, amit a modern tudománytörténészek – kivált a divatos tudományfilozófiákra hallgatók – oly könnyen elfelejtenek: a kísérlet csakis jól meghatározható, izolálható, egyedi jelenségekre vonatkozhat, míg minden valamirevaló elmélet lehetőleg általánosítani igyekszik. És megint csak ellentétben modern tudományfilozófusokkal – Galilei sose keverte össze a kettőt. Tanítványai az Accademia del Cimentóban nem véletlenül ragaszkodtak olykor szinte zavaró aprólékossággal a kísérleti körülmények meghatározásához. Megtanulták mesterüktől, hogy a kísérleti körülmények „elteoretizálása" soha nem vezet jóra. Ezt Galileiig nem tudták; ma is sokan elfelejtik, ebből (is) adódnak aztán a különféle „nulladik típusú" kóklerségek és a hidegfúziós típusú szenzációk. De tán ez is azt mutatja, hogy milyen nehéz mesterség a kísérleti módszer, vagy ahogyan az Accademia del Cimento után nemsokára a Royal Societyben nevezik: az „experimentális filozófia". Galilei mozgástani jegyzeteinek a modern rekonstrukcióival is azért érdemes tán leginkább bajlódni, mert ezek a rekonstrukciók a maguk bizonytalanságaival, nehézkességükkel, nehezen érthetőségükkel, egymást is félreértésükkel gyönyörűen demonstrálják, hogy miféle ködön és homályon kellett átküzdenie a Nagy Toszkánnak magát ahhoz, hogy a kísérlet általa megteremtett távcsövével megláthassa a mozgás fizikájának az alapjait. Épp ezekről a ködökről és homályokról szólnak a kortárs jezsuita professzorok jegyzetei nyomán írt ifjúkori értekezései, ez azonban már másik történet.



DESCARTES ÉRINTŐSZERKESZTÉSI MÓDSZERE[43]

Szinte hagyományossá vált már a matematikatörténet-írásban, hogy Descartes matematikáját „antiinfinitezimális”-nak tekintsék. Pedig a XVII. század nagy, egyedülálló matematikai élménye az infinitezimális számítás, a „kalkulus” megteremtése volt. S Descartes, akit minden matematikatörténész a legnagyobb XVII. századi matematikusok közé sorol, éppen a század legnagyobb matematikai vállalkozásából maradt volna ki? Miért, s hogyan lehet akkor a század csaknem minden nagy matematikusának tanítómestere, miért belőle indulnak ki s ellene futnak össze a század szenvedélyes matematikai vitái? A legenda, amit – ha ugyan máig legnagyobb biográfusának, Charles Adamnak hinni lehet – már maga elkezdett szőni önmaga körül, nőttön nőtt a matematikatörténészek szorgos kutatásai következtében is.

DESCARTES MATEMATIKAI MŰVEINEK BEOSZTÁSA

Descartes hatalmas matematikai munkásságát az Adam–Tannery-féle kiadás kötetei szerint lehet legkönnyebben beosztani. A VI. kötet tartalmazza azt a matematikát, amit sokáig hittek a *par excellence* kartéziánus matematikának: a ’Geometrie’-t. A X. kötetben van korai matematikai munkássága a ’Regulae’-val bezárólag. Az első öt kötet tartalmazza szétszórva, levelezés formájában a descartesi matematika legérdekesebb részét, az infinitezimális problémákat, vagy ahogyan a modern kritika szereti nevezni: az infinitezimális számítás descartesi „pótlékait”. A három rész szervesen egybefonódik, és csak egymás segítségével érthető meg. A ’Geometrie’ algebrája nem érthető meg a ’Regulae’ gondolkozási szabályai nélkül, s a ’Geometrie’ jelentőségéből úgyszólván semmit sem

[43] Előzménye: Vekerdi László: Descartes érintőszerkesztési módszere. = Matematikai Lapok 17 (1966) No. 1–2. pp. 165–179.

lehet megérteni a levelezés hatalmas és széleskörű alkalmazásai nélkül. A descartesi tudományt és filozófiát csak kiadói és didaktikai szempontokból lehet részekre osztani, ha valamit is meg akarunk érteni belőle, elkerülhetetlen az egész ’Oeuvre’ ismerete.

A ’Levelezés’ néhány jellegzetessége

A kartéziánus matematika megértéséhez a ’Levelezés’ a kulcs. Descartes ’Levelezés’-e különleges gonddal felépített „tudományos dolgozatok” sorozata. Descartes szakmai természetű leveleit eleitől fogva nyilvánosságnak szánta, s míg egyébként idegenkedett a publikálástól, levelezését annyira közügynek tekinti, hogy akik nem voltak hajlandók leveleik kiadásába beleegyezni, azokkal egyáltalán nem levelezett. Amikor Fermat húzódozott levelei kiadásától, kizárólag Mersenne atya nyomatékos kérésére folytatta vele tovább alapvető fontosságú matematikai vitáját. A ’Levelezés’ matematikáját leghelyesebb talán folyóirat-pótló közleménysorozatként felfognunk, amelynek elterjedését a Mersenne-féle levelezési szervezet biztosította, s az általa keltett viták során a kor egyik legfontosabb matematikai inspirátora lett.

A ’Levelezés’ matematikájának a hatása sokkal nagyobb volt, mint ma hisszük. A XVII. század közepén egyetlen matematikus sem volt mentes tőle. Elsősorban a ’Levelezés’-hez fűződtek a holland kommentátorok munkái, s ezek igen népszerűek voltak az új tudomány egyik legfontosabb műhelyében, Angliában. „Mr. Moore-nak és másoknak igen nagy véleménye van Huddeniusnak Des Cartes végéhez írott jegyzeteiről”[44] – írja a XVII. századi angol matematika páratlan ügyvivője, Collins. S mikor Clerselier kiadja Descartes ’Levelezés’-ét, a kötetek Angliában is azonnal keresettek lesznek. „Meg van nekem Des Cartes *Levelei*nek első két kötete franciául – írja Collinsnak egy levelezője –, de hiányzik a harmadik; és ezt öntől kell kérnem. Mindegy franciául vagy angolul küldi...”[45]

Ez az olvasó nem tartozott a nagy matematikusok vagy filozófusok közé, egyszerű művelt ember volt, s ez a tény nagyon fontos Descartes hatásának a megértése szempontjából. A XVII. század második felében Descartes nem a válogatott kevesek olvasmánya volt, minden magát műveltnek tartó ember kötelességének vélte olvasni. A XVII. század gondolatvilága annyira telítve volt matematikával, hogy a matematikai ismeretek magától érthetően hozzá tartoztak a műveltség fogalmához. Érhető, hogy Descartes matematikájának a hatása sokkal mélyebb és szélesebb körű volt, mint azt ma a reá hivatkozó viszonylag kevés idézetből sejthetjük.

[44] Correspondence of scientific men of the seventeenth century. Ed. by Stephen Peter Rigaud, 2 vols. Oxford, 1841. (Továbbiakban: Corr. Rigaud) I., 50, Collins to Dr. Pell, April 9., 1667. 127.

[45] Corr. Rigaud I., 71, Towneley to Collins, Jan. 4., 1671/2. 184.

Ebből a szempontból igen fontos az a tény, hogy Descartes 'Levelezés'-ében – ellentétben a század más nagy tudósaival – úgyszólván sohasem ír olyan dolgokról, amiket megjelent, készülő vagy tervezett könyveiben tárgyal. 1629-től, amióta a 'Geometrie'-n dolgozik, a könyv megjelenéséig (1637) alig fordul elő 'Levelezés'-ében matematika, a 'Geometrie' megjelenését követő évek matematikája pedig már egészen másféle matematika, inkább alkalmazása és folytatása a 'Geometrie' matematikájának.

A 'Levelezés' matematikájának beosztása

A 'Levelezés' matematikájának egyik nagy fejezete a ciklois körül csoportosul. Különösen a ciklois alatti terület kiszámítására végzett vizsgálatai fontosak, mert ezekben először határozta meg pontosan, s méghozzá konstruktív úton azt a fogalmat, amit évszázadokkal később „határozott integrál"-nak nevezett a matematika.[46]

A 'Levelezés' matematikájának második nagy csoportja az érintő szerkesztésére vonatkozó kérdésekből áll. Az érintőszerkesztés problémáját már a 'Geometrie'-ben tárgyalta, azonban a modern matematikatörténet-írás Descartes módszerét s jelentőségét is teljesen félreismerte a XVII. századi matematika legnagyobb ismerőjének, J. E. Hofmannak alapvető közleményéig. Hofmann mutatta meg, hogy a 'Geometrie' egyik célja éppen az érintőszerkesztés megoldása a görbék esetében.[47] A 'Levelezés'-ben Fermat-val és híveivel folytatott szenvedélyes vita során ezt a módszert általánosítja és elmélyíti, a módszer pontos algoritmusának a kidolgozásán keresztül a differenciálszámítás egyik legkorábbi előfutára lesz.

A harmadik nagy problémakör, amit a 'Levelezés' matematikája tárgyal, az ún. „fordított érintő feladat". Ennek az a lényege, hogy meg kell keresni egész általánosságban valamely adott érintési feltételeket kielégítő görbét. Descartes felismeri, hogy ez a feladat csak a területszámítással rokon művelet segítségével oldható meg. Modern terminológiában kifejezve azt mondhatnánk, hogy Descartes egy konkrét esetben az ún. De Beaune-feladat esetében megkeresi a derivált függvény primitív függvényét, azonban ha valójában ezt végzi is el, az elnevezés anakronisztikus, mert Descartes sem a függvény, sem a határátmenet fogalmát nem ismeri. Descartes az antik kimeríthetetlenségi eljárást adaptálja a feladat megoldására. De ezt az eljárást addig kizárólagosan csak területszámításra alkalmazták, s a módszer új kontextusban való használata előkészítette

[46] Vekerdi László: Descartes infinitezimális módszere a ciklois-terület meghatározására. Matematikai Lapok 15, 196–203. 1964.

[47] Scholz, H. – Kratzer, A. – Hofmann, J.: Descartes. Drei Vorträge. Münster, Westfalen, 1951, 64–66.

az utat területszámítás és érintőszerkesztés közötti összefüggés felismeréséhez. Ahhoz a problémakörhöz, amit később „az integrál és differenciálszámítás alaptételének” neveztek el, s aminek a felfedezését Barrow-nak, Leibniznek vagy Newtonnak szokás tulajdonítani.[48]

FERMAT ÉS DESCARTES VITÁJA AZ ÉRINTŐSZERKESZTÉSRŐL

Ezt a hosszú és elkeseredett vitát már Montucla Fermat javára döntötte el, s azóta több matematikatörténész ismételte véleményét. Moritz Cantor szerint a „hiú” Descartes egyszerűen nem akarta megérteni Fermat zseniális módszerét, bosszúból, mert Fermat lebecsülte ’Dioptrique’-ját, amit Mersenne még kéziratban odaadott volt neki.[49] Lényegében ugyanez a véleménye Jean Itardnak,[50] de ugyanígy vélekedett már Milhaud is, és ezt vette át Yvon Belaval.[51] Szerinte Descartes Fermat eljárását kritizáló leveleiben ugyanazt végzi el, „amit Fermat, csak Fermat felismeri, hogy határátmenetről van szó”, Descartes pedig „szokása szerint” megkerüli a határátmenetet.[52]

Helytálló-e ez az általánosan elfogadott interpretáció? Valóban nem érti Descartes a Fermat-féle eljárást? És mindenek előtt vajon szabad-e Fermat eljárásával kapcsolatban „határátmenetről” beszélni? A kérdések megválaszolására analizáljuk először Fermat eljárását, s azután vizsgáljuk meg a módszer Descartes általi kritikáját.

Fermat érintőszerkesztési módszere maximum-minimum eljárásán alapul. A Fermat-féle maximum-minimum eljárást Moritz Cantor foglalja össze legvilágosabban: „Tegyünk a maximummá vagy minimummá teendő kifejezésben az A ismeretlen helyébe egy két ismeretlenből álló $A + E$ összeget, és tekintsük a két kifejezést megközelítőleg egyenlőnek (adaequentur)... Ezután a megközelítőleges egyenlővé tevés után töröljük mindkét oldalon ami törlendő, és ezáltal csupa E-t tartalmazó tagokat kapunk. E-vel osztva és újból egyszerűsítve töröljük (elidantur) a még E-t tartalmazó tagokat. A fennmaradó egyenlet szolgáltatja A azon értékét, amely maximummá vagy minimummá teszi a kérdéses kifejezést.”[53]

48 Lásd kötetünkben Vekerdi László: ’A newtoni infinitezimális analízis kialakulása a XX. századi matematikatörténet-írás tükrében’ c. tanulmányt!

49 Cantor, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweiter Band, erster Halbband, von 1200–1650. Leipzig, 1899, 374.

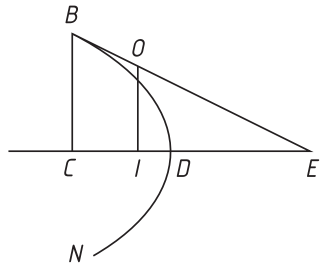
50 Itard, J.: Le XVII[e] siècle, sciences mathématiques et physiques = Historie générale des sciences publiée sous la direction de R. Taton, II, Paris, 1958, 207–276, 222.

51 Belaval, Y.: Leibniz, critique de Descartes. Paris, 1960, 305.

52 Uo. 307.

53 Cantor, M.: im. 858.

Ezt az elvet a következőképpen alkalmazta Fermat az érintőszerkesztésre: „Legyen adva pl. a *BDN* parabola, melynek *D* a csúcsa, *DC* a tengelye, legyen adva a parabolán egy *B* pont, húzzunk *B* ponton keresztül *BE* egyenest, amely érinti a parabolát és *E* pontban metszi *CD* egyenest. Vegyünk fel a *BE* egyenesen egy tetszőleges *O* pontot, húzzuk meg az *OI* ordinátát, *B* pontból pedig a *BC* ordinátát, akkor azt látjuk, hogy $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$, mert az *O* pont kívül esik a parabolán. De $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$ a háromszögek hasonlósága miatt. Tehát $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$. Mármost *B* pont adott, tehát *BC* ordináta is, tehát *C* pont és *CD* szakasz is. Legyen tehát $CD = d$ adott. Vezessük be a $CE = a$ és $CI = e$ jelöléseket, akkor



7. ábra

$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2 + e^2 - 2ae}$. Képezzük a kültagok és a beltagok szorzatát:

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

Tekintsük a fenti módszer szerint a két oldalt megközelítően egyenlőnek (adaequentur), akkor az azonos tagok törlése után

$$de^2 - 2dae = -a^2e$$

marad, vagy ami ugyanaz:

$$de^2 + a^2e = 2dae.$$

Osszunk minden tagot *e*-vel:

$$de + a^2 = 2da.$$

Hagyjuk el (elidatur) *de*-t, marad

$$a^2 = 2da, \quad \text{tehát} \quad a = 2d.$$

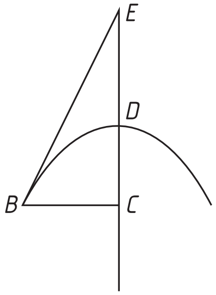
Így bebizonyítottuk, hogy *CE* kétszerese *CD*-nek, ami megfelel az igazságnak.”[54]

Descartes szerint azonban Fermat semmit sem bizonyított be. Szabály és példa egyaránt hibás. 1638 januárjában ezt írta[55] erre vonatkozóan

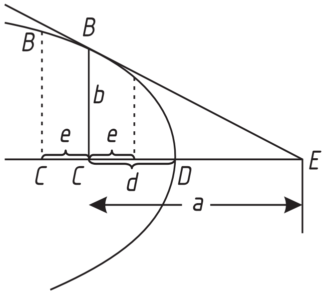
[54] Modern átírásban közöljük, J. Itard szerint (im. 221). Eredeti formájában a régi jelölés miatt nagyon körülményes.

[55] Descartes levele Mersenne-hez 1638 januárjában. Descartes, Œuvres, Adam–Tannery-féle kiadás (továbbiakban AT) I, 487–488.

Mersenne-nek: „Legyen *BDN* az adott parabola, melynek *DC* a tengelye, és amelynek *B* pontjából kell húzni *BE* egyenest, amelyik *DC* egyenest *E* pontban metszi úgy, hogy *BE* egyenes leghosszabb legyen *E* pontból a parabolához húzható egyenesek között: sic enim proponitur quaerenda maxima (így tűzi ki ugyanis a maximum feladatot). Az ő szabálya így szól: „...Descartes a következőkben körülményesen, Fermat régi írásmódjában, helytelen következtetést vezet le, Descartes saját írásmódjába áttéve a következőképpen szól:



8. ábra



9. ábra

Tekintsünk két esetet. Legyenek első esetben $BC = b$, $EC = a$, $CD = d$. Ekkor az EBC derékszögű háromszögből $BE^2 = a^2 + b^2$.

Legyen most második esetben (9. ábra szaggatott vonal) $EC = a - e$, vagy ami az eredmény szempontjából ugyanaz, $EC = a + e$ és ugyanígy legyen $CD = d + e$. Ennek a második esetnek megfelelő BC ordináta kiszámítható a parabola tulajdonságát kifejező $\frac{BC^2}{d+e} = \frac{b^2}{d}$ arányból:

$$BC^2 = \frac{b^2(d+e)}{d} = \frac{b^2 d + b^2 e}{d}.$$

Mármost hozzáadva $EC = a + e$ négyzetét, ebből a második (szaggatott vonalhoz tartozó) háromszögből is megkapjuk ennek az esetnek megfelelő BE^2-et. Ezt egyenlővé téve az első esetben kapott BE^2-tel:

$$a^2 + b^2 = b^2 + \frac{b^2 e}{d} + a^2 + 2ae + e^2.$$

Osztva e-vel

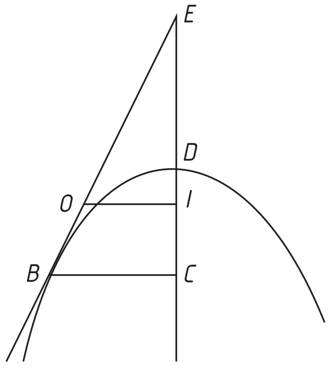
$$\frac{b^2}{d} + 2a + e = 0$$

marad. Elhagyva (elidantur) e-t,

$$\frac{b^2}{d} + 2a = 0,$$

„ami egyáltalán nem adja meg az érintő értékét, mint a szerző állítja, következésképpen szabálya hamis.”

Descartes tévedését azonnal észrevették Fermat barátai: hevesen tiltakoztak Descartes érvelése ellen. A parabola érintőszerkesztésében – mondották – az a lényeges, hogy a második esetben a *BE* egyenesen vegyünk fel egy tetszőleges *O* pontot, aminek nem szabad – mint Descartes tette – a parabolán feküdni. Ugyanis az a fontos – érveltek –, hogy *CD* aránya *DI*-hez nagyobb legyen, mint BC^2 aránya OI^2-hez, s ehhez szükséges, hogy *OI* nagyobb legyen, mint a parabola *I* pontban emelt ordinátája.



10. ábra

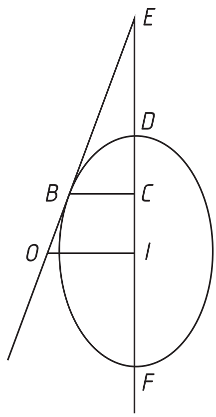
Descartes szerint[56] azonban ez sem segít. Ugyanis ugyanez az egyenlőtlenség felállítható a másik két kúpszelet, az ellipszis és a hiperbola esetében is, s mégis *ugyanaz* a számítás, amelyik a parabolánál helyes eredményre vezet, az ellipszis és a hiperbola esetében hibás értéket ad.

Descartes kritikájára Roberval válaszolt,[57] 1638 áprilisában. „Monsieur Descartes – írja – szokása szerint olyan okoskodást fabrikált, amelyikről azt akarja elhitetni, hogy Monsieur de Fermat okfejtése.” De helytelenül járt el, mert csak az *E* felé eső részen tekintette az ellipszisnél az *O* pontot az érintőn, pedig a *B* pont másik oldalán is kellett volna tekintenie az érintő pontjait, s akkor látta volna, hogy itt nem érvényes az, hogy $\frac{CD}{DI}$ nagyobb mint $\frac{BC^2}{OI^2}$, és így az ellipszis esetében magától érthetően *nem* szabad alkalmazni ezt az arányt. A használt egyenlőtlenség specifikusan csak a parabolánál érvényes az érintési pont mindkét oldalán, éppen ezért használta a parabolánál Fermat. Az ellipszis és hiperbola esetében más, csak ezekre érvényes specifikus tulajdonságokból kell kiindulni. Descartes tehát igen súlyos hibát követ el újra, ami „nagyon figyelemre méltó annál, aki a helyes gondolkozás módszeréről értekezett, mert egyenesen ellentétben van a helyes gondolkozás és az igazi logika szabályaival, amely azt tanítja, hogy ahhoz, hogy valamely tárgy specifikus tulajdonságaira következtethessünk, azokban a propozíciókban, melyekből az okfejtés áll, ugyanazon tárgy legalább egy másik specifikus tulajdonságát kell alkalmaznunk, azaz a saját természetéből kell következtetnünk, ami csak hozzá tartozik.” Ezzel szemben Descartes „szokása szerint gyárt egy

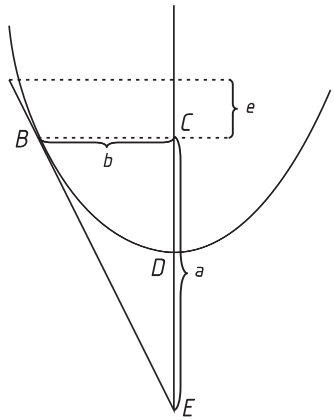
[56] Descartes levele Mersenne-hez 1638. március 1-jén. AT II, 1–15.
[57] Roberval Descartes ellen. Paris, 1638. április. AT II, 103–115.

okoskodást, amelyben csupa olyan általános tulajdonságot alkalmaz, amely tulajdonságok nem csak minden kúpszeletre, de még az egyenesre is állanak, anélkül, hogy bármiféle specifikus tulajdonságot alkalmazna".[58]

Descartes hangsúlyozza válaszában,[59] hogy éppen maga Fermat állította módszeréről, hogy az általános érvényű, minden görbénél alkalmazható. Az a feltétel pedig, hogy csak a parabola esetében áll az alapul szolgáló egyenlőtlenség az érintési pont mindkét oldalán, egyáltalán nem magától értetődő dolog, ha dolgozni akarunk vele, külön ki kell jelenteni. S éppen ezt mulasztja el Fermat, aki a *B* pontot az érintő *végpont*jának tekinti. A következőkben azután Descartes részletezi, mit csinált szerinte Fermat.



11. ábra



12. ábra

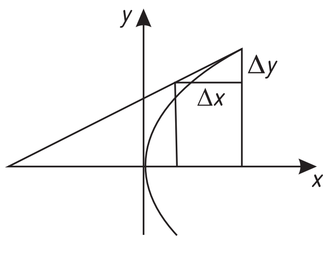
Eljárásának lényege az, hogy a kis *e* távolsággal megnövelt *a*-nak megfelelő *BC*-t *két* módon kell kifejezni: egyszer *BCE* és az *a* befogó *e*-vel való megnövelésével kapott háromszögből azon az alapon, hogy *a* úgy aránylik *b*-hez, mint $a + e$ aránylik *b* megfelelő értékéhez; másodszor pedig a $BC = b$ távolságot mint a parabola ordinátáját kell kifejezni a parabola „specifikus tulajdonságaiból", egyenletéből.

A két módon kifejezett *BC*-t egyenlővé kell tenni, s a továbbiakban már teljes joggal alkalmazható a Fermat által adott szabály. A *végeredmény*t Fermat is helyesen kapta meg, de elmulasztotta a fenti feltétel kimondását, s ami semmi egyéb – írja Descartes –, mint amit ő a 'Geometrie-ben' használt, „és ez az az alap, amire Mr. F. szabályának is épülnie kell. Abból, hogy elhagyta úgy látszik, hogy csak tapogatózás útján találta szabályát, vagy legalábbis az, hogy nem érti tisztán az elveit."[60]

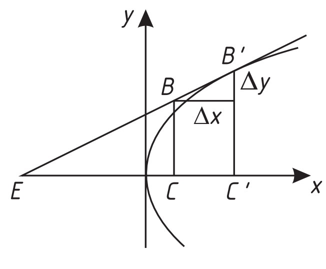
[58] Uo. 111–112.
[59] Descartes levele Mersenne-hez 1638. május 3-án. AT II, 122–132.

Matematikusok és matematikatörténészek már Montucla óta szerették volna, ha Fermat valamiféleképpen a szelő határhelyzeteként határozta volna meg az érintőt, előre megsejtvén vagy éppen megalkotva ezáltal a „differenciálhányados" fogalmát.[61] Éppen ezért írnak mindenütt „megközelítően egyenlőt" Fermat kategorikus „tegyük egyenlővé"-je helyett, még az egyébként pontosan idéző Itard is így fordította a szót Fermat érintőszerkesztésének fentebb idézett modern átírásában. Fermat azonban *ténylegesen* egyenlőségnek tekintett egy egyenlőtlenséget, s ez a határérték fogalmának az ismerete előtt két évszázaddal a matematikai pontossághoz ragaszkodó Descartes-nak joggal sérthette a szemét. Még másik szépséghibája is volt Fermat eljárásának. Nem tudta pontosan meghatározni, miért és mire alkalmazza az érintő meghatározásánál „maximum-minimum" módszerét. (Fermat módszerének erre a hiányosságára Turán professzor hívta fel a figyelmemet.) Egyenlőtlenségek alkalmazása maximum-minimum problémák megoldására ekkoriban már egyáltalán nem volt újság,[62] de Fermat éppen roppant szerencsés algoritmusával nagy egyszerűsítést tett lehetővé ezen az addig minden esetben külön, egyedi megfontolást igénylő területen. Ez magában véve is óriási dolog, függetlenül attól, hogy maximum-minimum algoritmusában a „határérték" fogalmát sejtette-e meg, vagy sem. Érthető, hogy eljárását minél több területen igyekezett gyümölcsöztetni, valószínűleg ez a vágy vezette a fénytörés problémájához is a fizikai kérdésektől egyébként kissé idegenkedő nagy matematikust.

A módszer az érintő szerkesztésében is kiválóan alkalmazható volt, de alkalmazásának körülményeit Fermat nem rögzítette. Éppen ebből a szempontból olyan fontos Descartes közbelépése. A helyzet könnyebb megértése kedvéért tekintsük át a vita eddigi lépéseinek lényegét.



13. ábra



14. ábra

[60] Uo. 129.

[61] Lásd pl. Bell, E. T.: The development of mathematics. New York, 1945. 143–145.

[62] Ez az egyenlőtlenséggel való megoldása szélsőérték problémáknak jól ismert volt az itáliai matematikában, gyakran alkalmazta pl. Torricelli. L. pl. Hofmann, J. E.: Geschichte der Mathematik II. Berlin, 1957, 28. Továbbá C. B. Boyer: The history of the calculus. New York, 1959, 157.: „However, whereas Torricelli had made use of arguments by a reductio ad absurdum, Fermat's characteristic procedure resembles more closely the method of limiting values."

Legyen adva egy másodfokú parabola csúcsával a koordinátarendszer kezdőpontjában (14. ábra). *B* pontban az érintőt megtalálhatjuk a Δx és Δy befogójú „karakterisztikus háromszögből” illetve a parabola egyenletéből. Semmit nem kell „maximummá tenni”, jóllehet ugyanazt az algoritmust kell használni, mint a szélsőérték-feladatoknál: a differenciálhányados kiszámítását. Fermat és kortársai azonban ezt a fogalmat nem ismerték, annál inkább a maximumét. Descartes is elhiszi Fermat-nak először, hogy valóban maximalizál valamit, s tévesen a görbe pontjainak meg az *E* pontnak a távolságára gondol, ezért veszi fel hibásan a számításhoz használt segédpontot az érintő helyett a görbén (9. ábra). Fermat és barátai tiltakoznak: ebben az esetben nem írható fel a maximum-feladat, mert a kiinduló *egyenlőtlenség* nem érvényes. Descartes viszont szellemes ellenpéldát hoz: ugyanez az egyenlőtlenség *más* görbék esetében is felírható, nemcsak a tárgyalt parabolánál, azoknál viszont helytelen eredményre vezet. Roberval most felismeri – talán éppen azért támad olyan mérgesen –, hogy a lényeg nem annyira az egyenlőtlenségen meg a „maximalizáláson” van, hanem a görbe „specifikus tulajdonságán”, egyenletén. Most már Descartes világosan látja Fermat eljárásának lényegét: az érintőt a parabola egyenletéből meg az *EBC* és *EB'C'* háromszögből kell meghatározni. Ahogyan ma mondanánk, a Δx, Δy által adott „karakterisztikus háromszögből” (14. ábra). Azután megmutatja, hogy ilyen körülmények között a Fermat-féle számítás a görbék egy speciális osztályánál, az algebrai egyenlettel előállítható görbéknél egzakt módon elvégezhető.

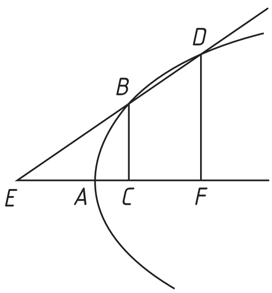
AZ ÉRINTŐ ÉS SZELŐ VISZONYA

Fermat szerint – mint Descartes-ig mindenki szerint – görbe és érintője egyetlen pontban találkozott, módszerének lényegéhez tartozott ez a fogalmazás. Descartes fedezte fel, hogy az érintési pontban görbének és érintőnek két közös pontja van, hogy „egybeejteni”, s nem „törölni” kell valamit. Felfedezést és módszert pontosan megfogalmazta 1638 nyarán Cl. Hardynak írt levelében.[63] Hardy egyike volt azon kevés matematikusoknak, akikről feltételezte, hogy értik a 'Geometrie'-t, ezért már saját új stílusában írt neki.

„Legyen tehát – írja – az adott görbe vonal *ABD* és legyen adva a vonal *B* pontja is, ti. megadom a $BC = b$ ordinátát és az $AC = c$ átmérőt, és keressünk ezen az átmérőn egy olyan *E* pontot, hogy az *E* ponton és *B* ponton át húzott egyenes messe a görbét még egy másik pontban, mondjuk *D* pontban úgy, hogy *DF* ordináta adott arányban legyen *BC* ordinátához, mondjuk mint *g* aránylik *h*-hoz. Jól tudja, hogy eme *E* pont

[63] Descartes levele Hardyhoz 1638 júniusában. AT II, 163–173.

megkeresésére először is azt mondhatjuk – $CE = a$ és $CF = e$ jelölés bevezetésével –, hogy az ECB és EFD háromszögek hasonlósága miatt $CE = a$ úgy aránylik $BC = b$-hez, mint $EF = a + e$ aránylik DF-hez, mely utóbbi ennek következtében $DF = \frac{ba + be}{a}$.



15. ábra

Azután, mivel DF a görbe ordinátáinak egyike, megadható más tagokkal is, melyek különféle görbék esetében különbözőek lesznek. Pl. ha a görbe az első azok közül a vonalak közül, melyeket Monsieur de Fermat a parabola mintájára képzelt el, azaz az, melynél az átmérő egyes szakaszai úgy aránylanak egymáshoz, mint az ordináták köbei, akkor azt mondjuk, hogy $AC = c$ úgy aránylik $FA = (c + e)$-hez, mint BC köbe, ami b^3, aránylik DF köbéhez, ami a fentebb talált tagokkal kifejezve

$$\frac{b^3a^3 + 3b^3aae + 3b^3aee + b^3e^3}{a^3},$$

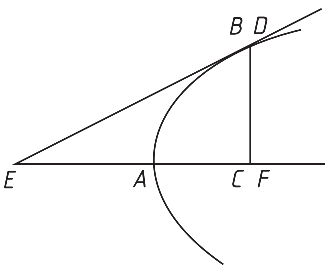
mert ez $\frac{ba + be}{a}$ köbe.”

Ebből az aránypárból azután kapunk egy egyenletet a és e-re:

$$a^3 = 3caa + 3cae + cee.$$

Mivel egy egyenletünk van két ismeretlenre, szükség van még egy egyenletre. Ezt az egyenletet a $\frac{BC}{DF} = \frac{g}{h}$ aránypárból kapjuk. A két egyenletből meghatározható a két ismeretlen, a és e.

Mármost ha ezt a módszert az érintő megkeresésére akarjuk alkalmazni, „csupán azt kell tekintetbe venni, hogy amikor az EB egyenes érinti a görbét, akkor DF egybeesik BC-vel”, azaz arányukból egyenlőség lesz, s ha az előbb, amikor EBD egyenes B és D pontokban metszette a görbét $\frac{BC}{DF} = \frac{g}{h}$ állott, most, mikor EB érintő lesz, $g = h$. S akkor a fenti $DF = \frac{ba + be}{a}$ kifejezést betéve $BC : DF = g : h$ aránypárba, mivel $BC = b$, a $bh = \frac{gba + gbe}{a}$ egyenletet kapjuk, azaz $ha = ga + ge$, „és mivel $h = g$, csupán $a = a + e$ marad, azaz e egyenlő zérussal. Ebből nyilvánvaló, hogy a értékének a megkeresésére nem kell egyebet tenni, mint az első egyenletben, ami $a^3 = 3caa + 3ace + cee$, minden e-vel szorzott tag helyébe zérust kell helyettesíteni, azaz törölni. Mert egy valódi mennyiséget megszorozva egy másik képzelt mennyiséggel, amilyen a nulla, az eredmény mindig zérus. És ez Monsieur Fermat homogének elisiója, ami így bevezetve semmiképpen sem gratis. Elvégezve az elisiot, egyenletünkből $a^3 = 3caa$ marad, azaz $a = 3c$", ami valóban a harmadfokú parabola érintőjét adja meg.



16. ábra

„Íme a szabály alapja. Virtuálisan két egyenlet szerepel benne, jóllehet elegendő egyet említeni explicite, mivel a második csupán a homogének törlésére szolgál. De nagyon valószínű, hogy Monsieur Fermat ezt a pontot nem értette meg; és csak próbálgatással jött rá, hiszen kihagyja a legfontosabb feltételt."

Foglaljuk össze Descartes eljárását. Az érintő két egyenlet két ismeretlenének a meghatározásából adódik. Az egyik egyenlet a görbe egyenlete, a másik egyenlet egy, a görbét metsző egyenes egyenlete. Érintő esetében a görbe és a szelő két metszéspontja egybeesik.

Nem „határhelyzete"[64] itt sem az érintő a szelőnek. De Descartes felismeri, s a görbék egy speciális csoportjánál, az algebrai egyenlettel megadható görbéknél pontosan ki is fejezi az érintő és a szelő közötti összefüggést. Hasonlóan, a görbe és a görbét metsző kör egyenletéből határozta meg már a 'Geometrie'-ben az érintőt. Ez az eljárás algebrailag éppen olyan kifogástalan volt, mint a 'Levelezés' most ismertetett érintőmódszere. Hiányzott azonban belőle a továbbfejlődés lehetőségének az a magja, amelyet a Fermat-módszer kritikája során született eljárás olyan világosan megfogalmaz: az érintő és a szelő viszonyának a felismerése. Ahhoz, hogy általános, nem csak algebrai görbék esetében érvényes módszer születhessen, meg kell majd mozdítani az ábrát. Akkor azután – mint Leibniz felismeri – a szelő minden határon túl közelít az érintőhöz, s a g és h mennyiségek aránya pedig – ez Newton „végső arányok módszerének" a lényege – az egyhez.

[64] Vö. C. B. Boyer im. 167.: „In criticising Fermat's method of tangents, Descartes attempted to correct the method by interpreting it in terms of equal roots and coincident points, a procedure which was practically equivalent to defining the tangent as the limit of a secant. Descartes did not express himself in this manner, however, inasmuch as the concept of a limit was far from clear at this time. Fermat, who was thinking of infinitesimals, could not see that his method had anything in common with the algebraic (limit) method of Descartes and so precipitated a quarrel as to priority…" A *mai* ismeretek szempontjából Boyer interpretációja nagyjából azonos azzal, amit a fentiekben kifejtettünk. De a történelmi fejlődés szempontjából az volt a fontos, hogy Descartes, ha csak a matematika szűk területén is, tiszta, modellként alkalmas eljárást teremtett az érintőszerkesztésre.

Descartes azonban nem dolgozott átmenettel, nem mozdította meg ábráját. Talán azoktól a pontatlanságoktól félt, melyekbe – a határátmenet pontos fogalma nélkül – Newton és Leibniz is belekeveredtek. Talán azért, mert azoknak a görbéknek az esetében, melyeket ő a matematika fejlődése szempontjából legfontosabbnak tartott, az algebrai egyenletekkel kifejezhető görbék esetében, erre nem is volt szükség. A szelő ill. a megfelelő *e* mennyiség bevezetésével itt úgy kaphatunk érintési feltételt, hogy nincs szükség határátmenetre. De ebből nem következik – s éppen ez a felismerés Descartes nagy tette –, hogy az érintőnek és görbének egy közös pontja lenne, mint Fermat hitte, s így elég lenne *egy* egyenlet a meghatározására. Az érintőnek két közös pontja van a görbével, két egybeeső „metszéspontja", amit két egyenletből kell meghatározni, a görbe és a szelő egyenletéből. A görbének azért van érintője, mert ennek a két egybeeső pontnak a környezetében megközelítően egyenesnek tekinthető. Ma úgy mondanánk: kicsiben lineáris.

Hofmann vette észre, hogy Leibniz a kartéziánus matematika „mélyebb intencióit"[65] ismeri fel s fejleszti ki infinitezimális számításában. Maga Descartes azonban a tiszta és pontos fogalmazás érdekében óvakodott az infinitezimális megfontolást igénylő problémáktól, holott ismerte és több helyen érintette. Szabó Árpád[66] mutatta meg, hogy az eleata filozófia nyomán tájékozódó görög matematika egyik legnagyobb tette a püthagoreus matematika naiv infinitezimális fogalmainak a kritikája volt. S ugyanúgy, ahogyan az eleata Zénon ún. „végtelen ellenes" paradoxonai állanak a görög infinitezimális matematika, azaz az eudoxoszi arányelmélet és az exhauszciós módszer eredeténél, a nyugat-európai infinitezimális kalkulus kialakulását Descartes reformjai: jelölési módja, érintőmódszere és ún. „anti-infinitezimalizmusa" igen nagy mértékben determinálták. Descartes mérte fel elsőnek a végtelen szelő és érintő között tátongó szakadékát, mint egykor az eleata Zénon pontok végtelenségének megmérhetetlen örvényét rész és egész között. Így kell érteni Descartes kritikájának állandóan visszatérő mondatát.

A matematika fejlődése szempontjából nagyon lényeges volt, hogy Descartes olyan durván szétválogatta a geometrikus és mechanikus, „pontos", algebrai egyenlettel megadható és meg nem adható problémákat. Ezáltal geometriai görbék esetében pontos kritériumát tudta adni az érintő létezésének. És ezzel a valóságba, azaz a létezők tiszta és világos fogalmakból álló világába, a kartéziánus létezés világába horgonyozta le

[65] Scholz, H. – Kratzer, A. – Hofmann, J.: im. 73.

[66] Szabó Á.: The transformation of mathematics into deductive science and the beginning of its foundation of definitions and axioms. Scripta Mathematica 27, 27– 48A, 113–139, 1964.

az érintőt. Most már nyugodtan lehetett spekulálni azon, mi „történik” ha a szelő „közeledik” az érintőhöz.

Descartes még ennek a spekulációnak az irányát is megsejtette: olyasmi történik, ami – bármi is legyen a kérdéses görbe egyenlete – kicsiben egyszerű szorzásra és összeadásra vezethető vissza. Ezt csak Leibniz fedezi majd fel a kartéziánus matematikában, maga Descartes elfordul a végtelen örvényétől, melyet éppen az ő tiszta és világos különbségtevése tett láthatóvá.

De az új matematika nyelvét, s legfontosabb alapfogalmaiból álló nyelvtanát, melyeken keresztül majd legyőzhetők lesznek a végtelen nehézségei, ő teremtette meg olyan területen, ahol ezek a nehézségek nem léptek fel. Ez a nyelv a ’Geometrie’, a harmadik a három nagy óriásesszé közül, melynek a ’Discours’ az előszava. A ’Levelezés’ matematikája bemutatja, hogyan kell az új nyelvet használni különféle – közöttük infinitezimális – esetekben, s hogyan kell az új matematikát fizikai kérdésekre alkalmazni.

A GEOMETRIE (1637) ÉS A DIFFERENCIÁLÁSI ALGORITMUS SZÜLETÉSE[67]

Descartes *Geometrie*-jét a XIX. század óta az analitikus geometria megteremtéseként ünnepelték. Így vezette ezt be M. Chasles, a XIX. század egyik leghíresebb geométere és matematikatörténésze, aki az analitikus geometria előd nélküli, tökéletes formában való megjelenésének tekintette a *Geometrie*-t.[68] S így él ez máig a legtöbb matematikus képzeletében.

Pedig már a századfordulón figyelmeztetett rá egy kivételképpen matematikához is értő filozófus, Louis Liard, hogy „a cím ellenére, a látszat ellenére a *Geometrie* tulajdonképpen nem geometria, hanem algebrai[69] ... Annak a szövetségnek a célja, amit az algebra és a geometria között teremt, nem a geometria megújítása, hanem az algebra átvilágítása a geometriai intuíció tisztaságával. Amit kínál, az egy szóval kifejezve, egyenletek grafikus megoldása."[70]

Az analitikus geometria következménye lesz ennek az algebrai reformnak, de nem ez volt Descartes célja. Csak a már kialakult analitikus geometria felől visszatekintve, a helytelen perspektíva keltette azt a látszatot, hogy a *Geometrie*-ben geometriáról van szó. „Vissza kell fordítani ezt a hamis perspektívát; olyan rendbe kell állítani a dolgokat, amint azt a módszer előírta. Hűen módszeréhez, Descartes a tudomány reformját a legegyszerűbb dolgok tudományán kezdte el, ti. a viszonyokén és arányokén általában, vagy ahogy ő nevezte, az univerzális matematikán."[71] Ennek a módszernek az alapjait fiatalkori művében, a *Regulae*-ban fektette le. Liard szerint a *Regulae* semmi egyéb, mint általánosított arányelmélet. Liard ezt tekinti az egész későbbi cartesianus módszer kulcsának. „Végső

[67] Előzménye: Vekerdi László: A Geometrie (1637) és a differenciálási algoritmus születése. = A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei 15 (1965) No. 1. pp. 33–49.

[68] Chasles, M.: *Apercu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.* Bruxelles 1837, 94–95.

[69] Liard, L.: *Descartes.* Paris ^{2}1903, 47.

[70] Uo. 62–63.

[71] Uo. 63.

analízisben a módszer célja összetett viszonyok képzése egyszerűek segítségével, mint ahogy a számolás a nagyobb számokat az egység megismétlésével konstruálja."[72]

A *Geometrie* későbbi interpretációi ennek a két iránynak a folytatásai. Akik a modern analitikus geometria felől közelednek hozzá, azok, mint Chasles, koordináta geometriát látnak benne, akik a *Regulae* felől, azok algebrát és arányelméletet.

Moritz Cantor[73] jól látta, hogy a *Geometrie*-ben az algebra a lényeg, de az egészet nem tartotta túlságosan újnak. Ezzel szemben Pierre Boutroux[74] szerint Descartes előtt az algebra zsákutcában volt, a továbbjutáshoz mindenekelőtt az egyenletek algebrai megoldásának az elméletét kellett megteremteni, s éppen ezt végezte el Descartes. Charles Adam[75] is az egyenletek elméletét tartja nagy újságnak a *Geometrie*-ben, ez teszi lehetővé a görbék algebrai kezelését. Tannery szerint viszont az a tény, hogy Descartes olyan nagy fontosságot tulajdonít a folytonos mozgás által szerkeszthető görbéknek, arra utal, hogy egy folytonos mozgáson alapuló görbeelmélet kiépítése lebegett a szeme előtt, az érintőszerkesztés módszerének általánosítása érdekében.[76]

Ezeket a század végi–század eleji interpretációkat ismétlik a későbbi történészek. Pl. L. J. Beck,[77] aki Liard interpretációját eleveníti fel, kidolgozva a *Geometrie* és a *Regulae* közötti összefüggéseket. Egy másik angol történész, J. F. Scott pedig Charles Adam értelmezését részletezi: „Minden algebrai számítás öt elemi műveletből, összeadásból, kivonásból, szorzásból, osztásból, gyökvonásból van összetéve. Hasonlóképpen, mondja Descartes, a geometriai szerkesztéseket öt megfelelő elemi szerkesztésből kell összetenni. Algebra és geometria így egymás struktúrájára vetnek fényt."[78]

A geometriai értelmezés felől közeledik a *Geometrie*-hez Morris Kline. Arra a hirtelen megnőtt szükségletre figyelmeztet, amit a XVII. század elejének technikai-természettudományos fejlődése támasztott a különféle görbékkel szemben. Az antikvitás görbéi nem voltak elegendőek ennek a keresletnek a kielégítésére. Itt lépett közbe Descartes. A görbét egy változó hosszúságú egyenes vonalszakasz mozgásaival állítja elő,

[72] Uo. 21.

[73] Cantor, M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II/1. von 1200–1650.* Leipzig ^{2}1899, 793–796.

[74] Boutroux, P.: *L'imagination et les mathématiques selon Descartes.* Paris 1900, 41.

[75] Adam, Ch.: *Wie et Œuvres de Descartes. Supplément a l'édition de Descartes*. Paris 1910, 214.

[76] Tannery, P.: „Les Excerpta ex MSS. R. Des-Cartes" *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Neuntes Heft*, 1899, 501–513.

[77] Beck, L. J.: *The method of Descartes. A study of the Regulae.* London 1952.

[78] Scott, J. F.: *The scientific work of René Descartes*. London 1952, 90.

ezen egyenes és talppontjának egy választott kezdőponttól való távolsága között algebrai egyenletet állít fel, s így megadja a kívánt új módszert különféle görbék előállítására.[79]

Ezt az inkább ötletszerű interpretációt alapozza meg tudományos pontossággal D. T. Whiteside. Szerinte Descartes az algebrai görbéket „ponthalmazként" fogja fel, s az x, y koordináta hosszúságok közötti kapcsolat és a görbét kifejező egyenlet közötti aequivalencia analitikus feltételét adja meg $f(x, y) = 0$ formában. „Ilyen körülmények között csak akkor meglepő, hogy a *Geometrie* olyan nagy része foglalkozik egyenletek analízisével, ha elfogadjuk azt a modern szempontot, amely ezekben az eljárásokban pusztán algebrai technikát lát. Mélyebb szinten azonban a *Geometrie* nagy része az általános független-változós polinomot megszabó feltételeket kutatja –, amely vizsgálat közvetlenül kapcsolódik a geometriai pont (és vonal) halmazok elméletéhez."[80]

Descartes matematikai módszerének egyik legutóbbi interpretátora, Jules Vuillemin szerint viszont Descartes az „algebrai függvények általános elméletét" redukálja a geometriai arányelméletre azáltal, hogy csak olyan görbéket enged meg, amelyeknek minden pontja megszerkeszthető. Ekkor a görbe egyetlen pontjának a megadásában sincs szükség megközelítésre, határátmenetre, mint az pl. a De Beaune-feladat görbéje esetében szükséges volt. „Csupán, mivel az analitikus geometria szemszögéből ítéltek, hihették azt, hogy Descartes számot és pontot azonosítva a pontból, azaz a számból indul ki az egyenes megszerkesztésében. Ez a reprezentáció azonban az utódoké, nem az övé. Az ő elve a pontos arányok elve, aminek a *Módszer* által kapott mennyiségek között kell fennállnia. A meghúzható vonalak között kétféle van: azok a görbék, amelyek algebrai egyenletnek felelnek meg, és az egyéb görbék. Az előbbiek Descartes szerint ... szabályozott, pontos és folytonos szerkesztés által keletkeznek. Az utóbbiak csak diszkontinuusan szerkeszthetők meg, grafikus eljárásokkal. Összefoglalva, a filozófus szándéka annak a befejezése volt, amit a görögök kezdtek el. A körzővel-vonalzóval való szerkesztés engedélyezése azt a bővített számtestet eredményezte, amiben csak négyzetgyökök fordultak elő; a Descartes által elfogadott szerkesztések rendeltetése az volt, hogy – modern kifejezést használva – megteremtse a számtest általános algebrai bővítését, a grafikus eljárásoknak átengedett transzcendens testbővítés kizárásával."[81]

Lényegében ugyanezt az interpretációt vezette be már évekkel Vuillemin előtt a XVII. század matematikájának legjobb ismerője, J. E.

[79] Kline, M.: *Mathematics in Western culture*. London 1954, 170.
[80] Whiteside, D. T.: „Patterns of mathematical thought in the later Seventeenth Century" *Archive for History of Exact Sciences*. 1, 1961, 179–388.
[81] Vuillemin, J.: *Mathématiques et métaphysique chez Descartes.* Paris 1960, 87–88.

Hofmann is. Descartes „különbséget tesz precíziós matematika és approximációs matematika között. Minden algebrai úton megoldható problémát – ő geometrikusoknak nevezi ezeket – a precíziós matematikába sorol, minden egyebet – ő mechanikusoknak hívja – az approximációs matematikába ... Egyidejűleg, a vonalszakasz-egység bevezetésével aritmetizálja a geometriát. A számfogalom, ami kezdetben a természetes számokra korlátozódott és csak fáradságos lépések árán volt kiterjeszthető törtekre, negatív számokra és egyszerű irracionalitásokra, egy csapással lényegesen kibővíttetett: az algebrai számok egész tartományát felölelte."[82]

Carl Boyer, az analitikus geometria történetének monográfusa nem látja ilyen kimagaslónak Descartes matematikai teljesítményét. Szerinte Descartes Viète célját veszi át, ami algebrai egyenletek gyökeinek geometriai szerkesztése volt. Descartes tette pusztán új jelölések bevezetésében állott. Az analitikus geometriát viszont Fermat teremti meg, aki ugyan megtartotta Viète régi jelölésmódját, de bevezette az új, analitikus geometriának megfelelő célkitűzést: a geometriai hely tanulmányozását.[83]

Mi volt hát valójában a *Geometrie*? Analitikus geometria? Algebra? Arány-elméletre redukált egyenletelmélet? Görbék előállítására és osztályozására bevezetett módszer? Algebrai polinomok elmélete? Kezdődő függvényelmélet? Számtestbővítés? Vagy, mint Tannery sejtette, előkészület egy általános érintőszerkesztési módszerhez? Vagy egyszerűen, Descartes szándékosan homályba borított könyvében bizonyos részleteket, s ezek vezetik félre az interpretátorokat? „Különös élvezet – írta erre célozva a legnagyobb Descartes-filológus, Charles Adam –, ami újból rávilágít arra, hogy Descartes bizony egy kicsit misztifikátor volt."[84] A *Geometrie* valóban nagyon különös olvasmány. Könnyed és élvezetes, átfutva azt hiszi az ember, hogy teljesen érti. Azután újra kézbe véve meglepődik: mennyire nem értette meg először.

A SZERKESZTÉS FOGALMA ÉS SZEREPE A GEOMETRIE-BEN

A *Geometrie* három könyvből áll. Az első könyv a körzővel-vonalzóval megszerkeszthető problémákról szól, a második görbe vonalak szerkesztésével, osztályozásával és legfontosabb tulajdonságaival foglalkozik. A harmadik könyv a harmadfokú és magasabb problémák egy ötletes görbe-előállító mechanizmus segítségével történő szerkesztésével és ennek a szerkesztésnek megfelelő egyenletekkel foglalkozik.

[82] Scholz, H. – Kratzer, A. – Hofmann, J.: *Descartes.* Münster, Westfalen 1951, 56.
[83] Boyer, C. B.: *History of analytic geometry.* New York 1956, 74.
[84] Adam, Ch.: i. m. 224.

A könyvben tehát szerkesztésekről van szó s így joggal viseli a *Geometrie* címet, amit éppen a szerkesztésekkel foglalkozó tudomány számára tartottak fenn már az antikvitás óta a számolásokkal foglalkozó aritmetikától való megkülönböztetésképpen.

Négy fontos szerkesztési feladat foglalkoztatja Descartes-ot a *Geometrie*-ben: 1. a Papposz-probléma megoldása 2. az ún. optikai oválisok szerkesztése, 3. az érintőszerkesztés és 4. a másodfokúnál magasabb fokú parabolák szerkesztése.

Az egyenletek nagyon megkönnyítik a munkát, de *elvi* különbséget nem jelentenek a rajzban történő szerkesztésekkel szemben. Csupán világosabban eldönthetővé teszik, melyik az a legegyszerűbb görbe, amelynek segítségével egy adott probléma megoldható. Ugyanis ez a görbe az, amelyik a második könyv osztályozási elvei alapján a legalacsonyabb görbe-osztályba tartozik. Ez pedig legkönnyebben a görbét leíró *egyenlet* vizsgálatával dönthető el.

Az egyenletek tárgyalásában is a *szerkesztés* szempontjai dominálnak. Descartes az egyenletet mintegy „megszerkeszti" a gyöktényezőkből. Ez az eljárás: az egyenleteknek az ismeretlenből és a gyökökből álló binomok szorzataként való előállítása ekkor már nem teljesen új. Descartes azonban felismeri az eljárás megfordíthatóságát: az egyenlet osztható egyik gyöktényezőjével, s így eggyel alacsonyabb fokú egyenletté redukálható.

A szerkesztés centrális fontosságának a gondolata végig követi az egyenletek vizsgálatát. A különféle problémák és a nekik megfelelő egyenletek osztályozása a szerkesztésükre használt eljárásokra épül fel. „Ami pedig a test-problémákat (harmad- és negyedfokú egyenletekkel kifejezett problémák) illeti – írja Descartes –, amikről azt mondottam, hogy nem oldhatók meg valamely, a körnél magasabb fokú görbe használata nélkül, eleget lehet találni közöttük, amik mindkét szerkesztésre vezethetők vissza. Ezek egyikében meg kell találni azt a két pontot, amit két adott vonalszakasz közötti középarányosok határoznak meg, a másikban azt a két pontot, amik egy adott ívet három egyenlő részre osztanak. Mert tekintve, hogy a kör csupán egyetlen aránytól függ, ti. amely a pontjai és a középpont között fennáll, a kört csupán két pont közötti egyetlen pont meghatározására, vagy két adott egyenes szakasz egyetlen középarányosának a megadására, vagy egy adott szög két részre osztására lehet felhasználni. A kúpszeletek azonban mindig két különböző dologtól függenek és így két pont meghatározására használhatók fel.

Ugyanezen okból a negyediknél magasabb fokú problémákat, amelyek négy középarányos beírását vagy a szög öt egyenlő részre való osztását követelik meg, nem lehet megoldani a kúpszeletek segítségével. Ezért a lehető legjobbnak gondolom, ha általános szabályt adok a megszerkesztésükre, azt a görbét alkalmazván, amit egy parabola és egy egyenes metszése ír le."[85]

[85] *Geometrie...* Descartes műveinek V. Cousin-féle kiadása, V. kötet, 419–420.

Ez az egyenletek megoldására, helyesebben megszerkesztésére adott görbe előállító mechanizmus, amelyik voltaképpen az algebrai görbék definíciójára szolgál egy parabola és egy egyenes metszéspontjainak a segítségével, lehetővé tette Descartes számára a különböző fokú algebrai egyenletekkel kifejezhető problémák megoldhatóságának a *konstruktív* definiálását. Így bizonyos fokig ebben az eljárásban a Ruffini–Abel-tétel cartesianus megfelelőjét láthatjuk. Mutatja ez az eljárás azt a mély különbséget, ami a komplex számtestben a polinomok faktorokra történő felbontásával dolgozó mai algebra és az egyenletpolinomot szerkesztés-feladatként felfogó cartesianus algebra között van.

Annál feltűnőbb ez a különbség, mert Descartes is a gyöktényezőkre való felbontásból és az egyenletpolinom gyöktényezővel vagy egy másik egyenletpolinommal való oszthatóságából indul ki, mint a mai egyenletelmélet. Pl. ha valamely probléma megszerkesztésénél olyan egyenletre jutunk, amelyben az ismeretlen dimenziója három (harmadik hatványon van), keresünk egy olyan binomot, amellyel az adott egyenletpolinom osztható és így visszavezetjük alacsonyabb fokú problémák megoldására. „De ha egyetlen binomot se találunk, amelyik az adott egyenletpolinomot osztaná, bizonyos, hogy az egyenlettől függő probléma test-probléma – háromdimenziós – és ezek után nem kisebb hiba lenne megkísérelni csupán körzővel és vonalzóval történő megszerkesztését, mint amilyen az lenne, ha kúpszeleteket alkalmaznánk olyanok megszerkesztésére, amelyek csak köröket igényelnek: mert végül is mindaz, ami tudatlanságot árul el, hibának nevezendő.”[86]

Ugyanígy megadja, milyen esetekben redukálhatók negyedfokú egyenletek, azaz milyen esetekben húzódnak meg mögöttük sík-problémák. Azután megadja az általános szabályt a negyediknél magasabb fokú egyenletek redukciójára: „Felsorolhatnánk a következőkben az ötödfokú, hatodfokú és ennél magasabb fokú egyenletek esetét, de inkább összefoglalva tárgyaljuk őket és általánosságban azt állítjuk, hogy ha megkíséreltük az egyenletet előállítani alacsonyabb fokú egyenletpolinomok szorzataként és összeszámlálva mindazokat a módokat, ahányféleképpen az egyenletpolinom alacsonyabb fokú egyenletpolinomok szorzásából előállítható, azt találjuk, hogy az előállítás egyik által sem sikerül, akkor meggyőződhetünk, hogy nem redukálhatók alacsonyabb fokú egyenletekre, úgyhogy ha az ismeretlen mennyiség harmadik vagy negyedik hatványon van, a probléma amelynek a megoldását keressük test-probléma és ha az ismeretlen ötödik vagy hatodik hatványon van, még magasabb fokú és így tovább.[87]

Megelőzően megadott egy példát egy hatodfokú egyenlet redukciójá-

[86] Uo. 401.
[87] Uo. 408.

ra.[88] A példát a fentebb említett görbe-előállító mechanizmusa igénybevételével oldja meg, tehát szerkesztéses alapon. A példa

$$y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$$

éppen

$$x^{km} + a_1 x^{(k-1)m} + \ldots + a_{\mathrm{k-1}} x^{\mathrm{m}} + a_{\mathrm{k}} = 0$$

alakú, ahol $k = 3$, $m = 2$, s mint az jól ismert, éppen ez az eset az, amelyet k-ad fokúra redukálva, ill. ezt követően k számú m-ed fokú $x^{\mathrm{m}} - \mathrm{a} = 0$ binom egyenletre redukálva a négy alapművelettel és gyökvonással lehet megoldani. Hozzávéve ehhez a fentebb idézett sorokat: „...összeszámlálva azokat a módokat, ahányféleképpen az egyenletpolinom alacsonyabb fokú egyenletpolinomok szorzásából előállítható”, hajlandók lennénk azt hinni, hogy Descartes itt a Galois-elmélet közelébe jutott. De a folytatás meggyőz róla, hogy erről szó sem lehet: „Egyébként a fentebb mondottak legnagyobb részének a bizonyításától eltekintek – írja közvetlenül az idézett általános redukciós szabály után –, mivel oly könnyűnek látszanak, ha valaki veszi a módszeres vizsgálathoz szükséges fáradságot, mint én tettem, hogy önmaguktól adódnak, és hasznosabb lesz ily módon megérteni azokat, mint készen olvasva.”[89]

Nem kell itt mélyebb tudás szándékos titkolásától tartani. Egyszerűen, ahol mi az egyenletek általános megoldhatóságának nehéz problémáját sejtenénk, ott Descartes semmi egyebet nem lát próbálgatásokkal történő egyedi megoldásoknál. Az általánosítás számára nem az egyenletek *megoldhatóságának* a síkján jelentkezik, hanem az egyenletek által leírt problémák *megszerkeszthetőségének* a síkján. „Ha meggyőződtünk, hogy az adott probléma test-probléma, akár negyedfokú az egyenlet, amely által kerestük, akárcsak harmadfokú, mindig meg lehet találni a gyökét a három kúpszelet valamelyikének a segítségével,”[90] és ezenkívül csak körző és vonalzó alkalmazása szükséges a szerkesztésben.

Az egyenletek redukciójának az elmélete azt volt hivatva megmutatni, miért nem oldhatók meg a test-problémák a kúpszeletek használata nélkül, s az ezeknél magasabb fokú problémák más, összetettebb vonalak nélkül. Az algebrai egyenletek és az arányelméleti szerkesztések egymásra való leképzése egészen más természetű betekintést nyújt az algebrai egyenletek struktúrájába, mint a mai algebra. Descartes nem ismeri a csoport, a számtest, a testbővítés fogalmát. Amit a modern történetírás ilyenekként ismer fel nála, nem egyéb későbbi fejlődés visszavetítésénél. Descartes nem végezhette el azt, ami Galois és Abel feladata volt. Descartes algebrája a megelőző száz év algebrai fejlődésének az összege-

[88] Uo. 399–400.
[89] Uo. 409.
[90] Uo. 409.

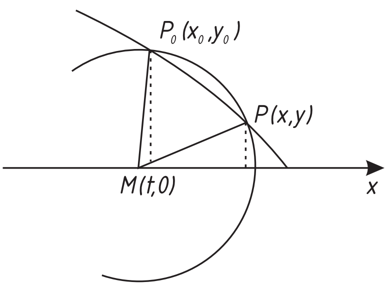
zése az antik kúpszelet- és helyelmélet csúcsa. Ezentúl azonban bevezet valamit, ami a jövő fejlődés szempontjából felbecsülhetetlen jelentőségű volt: az ismeretlen hatványai szerint rendezett, zérusra redukált egyenletpolinom fogalmát és alakját, és felismeri, hogy az ilyen alakban felírt egyenletek oszthatók, akárcsak a közönséges számok.

A XVII. század matematikájában az egyenletpolinom centrális fontosságú lesz. Közvetlenül csatlakoznak hozzá a németalföldi iskola és az angolok: Hudde, Slusius, Pell, Collins, James Gregory és Newton. Az egyenletek redukciója a XVII. század közepére a matematika centrális kérdése lesz, s ezzel szoros kapcsolatban alakul ki előbb csak algebrai egyenlet formájában felírható, majd végtelen sok tagú egyenletre is érvényes formában az első *differenciálási algoritmus.* Descartes az egyenletpolinomban olyan *modellt* teremtett, amelyikre a következő évszázad alatt lassan és nagy nehézségek leküzdése árán felépülhetett a *differenciálás művelete.*

AZ EGYENLETPOLINOM DIFFERENCIÁLÁSA

Descartes a *Geometrie*-ban speciális módszert adott meg a görbe érintőjének a szerkesztésére. A módszer az érintőkör sugarának – a normálisnak – a meghatározásán alapul. A normális abból a feltételből adódik, hogy az érintési pontban a görbe és a kör két metszéspontja, egybeesik. Ebben a pontban a normálisra a kör, a görbe, valamint Püthagorász tételének a segítségével felírt négyzetes egyenletnek két egybeeső gyöke van.

A történészek Moritz Cantor-tól J. F. Scott-ig az érintő kör sugarának a meghatározására helyezik a hangsúlyt, ami a kör és a görbe két metszéspontjának az egybeeséséből adódik. J. E. Hofmann éles szeme vette csak észre, hogy egyébről is van itt szó: Descartes választ a görbén, amelyhez érintőt akar húzni egy $P_o(x_o, y_o)$ pontot és a tengelynek választott egyenesen egy $M(t,\ 0)$ pontot. E körül az M pont körül leír egy P_o ponton átmenő kört, ami a görbét újból metszi $P(x,\ y)$ pontban.



17. ábra

Ez az eljárás az ábra szerint az

$$(x-t)^2 + y^2 = \left(x_0 - t\right)^2 + y_0^2$$

egyenletet eredményezi, ahonnan

$$y = \sqrt{\left(x_0 - t\right)^2 + y_0^2 - (x-t)^2}.$$

Behelyettesítve ezt a görbe egyenletébe $f(x,\ t) = 0$ egyenletet kapja, amelyben $x - x_o$ lineárfaktor fordul elő. „Descartes most megköveteli – írja Hofmann –, hogy az $x - x_o$ faktor még másodszor is lehasítható legyen, s így nyer t-re egy egyedül t-t tartalmazó feltételt.”[91]

Hofmann ezt az eljárást egyáltalában nem tartja lekicsinylendő tettnek, mint azt a többi matematika történészek teszik, csupán mert megkerülte a határátmenetet. Éppen ellenkezőleg az a szép Hofmann szerint ebben az eljárásban, hogy teljesen a cartesianus matematika keretei között maradva, *algebrai* megoldást talált erre az egyébként infinitézimális megfontolásokat igénylő problémára.”[92]

Ennek az infinitézimális módszert megkerülő, tiszta algebrai eljárásnak azonban óriási jelentősége volt az infinitézimális számítás kialakulása szempontjából. Ugyanis az első matematikus, aki ennek az érintőszerkesztési eljárásnak a jelentőségét felfogta, ezen keresztül alkotta meg a differenciálás műveletének az algoritmusát.

A két Francis Schooten – apa és fiú[93] – köré tömörült németalföldi cartesianus matematikusok a XVII. század közepén vaskos tanulmánykötetet adtak ki a *Geometrie*-hez írt kommentátorokból.[94] Ebben van közzétéve Johann Hudde két rövid tanulmánya 1657, ill. 1658-ból. Az első[95] az egyenletek redukciójáról szól, a második[96] szélsőérték problémákról. Az 1657-es tanulmány tartalmazza az első világosan és általánosságban megfogalmazott differenciálási algoritmust a függvények egy speciális osztálya, az egyenletpolinomok esetére megfogalmazva. Hudde maga hangsúlyozza, hogy eljárásának lényege már benne foglaltatott a *Geometrie*-ban, ő csupán explicite kifejtette, megmagyarázta és általánosította az ott elrejtett lehetőségeket. Valójában sokkal többet tett ennél, megadta a Descartes által bevezetett egyenletpolinom differenciálásának az explicit és általános szabályát. Az egyenletpolinom esetében ugyanis a differenciálhatóság egyszerűen két egybeeső gyök létezését jelenti. Pontosan ezt adta meg a *Geometrie,* amikor az érintőszerkesztés kritériumaként a görbét reprezentáló egyenlet két gyökének az egybeesését követeli meg. Hudde azonban felismeri az érintőszerkesztés és a maximum-minimum problémák összefüggését és Descartes speciális eljárását *általános számolási módszerré* fejleszti. Olyan *algoritmussá, amelyik egyenletpolinomok ese-*

[91] Scholz–Kratzer–Hofmann: i. m. 64–65.

[92] Uo. 66.

[93] Az ifjabb Frans van Schootenről J. E. Hofmann írt a reá jellemző csodálatra méltó apparatúrával ellátott rövid bibliográfiát. Hofmann, J. E.: *Frans van Schooten der Jüngere*. Wiesbaden 1962.

[94] Renati Des Cartes Geometria, una cum notis Florimondi de Beaune, in Curia Blesensi Consiliarii Regii, et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten, in Acad. Lugd. Batav. Matheseos Professoris. ... Frankfurti. (1695-ös kiadás.)

[95] *Johannis Huddenii Epistola Prima de Reductione Æquationum*. Uo. 406–506.

[96] *Johannis Huddenii Epistola Secunda de Maximis et Minimis.* Amsterdam 1658. Uo. 507–516.

tében mindig alkalmazható s nem kell keresgélni alkalmazása előtt, vajon érvényes-e az adott esetben.

Hudde, Descartes nyomán, mindig csökkenő hatványok szerint rendezett alakban, nullára redukálva írja fel az egyenletet s az ismeretlen hiányzó hatványait *-gal jelöli. Modern jelölésben (de egyebekben a cartesianus elmélet szelleméhez ragaszkodva)

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

alakban írhatjuk fel az egyenletpolinomot. Hudde először is különbséget tesz kétféle redukció között. Az egyik, a közönséges értelemben vett redukció az ún. abszolút redukció az egyenlet közönséges algebrai műveletekkel történő megoldása. Ezzel nem foglalkozik. A másik, általa relatívnak nevezett redukció a feltett problémára vonatkoztatva vizsgálja az egyenlet gyökeinek a viselkedését. Hudde csak ezzel a redukcióval foglalkozik.

Közvetlenül a *Geometrie*-hez kapcsolódva számos esetet sorol fel, hogyan kell olyan egyenletet redukálni, amely két másik egyenlet összeszorzásából állott elő. Mint láttuk, ezt a kérdést már Descartes elintézte. Azonban Hudde felismeri, hogy a különféle esetek mind feltételezik annak az ismeretét, hogyan kell „két (vagy több) egyenlet vagy mennyiség legnagyobb közös osztóját megkeresni. Tegyük fel példának okáért, hogy két egyenlet vagy mennyiség legnagyobb közös osztóját kell megtalálni.”[97]

Azonnal példán mutatja be az esetet. Legyen pl. a két egyenlet

$$d^3c - acdd + 2aabc - 2abcd = 0$$

$$d^4c - bbcdd + caabb - caadd = 0.$$

Először azt kell megnézni, nincs-e valamely betű vagy szám, amellyel mindkét egyenlet osztható. Jelen esetben pl. mindkét egyenlet osztható c-vel:

$$d^3 - add + 2aab - 2abd = 0$$

$$d^4 - bbdd + aabb - aadd = 0.$$

Azután mindkét egyenletben ismeretlennek tekinti az egyik betűt. Legyen pl. ez a d betű:

$$d^3 - add - 2abd + 2aab = 0$$

$$\begin{aligned} d^4* - &bbdd* + aabb = 0. \\ -&aa \end{aligned}$$

[97] Hudde, J.: *Episola Prima...* 422.

Az egyenleteket a Hudde által alkalmazott cartesianus írásmódban írtuk fel, ahol a zárójelet a tagok egymás alá írása helyettesíti. A legutolsó egyenlet a mi írásmódunkban

$$d^4 - (b^2 + a^2)d^2 + a^2b^2 = 0$$

lenne. A csillagok a Hudde-féle írásmódban az ismeretlen hiányzó hatványait (d^3-t és d-t) jelölik.

Ebben a lépésben veszi fel a Hudde-féle egyenletpolinom azt az alakot, amit mi $f(x) = 0$ alakkal jelölünk és ez a lépés vezet majd Slusiuson keresztül a parciális derivált képzéséhez. Ami ezután következik, az a továbbiak szempontjából nagyon lényeges, azért szó szerint idézzük.

„Azután a d^3-nek az első egyenletből vett értékét behelyettesíthetjük mindenütt a második egyenletben d^3 helyébe és ezt kapjuk:

$$d^4 = ad^3 + 2abdd - 2aabd = bbdd + aadd - aabb$$

vagy (d^3 helyébe az első egyenletből)

$$\begin{array}{ll} & aadd + 2aabd - 2a^3b \\ & \qquad - 2aabd + 2abdd \\ \hline \text{azaz} & aabb - 2a^3b + 2abdd - bbdd = 0 \\ \hline \end{array}$$

és $dd = \dfrac{2a^3b - aabb}{2ab - bb}$ vagy aa, és $d = a$ vagy $d - a = 0$. Így ezt a dd értéket helyettesítve az első egyenletbe, az

$$aad - a^3 - 2abd + 2aab = 0$$

egyenletet kapjuk.

Végül magát a-t helyettesítve be d helyébe az utolsó egyenletben

$$a^3 - a^3 - 2aab + 2aab = 0$$

egyenletre jutunk.

Mivel ebben az egyenletben minden tag kölcsönösen megsemmisíti egymást, bizonyítást nyert, hogy mind a

$$d^3 - add - 2abd + 2aab = 0$$

egyenlet, mind a

$$\begin{array}{l} d^{4}* - bbdd* + aabb = 0 \\ \qquad\quad - aa \end{array}$$

osztható $d - a = 0$-val, azaz $d - a$ mindkettőnek az osztója, a legnagyobb közös osztó. És mivel továbbá mindkét adott egyenletet (vagy mennyiséget) előbb c-vel osztottuk, nyilvánvaló, hogy a legnagyobb közös osztójuk $d - a$ szorozva c-vel, vagy $dc - ac$."[98]

Lehet természetesen d helyett más betűt is ismeretlennek tekinteni és aszerint keresni meg a két egyenlet legnagyobb közös osztóját.

Mint látjuk – s a további fejlődés szempontjából ez a nagyon fontos – Hudde világosan felismeri, hogy a legnagyobb közös osztó létesít olyan kapcsolatot egy $f(x)$ egyenlet s egy ebből megadott szabály szerint előállított másik $f'(x)$ egyenlet között, hogy az $f'(x)$ egyenletből az eredeti $f(x)$ egyenlet kétszeres vagy többszörös gyökét ki lehessen számítani. Ezt az eljárást adja meg az X. szabály:

„Hogyan kell redukálni minden, vagy betűkben vagy számokban megadott egyenletet, amelynek az ismeretlen mennyisége (vagy más betűje, amelyet mintegy ismeretlennek lehet tekinteni) két vagy több megegyező értékkel rendelkezik.

Először: ha az adott egyenletben két egyező gyök van, megszorzom azt egy tetszőlegesen felvett aritmetikai progresszióval. Magától értetődően az egyenlet első tagját a progresszió első tagjával, az egyenlet második tagját a progresszió második tagjával, és így tovább. Az így kapott szorzat legyen 0. Azután, midőn így két egyenletem van, megkeresem a fentebb megadott módszerrel a legnagyobb közös osztójukat. Végigosztom ezzel az adott egyenletet, így előállítható a hányados."[99]

Mai nyelven elmondva, egy adott $f(x)$ egyenlethez kell egy olyan másik $f'(x)$ egyenletet találni, hogy a két egyenletnek legyen legnagyobb közös osztója, $d(x)$. Ebben az esetben az eredeti $f(x)$ egyenletnek van többszörös gyöke, az $f(x)$ egyenlet szétejthető, redukálható egy alacsonyabb fokszámú egyenlet és a $d(x)$ szorzatára.

A további fejlődés szempontjából ennek a módszernek a jelentősége óriási. Az az $f'(x)$ egyenlet ugyanis, amit az $f(x)$ egyenletből azzal a feltétellel kaptunk, hogy legyen legnagyobb közös osztójuk, szolgál a maximum-minimum feladatok és az érintőfeladatok megoldására. Erről szól Hudde második, 1658-as értekezése.

Az értekezés a következő tétellel kezdődik: „Ahhoz, hogy egy egyenletben két gyök egyenlő legyen, meg kell szorozni egy tetszőleges aritmetikai progresszióval, magától értetődően az egyenlet első tagját a progresszió első tagjával, az egyenlet második tagját a progresszió második tagjával, és így tovább. Állítom, hogy ez a szorzat az az egyenlet, amelyből meg lehet találni a mondott gyököt."[100]

Mivel a két egybeeső gyök az egyenlet valamilyen szélsőértékét jelenti, az ismeretlen maximum vagy minimum értékét, nyilvánvaló, hogy az

[98] Uo. 422–423.
[99] Uo. 433–434.
[100] Hudde, J.: *Epistola Secunda…* U.o. 507.

így kapott egyenletet lehet használni ennek a szélsőértéknek a megkeresésére. A kapott egyenlet és az eredeti egyenlet közös gyöke lesz az eredeti egyenlet kétszeres gyöke. „Úgyhogy a módszer bizonyítására még csupán azt kellene igazolni, hogy a kiinduló egyenletnek van két egyenlő gyöke. Amit valóban oly egyszerű bizonyítani, hogy ennél tovább időzni semmi más nem lenne, mint munka és olaj vesztegetése."[101]

E helyett felsorolja az egyes eseteket, s mindegyiket bemutatja néhány jól választott példán. Pl. az első esetet: ha az egyenlet csak egy ismeretlent tartalmaz és ez sem fordul elő a nevezőben, a következő példán mutatja be:

„Legyen pl. $3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba}{3c}x + aab$ x valamely maximumára érvényes. Szorozzunk tagonként

3 3 1 -el:

Legyen $9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2bba}{3c}x = 0$ vagy

$$9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} = 0\,.$$

Az általános módszer szerint hasonlóképpen:

$$3ax^3 - bx^3 * - \frac{2bba}{3c}x + aab = 0\,.$$

Szorozzunk egy aritmetikai haladvánnyal

3 3 *2 1 0

Legyen, mint fent $9ax^3 - 3bx^3 * - \frac{2bba}{3c}x = 0$ vagy

$$9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} = 0\,.$$"[102]

Ebből az egyenletből kiszámított x az eredeti egyenlet kétszeres gyöke (tehát szélső értékének a helye) lesz, mert a két egyenletnek van legnagyobb közös osztója.

Modern megfogalmazásban így foglalhatjuk össze a Hudde-féle eljárást: Egy $f(x)$ egyenletnek akkor és csakis akkor van többszörös gyöke, ha $f(x)$-nek és egy, belőle megadott eljárással előállítható $f'(x)$ egyenletnek van $d(x)$ legnagyobb közös osztója, azaz ha $f(x)$ és $f'(x)$ nem relatív prím polinomok. Ebben az esetben az $f(x)$ többszörös gyökei a $d(x) = 0$ egyen-

[101] Uo. 510.
[102] Uo. 510.

letnek tesznek eleget, ennek tesznek eleget az $f'(x)$ gyökei is, úgyhogy utóbbiakból kiszámíthatók. Az $\frac{f(x)}{d(x)}$ egyenlet pedig alkalmas az eredeti $f(x)$ egyenlet egyszeres gyökeinek a meghatározására.

Látnivaló, hogy a Hudde-féle elmélet semmi egyéb, mint az a módszer, amit a mai algebra használ a gyökök többszörösségének a vizsgálatára.[103] Az $f'(x)$ nem más, mint az $f(x)$ polinom deriváltja. Természetesen Hudde nem használta ezt az elnevezést, nem használta *explicite* még *a fogalmat* sem. De *ahogyan* használja a mi általunk így nevezett és definiált fogalmat, az fedi a mai értelmezést, s ezért átírhatjuk modern terminológiára.

A továbbiakat, hogy ti. hogyan lett a Hudde-féle eljárásból Newtonnál a mi parciális differenciálhányadosunknak megfelelő fogalom, már tisztázta Whiteside a XVII. század második felének matematikájáról szóló alapvető monográfiájában. A cartesianus algebra tehát nem csupán önmagában teljes tárgyalását adta az általa megteremtett egyenletpolinomoknak, hanem túlmutatott önmagán, s mintegy *modellként szolgált az algebrai egyenleteknél általánosabb függvények differenciálásának a kidolgozásához.*

Az érintőszerkesztés problémájának a megoldása abból a feltételből, hogy a problémára felállított egyenlet két gyöke összeessen, nem kisebb jelentőségű az infinitézimális számítás kialakulása szempontjából, mint amilyen Arkhimédész kimeríthetetlenségi módszere volt. Azonban a két eljárás szellemében óriási a különbség. Arkhimédész eljárása nehézkes, körülményes indirekt bizonyításon alapuló módszer volt aminek az érvényességi feltételeit minden esetben külön meg kellett vizsgálni s egyedi módon ismételni el a bizonyítást. Descartes módszere a görbék egy speciális csoportjánál, az algebrai egyenletekre leképezhető szerkesztések esetében, közvetlenül és általánosan alkalmazható egységes szabályt ad az egyenlet által előállított görbe érintőjének a megtalálására.

Igaz, hogy a módszere csak speciális esetben, az algebrai görbék esetében érvényes. Ezáltal azonban ezen a területen megteremti egy olyan eljárás modelljét, ami Newton és Leibniz kezében a *Geometrie*-ből kirekesztett transzcendens görbék esetére is alkalmazható algoritmussá bővül. Az a mód ugyanis, ahogyan két egyenlet megfelelő tagjainak az egyenlővé tételéből következtet a gyökök azonosságára, semmi egyéb, mint a deriváltképzés centrális gondolatának, a *lineáris approximálhatóságnak* a kifejezése.

[103] Lásd pl. Szele Tibor: *Bevezetés az algebrába.* Budapest 1953, 216–218.

A SZERKESZTÉSEK ALGEBRÁJA

Az aritmetika és geometria között létesített megfelelkezés, aminek a Descartes algebra és „analitikus geometria” köszönheti létrejöttét, nem az algebrai és geometriai struktúrák ekvivalenciáján alapul. Nem az algebra leképezése geometriára, hanem a geometriai szerkesztések egyszerűvé, áttekinthetővé, racionális rend szerint elrendezetté tétele az algebra segítségével. A racionálist itt szó szerint kell érteni. Nem átvitt értelemben „ésszerűnek”, hanem *arányos*nak kell fordítani, úgy, ahogyan azt az antik geometria és még Descartes is használta. Láttuk, milyen fontos szerepe volt Descartes görbeelméletében a középarányosok beiktatásának. A matematika történetírás jól ismeri és kellőképpen kiemeli Descartes matematikájának arányelméleti vonatkozásait. Éppen ez az arányelmélet kapcsolja a cartesianus matematikát legerősebben a reneszánsz századai alatt felfedezett antik matematikához.

A *Geometrie* első, XVII. századi kommentátorai többnyire ezeket az antik arányelméleti vonásokat veszik észre a műben. Így a század második felének a geometriájában bizonyos visszatérés észlelhető az antik módszerekhez, s azt lehetne mondani, hogy a valóban cartesianus geometria csak sokkal későbben, a XIX. században bontakozik majd ki Chasles munkáiban.

Jóllehet Cantor és már Montucla is ismerték a XVI–XVII. századi hatalmas, antik matematikáról szóló kommentárirodalmat – joggal beszélhetünk ezzel kapcsolatban „matematikai humanizmusról” –, mégis nagyon keveset tudunk arról, milyen szerepet játszott az antik matematika pontos megismerése az ötlet- és problémaadáson túl a XVI–XVII. századi matematika kialakulásában.

Nem egyszerűen arról van szó, hogy pl. Viète és Fermat jól ismerik és utánozzák Diophantoszt vagy Apollonioszt, s hogy a XVII. században végig lankadatlanul fáradoznak elveszett görög matematikai művek rekonstruálásán. A Warburg-intézet korszakalkotó munkája óta tudjuk, milyen hallatlanul bonyolult történelmi problémát jelentenek „átvétel” és „rekonstrukció”, ha olyan magasrendű és önmagában zárt kulturális képződményekről van szó, mint az antik művészet vagy matematika.

A XV., XVI. és XVII. század egyik legnagyobb jelentőségű, döntő élménye az antik kultúra recepciója volt. Ennek a nagy felfedezésnek a súlypontja a XVI. században van, a XV. század bizonyos értelemben elő-, a XVII. utójátéka. De ez az utójáték az antikvitásnak, mint élet- és kulturális eszménynek az értékcsökkenésével párhuzamosan az antikvitás egyre pontosabb megismeréséhez vezetett. Poussin sokkal antikabb, mint Michelangelo, Halley sokkal inkább követi Apollonioszt, mint Fermat. Az antikvitás *értékelése* és *megismerése* közötti ellentét a XVII. század végén az „antikok” és a „modernek” közötti nagy harcban realizálódik és hosszú küzdelem után a „modernek” javára dől el.

Amikor a XVII. század legvégén Newton műveinek nagy csodálója és kiadója, Bentley doktor *Phalaris*-ában leleplezi az antikvitásimádók hamisításait, nemcsak egy új szakmát, a klasszika-filológiát teremti meg, nemcsak a szövegkritika első nagy példáját adja, hanem egyben megöli az antikvitást is, az antikvitást mint utolérhetetlen életeszményt.

A humanizmus általános jelenség volt, a kultúra minden területét átitatta. Azért volt olyan általános és szenvedélyes az ellene vívott harc is a XVII. század második felében. A humanizmus mozgalma egész Európára kiterjedt. Általánosabb jelenség, mint a vallási reformok, mert utóbbiak egy északi (szárazföldi és óceáni) és egy déli (mediterrán) részre osztották Európát. A humanizmus azonban egész Európán átsöpört. Amikor a XVII. század során a gazdasági és kulturális vezetés a mediterráneumból fokozatosan északnyugatra tevődik át, úgyszólván ezt az egyetlen tényezőt, a humanizmust viszi magával.

A XVII. században a németalföldi és angol egyetemek lesznek a humanizmus fő fészkei. Ezzel azonban átalakul a mozgalom jellege: a humanizmus, ami Itáliában többnyire egyetemen kívüli emberek vállalkozásaként indult, itt szorosan egyetemi tudósokhoz kötődik. S ez nem kicsiny változást jelent. Szinte beosztási elvként lehetne végigvinni az európai kultúra történelmén az egyetemi és nem-egyetemi korszakok váltakozását, annyira fontos különbség az, hogy a kor szellemi életének a vezetői ennek a nagy, középkorban kialakult intézménynek a keretében dolgozó emberek-e vagy sem.

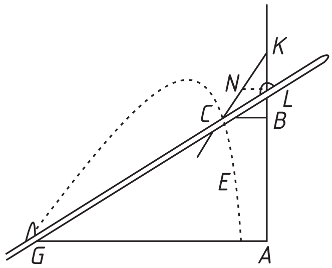
Nem lehet tehát figyelmen kívül hagyni, hogy a humanizmus a XVII. században lényegében egyetemi mozgalommá válik, s hogy a humanizmus első nagy és sikeres ellenfele, Descartes, mindvégig kívül marad az egyetemeken és egyre fokozódó harcban áll velük. Annyira nem egyetemi ember, s annyira gyűlöli az egyetemi tudósokat és humanistákat egyaránt, hogy szinte hajlandók vagyunk a Papposz-probléma *Geometrie*-ben adott megoldását egyszerű ürügynek tekinteni. Ürügynek és párviadalnak: lám, a híres problémát, amit a bámult Euklidész és Apolloniosz sem tudtak megoldani, s aminek Papposz csak a legegyszerűbb esetét tudta nagy nehézségek árán megfejteni, azt ő, Descartes, az egyetemeken kívüli ember, az egyszerű *honette homme,* az egyszerű polgár játszi könnyedséggel és teljes általánosságban megoldotta.

Két kultúra ütközik itt össze a matematika területén: az egyetemivé vált humanista kultúra és az új, előbb gúnyként, majd Descartes által is vállaltan cartesianusnak nevezett Univerzális Módszer. Nem kis dologról volt hát szó és Descartes jogosan tiltakozott felháborodottan, mikor a *Geometrie*-t a Papposz-probléma egyik sikerült megoldásává akarták degradálni.

A Papposz-probléma megoldása Descartes-nál csupán a szerkesztések és az egyenletek között kidolgozott megfelelkezés egyik példája. Szerkesztések és egyenletek megfelelkeztetésének a módszeréhez csatlakozik Schooten és de Witt munkái nyomán a XVII. századi kúpszelet-elmélet nagy része. Ez jelentkezik Huygens és Newton műveiben. Ehhez csatlakozik, Newton és Halley nyomán, az egész késő XVII. századi, XVIII. század eleji angol geometria. *A Geometrie* eredeti felfogása azonban közben észrevétlenül egyre inkább elvész, egyre nagyobb lesz az antikvitáshoz való visszatérés s alig lehet nagyobb különbséget elképzelni matematikai stílusban, mint a Papposz-problémának Newton és Descartes által adott megoldásait.

Ezzel párhuzamosan vész el az a másik, tisztán geometriai kúpszeletelmélet is, ami Desargues és Pascal munkáiban a *Geometrie* algebrai kúpszeletelméletével egy időben és szintén az antikvitással való teljes szakításként, nem-egyetemi emberek kezében alakult ki. Mindkét módszer elmerül az egyetemi humanizmus fokozódó antikizálásában.

Az első lépést e felé az antikizálás felé az ifjabb Frans van Schooten Leyden-i professzor, Descartes tanítványa és Huygens mestere tette híres *Geometrie* kommentárjaiban. Schootenben a matematikatörténet-írás J. E. Hofmann alapvető tanulmányáig Descartes szolgai kommentátorát és utánzóját látta. Hofmann ismerte fel, hogy a Leyden-i professzor módszere több helyen jelentősen eltér a kommentált szöveg stílusától.[104]



18. ábra

A mi szempontunkból különösen fontosak Schooten második könyvhöz írott kommentárjai. A második könyvben vezeti be Descartes a görbék osztályozását és algebrai-geometriai analízisét az általa kigondolt ötletes, egymáson eltolható és egy középpont körül forgatható egyenesekből összeállított görbe-szerkesztő gép segítségével. Azután így folytatja: „Tegyük fel, hogy az *EC* görbét a *GL* vonalzó és *CNKL* sík idom metszése írja le, amelynek *KN* oldalát meghosszabbítjuk *C* irányába és amely úgy mozog az adott síkban, hogy *KL* oldala mindig egybeesik a mindkét irányban meghosszabbított *BA* vonal valamely részével és ezáltal *GL* vonalzónak, amely az *L* pontban a *CNKL* síkidomhoz van kapcsolva forgó mozgást ad *G* középpont körül. Ha meg akarom tudni, hogy milyen osztályba tartozik az így leírt görbe, választok egy egyenes vonalat, pl. *AB-t* amelyre a görbe pontjait vonatkoztatom és választok *AB* egyenesen egy *A* pontot, amelynél kezdem a számítást. ...Azután felveszünk a görbén egy tetszőle-

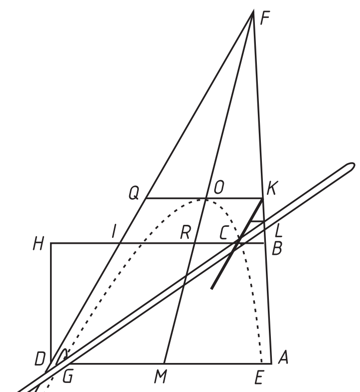
[104] Hofmann, J. E: i.m. 4.

ges C pontot és feltesszük, hogy a görbeleíró gép éppen ezt határozza meg. Ezen a C ponton át CB párhuzamost húzunk GA-hoz. Mivel CB és BA két ismeretlen és indeterminált mennyiség, egyiket y-nal, másikat x-szel jelöljük. Ahhoz, hogy e között a két mennyiség közötti viszonyt megkapjuk, tekintetbe kell venni egyéb, a görbe leírását megszabó ismert mennyiségeket is, mint GA, amit a-val jelölünk; KL, amit b-vel jelölünk és a GA-val párhuzamos NL, amit c-vel jelölünk. Azt állítom, hogy CB vagy y úgy aránylik BK-hoz, amint NL aránylik LK-hoz, vagyis amint c aránylik b-hez. Tehát BK egyenlő $\frac{b}{c}y$.

De akkor BL egyenlő $\frac{b}{c}y - b$ és AL egyenlő $x + \frac{b}{c}y - b$. Továbbá CB úgy aránylik LB-hez, azaz y úgy aránylik $\frac{b}{c}y - b$-hez, amint AG vagy a aránylik LA vagy $x + \frac{b}{c}y - b$-hez. Az aránypár második tagját megszorozva a harmadikkal az eredmény $\frac{ab}{c}y - ab$, és ez egyenlő az aránypár első és negyedik tagjának a szorzatával, ami $xy + \frac{b}{c}y^2 - by$. A keresett egyenlet tehát

$$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

Ebből az egyenletből látjuk, hogy az EC görbe az első osztályba tartozik, amennyiben semmi egyéb, mint egy hiperbola.[105]



19. ábra

Ehhez a legutolsó mondathoz fűzi Schooten az alábbi hosszú magyarázatot: „Ha ugyanis AG-t meghosszabbítjuk D-ig és DG-t egyenlőnek vesszük EA-val vagy NL-el (lásd 19. ábra, de vö. 18. ábrával) és D ponton keresztül CK-val párhuzamos egyenest húzunk, amely az AB egyenest F pontban metszi, DF lesz az egyik aszimptota és AF a másik. Tegyük fel ugyanis, hogy *a* $GOCE$ vonal hiperbola és DF, FA az aszimptotái, továbbá hogy DG, EA egyenlők NL-el, DF párhuzamos CK-val, amint mondottuk azaz DFA szög egyenlő CKB szöggel. Hosszabbítsuk meg BC-t, amíg I-ben metszi DF-et és húzzunk D-n keresztül egy AF-el párhuzamos DH egye-

[105] Descartes, *Œuvres,* Adam–Tannery-féle kiadás, VI. kötet, 393–394.

nest, amely *H* pontban metszi *BC*-t. Mivel *DHI* és *KLN* háromszögek egyenként hasonlóak *FAD* háromszöghöz, azért hasonlóak egymáshoz is. Tehát ahogy *KL* aránylik *LN*-hez, azaz *b* aránylik *c*-hez, úgy aránylik *DH* vagy *AB,* azaz *x, HI*-hez, amely így $\frac{cx}{b}$ lesz. Levonva *HB*-ből ezt és *BC* vagy *y* szakaszt, marad *IC,* $a + c - \frac{cx}{b} - y$. Mivel a hiperbolánál Apolloniosz *Koniká*-jának második könyv 10. propozíciója szerint *ICB* négyszög egyenlő *DEA* négyszöggel; ezért ha *IC*-t megszorozzuk *CB*-vel, azaz $a + c - \frac{cx}{b} - y$ kifejezést *y*-al, az így előálló *ICB* négyszög, $ay + cy - \frac{cxy}{b} - yy$ egyenlő lesz *DEA* négyszöggel, vagyis *ac*-vel, azaz azzal a négyszöggel, ami *DE*-nek vagy *GA*-nak az *EA*-val való szorzásából áll elő. Tehát rendezve az egyenletet, úgy csoportosítva, hogy *yy* legyen az egyik oldalon, $yy = cy - \frac{cxy}{b} + ay - ac$ egyenletre jutunk. Amely egyenlet ugyanaz, mint ami fentebb a *GL* vonalzó és a *CK* egyenes mozgásából állott elő. Így bebizonyítottuk az állításunkat, hogy a leírt *CE* vonal hiperbola, melynek aszimptotái *AF, FD*."[106]

Eljutottunk ahhoz a félmondathoz, amit Schooten hosszan kommentált: „amint hogy ez semmi egyéb, mint egy hiperbola". A kommentár azonban teljesen visszájára fordítja a mondat értelmét. Schooten bizonyításában a hiperbola aszimptota-tulajdonságai a döntőek, s feleslegessé válik Descartes görbe-előállító mechanizmusa. Descartes-nál ez az eszköz, ill. az általa megengedett mozgás biztosította a kapott görbe megfelelő, ahogy ő nevezte, „geometrikus" voltát. Ez az eszköz biztosította, hogy a kapott görbe algebrai egyenlettel legyen előállítható, s így természetes, hogy ez az algebrai mozgást létesítő eszköz szolgál az algebrai, Descartes által „geometrikusnak" nevezett görbék osztályozására. Ha ugyanis az eszközön a *CNK* egyenes helyére a most nyert hiperbolát, vagy bármely más, kettőnél nem magasabb fokú egyenlettel leírható, ún. első *genre*-beli görbét teszünk, akkor ennek a görbének és a *GL* vonalzónak a metszése az *ECA* hiperbola helyett egy ún. második *genre*-ba tartozó görbét ír le. Pl. ha *CNK* kör, melynek középpontja *L,* a görög geometria ún. második konhoidját kapjuk. Ha pedig a *CNK* egyenes helyén egy második *genre*-ba tartozó görbe van, akkor ennek és a forgó *GL* vonalzónak a metszése egy harmadik *genre*-ba tartozó görbét ír le. „És bármely más módon képzeljük is el egy görbe vonal leírását, feltéve, hogy ez a görbe

[106] *Renati Des Cartes Geometria...* Schooten-féle kiadás, Schooten kommentárjai a II. könyvhöz. i. m. 171–172.

azok közé tartozik, amelyeket geometrikusoknak neveztünk, mindig lehet találni ezzel a módszerrel egy egyenletet a meghatározására."[107]

Szerkesztés és algebrai egyenlet között ezáltal az eljárás által definiált „algebrai mozgás" létesít kapcsolatot. Az algebrai mozgás által definiált görbe egyetlen pontjának a meghatározásához sincs szükség infinitézimális processzusra, approximációra. Ez az algebrai mozgás biztosítja, hogy a *Geometrie*-ben elkerülhető a végtelen approximáció fogalmával dolgozó infinitézimális matematika, hogy megmaradhatunk a görbék leírásában az egyenletpolinomoknál, ahol még az érintőszerkesztés és a maximum-minimum feladatok, ezek a tipikusan infinitézimális módszereket kívánó problémák is megoldhatók approximáció nélkül, limes fogalom nélkül, anélkül, amit közönségesen infinitézimális alatt értenek.

Ugyanis az algebrának „nem kell támaszkodnia a differenciálhányados analízisbeli fogalmára (amelynek értelmezése a határérték nem-algebrai fogalmának segítségével történik), mert tisztán algebrai úton is definiálni tudjuk a polinom deriváltját, s e fogalom számunkra szükséges tulajdonságait is bevezethetjük ilyen módon."[108]

Ezt végezték el Descartes és Hudde: a polinom deriváltjának számukra szükséges tulajdonságait vezették le tisztán algebrai úton. Ezért központi jelentőségű az algebrai mozgás, amelyik az egyenletpolinom és a görbe közötti összefüggést létesíti. S ezért tesz olyan nagy lépést visszafelé Schooten, amikor kiküszöböli az antik módszerek segítségével ezt a mozgást. Hiába fordítja le Schooten az antik definíciókat az új betűszámtani nyelvre, ebből nála nem lesz a Descartes értelmében vett algebra. Descartes algebrája ugyanis nem betűszámtan. A *Geometrie* egy új, nagy jelentőségű fogalom, a deriválható egyenletpolinom és a vele való munka szabályainak a megteremtését tartalmazza. Az algebrai egyenletekkel leírható görbék világa ez, ahol általános szabály adható meg ezen görbék érintőjének a szerkesztésére és a görbéket előállító egyenletek szélső értékének a számítására. Ebből a szemszögből tekintve a *Geometrie* nem az első analitikus geometriai értekezés, hanem az *egész* újkori függvénykalkulus nélkülözhetetlen *előfeltétele.*

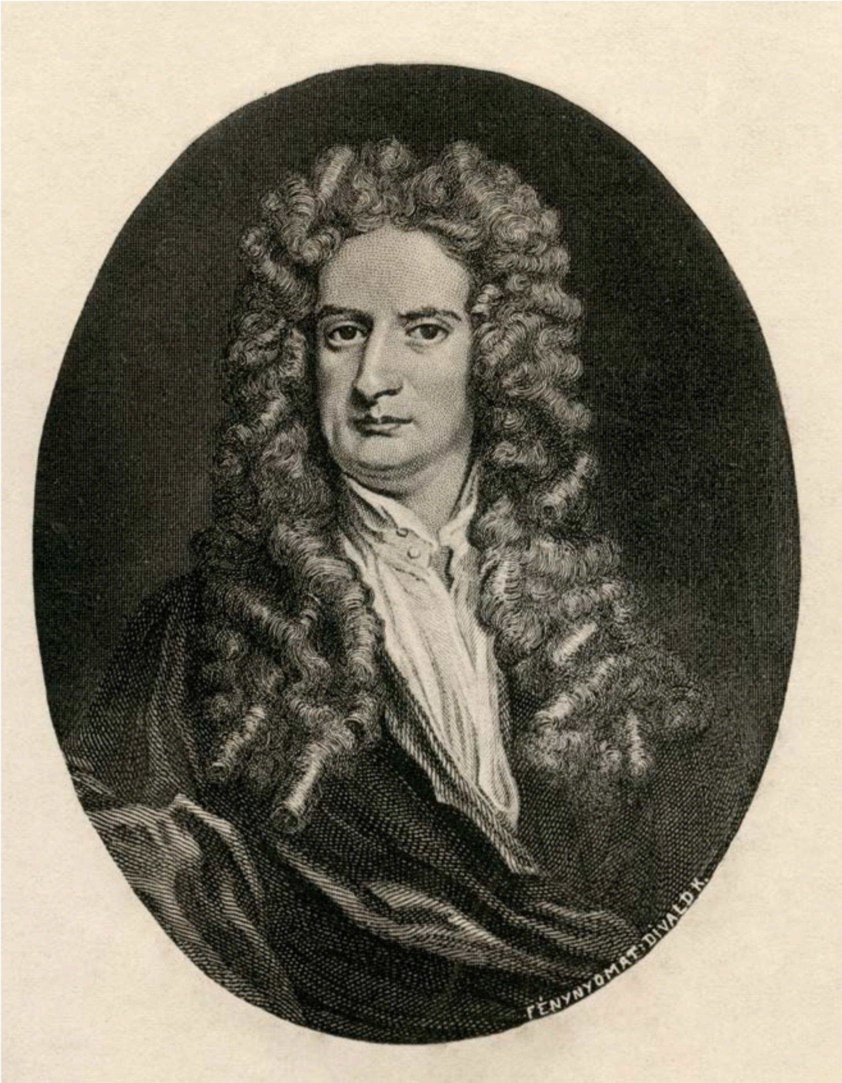
Semmit nem szóltunk még a *Geometrie* első könyvéről, amelyben Descartes bevezeti egy vonalszakasz és a mennyiség közötti megfelelkezést. Általában ezt szokták a *Geometrie* legnagyobb tettének és lényegének tartani. Azonban megtalálható ez már Fermat-nál is, ezzel dolgozott Harriot, Viète, ez húzódott meg Bradwardine és Oresme elképzelései mögött, ezt használta Papposz, Apolloniosz, ezen alapul az euklidészi *Elemek* egész második könyve. Úgyszólván az egész görög geometria az általános mennyiség vonalszakaszként való interpretálásán alapul.

[107] Geometrie, *Œuvres,* Adam–Tannery-féle kiadás. VI. kötet, 395.
[108] Szele Tibor: i. m. 216.

Descartes itt csak alkalmasabb jelölést vezetett be, s a matematika végső soron nem jelöléseken múlik. A vonalszakaszt és a valósszámot Descartes sem veszi egyenlőnek. Ehhez ugyanis a határérték fogalma szükséges, legalább abban az intuitív formában, ahogyan Newton bevezette. Newton az első, aki, ha bizonyítani még nem is tudja, egyenlőséget tesz vonalszakasz és – intuitíve felfogott – valósszám közé. Descartes-nál talán éppen a mennyiség fogalma a legantikabb. De *ahogyan* ezzel az antik vonalszakasz-mennyiség fogalommal dolgozik, a vele elvégezhető öt algebrai művelettel és (implicite) az egyenlőségjellel definiálva azt, annak nincs párja előtte az antikvitásban és utána a modern algebráig. Ez az első könyv jelentősége: definiálja az algebra eredményeit és módszerét, mint ami „a matematika olyan tényein alapul, amelyek a négy alapművelet és az egyenlőségi jel véges számú alkalmazásával megfogalmazhatók."[109]

Nem maga a mennyiség, hanem a vele való munka definiálása Descartes matematikájának a lényege. Ezért jut geometriájában olyan fontos szerep a mozgásnak. Schooten antik aszimptota-keretekbe szorított és Descartes szabad mozgásban leírt görbéje jól szemlélteti a két geometria közötti különbséget. A görög elmélet kész, statikus formákkal dolgozik, a cartesianus geometria a mozgást kihasználó kinematikus eljárás. A görög geometriában a görbék tulajdonságait mindig bizonyos egyenesek szabják meg, a görög geometria, amelyik nem ismeri még intuitíve sem a „folytonosság" fogalmát, nem képes magukhoz a görbékhez férkőzni, mindig egyenesek kereteibe kényszeríti őket. Descartes a mozgás zseniális használatával intuitíve biztosítja geometriája számára a „folytonosság" *követelményének* a teljesülését. Ezáltal közvetlen utat talál a görbék egy nagy csoportjához. Még számos görbét kirekeszt a geometriából és hosszú utat kell megtenni a matematikának, amíg ezek is általánosságban tárgyalhatók lesznek. Többek között explicite tisztázni kell, mit jelent a „folytonosság". De azokra a görbékre, amelyek egy speciális mozgásféleség segítségével algebrai egyenletekre vezethetők vissza, egységes matematikai módszerek adhatók meg. Ezek a módszerek egymással összefüggő, zárt egészet képeznek, jól definiált matematikai rendszert. Ez a felfogás és eljárásmód lett az újkori matematika mintaképe. Ahogyan J. E. Hofmann írta, Descartes nyitotta meg az utat a modern matematikai gondolkozási mód felé.

[109] Uo. 9.


FÉNYNYOMAT: DIVALD K.

NEWTON ÉS PASCAL

A NEWTONI INFINITÉZIMÁLIS ANALÍZIS KIALAKULÁSA A XX. SZÁZADI MATEMATIKATÖRTÉNET-ÍRÁS TÜKRÉBEN[110]

I.

Moritz Cantor nagy műve[111] 85. fejezetében kezdi az infinitézimális számítás ismertetését. A fejezet címe: „Sorok. Mercator. Brouncker. Gregory. Newton."

A XIX. század matematikájának egyik legjellemzőbb területét alkották a végtelen sorok. Az a tény, hogy Cantor ezek felől indul a matematika mindmáig legnagyobb kalandjának, az infinitézimális számításnak az ismertetésébe, már magában véve is jelzi az interpretáció várható jellegét.

A végtelen sorok elméletének legfontosabb, alapvető kérdése ma az, hogy egy sor összetartó-e vagy sem, konvergens-e vagy divergens.

Mit tartott erről a XVII. század? Cantor szerint – semmit.

Szerinte egy sor konvergenciára való megvizsgálásának a szükségessége „természetesen" csak a XIX. században merül fel, a XVII. és XVIII. század erre még csak nem is gondol. Az egyetlen kivétel akkor állt elő, „ha egy sort egy vele azonos függvény gyakorlati kiértékelésére akartak felhasználni. Ebben az esetben önmagától jelentkezett az a kellemetlenség, hogy divergens sorokkal való számolás nem vezet a kívánt eredményre, s ezen segíteni kellett" – úgy, hogy önkéntelenül is, intuitive konvergens sorokat alkalmaztak, a fogalom tisztázása, sőt felvetése nélkül. Így jár el lényegében James Gregory, a nagy skót matematikus 1668-ban megjelent *Exercitationes Geometriae*-jében.[112]

Teljesen a Gregoryéhoz hasonló sorfelfogással és részben azonos eredményekkel találkozunk Nicolaus Mercator 1668-ban Londonban megjelent *Logarithmotechnica*-jában. Ez a németalföldi matematikus Londonban élt, ahol „Wallis és közvetlen tanítványai olyan felületek

[110] Előzménye: Vekerdi László: A newtoni infinitézimális analízis kialakulása a XX. századi matematikatörténet-írás tükrében. = Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei 14 (1964) No. 1. pp. 35–70.

[111] *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 3. (Schluss-) Band. Von 1668–1758.* Leipzig 1898.

[112] Uo. 58–60.

kvadraturájára voltak képesek, amelyeket az abszcisszatengely, két ordináta és az

$$y = a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + \ldots + a_n x^{m_n}$$

egyenletű görbe határolt. Az egyenlő szárú hiperbola esetében ez már 1647 óta ismert volt Gregorius a Santo Vicentio által, aki ezt a területet logaritmus segítségével számította ki, a hiperbola egyik asymptotáját választva abszcisszának. De a hiperbola egyenlete ebben az esetben nem a fenti alakot öltötte, hanem $xy = 1$ volt, és ezért a két eredmény egyetlen tétellé való összefogására minden kísérlet sikertelennek bizonyult.

Itt az a pont, ahol közbelépett Mercator. A hiperbola egyenletét $y = \frac{1}{1+a}$ formára alakította át, és volt bátorsága az $\frac{1}{1+a}$ kifejezésben csak jelzett osztást az algebra közönséges szabályai szerint végre is hajtani.

Így tehát az

$$\frac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots$$

in infinitum sor érvényességét tette fel.

Mai fogalmaink számára ez a lépés csaknem naivul egyszerű, akkor azonban új volt, s olyan horderejű, hogy a kortársak alig voltak képesek felmérni, bármennyire is becsülték azonnal Mercator felfedezését."[113]

Cantor szerint tehát az infinitézimális számítás első nagy jelentőségű lépése az volt, hogy Mercator az egyenlő szárú hiperbola $xy = 1$ egyenletét $y = \frac{1}{1+a}$ alakra hozta, s az itt csak kijelölt osztást a közönséges osztás törvényei szerint valóban el is végezte.

Ezzel mintegy felbátorított a végtelennel való munkára. Ezt az irányt folytatja a fiatal Newton, aki 1669-ben küldte el Collinsnak *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* c. értekezését, amit Collins lemásolt, megmutatta Lord Brounckernek, mindketten nagyon megdicsérik, de semmit se tettek a megjelenése érdekében, még a Royal Society jegyzőkönyveibe se vezetik be.

Pedig a dolgozatnak több szempontból is óriási jelentősége van.

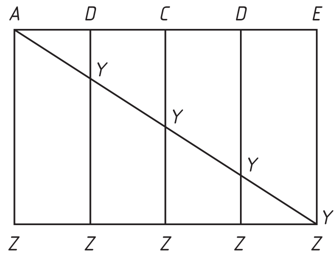
A 86. fejezetben Cantor a kontinens matematikusainak a sorelméletben elért eredményeit ismerteti, az infinitézimális analízis newtoni formájának a felfedezését a 88. fejezetben kíséri tovább, amelynek a címe: „Kúpszeletek. Síkgörbék elmélete." Ez a fejezet a mi szempontunkból igen fontos.

1669-ben jelent meg Isaac Barrow *Lectiones geometricae* c. könyve, amelyikben fiatal tanítványa, Newton is segített. Barrow geometriája a

[113] Uo. 53–54.

mozgás fogalmából indul ki. „Az időt valamilyen alakzattal ábrázolja, amelyik az egyenletességet fejezi ki, név szerint egyenessel és körrel. Hiszen az időt egydimenziós és a pillanat folytonos folyásából előálló mennyiségnek lehet tekinteni. (Barrow, *Lectiones geometricae* 6. oldal: ex unius momenti quasi continuo fluxu constitutum imaginatur.) Végül Barrow csak az egyenest választja az idő érzékeltetésére és egy, az idővonalra merőlegesen állított egyenest az egyes pillanatokban uralkodó sebesség érzékeltetésére. Ezeket a sebességegyeneseket azonos vagy különböző hosszúságúaknak veszi, aszerint, hogy a sebességet állandónak vagy változónak képzeli. A sebességvonalak összessége által képezett területek az adott időben adott sebességekkel történő mozgások, az egyesített sebesség (Uo. 10: aggregata velocitas), a mozgató erő (Uo. 13: vis motiva) képét adják."

„Az *AEZZ* négyszög és az *AEY* háromszög megvilágosítja, mit ért a fentiek alatt ... Barrow *Z, Y* stb. pontok helyeit (Ort) a mozgás alkalmazásával nyeri. Így jut el a görbékhez, amelyekkel a második felolvasás foglalkozik."[114]



20. ábra

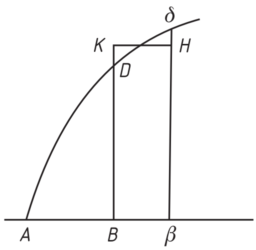
Az érintőszerkesztés módszerét is a mozgások összetételének a segítségével ismerteti, ahogy azt már előtte is tették Roberval és Torricelli. Ezt a módszert igen jól ismerték Angliában. Wallis már 1659-ben védelmébe veszi Torricellit Roberval plagizációs vádjaival szemben.[115] Huygens is érintőproblémaként kezelte geniális módon az evolvens-evoluta kérdését.[116]

Az érintőprobléma tehát a kor egyik centrális – és legjobban kidolgozott – matematikai kérdés-komplexuma, Wallis és Barrow semmi lényegesen újat nem hoztak a kérdésben, csupán lehetővé tették az angol matematikának az itáliai, Galilei tanítványai körében kialakult módszerekhez való csatlakozását.

A következő, 89. fejezet „Newton és Leibniz első felfedezései az infinitézimális számítás területén". A fejezet annak a megállapításával kezdődik, hogy mindaz, amit az előző fejezetben ismertetett, „rég ismert módszerek szellemes felhasználóinak volt köszönhető". De amit Newton az 1669-es *De analysi..*-jében közölt Collinsszal, az már egészen új. Az írás az $y = ax^{\frac{m}{n}}$ alakú görbék kvadraturájával kezdődik, amit $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ alak-

[114] Uo. 127–128.
[115] Uo. 129.
[116] Uo. 134–143.

ban ad meg. Ez az eredmény nem új (war nichts weniger als neu), Wallis már 1655-ben ismerte. Új volt azonban a bizonyítás. Ahol Wallis intuitív módon bizonyított, ott Newton új bizonyítási módszert alkalmazott.



21. ábra

„Newton bizonyítása a következő. Jelölje x egy $AD\delta$ görbe AB bázisát, jelölje y a reá merőleges BD applikátát, z az ABD területet. Jelölje o betű a kicsiny $B\beta$ vonalszakaszt (ezt az o-t nem szabad, mint néha teszik, zérussal összetéveszteni). Legyen továbbá $BK=v$, és a $BKH\beta(=ov)$ négyszög területe legyen egyenlő a $B\beta D\delta$ területtel. Newton adottnak veszi z-nek x-től való függését, és megkeresi ebből az összefüggésből y-t; mai írásmódban, amit Newton nem ismert, azt mondanánk $z = \int y dx = F(x)$-ből megkeresi $y = \frac{dF(x)}{dx}$-et."

A továbbiakban Newton a binomiális tétel segítségével történő sorbafejtést alkalmaz és hatványsorokat differenciál, „de a szorzatok és hányadosok differenciálásának még nyoma sincs".[117]

Ez a Newton-féle fluxiós-kalkulus lényege, bár magát a nevet még nem használja. A „folyás" fogalmának és elnevezésének az eredete valószínűleg Napierre vagy Cavalierire nyúlik vissza. Végeredményben tehát nem új, de a lényeg a jelzésen van, és pontokkal való jelölés kétségkívül Newtontól származik. Az írás, amiben ezt kifejti, a *Methodus fluxionum et serium infinitorurn* csak halála után, 1736-ban jelenik meg nyomtatásban, de valószínűleg az 1670-es évek elején (1671) írta. Newton itt a matematikai mennyiségeket úgy tekinti, mint amelyek folytonos mozgás útján jönnek létre, és *fluensek*nek nevezi őket. Azt a sebességet, amellyel a fluensek nőnek vagy csökkennek, *velocitas*-nak vagy *fluxio*-nak nevezi, és a fluens jelölésére használt betű fölé tett ponttal jelöli. A jelölés – hangsúlyozza Cantor – jelenti Newton nagy lépését, hiszen egyébként ezeket a fogalmakat előtte már alkalmazták az itáliaiak. De Newton azáltal, hogy ugyanazt a betűt használja egy matematikai mennyiség – fluens – és a mennyiség változásának – fluxio – a jelölésére, megnyitja az utat egy új, egységes kalkulus kialakítása felé.

És Cantor nem mulasztja el megjegyezni, hogy ebben Leibniz messze Newton felett áll, nemcsak a jelölésben, hanem a jelöléssel összefüggő műveleti szabályok kidolgozásában is: Leibniz teremti meg a differenciálszámítás algoritmusát.[118]

Newton a *Methodus*-ban két problémát tűz ki. 1. Adva van két fluens

[117] Uo. 150–151.
[118] Uo. 187.

egymáshoz való viszonya, határozzuk meg a fluxióik közti viszonyt. 2. Adva van egy olyan egyenlet, amely fluensek fluxióit is tartalmazza, meg kell határozni a fluensek egymáshoz való viszonyát.

„Az általános módszer, amit Newton a fluxiókat is tartalmazó egyenletről a fluensek között fennálló egyenletre való visszatérésre alkalmazott, ... a fluensek hatványai szerint rendezett végtelen sorokba való sorbafejtésből áll." A sorbafejtésben azonban hibákat követett el – jegyzi meg Cantor.[119]

A Cantor-féle rekonstrukció lényeges pontjai a következőkben foglalhatók össze:

1. A XVII. század 50-es és 60-as éveiben Angliában John Wallis körében jelentős eredményeket érnek el az abszcisszatengely, két ordináta és egy magasabb fokú parabola által határolt terület kiszámításában.

2. Mercator egy zseniális sorbafejtés segítségével felismeri, hogy az egyenlő szárú hiperbola alatti terület ugyancsak a Wallis-féle módszerekkel számítható ki. Ezáltal közismertté teszi a sorbafejtés kvadratúrában való nagy jelentőségét. Hasonló, részben még nagyobb eredményeket ér el ezen a területen James Gregory.

3. Barrow (Torricelli és Roberval nyomán) az érintőmeghatározás kérdését egy mozgásgeometriai modell segítségével oldja meg, amelyben a görbét egy pont mozgása által létrejöttnek képzeli úgy, hogy a mozgás sebességének egy tengelyre – az időtengelyre – való vetülete mozgás közben konstans.

4. Newton az 1669-es Collinsnak küldött írásában általánosítja Wallis eredményeit és – a binomiális tétel segítségével – új bizonyítását adja az $y = ax^{\frac{m}{n}}$ és $\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ alakú kifejezések közötti kölcsönös összefüggésnek. Ezáltal felismeri, hogy differenciálás és integrálás inverz műveletek. Cantor ezt tartja az infinitézimális számítás felfedezése szempontjából legjelentősebb lépésnek.

5. Később – a *De analysi* ... továbbfejlesztéseként – Newton Napiertől vagy Cavalieritől vett mozgásgeometriai megfontolásokra alapítva, a matematikai mennyiségeket folytonos mozgás által létrejött *fluens*-eknek, a mennyiségek változásának a sebességét a fluensek *fluxió*-inak nevezve, egységes jelölési módhoz jut, amely a fluensek közötti relációk és a fluxiók közötti relációk közötti összefüggés jellegét (integrálás és differenciálás inverz műveletek) még jobban kidomborítja. Ez a módszere is sorbafejtésen alapul és nehézkes. Egészében véve a Leibniz jelölési és számolási módja sikerültebb: az infinitézimális számítás algoritmusát Leibniz teremti meg.

A Cantor-féle rekonstrukcióhoz csatlakozik – annak kisebb – na-

[119] Uo. 155–166.

gyobb fogyatékosságait fokozatosan kiküszöbölve – a német matematikatörténészek zöme.

Az első jelentős módosítást Cantor interpretációján Zeuthen[120] végzi, Zeuthen interpretációja lesz a másik nagy interpretációs vonal kiindulása, amelyet a legtöbb angol és francia matematikatörténész követ. Zeuthen az infinitézimális számítás genezisének a centrumába a területszámítás helyett az érintőmeghatározás és az érintőből való görbemeghatározás (fordított érintőfeladat) problematikáját helyezi. Láttuk, hogy Cantor a területmeghatározás problémái mellett ezt kevésbé jelentősnek ítélte. Zeuthen szerint itt hoz a XVII. század az antikvitás infinitézimális problémáihoz képest először jelentős újítást. Az új tulajdonképpen már megjelenik a XVII. század legelején: a Napier-féle logaritmus-definícióban és Galileinél. Galilei és Napier egy tényleges, ill. egy képzelt pontnak a mozgását vizsgálva, tulajdonképpen a folytonos függvény fogalmát teremtik meg, és a Newton-féle fluxiós módszert készítik elő. De előbb még egy hosszú kerülőt kell végigjárnia a matematikának: az antikvitás exhauszciós és demokritoszi módszereihez csatlakozva.[121] Ezt a nagy kitérőt Zeuthen „integrálszámítás előtti integrálás” (Integration vor der Integralrechnung) néven foglalja össze: ide sorolja Kepler, Torricelli, Gregorius A Santo Vicentio, Fermat, Pascal, Roberval és Huygens terület, térfogat, súlypont meghatározásra szolgáló módszereit. Ezek mind az antik geometriai módszerek egyre tökéletesebb elsajátításán alapultak.

De az antik módszerek újratanulása közben a matematika fejlődése olyan gyors lett, hogy elkerülhetetlenné váltak intuitív bizonyítási módszerek is: ezeket alkalmazva jut Wallis – aki egyébként szintén jól ismerte a szigorú antik módszereket a híres kvadratúráira.[122]

Az intuitív módszerek szerepelnek az egyre nagyobb jelentőségűvé váló végtelen sorok elméletében is.

Zeuthen egyetért Cantorral: szerinte sem jutottak eddig lényegében túl az antikvitás infinitézimális módszerein. Ekkor jelentkezik az új (s egyben a zeutheni interpretáció Cantortól való eltérése). A XVII. század közepén, második felében számos problémát – mint pl. érintőmeghatározás, maximum-minimum feladatok, algebrai egyenletek gyökeinek az összeesése – közös csoportba foglalnak össze. Ismerte ezeket az antikvitás is, de nem tekintette őket – szemben az integrációs módszerekkel – közös csoportba foglalhatóknak.[123]

Torricelli és Roberval egymástól függetlenül – Torricelli közvetlenül

[120] Zeuthen, H. G.: *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*. Leipzig 1903.

[121] Uo. 235–237.

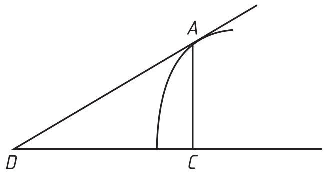
[122] Uo. 248–280.

[123] U. 316.

Galileihez kapcsolódva – meghatározzák a hajított test parabolikus pályájának az érintőjét a mozgások összetevésének a segítségével. A Torricelli-iskola jelentős részleteredményeket ért el, de általános módszert kinematikus érintőmeghatározással nem lehetett adni. Ehhez algebrára volt szükség.[124] Itt lép be a fejlődésbe a nagy Toulouse-i matematikus, Fermat.

Fermat a maximum-minimum problémával hozza kapcsolatba az érintőmeghatározást: ez jelenti az első nagy lépést az új infinitézimális számítás megteremtése felé. Abból indul ki, hogy a *CA* ordináta és a *CD* szubtangens (s_t) közötti viszony érintés esetében maximum vagy minimum lesz,[125] s egyes esetekben már a kvadratúra és az érintőmeghatározás között fennálló inverz-viszonyt is felismeri. Az inverz-viszony általános voltának a felismerése Barrow érdeme.

Barrow ezen tételét – az érintőszerkesztés és a kvadratúra közötti összefüggést kifejező „megfordíthatósági tételt” (Umkehrungssatz) implicite már Napier kimondotta volt logaritmus definíciójában, s főleg Galilei $\frac{ds}{dt} = gt$ törvényében, amit ő grafikusan integrált, s kapta az $s = \frac{g}{2}t^2$ eredményt. Az érintőszerkesztés és a kvadratúra közötti összefüggés implicite benne volt a De Beaune-feladatban. Ezt az összefüggést használja fel Wallis, amikor a Torricelli–Roberval-féle érintőszerkesztést általánosítva egy fordított érintőfeladatnak differenciálegyenlet alakot ad, kinematikai megfogalmazásban. Wallison át jut Barrowhoz, aki általánosítja és explicite kimondja.



22. ábra

Barrow általános megfordítási tételét Torricelli kinematikai érintőmódszerével és tisztán geometriai úton bizonyítja. Módszere nem egy bizonyos görbére vonatkozik, hanem általános: összefüggést ad egy tetszőleges y függvény $v = \frac{dy}{dx}$ között, s kimutatja, hogy ez az összefüggés egy $y = \int vdx$ kvadratúrával fejezhető ki. De Barrow-nál még hiányzik a differenciálhányados fogalma.[126]

Newton itt is, akárcsak a fizikában, azt az utat járja következetesen végig, amire Galilei lépett. Az idő, mint független változó (parameter) segítségével jellemez mennyiségeket (fluensek, *x, y,* z stb.), s így ezeknek megadhatók a sebességei (fluxiók, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, stb.) és azok viszonyai: $\dot{x}/\dot{y}$ stb.

A módszer segédeszközét a *De analysi per aeqationas infinitas*-ban

[124] Uo. 322–325.
[125] Uo. 330–333.
[126] Uo. 354.

adta meg, sorbafejtésekkel. Newton már tisztában van azzal, hogy a fluxioképzés (differenciálás) és a kvadratúra inverz műveletek. „Az $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ viszony képzésénél fogva pontosan ugyanaz, mint a $\frac{dy}{dx}$ differenciálhányados, és magát Newton $\dot{x}$, $\dot{y}$, ... fluxió-meghatározását a *dx, dy* differenciálok tiszta, mindenféle meghatározatlan »végtelen kicsi« fogalomtól mentes definícióinak lehet tekinteni."[127]

Erre utal egyébként az is, hogy $\dot{x} = 1$ esetében $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dot{y}$-ot ír, s ezt z-vel, fluxióját $\dot{z}$-val vagy $\ddot{y}$-val jelöli. „Látjuk, hogy a független változó fogalom, ha ez a kifejezés még nem is fordul elő, olyan tisztán és egyszerűen áll előttünk, akár egy modern tankönyvben."[128]

A *Principia* is sokkal egyszerűbb lett volna, ha a fluxiós módszert használja. Mégsem alkalmazza. Egy olyan mennyiséget, amely egy másik mennyiség valamilyen függvénye, nem fluensek relációjával, hanem egy görbe ordinátájával reprezentál, s az integráció helyett inkább geometrikus kvadratúrákat alkalmaz.[129] Leibniz nem jelent elvi haladást Newtonhoz képest, jelentősége szerencsés szimbolikus jelölésmódjában van, ami a továbbiakban egységes számolási módszer alapjává válhatott.[130]

A Zeuthen-féle interpretáció Cantorétól való eltérései az alábbiakban foglalhatók össze:

1. Igen nagy jelentőséget tulajdonít a függvényfogalom megjelenésének, s ezt már Galileire és Napier-re vezeti vissza.
2. Semmi – vagy majdnem semmi – jelentőséget sem tulajdonít a további fejlődés szempontjából az antik módszerek újraéledésének.
3. A kvadratúra-problémákkal való foglalkozásnál fontosabbaknak tartja a (később) differenciálással megoldható problémák előtérbe nyomulását és egy csoportba való összefoglalását.
4. Központi jelentőséget tulajdonít Barrow megfordítási tételének.
5. Newton fluxiós módszerében látja a Galileinél megindult problémák betetőzését, ezt a módszert lényegében a mai differenciálszámítással veszi azonosnak. Emellett csak alárendelt szerepet tulajdonít – a differenciálszámítás szempontjából – a *De analysi* ...-nek.
6. Kétségtelennek tartja Newton módszerének eredetiségét és elvileg tisztázottabb voltát Leibnizével szemben, de elismeri a Leibnizi módszer számolástechnikai előnyeit.

A következő – véleményünk szerint igen jelentős – lépést a newtoni

[127] Uo. 375.
[128] Uo. 376.
[129] Uo. 394.
[130] Uo. 412.

infinitézimálkalkulus történetének felderítésében Otto Toeplitz tette. Helyesebben nem is pontosan ő, hanem a göttingeni matematika, aminek Toeplitz inkább csak „szócsöve” volt. S ez nem lekicsinylés akar lenni, ellenkezőleg: a legnagyobb dicséret. Nem lehet elégszer figyelmeztetni arra, mit jelentett a modern matematika történetében Göttingen. Az egyik legnagyobb göttingeni matematikus, Felix Klein *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus c.* könyvének harmadik kötete, a *Präzisions- und Approximationsmathematik* (Berlin, 1928) az infinitézimális számítás kialakulása szempontjából nélkülözhetetlen részleteket tartalmaz. „Minden gyakorlati területen van a pontosságnak egy küszöbértéke” – állapítja meg –, de van-e ilyen küszöbérték a térbeli elképzelésben is? Az arithmetikában ugyanis nincs, „az a pontosság, amivel a számok definiálhatók, korlátlan”.[131]

Teljesen ebbe a precíziósmatematikába tartozik pl. a kommenzurábilis – inkommenzurábilis közötti különbségtevés. De hová tartozik a függvény? Az empirikus görbe ugyanis nem függvényt definiál, hanem egy $y = f(x) \pm \varepsilon$ „függvénysávot” (Funktionsstreifen). Egy empirikus görbe mindig – akkor is, ha nem rajzoljuk, csak „elképzeljük” – korlátolt pontosságú lehet „és így nem a precíziósmatematika éles függvényfogalmának, hanem a függvénysávnak felel meg”.[132] A precíziósmatematika éles, $y = f(x)$ függvényfogalma empirikusan se meg nem valósítható, se el nem „képzelhető”.

Lehet-e a precíziósmatematika $y = f(x)$ függvényfogalmát úgy beszűkíteni, hogy az az empirikus görbénél megszokott tulajdonságokat, illetve ezekkel analóg tulajdonságokat mutasson? Lehet. A precíziósmatematika $f(x)$ függvényfogalmának ehhez az alábbi öt tulajdonsággal kell rendelkeznie:

1. Kontinuitás – azaz sehol se szakadjon meg, ne „ugorjon” a görbe. – Ennek a követelménynek a precíziósmatematikában az ún. „folytonos” függvények felelnek meg.

2. Az x tengely, a görbe, és két ordinátája közt mindig legyen egy terület (Flächeninhalt) elhatárolható. – Ennek a követelménynek megfelel az a precíziósmatematikai tétel, hogy minden folytonos függvény integrálható.

3. A görbének véges intervallumban csak véges számú maximuma vagy minimuma legyen. – Ez nem következik a folytonosságból, mert pl. $y = x \sin \frac{1}{x}$ esetében a hullámok sűrűsödésének soha nincs vége. Ehhez meg kell követelni, hogy „az $y=f(x)$ függvény az éppen vizsgált intervallumban véges számú monoton (csak növekvő vagy csak csökkenő) darabra essen szét”.[133]

[131] Klein, Felix: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. 3. Bd. Präzisions- und Approximationsmathematik.* Berlin 1928.
[132] Uo. 17.

4. Empirikus görbéinknek irányt is tulajdonítunk: ezt egy $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ úgynevezett differenciahányadossal fejezzük ki, ahol $\Delta x \neq 0$ kicsi a görbe hosszához, de nagy a szélességéhez képest. „Az empirikus görbe a tapasztalat szerint megközelítőleg egybeesik az x, y-ból $x + \Delta x$, $y + \Delta y$-ba vezető egyenessel."

A precíziósmatematikában a Δx minden előre megadott értéknél kisebb lehet, s ebben az esetben az (x, y) és $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ pontokat összekötő szelő minden határon túl közeledik az (x, y) pontbani érintőhöz, a szelő irányát kifejező $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ differenciahányados pedig az érintő irányát megadó kifejezéshez, amit – differenciálhányadosnak neveznek, és y'-vel vagy $\frac{dy}{dx}$-el jelölnek. De ilyen differenciálhányados nem minden folytonos függvény esetében létezik, pl. az $f(x) = |x|$ függvénynek, ami minden valós x-hez abszolút értékét rendeli, az $x = 0$ pontban nincs differenciálhányadosa – a függvényt ábrázoló görbének nincs egyértelműen megadott iránya. Azért ha azt akarjuk, hogy a folytonos függvény megfeleljen egy empirikus görbének – „aminek mindig van iránya" – , meg kell követelni a differenciálhányados létezését.[134]

Ezekkel a tulajdonságokkal rendelkező függvények adják vissza kvalitative az empirikus görbéknél megszokott sajátságokat. De ezzel még semmit sem tudunk a kvantitatív viszonyokról. Arra a kérdésre, hogy „mennyire lehet egy empirikus görbét lefutás, irány és görbület szempontjából egyszerű, analitikusan definiált függvényekkel megközelíteni?"[135] – a sorbafejtések adnak választ.

Nem mintha a „természet" különösebben kedvelné az egyszerű, fentiek értelmében definiált függvényeket, s nem mintha ezek lennének a precíziósmatematika legfontosabb részei. Pusztán arról van szó, hogy a precíziósmatematikának ezek a részei aránylag könnyen alkalmazhatók a mindig csak korlátolt pontosságú megfigyelésekre.[136]

Nos, éppen a Klein által a fizikai alkalmazhatóság érdekében a függvénytől megkívánt pontokat járja végig Toeplitz[137] szerint a nyugat-európai matematika fejlődése. Cavalieri az első, aki először lép túl – nem sokkal – Arkhimédész parabolakvadratúráján, amennyiben sikerül – arkhimédészi exhauszciós módszerrel „feltornáznia" magát az Arkhimédész

[133] Uo. 23.
[134] Uo. 24–26.
[135] Uo. 51.
[136] Uo. 51–84.
[137] Toeplitz, Otto: *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen methode.* Berlin–Göttingen–Heidelberg 1949.

által megoldott másodfokú parabola ($y = x^2$) kvadratúrájáról az $y = x^9$-el leírható paraboláig, $y = x^{10}$-nél azonban megakadt.

Fermat-nak sikerül – végtelen geometriai sor összegének a segítségével – 1650 körül megoldania az $y = x^k$ parabola kvadratúráját tetszőleges k egész kitevőre.[138]

Ez idő tájt (1647) kerül közlésre Gregorius a Santo Vincentionak csupa mesterkélt, üres tételt tartalmazó nagy könyve végén az egyenlő szárú hiperbola $y = x^{-1}$, azaz $y = \frac{1}{x}$ kvadratúrája.

Mint Gregorius felfedezéséből is látszik, a területszámítás egyre inkább bizonyos meghatározott alakú idomokra: az abszcissza, a görbe és két ordinátája által határolt területekre kezdett korlátozódni. Ezekre vonatkozik Cavalieri két fontos tétele.[139]

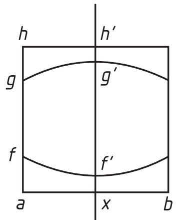
Könnyű felismerni, hogy eddig a Klein-féle 1. és 2. követelmény birodalmában mozogtunk. Most Toeplitz – megfelelően a Klein-receptnek – bevezeti a „monotoniát”. És itt elhagyja a történelmi sorrendet – kitérőt végez, visszafelé, a múltba. A nyugat-európai matematika történetében nem itt volt a folytatás. A nyugati matematika csak később ért el a monotonia fogalmához. Arkhimédész azonban már ide is eljutott: axiomatizálta az ívhosszmeghatározáshoz szükséges monotonia fogalmat.[140]

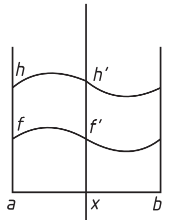
Az európai matematika más, pontatlanabb, intuitív úton közeledett a területszámítás általános megoldásához: az indivizibiliák útján. Nem tudták, hogy ebben is megelőzte őket Arkhimédész, mert ezt a módszert tárgyaló „Módszer”-e csak 1906-ban került elő. Heiberg találta meg egy kivakart és szent szöveggel teleírt bizánci kéziraton, Isztambulban.

Az európai matematikán a XVII. század első felében valóságos tevékenységi láz vesz erőt. Az indivizibila-módszer diszkussziói mellett egyre intenzívebben foglalkoznak az érintő meghatározás kérdésével, a megfordított érintő feladattal, maximum-minimum problémákkal, a Galilei-isko-

[138] Uo. 51–52.

[139] Uo. 55. – 1., Ha egy f görbe alatti terület F, egy g görbe alatti G és úgy van szerkesztve egy h görbe, hogy minden egyes ordinátájára $xh' = xf' + xg'$ akkor $H = F + G$. 2., Ha h görbe úgy van szerkesztve, hogy minden ordinátáján a-tól b-ig $xh' = \rho \cdot xf'$, akkor $H = \rho F$.





[140] Uo. 60–73.

lában mozgásmatematikával, a sebességgel, Napier a képzelt mozgás egy különös esetével: a logaritmussal.

Ezekben a felfedezésekben csírájában benne van az integrál- és differenciálszámítás. „És ez a fejlődés legvilágosabban kiemeli azt a pontot, amit a szokásos ábrázolással többnyire elrejtenek, szinte szándékosan, bár az egyetlen meglepő gondolat az egészben.”[141] 1650 körül voltaképpen már minden kellék együtt van, ami az infinitézimális számításhoz szükséges. Mégsem jöhetett létre addig, amíg ez az „egyetlen meglepő gondolat” napvilágra nem jön. Ez az „egyetlen meglepő gondolat” a XVII. század egész addigi, szerteágazó, értékes, de nagyon pontatlan, intuitív indivizibilia-fogalomra, vagy az antik geometria fogalmaira építő részletkutatását egyszerre összefogja, egységesíti, s – integrál-differenciálszámítássá alakítja át.

Mi ez a meglepő gondolat?

Bizonyos fokig visszatérés Arkhimédészhez, aki axiomatizálta az ívhosszmeghatározáshoz szükséges monotonia-fogalmat. Felismerte, hogy „ívhossz”-ról matematikailag, azaz pontosan, csak akkor beszélhetünk, ha előre megköveteljük a létezését. Ha körülhatároljuk, gondosan kizárjuk mindazokat a veszélyeket, – amik eleve lehetetlenné tennék a róla való matematizálást. Ahogy Toeplitz mondja: megadjuk a kívánt dolog matematikai „receptjét”.[142]

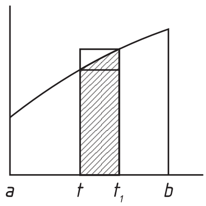
Ehhez a meglepő arkhimédészi gondolathoz tér vissza a XVII. század hatvanas éveinek a végén Isaac Barrow, Newton mestere. Kimutatja, hogy az érintőmeghatározás (differenciálás) és területszámítás (integrálás) nem magától értetődő, mindig elvégezhető műveletek. Észreveszi, hogy csak akkor tudunk érintőt szerkeszteni egy görbéhez, ha a görbét előre olyannak vettük fel, hogy legyen érintője. Hasonlóképpen csak akkor beszélhetünk egy görbe alatti területről, ha a görbét előre olyannak választottuk, hogy ez a terület létezzen. Azaz legyen a-tól b-ig mindenütt végigcsúsztatható a görbe mentében, ugrás nélkül, egy tetszés szerint keskeny tt_1 terület (folytonosság) és legyen a görbe véges ab szakaszokkal csupa vagy csak növekvő, vagy csak csökkenő részekre felosztható (monotonia). S ha ez a két feltétel kielégül, azaz folytonos és monoton függvények esetében, az érintőszerkesztés, és területmeghatározás összetartoznak, egyik következik a másikból, egymás után alkalmazva megsemmisítik egymás hatását, pontosan úgy viselkednek ebből a szempontból, mint a hatványozás és gyökvonás: egymás megfordított műveletei.

Isaac Barrow felfedezi 1667-ben azt, amit ma az infinitézimális számítás fundamentális tételének nevezünk: differenciálás és integrálás (folytonos és monoton függvények esetében) egymásnak inverz műveletei.

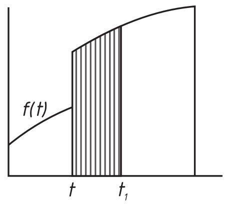
[141] Uo. 91.
[142] Uo. 60.

Láttuk, ugyanezt tartotta már Zeuthen Barrow nagy tételének, csak még folytonosság és monotonia nélkül. Zeuthen még nem hallgatta Felix Kleint, Zeuthennél még egészen másként fedezte fel Barrow ugyanazt...

Toeplitz megmagyarázza Barrownak, tulajdonképpen mit is vitt végbe. Felfedezte a „Fundamentalsatz"-ot: „Ha $F(t)=\int_a^t f(x)dx, a \leq t \leq b$, $f(x)$ folytonos és monoton, akkor $F'(t) = f(t)$. Barrow bizonyítása éppen olyan egyszerű, mint amilyen világos.



23. ábra



24. ábra

Tekintsük $F'(t)=\lim\limits_{t_1 \to t}\dfrac{F(t_1)-F(t)}{t_1-t}$ határátmenetet. Mármost $F(t_1)-F(t)=$ $=\int_a^{t_1} f(x)dx-\int_a^{t} f(x)dx=\int_t^{t_1} f(x)dx$ a vonalkázott alakzat területe. Mivel $f(x)$ monoton

$$f(t)<f(x)<f(t_1) \text{ ha } t<x<t_1$$

és $(t_1-t)f(t)<\int_t^{t_1} f(x)dx<(t_1-t)f(t_1)$; így $f(t)<\dfrac{F(t_1)-F(t)}{t_1-t}<f(t_1)$.

Ha $t_1 \to t$, akkor $f(t_1)$ minden függvényértéket felvesz t_1 és t között. Ha az $f(x)$ függvény $x = t$-nél megszakadna (ettől monoton még lehetne) akkor $\lim\limits_{t_1 \to t} f(t_1)$ nem lenne egyenlő $f(t)$-vel. Ha $\lim\limits_{x \to t} f(x)=f(t)$ függetlenül attól, hogy jobbról vagy balról közeledik az x a t-hez, akkor az $f(x)$ függvényt az $x = t$ helyen folytonosnak nevezzük. Mivel előre feltételeztük, hogy $f(x)$ függvény folytonos, következik, hogy $\lim\limits_{t_1 \to t}\dfrac{F(t_1)-F(t)}{t_1-t}=f(t)$.[143]

Ha egyáltalán lehetséges egyetlen embert megtisztelni az infinitézimális számítás felfedezője címmel – véli Toeplitz –, akkor az Isaac Barrow... Barrow azonban bizonyosan nem pályázna erre a címre. Nagy könyve megjelenése után visszavonul a Bibliához, és a geometria csak kedvtelése marad, de mindig szigorúan Euklidész modorában.

A prioritásharcnak – Toeplitz szerint – nem Leibniz és Newton, ha-

[143] Uo. 92–93.

nem Barrow és Newton között kellett volna kitörni, a prioritásharc – mint Cantor olyan szépen kifejtette – politikai kérdés volt a tory Newton és a fejedelmét, a whi-jelölt hannoveri választót támogató Leibniz között.

De a harc gyökerei nem itt voltak. A harc gyökerei „a matematika egész fejlődésében találhatók, kiváltképpen a függvényfogalom fejlődésében.”[144]

Descartes a görög geometria nagy részét algebraizálta, de – tudatosan a görög matematika egy részére szorítkozott: az infinitézimális eljárásokhoz – Toeplitz szerint – nem nyúlt.

Ennek következtében alakul ki kétféle függvényfogalom. Az egyik a Descartes által kirekesztett infinitézimálgeometriai megfontolásokhoz csatlakozik. Csírájában már Galileinél és Cavalierinél is megtalálható, és Barrow-ban ér csúcsára. Ez az irány jelenti a geometriai függvényfogalom kialakulását. A függvény itt a geometriai és mechanikai képek összefogásából és általánosításából alakul ki, egy szabályt jelent, amely minden, adott a és b határok közt fekvő x értékhez egy $y = f(x)$ számot rendel.

Descartes analitikus geometriájához csatlakozva fejlődik ki a másik irány. Ez az irány a függvényt sokkal szűkebben értelmezi, algebrai kifejezésnek fogja fel (Rechenausdruck): racionális törtfüggvénynek, gyöknek, polinomnak, végtelen sornak.

„Gregorius a Santo Vicentio, a jezsuita páter és Huygens még a régi, görög módon gondolkoznak; Barrow-t megragadja a geometriai függvényfogalom fejlődése és megkísérli beépíteni a görög gondolkozásmódba. Newton alig pár évvel fiatalabb Barrow-nál, de ő már az új, algebrai kifejezésekre alapított függvényfogalom generációjához tartozik.”[145] A „generációváltás” a matematika történetében éppen olyan jelentős, mint a művészettörténetben. Csak az új generáció: Newton és Leibniz generációja érti meg a Barrow-féle tétel lényegét, azt az óriási megkönnyítést, amit ez a tétel a számolás, a kalkulus szempontjából jelent.

Összefoglalva Toeplitz interpretációját, azt látjuk, hogy szerinte az első lépés a folytonosság fontosságának a megsejtése volt, ami a parabolákra való szorítkozásban és a mozgás segítségül hívásában nyilvánult. A görbe alatti terület kvadratúrájában a módszer további fejlődését a speciális alakú területek bevezetése segítette elő. Azután esetenként, a folytonosság és a szakaszonkénti monotonia biztosításával, intuitív határátmenettel történt az érintőszámítás, a fordított érintőfeladat, a maximum-minimum problémák, evolvens-evoluta problémák megoldása. A fejlődés végső következményét Barrow vonta le: megteremtette a megfordíthatóan differenciálható-integrálható függvény fogalmát.

Ez a fejlődés nagyjából annak a négy kvalitatív követelménynek felel

[144] Uo. 123.
[145] Uo. 124.

meg, amit Felix Klein kívánt meg a fizikában célszerűen alkalmazható függvényektől. A Klein-féle kvantitatív lépcsőt Toepliz interpretációjában Newton és Leibniz jelentik: megmutatják, hogyan kell tetszőleges pontossággal számolni az ilyen függvényekkel.

Toeplitz könyve máig legteljesebb és legszebben megírt vázlata az infinitézimális számítás korai történetének. S mivel az a perspektíva, amiből az egész fejlődést tekinti – ti. a fizikai alkalmazások perspektívája – bizonyos fokig valóban egyben a történelmi fejlődés perspektívája is, sok helyen történelmileg is helyes képet ad a kalkulus kialakulásáról. De nem szabad elfelejteni, hogy az infinitézimális számítás csak a XVIII. és XIX. században forrott össze elválaszthatatlanul a fizikával, a XVII. században a két diszciplína még függetlenül fejlődik egymástól. Elég arra emlékeztetni, hogy Newton nagy fizikai művében, a *Principia*ban nem alkalmazza azokat az infinitézimális módszereket, amiknek akkor már két évtizede birtokában volt, s amik számunkra elválaszthatatlanul egybeforrottak a newtoni fizika fogalmával, s hogy Huygens, a modern fizika Newtonnal és Galileivel egyenrangú megteremtője sohasem alkalmazta a kalkulust.

Könnyű már nekünk elképzelni pl. Galileit, amint egy vízióra és egy különböző hajlásszögre beállított lejtő segítségével „integrálja” a fizika első „differenciál egyenleteit”...

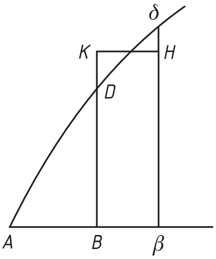
De Galilei bizonyosan nem gondolt arra, hogy differenciálegyenletet integrál. A történelem alapvető igazságtalansága, hogy nem lehet megkérdezni azokat, akikről írunk: ők mit gondolnak arról, amit róluk állítunk. Így minden történetírás – bizonyos fokig – múltba vetített utópia: a jelen értelmét és gyökereit keresi. Azért csak az lehet jó történetíró, akinek a múlthoz, amiről ír, köze van. Akinek a tárgyalt múlt egy kicsit saját története. Végeredményben két megbízható történetírói műfaj van: a memoár és a – levelezés.

Nos, a göttingeni iskola memoárjait az infinitézimális számítás eredetéről így kell megítélni. Egy előnye bizonyosan van: észrevette és kiemelte azt az éles fordulatot, ami a matematika történetében a XVII. század közepén bekövetkezik: a kvantitatív módszerek, a számolás, a kiszámítás elképesztő és hirtelen térhódítását, a számtáblázatokkal, logaritmussal és szögfüggvényekkel való munka terjedését, ami nélkülözhetetlen előfeltétele volt az infinitézimális kalkulusnak.

De nekünk, akik nem rendelkezünk olyan sok éves matematikai memóriával, mint a göttingaiak, kötelességünk ezt a személyes és meleg hangú történetet egy objektív, hideg, óriási filológiai apparaturával dolgozó, nagyon nehezen olvasható, nagyon megbízható, túlságosan is pontos, szigorú leírással kiegészíteni.

Joseph E. Hofmannra gondolok: ő a matematikatörténész a XVII. század szép, de zavaros vizein.

Der große Newton wird häufig genannt und ist doch kaum bekannt – kezdi a Newton korai matematikájáról írott nagy monográfiáját.[146] Newton legendává lett, az igazi Newtont rég elfelejtették. Newton – az igazi – 1664-ben kezd komolyan foglalkozni matematikával. „Schootent, a cartesiánus geometriát, Oughtredet, Wallist és Viètet tanulmányozza. Egyébként Barrow matematikai előadásait is hallgatta."[147]



25. ábra

Hofmann részletesen ismerteti az 1669. aug. 10-én Collinsnak küldött *De analysi per aequationes numeros terminorum infinitast.* Az első négy fejezet a sorelmélet szabályait foglalja össze, az ötödik fejezet a fluxió fogalmát vezeti be, de még a fluxió elnevezés nélkül, a további fejezetek alkalmazások: görbék hossza, sorok koefficiensei, mechanikus görbék.

Az első fejezetben közölt, $y = ax^{\frac{m}{n}}$ alakú függvények $\frac{an}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}$ alakú kvadratúráját és ennek a megfordíthatóságát a tizedik fejezetben igazolja. „Egy előkészítő részben *AB* = *x*; *BD* = *y*, *ABD felület* = *z* jelöléseket vezeti be, és azt a feladatot tűzi ki, hogy az *x* és *z* között adott összefüggésből meghatározza *y*-t. Ebből a célból bevezet egy szomszédos ordinátát és *Aβ* = *x* + *o*, *Aβδ felület* = *z* + *ov* jelölést vezeti be.

A továbbiakat a $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$ vagy $\frac{4}{9} \times x^3 = z^2$ példán vezeti le, *x*-et *x* + *o*-val helyettesíti, *z*-t *z* + *ov*-vel, kiküszöböli mindkét oldalon az *o*-t nem tartalmazó tagot, végigoszt *o*-val, és így a

$$\frac{4}{9}\left(3x^2 + 3xo + o^2\right) = 2zv + v^2 o$$

egyenletre jut. A továbbiakban a saját szavaival folytatom: Si iam supponamus *Bβ* in infinitum diminui et evanescere sive *o* esse nihil, erunt *v* et *y* aequales, et termini per *o* multiplicati evanescent; quare restabit

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{3}xx = 2zv \; sive \; \frac{2}{3}xx(= zy) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y \; sive \; x^{\frac{1}{2}}\left(= \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = y.$$

[146] Hofmann, Jos. E.: „Studien zur Vorgeschichte des Prioritätstreites zwischen Leibniz und Newton um die Entdeckung der höheren Analysis. I. Abhandlung: Materialen zur ersten mathematischen Schaffensperiode Newtons (1665–1675)", *Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1943. Mathematisch-naturwiss. Klasse. Nr.* 2. Berlin 1943. (továbbiakban: Vorgesch.)

[147] Uo. 7.

Quare e contra, si $x^{\frac{1}{2}} = y$, erit $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = z$.

Teljesen hasonlóan halad az I. fejezetben adott szabálynak az általános bizonyítása. Newton kimutatja, hogy $z = \frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}}$ -ból $y = ax^{\frac{m}{n}}$ következik, és megfordítva."[148]

A mű befejezésül egy függvény hatványsorba fejtését adja meg.

A *De analysi* jelentősége óriási lett volna, ha ismertté válik. Talán a matematika egész fejlődése másként alakul – írja Hofmann. Collins azonban jóformán semmit sem ismertetett Newton eredményeiből. James Gregory (1638–1675), aki évek óta foglalkozott hasonló kérdésekkel, csak pár, számára használatlan eredményt tud meg tőle, bizonyítás nélkül.

James Gregory érintő-módszere már *Geometriae pars universalis*-ában (Padua, 1668) megjelent. Gregory skót nemes, aki a protektorátus alatt, 1663-ban Itáliába emigrál.

Padovában Stefano Degli Angeli, a galileista matematikus a Torricelli-kör módszereivel ismerteti meg. Ugyancsak Itáliában ismerkedik meg Michelangelo Ricci eredményeivel.

Ricci az ellenreformáció jelentős személyisége, magas egyházi funkciókat töltött be. Mersenne római tartózkodása (1644) alatt közvetítő volt az olasz és francia iskola között. Ricci hosszú éveket töltött az érintőprobléma megoldásával. Későn, 1666-ban adta közzé az apollonioszi szigorú módszerek továbbépítésén alapuló módszerét az $x^p y^q = z^{p+q}$ (ahol $ax + by = cz$) egyenletű görbék érintőszerkesztésére.

Ricci nyomán dolgozta ki René François Walter de Sluse (1622–1685) $f(x, y) = \sum a_{ik} x^i y^k = 0$ formában előállított algebrai görbék s_t, szubtangensének a meghatározására szolgáló módszerét. A szubtangenst az

$$x \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} + y \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} = 0$$

[148] A latin szöveg fordítása: „Ha most feltételezzük, hogy $B\beta$ már végtelenül csökkent és eltűnt, azaz o zérus lett, v és y egyenlőek lesznek, és a o-val szorzott tagok eltűnnek; tehát megmarad

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{3} xx = 2zv \text{ vagy } \frac{2}{3} xx (= zy) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} y \text{ vagy } x^{\frac{1}{2}} \left(= \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}} \right) = y.$$

Tehát megfordítva, ha $x^{\frac{1}{2}} = y$, akkor $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = z$ lesz." – A o-t nem szabad nullának fordítani, mint oly sok könyv, pl. D. J. Struik, *A matematika rövid története,* Bpest, 1958. 119. is teszi. (Ugyanezt a hibát követi el az angol kiadás is.)

egyenletből kapja meg, a végbevitt osztás után a h és k-t tartalmazó tagok elhagyásával.[149]

James Gregory a Ricci érintőszerkesztését egyszerűsíti, s Sluzehoz hasonlóan, a Fermat módszerével rokon eljáráshoz jut, amennyiben az $\frac{f(x)}{s_t} \approx \frac{f(x+h)}{s_t + h}$ egyenletet írja fel, a kifejezést kifejti és rendezi h hatványai szerint, és a h elsőnél magasabb fokú hatványait tartalmazó tagokat elhagyja. Ezáltal arra az eredményre jut, amit mi $s_t = \frac{f(x)}{f'(x)}$-szel jelölnénk.[150]

Gregory azonban messze túljut elődein. Az eddigi korszak – a „Hochbarock" – tudása arisztokratikus, nehezen elsajátítható, tudósok szűk körére szorítkozó volt. Érdeklődő, de szakmailag többnyire nem eléggé képzett közvetítők tartották a tudósok között a kapcsolatot személyesen és kiterjedt levelezésükkel.

A tudósok megélhetés és munkalehetőség tekintetében „gyakorlati" foglalkozások és bizonytalan patrónusok kényszerének és kényének voltak kiszolgáltatva.

Az 1660-as évekkel alapvető változás következik be. A tudomány önálló lesz, az akadémiákban megteremti saját szervezeti formáit, a levelezést felváltja a folyóirat, a tudományos élet határozott, elismert és egyre jobban megbecsült része lesz az államok felépítésének.

Az általános matematikai tudás most is alacsony. A kor – a Spätbarock, ahogy Hofmann nevezi – vezéregyéniségei Viète és Descartes nyomán átfogó módszerekre törekednek, amikkel az eddigi eredmények kisebb tudás birtokában is áttekinthetők lesznek. A régibb, nehéz geometriai módszereket felváltja a teljesítőképesebb algebrai. Ez rövid és könnyen kezelhető szimbolikához és számolástechnikához vezet, s előkészíti a hatványsormódszert. A hatványsorok az új matematika hatalmas fegyverei lesznek, *kiegészítőjük,* a differenciálszámítás pedig a Spätbarock szakmai és ismeretelméleti tendenciáinak az összjátékából előálló csúcsteljesítmény.

Gregory már itáliai tartózkodása alatt az új, végtelen sorokkal dolgozó módszer felé tájékozódik. Az arkhimédészi exhauszciós eljárás kibővítésével nagy jelentőségű módszert dolgoz ki a kúpszelet-szektorok kvadratúrájára. A módszer kívül írható háromszög- és belülírható négyszögbeosztás azonos határ felé „konvergáló" (a szó tőle ered) kettős sorozatán alapul. A sorozat határértékére egyszerű közelítő formulákat ad meg, és megkísérli bizonyítani a körkvadratúra „analitikus" – azaz a szó általa

[149] Becker, O. und J. E. Hofmann *Geschichte der Mathematik,* Bonn 1951. 198. (Továbbiakban: Becker–Hofmann)

[150] Vorgesch., 30, Becker–Hofmann, 198.

használt értelmében algebrai egyenletek segítségével történő – megoldásának a lehetetlenségét.

De hibát követ el a sorelmélet alkalmazásában, és csak az angol iskola, Wallis, Mercator eredményeinek a megismerése segíti hozzá a helyes megoldáshoz. „Nehezen ássa le magát a *Logarithmotechnica* magváig", de megismerkedve a logaritmus fogalmával, nemcsak eddigi soraira dolgoz ki sokkal jobb közelítéseket, nemcsak π-re kap igen gyorsan konvergáló sorokat, s adja szigorú bizonyítását a Mercatornak, hanem 1670 végén felfedezi a Newton-féle binomiális-tételt is, bevezeti folytatólagos differenciálás segítségével a hatványsorbafejtést, megadja a trigonometrikus függvények és logaritmusaiknak a sorait, visszavezeti a logaritmikus görbe ívhosszmeghatározását a hiperbolakvadratúrára, s végül a sorokat egyenletmegoldásra és nehéz számelméleti problémák eldöntésére is felhasználja.

Még teljesen a geometriai-verbális felfogásban nőtt fel, és érett férfikorában sikerült áttörnie a számításos, analitikus gondolkozásmódhoz. Az áttörés jelentőségét megérthetjük, ha meggondoljuk, hogy pl. Huygensnek, aki kora egyik legnagyobb matematikusa volt, sohasem sikerült. Éppen ez a legnyilvánvalóbb bizonyítéka Gregory – „a modern matematika egyik megalapítója" – kiváló képességeinek.[151]

John Collinst azonban „szűklátóköre" és „Newton-imádata" megakadályozza Gregory felismerésében. Mint afféle autodidaktának, fölöttébb imponált neki a nagy Newton barátsága, s meggondolás nélkül szolgáltatja ki neki Gregory eredményeit. Gregory mellett pedig senki sem áll. „If, it were not for you, I would be, as it were, dead to all the world" – idéz Hofmann Gregory 1671. febr. 25-én Collinshoz írt leveléből.[152] „Így történhetett, hogy Gregory halála után csakhamar teljes feledésbe merült, és Newtont tekintették egy sor csodálatos tétel felfedezőjének, jóllehet ezek első felfedezője a valóságban nem ő, hanem Gregory volt.[153]

Newton csak Dary és Gregory munkáinak – és így közvetve Sluse eredményeinek – az átnézése után jön rá saját módszereinek az általános érvényére. „Hogy ebben mennyire befolyásolták Gregory eredményei,

[151] Becker–Hofmann, 198. J. E. Hofmann: *Geschichte der Mathematik, 2. Bd.* Berlin, 1957, 51–52. (Továbbiakban: Hofmann II.)

[152] Vorgesch. 48. Vö. *The Correspondence of Isaac Newton,* Ed. by H. W. Turnbull, Vol. I. 1661–1675, Cambridge 1959, 61. A szövegben az idézet nem hangzik annyira tragikusan, és főleg nincs Newton elleni éle: I can not expresse, how much I think my self engaged to you for your account of new books; if it wer not for you, I wold be, as it wer dead, to al the wordle …
As for Mr. Newton his universal method, I imagine I have some knowledge of it, both as to geometrick & mechanickcurves, however I thank you for the serieses ye sent me, & send you these following in requital.

[153] Vorgesch. 49

amelyeket kétségkívül önállóan utánaszámolt, teljesen tisztázatlan és valószínűleg sohasem lesz felderíthető.”[154] Newton kortársai azonban – s ebben még Gregory sem volt kivétel nehézkes geometriai módszerekkel dolgoztak, „Newton már analitikusan gondolkozott, a szót a modern értelemben használva... Pár sorban és általánosságban meg tudta oldani azt, amit addig nehézkes és szubtilis vizsgálatokban is csak tökéletlenül sejtetni tudtak.”[155]

Newton sorelméletét és fluxiótanát 1665–1674 között dolgozza ki, ez a Sturm und Drang periódusa, végleges fogalmai azonban ekkor még hiányoznak. Két évre abbahagyja a matematikát, és csak 1676-ban tér vissza, de már mint Mester, aki ismereteit egyenesen kinyilatkoztatásnak érzi. S ez súlyos válságba kergeti.[156]

Ugyanis: „A balsors (das Unglück) úgy hozta magával, hogy az analitikus érintőmódszer első felfedezője nem Newton volt, s kínosan ható szőrszálhasogatással kellett bizonygatnia, hogy a Sluse eljárása nyilván más alapokon keletkezett és nem olyan általános, mint az övé. S tovább úgy akarta (ti. a balsors), hogy Leibniz éppen Slusetól kapta döntő indítékát, s ebben a tekintetben messzebre és mélyebbre látott, mint Newton.”[157]

S ezután az előkészítés után már nem lesz nehéz levonni a végkövetkeztetést: Die mathematische Hochleistung des Spätbarocks ist die Erfindung des Calculus. Sie ist das ausschliessliche Verdienst des Leipziger Professorensohnes G. W. Leibniz (1646–1716).[158]

A „Prioritätsstreit” J. E. Hofmann nyomán új fázisba lépett. Talán James Gregory és Leibniz között kellene megvívni? A két „Sluse-tanítvány” között, a skót és a szász között, akiktől ügyes angolok – jóllehet részben jóhiszeműen és öntudatlanul – ellopták felfedezéseiket?

J. E. Hofmann a prioritásvita legnagyobb szaktekintélyei közé tartozik, és a leibnizi matematika genezisének a tisztázásában alapvető munkát végzett. Ma talán ő a XVII. századi matematika legjobb ismerője. S ha nem is élezi ki a kérdést ennyire, mint azt a fenti, összefüggéseikből kiragadott idézetek mutatják, a Hofmann-interpretáció tendenciája kétségkívül Newton-ellenes.

S emellett az a tipikusan tudománytörténész beállítottság jellemző rá, amit Jacques Hadamard a Newton születésének háromszázadik évfordulójára rendezett ünnepségen így jellemzett: „Mind tudjuk, hogy a tudománytörténészeknek az a legnagyobb dicsőség, ha bebizonyítják, hogy soha nem fedezett fel senki semmit”.

[154] Uo. 100.
[155] Uo. 117.
[156] Uo. 118.
[157] Uo. 119.
[158] Hofmann II, 62.

Ezt a mondatot választotta J. O. Fleckenstein a prioritásvitáról írott kitűnő kis összefoglalása mottójául.[159]

Fleckenstein lényegesen kevésbé elfogult, mint Hofmann. Helyesebben, ő más szempontból elfogult. Fleckenstein svájci, eredetileg csillagász volt, filozófus, s míg Hofmann „szellemtörténeti" háttérbe ágyazza be a matematika fejlődését, ő a „gondolkozástörténeti előfeltételeket" (ideengeschichtlichen Voraussetzungen) keresi. Természetesen ő is leibniziánus, hiszen hosszú évekig foglalkozott Leibnizzal, s így az egész newtoni matematika lényegét leibnizi szemszögből – a differenciálegyenletek szemszögéből – interpretálja. Még a *Principia* főérdemét is abban látja, hogy lehetőséget ad a naprendszer *n*-testproblémaként, differenciálegyenletrendszerrel való tárgyalására.[160]

Ez a formai felfedezés a nagy szerinte a *Principiá*-ban, mert egyébként, tartalmilag, a gravitációs törvény semmi egyéb, mint Huygens 1659-es centrifugális-formulájának alkalmazása a harmadik Kepler-törvényre.

Newton nagy érdeme – ha a *Principia* tételeit nem is öltözteti ebbe az új ruhába – az új matematikai kalkulus megteremtése. Ez az új kalkulus nem egyéb, mint „a dinamika algebrára való leképezése" (eine Abbildung der Dynamik auf Algebra), a változó erők dinamikájáé, ami megkövetelte a változás (út) változása (sebesség) változásának (gyorsulás) az analízisét.

A kalkulus: az erők matematikája.

Galilei, aki a mozgást a (mozgás indivizibiliájaként felfogott) sebességnek a folytonos változásával állította elő, intuitive már érzi az erőknek ezt az új matematikáját. Azonban nemcsak ő, még Descartes sem érkezett el soha a dinamika algebrára való leképezéséig. Sőt: Descartes ebből a szempontból kitérőt jelent. Descartes és a cartesiánusok (ide számítja Fleckenstein Fermat és Pascal matematikai módszereit is!) a maguk metszéspontösszeesésen, ill. szelő-határhelyzeten felépülő érintőmeghatározásaikkal csak a kinematika matematikai igényeit elégítik ki. „Ezáltal sikerül a cartesiánusoknak kinematikát űzni és azt az algebrára leképezni, de a dinamika zárva marad előttük; és ezáltal a cartesiánus fizika magasabbrendű algebrai görbék kinematikája lesz csupán."[161]

A fejlődés útja nem ezen a cartesiánus geometrián át vezet, hanem Galilei firenzei iskolájához csatlakozik, és az indivizibilia-matematikán

159 Fleckenstein, J. O.: *Der Prioritätsstreit zwischen Leibniz und Newton,* Basel und Stuttgart, 1956.

160 Uo. 2. – A *Principiá*-ban természetesen szó sincs erről. Nemcsak a differenciálegyenleteket nem ismeri, az *n*-test problémát sem. A három-test problémáira egy speciális XVII. századi, a területelven alapuló módszert alkalmaz. – Vö.: Truesdell, C.: „A Program toward Rediscovering the Rational Mechanics of the Age of Reason", *Archive for History of Exact Sciences* 1. 3–36. 1960.

161 Uo. 4.

keresztül történik. Ennek az iránynak az alapvető, nagy művét Cavalieri írja meg: *De geometria indivisibilibus continuorum* (Bologna 1635) címen.

Fleckenstein a Cavalieri-módszert a Newton-féle fluxió-elmélet szemszögéből interpretálja, s így nagyon szépen le tudja vezetni a newtoni matematika keletkezését – „ideengeschichtlich” – a Galilei-iskolából.

Már csak Henry Morenak kell egy immateriális tér és egy egyenletesen folyó idő realitásként való feltételezésével „biztosítani az új változás-fogalom metafizikai hátterét”, Barrownak és James Gregorynak felismerni az integrálás és differenciálás műveletének inverz voltát,[162] – és akkor „megérett Cambridge számára az idő, hogy Descartes algebrai módszereinek Galilei dinamikus elképzeléseire való alkalmazásával megteremtse az infinitézimális kalkulust.”[163]

Barrow is megteremtette volna – véli Fleckenstein –, ha nincs annyira fogva a firenzeiek geometriai módszereiben. Gregory már lényegesen tovább lát, úgyhogy tulajdonképpen nem Barrow és Leibniz, hanem Gregory és Leibniz között kellene megvívnia a prioritásharcot.[164]

Így áll Newton – „ideengeschichtlich”. Még csak egy kis „induktív empirizmust” kell kölcsönvennie ahhoz, hogy megteremthesse a kalkulust, s ezt Wallis szállítja.[165]

„Közvetlenül a pubertás utáni években” bontakozik ki Newton géniusza, s teremti meg az infinitézimális analízis alapfogalmait: a fluens és a fluxió fogalmát, s az algoritmusát, a kalkulust.

Főművében, a *Principiá*-ban csak az alapfogalmakat ismerteti, az új módszer alkalmazásától „visszariad”, s jóllehet a könyv nem egy propozícióját ennek a segítségével fedezhette fel, hogy könyvében „sehol sem alkalmazza”.

Leibniz viszont épp ezen a területen, az új módszer alkalmazásainak a területén veti be legjobb képességeit, s nyomában alakul diadalmenetté az infinitézimális számítás – fejezi be interpretációját Fleckenstein.

A Hofmann és a Toeplitz módszeréhez hasonlítható D. Th. Whiteside kalkulus-interpretációja a XVII. század matematikájáról szóló nagy monográfiájában.[166] Forrás ismerete a Hofmannéhoz fogható, s a modern matematika felől közelít a XVII. századhoz, mint Toeplitz tette volt.

Négy nagy fejezetre osztja a XVII. század matematikáját: aritmetikára és algebrára, függvényelméletre, geometriára (szintetikus és analitikus) és a kalkulusra. Legnagyobb részt természetesen a kalkulus ismertetése foglalja el. A kalkulushoz az utat a függvényfogalom tárgyalása ké-

[162] Uo. 8.
[163] Uo. 7.
[164] Uo. 8.
[165] Uo. 10–11.
[166] Whiteside, D. Th.: Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century, *Archive for History of Exact Sciences*, 1. 179–388, 1961.

szíti elő. Épp úgy, mint Toeplitznél, a logaritmus és geometriai modellje áll itt is a fejlődés kezdetén, mint „type-function”. A számolás és táblázatos függvények szerepét tartja ő is a következő lépésnek. De itt lényegesen tovább lát elődeinél: a táblázatok számításaiból adódó interpolációs feladatokban a „függvényfogalom” fejlődésének egyik fontos tényezőjét ismeri fel. Whiteside interpretációjának ez a legérdekesebb része. Az interpoláció-elméletet Wallis és James Gregory uralják. Az ő kezükben lesz a táblázatok számításainak a megkönnyítését szolgáló segédszámításokból igazi matematika: differenciaszámítás. Ez a rész iskolapéldája annak, hogyan kell a matematikai gondolkozás egy fejezetét „pattern” -analízissel közel hozni a mához. Wallis professzor – ahogy Whiteside ismerteti – nyugodtan előadhatná elméletét a mai Oxfordban is, a matematikában nem érezhetők a közben eltelt évszázadok, a matematikus gondolkozásmódja, „észjárása”, gondolkozási „pattern”-ja időn kívül álló, örök. Úgy adjuk vissza igazán helyesen, ha mai fogalmainkkal közeledünk hozzá, ha mai formuláinkkal írjuk le. De nem úgy, mint Moritz Cantor, aki a modern szimbolizmussal modern észjárást is vitt a tárgyalt gondolatokba. Utóbbihoz a „pattern”-analízis szabályai szerint nem szabad nyúlni. Az akkori észjárást kell visszaadni mai matematikai formákban, s akkor kiderül, hogy a több száz, vagy több ezer éves matematikai gondolatok épp olyan „modernek”, mint a maiak.

Láttuk, ki fedezte fel a matematikatörténetnek ilyen modern matematikai eszközökkel történő belső gondolati átvilágítását: Felix Klein. Nem árt erre emlékeztetni, mert Whiteside éppen őt és Toeplitzet nem idézi óriási apparaturájában. Nem „plagizálási” okokból. Egyszerűen azért, mert azok az elődök kerülik el legkönnyebben az ember figyelmét, akikkel lényegében egyetért.

A „függvényfogalom” fejlődésében a következő nagy lépést az interpoláció után a sorok jelentik a Whiteside interpretációjában is. Ahogy a sorelmélet történetét bevezeti, az nagyon jellemző a „pattern”-analízisre. A valós számok jólrendezhetőségét felhasználva, teljesen mai matematikai eszközökkel és szimbolizmussal, definiál bizonyos $l_0, l_1, \ldots, l_n, l$ számokat, amikkel azután összeg formájában, ahhoz hasonlóan, ahogyan pl. a tizedes törteket szoktuk a 10 növekvő negatív hatványainak az összegével előállítani, definiál egy λ számot.

„A további haladás implicite benne van a helyérték fogalmában és abban áll, hogy a $[l_0, l_1, \ldots, l_n, l]$ rendezett halmazt λ-val jelölhetjük.

Ha az ember elérte az absztrakt gondolkozás kívánt fokát, természetesen felmerül az a kérdés, hogy milyen módon lehet értelmet adni a kötetlen $l_0, l_1, \ldots, l_n, \ldots$ sorozatnak, ahol n korlátlanul nagy lehet, és ahol az l_i-ket valamely a generálásukra elegendő, rekurziós formulával (pattern) definiálhatjuk.”[167] Nagyon fontos a hozzáfűzött jegyzet: „Történetileg ezt

[167] Uo. 252–253.

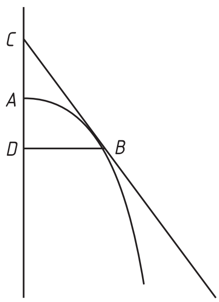
[ti. az absztrakt gondolkozás szükséges fokát] legalább akkor elérte már az ember, mikor Hippasus, Eudoxus és a többiek, az i. e. V. században ilyen végtelen számsorozatok elméletére alapozták a valós számarányok definícióját. Ez a haladás közvetlenül vezetett az aktuális és potenciális végtelen közötti különbségtételre és az irracionális arány fogalmára, mint amely nem képes (racionális) arányt adni."[168]

A XVII. század – Whiteside szerint – inkább az alkalmazások területén jelent haladást, a sorelmélet elvi gondolati tisztázása szempontjából legfeljebb Brouncker és James Gregory munkái jelentősek. A sorelmélet túl nehéz a XVII. századnak. Azért olyan büszkék egy-egy könnyű kis sorbafejtésre is, és azért hagyják el ezt az utat a könnyebb és algoritmizálásra alkalmasabbnak bizonyuló kalkulus kedvéért.

Az infinitézimális számítás – a kalkulus – kialakulását Whiteside ugyanazokban a lépésekben tárgyalja, mint Toeplitz. 1. Az intuitív eszközökkel dolgozó indivizibilia elmélet, amely a későbbi kalkulus alapötleteit és jelölési módját inspirálja, 2. visszatérés a szigorú arkhimédészi módszerekhez, 3. az érintőszerkesztés algoritmizálása, 4. végül az integrálás és differenciálás inverz műveletként való felismerése jelentik a fejlődés fő szakaszait. Nála is az integrálás-differenciálás inverz voltának a felismerése a döntő: ettől kezdve lehet infinitézimális számításról beszélni. De Whiteside már nem szűkíti le Barrowra az inverz jelleg felismerését, mint Zeuthen és J. M. Child nyomán Toeplitz tette volt. Whiteside óriási forrásismerete „feloldja" a felfedezést a századközép hatalmas matematikai irodalmában. Voltaképpen miután Descartes a De Beaune-feladatot megoldotta, a felismerés a levegőben volt,[169] és implicite alapul szolgált az indivizibilia-exhauszciós módszereknek. Wallisban is felcsillant a felismerése, James Gregory pedig sokkal világosabban kimondja, mint Barrow.

Newton 1666-ban írta le: „Enyhén modernizálva megoldását – írja

[168] Uo. 353, 2. lábjegyzet.

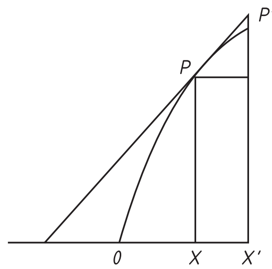
[169] 

„Voltaképpen" Descartes és De Beaune látják, hogy a De Beaune által felvetett második feladatban „kvadratúráról" van szó, anélkül, hogy területmeghatározás lenne, s hogy ez az érintőszerkesztés megfordítottja. Paul Tannery a Descartes-féle megoldás utáni klasszikus jegyzetében ezt írja: Le problème est donc bien ramèné à une quadrature, et la possibilité d'obtenir en tous cas celles-ci par une sommation de termes, avec une approximation indéfinie, est démonstré. *Oeuvres de Descartes. Publ. par* Ch. Adam & P. Tannery, II., 522. – De Beaune pedig világosan rámutat Roberval véleményével szemben, hogy nem érintőszerkesztésről, hanem annak a megfordítottjáról van szó: Je demande au contraire la methode, ayant vne equation qui explique le rapport d'entre *CD* et *DB,* de pouvoir trouver la ligne *AD. – F. Debeaune á Mersenne, 5 Mars* 1639. *Oeuvres de Descartes,* V, 535. – Descartes és Debeaune legalább annyi joggal tartható az érintőszerkesztés és a kvadratúra megfordíthatóságának a felfedezőjének, mint Wallis.

Whiteside – azt mondhatjuk. hogy Newton egy OP görbét egy, az $OX = x$ és $XP = y$ mennyiségeket összekötő $y = f(x)$ függvény által definiáltnak tekint, és vesz egy másik z függvényt, (az ő «$(OXPO)$ területe») ahol legyen $z = \int_0^x y dx = g(x)$ akkor a $g(x)$ deriváltja $\lim_{x' \to x}\left(\frac{z'-z}{x'-x}\right)$, ahol $OX' = x$, $X'P' = y'$ és $z' = (OX'P'O)$ terület. De, amint $P'X' \to PX$, $(XX'P'P)$ terület $\to PX \times XX'(= y(x'-x))$, és így

$$\lim_{x' \to x}\left(\frac{g(x') - g(x)}{x'-x}\right) = \lim_{x' \to x}\left(\frac{(XX'P'P)\text{ terület}}{XX'}\right) = PX(= y).$$ [170]

Ez természetesen ugyanaz a bizonyítás, ami a *De analysi* 5. és 10. fejezetében szerepel, s amiről Hofmann számolt be részletesen. Whiteside „pattern”-analízise azonban világosabban kidolgozza a $g(x)$ „primitív függvény” és $g'(x) = y$ „deriváltja” közötti összefüggést. Ugyanúgy, mint Toeplitz Barrownál tette volt.



26. ábra

Magának a differenciálásnak a keresztülvitele szempontjából döntő hatással volt Newtonra a Slusius–Hudde-féle szabály. Whiteside kimutatja, hogy Newton–Hudde nyomán – már az 1660-as évek közepén eljut a mai parciális differenciál operátoroknak teljesen megfelelő műveleti szabályokhoz, s ami talán még fontosabb, jelölésekhez is. Azonban ez az 1665-ös módszer még csak algebrai függvényekre volt alkalmazható, a nem algebrai, Descartes által mechanikus „görbéknek”, Leibniz által „transzcendens egyenleteknek” nevezett függvényekre a módszer nem terjedt ki. A haladás ezen a területen lassú volt. Ugyanis nem volt meg a „bármely görbe” geometriai modelljének megfelelő „analitikus függvény” fogalmuk.[171]

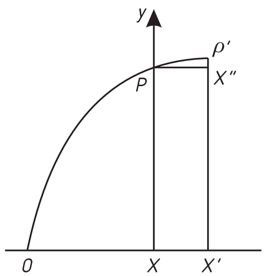
Newton is csak akkor mozog biztos területen, ha a „geometriai modell”-ben dolgozhat. Valóban, fluxió számításának a gondolatai itt születnek, innen általánosít.

„Ha az OP hosszúságot x analitikus mértékkel reprezentáljuk, akkora PP' limes-vonalszakasz $P' \to P$ esetén $\lim_{o \to \text{zero}} (o\dot{x})$-el reprezentálható, ahol $\dot{x}$ a pont pillanatnyi sebessége P-ben. Ebből az $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ fluxióhányados definíciója, ha x, y-t valamely $y=f(x)$ reláció fűzi össze, azonnal adódik: mivel $y + o\dot{y} = f(x + o\dot{x})$, tehát

[170] Uo. 370–371.
[171] Uo. 362.

$$\frac{\dot y}{\dot x} = \frac{o\dot y}{o\dot x} = \lim_{o\to \text{zero}} \frac{f(x+o\dot x)-f(x)}{(x+o\dot x)-x}\left[=\frac{dy}{dx}\right].$$

Gyakran bevezet egy olyan egyszerűsítést, amelyben x-et az időkontinuumnak tekinti (és így $\dot x$ állandó és egységnek vehető, mivel az idő egyenletesen „folyik") tehát $\dot y \left(= \frac{\dot y}{\dot x}\right)$ reprezentálja az y növekvésének a fluxionális mértékét (fluxional rate). A geometriai modellre való lefordítás ugyanolyan közvetlen, mint az előbb. A t méri az alapul vett időskálát (ahol t a mértékegység), definiáljuk $g(y)$-t mint az $f(y)$ reláció fluxióját, vagy megfordítva, $f(y)$-t mint a $g(y)$ »fluensét«; és akkor ábrázolhatók »bármely mennyiség fluensei görbék alatti területekkel, a fluxiók az ordinátákkal, az idő-intervallum az abszcisszával, az idő limes-momentuma az abszcissza limes-momentumával, a többi fluensek limes-momentumai az abszcissza limes-momentumainak megfelelő ordinátákkal« azaz, ha $OX = t$, $PX = y = \varphi(t)$ és $XX' = \dot t o = o$ (mivel t-t 1-nek vettük) és $P'X''(= P'X' - PX) = \dot y o$, akkor a fluens az $y = \varphi(t)$ alatti *OPX terület* $= z = \square y$ és a *fluens* fluxiója a $PX = y = \dot z \left(= \frac{\dot z o}{\dot t o}\right)$ abszcissza."[172]

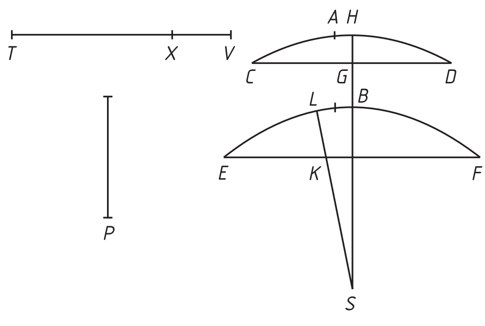


27. ábra

A következőkben Whiteside a Newton-féle elmélet differenciálgeometriai alkalmazásait ismerteti. Ez a dolgozata egyik legjelentősebb része. Fleckenstein kivételével Newtonnak ide vonatkozó vizsgálatait a matematikatörténészek alig méltányolják. Newton különösen a görbületi viszonyok analízisében jutott nagyon messze, de követői nem voltak, mert ez a terület a leibnizi analízis folytatásaként fejlődött tovább.

A pattern-analízis végeredményben ugyanoda vezetett, ahová Hof-

[172] Uo. 374–375. A modern limes-jelölés ebben az esetben nagyon zavaró. Vö. pl. Samuel Horsleynek a *Principia* Prop. VI. Theor. V.-jéhez adott fluxióelméleti magyarázatával: – si exponatur recta quaedam, *TV,* quae ad datam *P* rationem habet eam, quam sagitta



mann idea-történeti és Toeplitz szellemtörténeti vizsgálatai. De Whiteside analízise számtalan finom részlettel gazdagította a képet, elviszi az olvasót a forrásokig.

A matematikatörténeti pattern-analízis azoknak a történetírói áramlatoknak a megfelelője, amelyek az irodalomtörténetet irodalomtudománnyá, a zenetörténetet zenetudománnyá, a művészettörténetet struktur-analízissé alakították.

A folyamat lényegében a historizmusra való reakciónak fogható fel, s nagy hatással van kialakulására az egzisztencializmus. Az egzisztencializmus roppant heterogén filozófia. Számtalan válfaja van, de egyben mind megegyezik: mind ahistorikus. A megelőző kor vezető nyugati filozófiája, a pozitivizmus történelemkedvelő volt, ha nem is történelemtisztelő. A pozitivista történész lelkesedett a korhű kosztümökért, de saját gondolatait öltöztette beléjük. Így lett már Machnál a tudományok története gondolkozásökonómiai példatárrá.

Az egzisztencialista történészt a történelem struktúrája érdekli, az eseményeké vagy a gondolkozásé. És ez a struktúra, ez a pattern modern eszközökkel közelítendő meg, mert lényegében változatlan.

Ahol az „embert" kell megismerni, belső gondolkozási formáival, ott ez a módszer néha nagyon mély interpretációkat tesz lehetővé. llyen volt Jean Laporte nagy Descartes-átértékelése.[173]

Egy ilyen interpretáció lehetősége fonódik Whiteside munkájában Wallis gondolkozása köré. Wallist Whiteside interpretációja, az angol matematika centrális alakjává teszi. Ő benne, az indivizibilia-elmélet csúcsát jelentő Wallisban fonódnak össze, s belőle ágaznak szét a szálak. Az ő korlátai egy gondolkozási módszer belső korlátai, a többiek korlátai – ez áll még James Gregoryra és még inkább Newtonra is – a saját gondolkozásuk korlátai. Wallis az adott gondolkozási-pattern határáig megy,

KL ad sagittam *GH;* tum, arcubus *CAD, EBF* infinite decrescentibus, si recta *TV* ea lege fluat, ut semper sit ad datam P sicut sagitta *KL* ad sagittam *GH* (illas utrique sagittarum, *GH, KL* rectaeque *TV* magnitudines conferendo quae simul fiunt), & si *TX* sit ultima rectae *TV* longitudo, quam, arcubus *CAD, EBF* jamjam in nihilum abituris, proprius illa accesserit quam pro data quavis differencia, ... Isaaci Newtoni *Opera quae exstant omnia. Commentariis illustrabat* Samuel Horsley. Tomus II, London. 1879, jegyzet a Prop. VI, Theor. V-höz. A „minden adott különbségnél jobban" való megközelítés valóban azt a látszatot kelti, mintha a limes-fogalom alkalmazható lenne. De ez nem áll, mert a limes-fogalomban a megközelítés a természetes számok során át történik, a newtoni „limes"-ben pedig folytonos mennyiségek – Descartes általános mennyiségei „folyásán" át. A XVII. század matematikája kontinuum-matematika, a XIX. századé az arithmetikai számfogalomra épül fel.

173 Laporte, Jean: *Le rationalisme de Descartes,* Paris, [1]1945, [2]1950. – Laporte ismeri fel, hogy Descartes algebrájának éppen a folytonos mennyiségekkel való munka bevezetése egyik jellegzetessége. I. m. 9.

s néhol meglepő intuicióval még ezeket a határokat is szétfeszíti: Wallis megsejti a Reimann-integrált.[174]

A többiek elhalványodnak mellette; Newton is. Itt vannak az egzisztencialista jellegű történetírás korlátai. A modern módszerek alkalmazása csak addig jó, amíg egyetlen ember gondolkozását kell megismerni. Egyetlen ember gondolati struktúrája lefordítható modern nyelvre. Ebben a lefordításban nem vész el a lényeg, sőt: sokszor talán a fölösleges járulékoktól megfosztva, még jobban kidomborodik. De mihelyt gondolatok kölcsönhatásáról van szó, ez a lényeg-analízis felmondja a szolgálatot. Mert az emberek mihelyt többesszámban vannak, rögtön felveszik a cselekvési és gondolkozási „illemszabályokat”, különösen olyan szemérmes emberek, mint Newton. És ezek a gondolkozási sablonok – az outilage mentale, ahogy Lucien Febvre nevezte – korhoz kötöttek. Egyetlen modern formula alkalmazásával meghamisíthatjuk őket. Ezeknek a gondolkozási sablonoknak is van patternje, de ezt a patternt nem olyan élvezetes dolog leírni, mint a gondolatok patternjét. Mert ebben semmi „modern” nincs. Poros és elavult, olyan, mint egy régi, nagy barokk paróka. A borotva- hajvágáshoz szokott egzisztencialista fej megizzad alatta, annyira, hogy elmegy a kedve a „gondolkozástól”.

II.

Az első fejezetben ismertetett Newton-interpretációk mind a Moritz Cantor-féle felfogásból nőttek ki, s lényegében azonos tendenciát követnek. Ez az irány Newtont elsősorban elméleti (matematikai) fizikusnak érzi, s ezért is fűzi előszeretettel Galilei iskolájához. A matematikus Leibniz volt, ő teremti meg az új módszer algoritmusát.

Ez az egyetlen lehetőség a Newtoni kalkulus interpretálására? Csupa óriás előd, akiknek a vállán Newton már alig látszik? – Nem egészen.

Jacques Hadamard a háromszázéves évfordulón éppen azt emeli ki, hogy Newtonnak nem volt igazi elődje. Egyedül Fermat volt az, „aki, ha nevet és jelölést ad $\dfrac{f(a+e)-f(a)}{e}$ mennyiségeinek (quantitas), kétségkívül sokkal messzebb jut alkalmazásukban, mint így, talán olyan messze,

[174] Whiteside, i. m. 326–327. – Wallis jelentőségének az eltúlzását lásd már 1927-ben: J. M. Child, „Newton and the art of discovery”, Isaac Newton 1642–1727. *A memorial vol.* Ed. by W. J. Greenstreet, London, 1927, 117–129, 119. Szerinte nemcsak a binomiális együtthatókat és a $\int_o^x \sqrt{1-x^2}dx$ integrál sorbafejtését, hanem a *De analysi* alaptételét is Wallistól „vette” Newton, és az elismerése Wallis felé, frank as it is, hardly conveys the true measure of what he owed to his study of Wallis.

mint maga Newton. Ezzel szemben annak a hozzájárulásnak az értékéről, amit Leibniz hozott a differenciális jelölésével a tudományba, egyáltalán nem vagyok meggyőződve, kiváltképpen ha a magasabbrendű differenciálokról hallok beszélni."[175]

A háromszázéves évfordulók persze nem a legjobb alkalmak kritikai értékelésekre, de – Hadamard nem áll egyedül ezzel a véleményével. Ugyanezt írja a két nagy összehasonlításáról Jean Itard: „Newton ideái alapjában véve elég közel állanak a Leibnizéihoz. Ám tárgyalásmódja, anélkül, hogy a mai szigorúságot elérné, sokkal óvatosabb, mint vetélytársáé."[176]

De Itard az óvatosságot nem tartja föltétlenül szükséges tulajdonságnak, mert szerinte az algoritmusok fokozott, kiterjesztése, a bennük való egyre nagyobb bizalom, „ez a jog egy homályos és bizonyos értelemben mechanikus gondolkozásmódhoz, amit Leibniz hirdetett, ez – azt hiszem – a lényeges a matematika történetében".[177]

Már Zeuthen, s újabban René Taton[178] felhívták rá a figyelmet, hogy Newton fluxiós módszere épp úgy alkalmazható lett volna az infinitézimális geometria és a differenciálegyenletek elméletének a kiépítésére, mint a Leibniz módszere.

A. S. Ramsey[179] pedig arra emlékeztet, milyen nagymértékben fellendítette a Newtoni gravitációs-elmélet a tiszta matematikát. És épp a XVIII. században, amelynek matematikáját teljesen a Leibnizi módszerek fejlődésének tulajdonítják.

Oskar Becker, aki a „Grundlagenforschung" felől közeledett a matematikatörténethez, az első fejezetben ismertetett iránnyal szemben semmiféle „ellentétet" nem lát a *Principia* elején bevezetett új módszer és a klasszikus öltözék között. Hiszen ez a bevezetés is épp olyan szigorúan klasszikus formába van öltöztetve, mint a továbbiak, – írja. S a bevezető rész scholiumában, ami szándékosan amennyire csak lehet „a klasszikus geométerek eljárását közelíti meg", kora indivizibilia módszerével száll szembe elvi síkon, s egyféle határérték-módszert vezet be.[180]

Newton éppen azáltal „modern", hogy kortársainál szorosabban ragaszkodik a klasszikus deduktív görög módszerekhez? S épp azzal az

[175] Idézi Jean Itard: „A propos du tricentenaire de la naissance de Newton", *Revue d'Histoire des Sciences,* 1. 254–257. 1947–48.

[176] Historie générale des sciences, publ. sous la direction de René Taton. Tome II. La science moderne, Paris 1958, 233.

[177] Archives Internationales d'Histoire des Sciences, 5, 389–390, 1952.

[178] Taton. R. „La préhistoire de l'analyse géométrique." *Archives Internationale d'Histoire des Sciences,* 3, 89–102, 1950.

[179] Ramsey, A. S.: *An introduction to the theory of Newtonian attraction,* Cambridge, 1940, V.

[180] Becker, O.: *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung,* Freiburg–München, 1954, 150.

indivizibilia-módszerrel száll szembe, aminek – Fleckenstein szerint – csúcsát jelenti?

A Becker véleményének a megértéséhez tudni kell, hogy számára voltaképpen csak két matematika létezik: a görög és a XIX–XX. századi. Csak ebben a két periódusban „szabad” tudomány a matematika: sem a dolgok metafizikai lényegének a megismerésére, sem a természet megismerésére nem törekszik. A matematika – Becker szerint – ott végződik, ahol nem-matematikai kérdésekre alkalmazzák.[181]

Ha ezt a két elvét következetesen végigvinné, se Newtont, se Leibnizot nem lenne szabad matematikusnak tartania, mert ők a matematikát a természet, ill. a metafizika elveinek a megismerésére használták.

Nem voltak „matematikusok”, – mégis az egész modern matematika belőlük nőtt ki.

K. A. Rybnikov cikke ad kulcsot az „ellentét” megoldásához. Eszerint Newton a természeti jelenségek lehető legszélesebb körének a leírására alkalmas matematikai módszert akart teremteni, s ezt vélte megtalálni a fluxiós számításban. „Gondolata a következő volt. Épp úgy, mint ahogy bármely valós szám elképzelhető véges vagy végtelen tizedestört formájában, bármely valós változójú függvény is elképzelhető a változó hatványai szerint rendezett véges vagy végtelen hatványsorban.” Azért teremti meg Newton a hatványsorok differenciál- és integrálszámítását, s aztán már „csak” egy tetszőleges függvénynek a sorbafejtését kell megoldania. Ez természetesen nem sikerül, s Rybnikov szerint azért tér vissza a *Principiá*-ban az euklidészi–arkhimédészi módszerekhez. Ezért nem alkalmazza a fluxiós módszert.[182]

Lényegében ugyanez a véleménye P. Sergescunak, aki az infinitézimális számítás kialakulástörténetének egyik legnagyobb szaktekintélye. Sergescu felismeri Descartes központi jelentőségét az infinitézimális-számítás történetében. Descartes teremtette meg a „geometriai” és „mechanikus” görbék elkülönítésével az infinitézimális számítás és a sorelmélet alapjait. Ugyanis a „geometriai” görbék érintő- és területszámítási feladataihoz elegendő volt az algebrai vagy az indivizibilia-módszer valamilyen formája.

A „mechanikai” görbéket azonban sorbafejtéssel kellett megoldani.

A görbék elméletének, az érintőszerkesztésnek, az indivizibilia-vizsgálatoknak, a sorbafejtésnek értelmes egésszé való összefogására volt szükség ahhoz, hogy később a függvényfogalom megszülethessen. Ez az összefogás a Newtoni infinitézimális kalkulus.[183]

[181] Becker, O.: *Grösse und Grenze der mathematischen Denkweise,* Freiburg–München, 1959.

[182] Rybnikov, K. A.: „On the role of algorythmus in the history of mathematical analysis”. *Actes du VIII*e Congrès International d’Histoire Sciences, Florence–Milan 3–9 Septembre 1956, Paris 1958, 142–145.

III.

A „Newton-párti” észrevételek – amikből egynéhány példát idéztünk – nem sűrűsödtek olyan imponáló interpretációkká, mint az első részben ismertetett Cantor–Zeuthen–Toeplitz–Whiteside vonal. A XX. századi matematikatörténet-írás főáramlata érintőlegesen halad el a newtoni infinitézimális analízis mellett. Kétségkívül Whiteside jutott legmesszebb a newtoni matematika gondolat-strukturális előzményeinek a feltárásában, de épp ezek az előzmények a kelleténél jobban háttérbe szorítják Newton tettét.

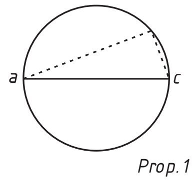
De a XX. század matematikatörténet-írása még egy nagy „Newton-interpretációt” hozott létre, amelynek az ismertetése nélkül a kép nagyon hiányos lenne: a Newton-levelezés folyamatban levő kiadását. Az első kötet 1959-ben jelent meg, a harmadik 1961-ben, és 1694-ig öleli fel a Newton-levelezés anyagát.[184]

H. W. Turnbule, a kitűnő matematikatörténész irányította a kiadást, H. W. Robinson és J. F. Scott segítségével.

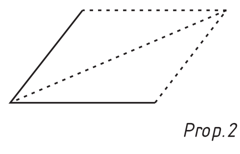
Az Adam–Tannery-féle Descartes kiadás mutatta legszebben, hogy egy ilyen nagy levelezés-kiadás egyben milyen hatásos interpretációt is jelent: a levelek összeállítási módja, a jegyzetek, az egyes részletek hangsúlyozása a századfordulón egészen új Descartes-képet teremtett, amelyik lényegében változatlan maradt Jean Laporte nagy reinterpretációjáig.

Ugyanígy a Newton-levelezésből a newtoni infinitézimális analízis új képe bontakozik ki, ami meglehetősen eltér az első részben ismertetett interpretációs fővonaltól. Érthetően a Whiteside hatalmas kéziratismerettel megírt Newton-interpretációja jár legközelebb a *Levelezés* Newtonához. De a *Levelezés*-ben előtérbe kerül az, amit Whiteside modern jelölési módja elhagyott: a newtoni matematika formavilága. S a newtoni formákban a Whitesidénél modern ruhában megismert gondolatok is más jelentést nyernek.

A newtoni infinitézimálkalkulus genezise szempontjából döntő fontosságúnak kell tekinteni azt az 1666. máj. 16. keltezésű kéziratot, amit a levelezés kiadói 348. szám alatt közölnek. A címe: „Problémák mozgás általi megoldásához az alábbi hat propozíció szükséges és elegendő”.[185]



28. ábra



29. ábra

[183] Sergescu, P.: *Coup d'oeil sur les origines de la science exacte moderne,* Paris, 1951. 76–77.

[184] A cikk írása óta megjelent a teljes Newton-levelezés. A további négy kötet: Vol. 4 (1694–1709), Vol. 5 (1709–1713), Vol. 6 (1713–1718) és Vol. 7 (1718–1727).

[185] *The Correspondence of Isaac Newton* (továbbiakban Corr.) *Vol. III.* 1688–1694. *Ed. by* H. W. Turnbull, Cambridge 1961, 348. A manuscript by Newton 16 May 1666.

Az első és második propozíció „mozgások” adott irányba eső komponensének a meghatározása, ill. mozgások összetevésének a törvénye. Már ez világosan mutatja a newtoni matematikai gondolkozás kapcsolatát Barrow-on keresztül a Torricelli-iskolához.

„Prop. 3. Egy önmagával párhuzamosan mozgó test minden pontja azonos (equall) mozgásban van.

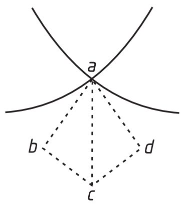
Prop. 4. Ha egy test csak körmozgást végez valamely tengely körül, pontjainak mozgása úgy aránylik mint tengelytől való távolságuk.

Nevezzük ezt a kétféle mozgást egyszerű mozgásnak.”

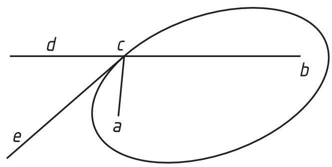
Az 5. propozíció azt mondja ki, hogy minden bonyolultabb „mozgást” ebből a két „mozgásból” kell felépíteni.

A 6. propozíció két egymást metsző görbe vonal „mozgását” analizálja ebben az értelemben: az *a* metszéspont által leírt harmadik görbevonal mozgásgeometriai adatait adja meg a két görbét *a* metszéspontjukban érintő *abcd* síkban.

A 7. propozíció a 6. propozíció algebrai megfelelőjét adja meg: hogyan kell kiszámítani két test *p* és *q* „mozgásai” közötti viszonyt, ha a két test által leírt *x* és *y* vonal közötti reláció egyenlete van megadva.



30. ábra



31. ábra

„Mozgás” alatt Newton a sebességgel arányos mennyiséget ért, s így a „mozgás”-meghatározások érintőmeghatározást jelentenek. Két példát hoz fel a fenn propozíciók illusztrálására. Az első: „Húzzunk érintőt az ellipszishez. Tegyük fel, hogy az ellipszist az *abc* zsinór (thred) írja le, és hogy *ce* az érintője. Mivel az *ac* szár ugyanakkora sebességgel csökken, mint amekkorával a *bc* nő, azaz a *c* pont egyforma mozgással mozog *a* és *d* felé, a *dce* és *ace* szögeknek egyenlőeknek kell lenni az első propozíció miatt: és ugyanígy a többi kúpszeletnél is.”

A második példa, a nikomédészi spirális érintőjének a meghatározása, jóval – bonyolultabb. Ez a példa megadja a geometriai és algebrai módszert is. A latin verzióban azonban hozzáfűzi, hogy a mechanikai görbék esetében az algebrai számítás cserbenhagy, csak a másik módszer használható.

Ez a kis írás a korabeli Torricelli–Roberval–Barrow-féle mozgás geometria és a Descartes–Hudde–Sluse-féle algebraizált geometria egymás mellé helyezése, összeolvasztási kísérlete.

Meg kell figyelni, már most milyen következetesen kidolgozza a vonal és a vonal mentén történő „mozgás”, más szóval a pálya és a sebesség – még más szóval: a görbe és az érintője közötti összefüggést. És ez az új, a jövő csírája: a görbét az érintője segítségével definiálja, erre való a hat propozíció. Már úgy adja meg a görbét, hogy legyen érintője, s ez a felfogás törli el a cartesiánus különbséget „geometriai” és „mechanikus” görbék között. Közös csoportba foglalhatókká lesznek „geometriai” és „mechanikus” görbék; az érintővel rendelkező görbék; – a „differenciálható függvények” – csoportjába.

A matematikus olyan, mint a bűvész: csak azt tudja elővarázsolni a kalapból amit előre beletett.

A matematikus is annál jobb bűvész, minél „kevesebből” minél többet elő tud varázsolni. S sajnos, Newton azt hitte, abban is követni kell a bűvészt, hogy az elővarázsolás módját a lehető legnagyobb titokban kell tartani.

A bűvészrecept adva volt; ha érintőt akarsz szerkeszteni, gondoskodjál róla, hogy görbéidnek legyen érintője. Csírájában már ebben az írásban meg van adva, mi biztosítja majd ennek a feltételnek (szükséges és elegendő – mondja a cím) a teljesülését: a folytonos mozgás. De explicite csak a *De analysi*-ben jelentkezik a feltétel, ahol a sebességet egy görbe alatti terület változásának a sebességére konkretizálja.

Ezáltal megad két mennyiséget, amelyek mindig kiszámíthatók egymásból. A két mennyiség: a görbe alatti *változó terület* s a terület változásának *a sebessége.*

Mivel a görbét két mozgásból származtatja: egy abszcissza-irányú és egy ordináta-irányú mozgásból, a mozgás – területváltozás – sebessége éppen a két mozgásból összetevődő érintő abszcissza-tengelyhez való hajlását adja meg.

A két mennyiséget: változó területet és a területváltozás sebességét névvel látja el: „fluens” és „fluxió”, s ezzel az új kalkulus megszületett. Többé nem szükséges a terület-képhez ragaszkodni, aminek a segítségével a *De analysi*-ben bizonyított, a nyert új mennyiségek egészen általánosak, s definiálási módjuk biztosítja, hogy – legalábbis elvben – egyik a másikból mindig számítható.

Az új módszert nagyon részletesen és logikusan ismertető *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* csak 1736-ban jelent meg nyomtatásban, jóllehet már 1671-ben készen volt, s barátai tudtak róla.

Egy 1692-ből származó feljegyzés mutatja, hogy Newton eljárása közismert volt Angliában, de nem közkedvelt. „A kitűnő Mr. Newton – írja a névtelen jegyzetkészítő – a fluxiók tanát két propozícióra redukálta: 1. megtalálni bármely fluens mennyiségeket tartalmazó adott egyenlet fluxióit és 2. a megfordítottja. Fluens mennyiségek alatt meghatározatlan mennyiségeket (indeterminate quantities) ért, azaz olyanokat, amelyek egy görbe (curve) mozgás (local motion) általi előállításában folytonosan nőnek vagy csökkennek (perpetually increase or decrease), fluxió alatt pedig a növekvésüknek vagy csökkenésüknek a sebességét (celerity) érti.

Jóllehet a fluens mennyiségek és fluxióik (flowing quantities & their fluxion[s]) első látásra nehezen felfoghatónak tűnnek (új dolgok felfogása mindig jelent bizonyos nehézséget), mégis ő úgy véli, hogy a fogalmuk (Notion of them) csakhamar könnyebb lesz, mint a momentumok vagy végtelen kis részeké, vagy végtelen kicsi differenciáké; mivel az alakzatoknak és mennyiségeknek folytonos mozgás (continued motion) által való előállítása sokkal természetesebb és könnyebben felfogható, és ennek a módszernek a sémái sokkal egyszerűbbek, mint a részekéi...

Minden görbe vagy bármely más fluens mennyiség abszcisszáját egyenletesen növekvőnek tekinti, és flexióját egynek veszi; a többi fluens mennyiségek fluxióit maguk a mennyiségek fölé írt ponttal jelzi következőképp: Tegyük fel, hogy *v, y, x, z* a fluens mennyiségek, akkor megfelelő fluxióik $\dot{v}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{z}$-al jelölendők. És mivel ezek a fluxiók is meghatározatlan mennyiségek (indeterminate quantities) és folyamatos változással (perpetual mutation) nőnek vagy csökkennek, azokat a sebességeket, amelyekkel nőnek vagy csökkenek, ezek flexióinak tekinti...”[186]

Ez a mennyiségfogalom az új a newtoni kalkulusban. A módszer, ahogy fluensek között fennálló egyenleteknek a fluxióját meghatározza – az érintőszerkesztés módszere – 1670 körül már nem új, de nem is olyan régi és magától értetődő, amilyennek a matematikatörténészek szeretnék beállítani. A *Levelezés*-ből jól kitűnik, mennyire izgató kérdés a fiatal Newton kortársainak az érintőszerkesztés. Az a megoldás, amit Newton ad, egy messzeágazó nemzetközi fejlődés csúcsa.

Az olasz és a francia iskola eredményeit ötvöző Michelangelo Ricci tartja talán kezében a módszer kulcsát. Mikor magas egyházi funkciói miatt le kell mondania a matematikáról, René Francois Walther de Sluse, liège-i kanonok veszi át örökségét, és talál „váratlanul” egy módszert az érintő egyetlen aránnyal való kifejezésére. S ennek a segítségével – írja 1671 decemberében Oldenburgnak – röviden és igen könnyen kapja meg ugyanazt az eredményt, amit régen nagy kerülőutakkal nyert. Ha „Isten életet és időt ad”, reméli, hogy rövidesen elküldheti a megoldást. „De ami a jövőt illeti, Isten térdein nyugszik az; én még pyrrhoszi módra semmit sem szögezek le.”[187]

1672-ben közli Sluse „rövid és könnyű” módszerét a *Philosophical Transactions*-ban a geometriai görbékhez való érintő szerkesztésére. A következő évben módszert közöl mindenféle görbéhez való érintőszerkesztésre.

[186] Corr. III, 394, Newton’s method of fluxions, 17 September 1692, 222–223.
[187] Corr. I, 27, Sluse to Oldenburg 17 December 1671, 71.

Az ő módszere éppúgy nem vált közkedveltté, mint a Newtoné.

És mint a James Gregoryé, aki Sluse geometriai görbékhez való érintőmódszeréről megírja Collinsnak, hogy az semmi egyéb, mint amit ő, Gregory „Fermat-módszernek” nevez, s ami voltaképpen az a módszer, amit Newton használ a *De analysi*-ban.

A kortársak se rendelkeztek sokkal biztosabb elképzelésekkel a kalkulus születéséről, mint mi.

Még Collins sem, akinek a kezében az erre vonatkozó levelezés jórésze összefut, s akivel Newton is szabadon közli felfedezéseit. Legalábbis ami az eredményeket illeti. A módszer tekintetében tartózkodóbb.

James Gregory sem ismerte Newton „Univerzális módszerét”, aminek a segítségével a legkülönfélébb geometriai és mechanikai görbék problémái: érintőszerkesztés, ívhosszmeghatározás, görbék alatti terület meghatározása, adott érintőirányokhoz görbeszerkesztés stb. megoldhatók. De sejtette, hogy Newton módszere, éppúgy mint az övé, „tetszőleges” egyenletnek végtelen sorbafejtéséből áll. „Nagyon szeretném megismerni Mr. Newton módszerét, amellyel kéttagú egyenleteket végtelensorrá alakít... Én bármely egyenletet végtelen-sorrá tudok alakítani... Van egy módszerem, amivel a geometrikus problémákat (legalábbis amiket eddig tárgyaltam) végtelen-sorba tudok átvinni”, s közöl Collinssal számos fontos példát.[188]

Gregory példái mutatják: körülbelül ugyanott tart, ahol Newton a *De analysi*-ben. Tudja, hogyan kell hatványokból összetett, többtagú kifejezéseken könnyen elvégezni azokat a műveleteket, amik érintőszerkesztéshez, maximum-minimum meghatározáshoz, ívhossz-számításhoz, területszámításhoz, érintőből való görbe megszerkesztéshez és kvadratúrához szükségesek. Másrészt tudja azt, hogyan kell egy „tetszőleges” görbét megadó összefüggést végtelen hatványsorban kifejezni.

Harmadszor: tudja, hogy – a kor legnagyobb matematikusa Dr. Barrow, akinek a műveit tanulmányozni, módszereit követni kell. Így pl. teljesen a Barrow klasszikus geometriai modorában, a *Lectiones geometricae* egy területmeghatározásra vonatkozó problémájának a megfordításán töri a fejét.[189] „Ez a probléma – írja Collinsnak 1670-ben – (ha megoldható) úgy képzelem, hogy túlvinné a geometriát jelen állapotán; de oly sok nehézséget látok benne, hogy én magam reménytelenül állok vele szemben, s ezért szerényen kérdem, nem tudná-é másvalaki megoldani. Szeretném látni Mr. Newtonnak azt a munkáját, amelyik minden görbére, általáno-

[188] Corr. I. 20, Gregory to Collins 23 November 1670, 46–47.

[189] Corr. I. 18, Gregory to Collins 5 September 1670, 41–42, 4. jegyz.: hogyan kell egy *KL* görbe alatti *AKLD* terület segítségével meghatározni egy *ANMB* görbét úgy, hogy a görbe érintője bizonyos előre megadott feltételeknek tegyen eleget. Mai nyelven keresendő az $y^2[1+(dy/dx)^2]=X$ differenciálegyenlet megoldása, ahol X az x adott függvénye.

san alkalmazható. Valóban azt hiszem, hogy Mr. Barrow XIII-ik felolvasása annyira tökéletesítette az analitikát (analytics), hogy kevés adható általánosságban hozzá.”[190]

Barrow felveszi a kesztyűt; Gregory „szerénységét” se kell egészen komolyan venni, s mind a ketten adnak a problémára egy-egy klasszikus geometriai stílusban tartott, nehéz megoldást.

A jövő fejlődés szempontjából épp az ilyesféle fordított érintőfeladatok és a terület változásából a görbe mentére vonatkozó kérdések a legfontosabbak. De nem a Barrow nyomán.

A Barrow-féle geometriai módszer ebben a tekintetben különösen nehézkes, a végtelen sorokba való fejtést még szülőhazájában, Angliában sem nagyon értik.

Kétségkívül Collins az egyik legjobban tájékozott matematikus a kialakulóban levő sorelmélet és infinitézimális számítás területén. Newton munkáját is ő ismeri talán legjobban: „...Dr. Barrow révén sikerült azóta pár új sort szereznem Newton általános módszeréből, s vele való megbeszélésből tudom, hogy azok bármely alakzat (figure) adott tulajdonságaiból analitikusan (ti. algebrai úton) származtathatók, és hogy minden figurára sok sor alkalmazható, és hogy egyaránt képes kvadrálni azokat a görbéket; amelyeket Descartes geometriaiaknak tart, és azokat, amelyeket mechanikusaknak, ezért ezzel a módszerrel minden olyan figurának, amelyek közös tulajdonsággal bírnak, a görbe vonalai kiegyenesíthetők, érintőjük és súlypontjuk meghatározható, forgástestjük is és annak második szegmentuma mérhető és minden görbénél megadható a görbe vonal egy ívhosszához tartozó ordináta és megfordítva.”[191]

Ekkor Collinsnak már birtokában volt a *De analysi,* s a *Levelezés* kiadói szerint épp ezt beszélte volna meg Barrowval.[192] Newton új módszeréről mindenki a legnagyobb elismeréssel nyilatkozik, ő maga mégis a *Principiá*-ban, amint azt minden tudománytörténész illőnek tartja szemére vetni, nem a saját fluxiós-módszerét, hanem az „elavult” geometriai módszereket alkalmazza.

Valóban egyedülálló szituáció. Felfedezi a „természet” leírására szolgáló kitűnő módszert, s amikor a „természet” addig páratlan tökéletességű matematikai leírását adja, nem alkalmazza ezt a módszert.

Azonban ő maga és kortársai nem érezték ezt az „anakronizmust”. Sőt: egyik legnagyobb angol matematikus – ha ugyan nem a legnagyobb – James Gregory zavartalanul alkalmazza egymás mellett a „haladó” sorelméleti matematikáját, s az „elavult” Barrow-féle geometriai módszereket. Edmund Halley, aki szintén nem mindennapi matematikai tehetség

[190] Uo. 41.
[191] Corr. 1. 22, Collingi to Gregory 24 December 1670, 54.
[192] Corr. I, 59, 14. jegyz.

volt, kizárólag az „elavult” módszereket alkalmazza, s amikor Newtont nagy és tisztelt barátjának, Lockenak a *Principia* lényegét meg akarja magyarázni, nem a fluxiós módszert, hanem az „elavult” geometriai módszert alkalmazza, ugyanazt, amit a *Principiá*-ban.

S ugyanakkor ő is, kortársai is nagyon nagyra becsülték a fluxiós módszert, egyébként nem vívtak volna késhegyig menő harcot a leibniziánusokkal a prioritásért.

Nem látunk mi kiengesztelhetetlen ellentétet ott, ahol a korabeli Anglia és maga Newton semmi ellentétet nem látott? A „haladó” és „elavult” megkülönböztetését kérjük számon egy olyan koron, amelyik számára ennek a megkülönböztetésnek semmi értelme sem lehetett?

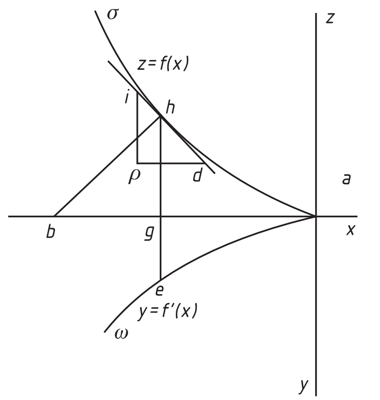
Huygens végig az „elavult” matematikai módszerekkel dolgozva lett kora legnagyobb matematikusa, James Gregory nem szűnt meg Barrowot csodálni, Barrow nem szűnt meg Euklidészt és Apollóniószt csodálni, David Gregory, aki egész fiatalon kerül az öreg Newton mellé, ezt az „elavult” módszert tanulja meg és viszi tökélyre, ebben dolgozik Roger Cotes, a *Principia* második kiadásának készítője...

S amikor Johann Bernoulli meggyanúsította Newtont, hogy a *Principia* egy hibáját saját fluxiós elméletének hibája miatt követte el, az öreg Newton fölényesen utasítja vissza az ifjú óriást: a hiba közönséges számolási hiba; a tétel bizonyításának semmi köze a fluxiós számításhoz, s rögtön megadja a helyes bizonyítást – „elavult” geometriai módszerekkel.[193]

Láttuk, hogy már egy egészen korai Newton-kéziratban fel lehet ismerni a fluxiós elmélet csíráit.

Egy még korábbi, valószínűleg még 1664-ből származó kézirat viszont a „régi” geometriához csatlakozva vezet a *De analysi...* „új” analitikája felé.

A kézirat a cambridge-i egyetemi könyvtárban őrzött ún. *Commonplace Book*-ból származik, már Brewster beszámolt róla, Schootenból és Wallisból készített jegyzetek között helyezkedik el. Címe: „Kvadrálható görbe vonalak kvadrálására szolgáló módszer.”[194]



32. ábra

A következőt állítja: Legyen adva egy *σha* görbe. Szerkesszünk egy másik *aeω* görbét úgy, hogy minden *ge* ordinátája az előbbi görbe érintőinek $\dfrac{i\rho}{\rho d}$ gradienseivel

[193] Hall, A. R.: „Correcting the Principia”, *Osiris,* 13, 291–326, 1958.
[194] Corr. II 190*,* A manuscript by Newton ? 1644, 144–167.

legyen arányos. Akkor az *ae* görbe alatti *aeg* terület a *ha* görbe megfelelő *gh* ordinátájával lesz arányos.

Vagy modern nyelven elmondva: Ha adva van egy $z = f(x)$ görbe és a hozzátartozó $y = f'(x) = \frac{dz}{dx}$ derivált görbe, akkor $\int f'(x)dx = z$.

A bizonyítás egyszerű: Az *aeω* alatti görbét beosztja az $\frac{i\rho}{\rho d}$ gradiensekhez tartozó téglalapokra, a beosztás számát végtelenül növeli, s közben – implicite – felhasználja az *iρd* háromszögnek azt a tulajdonságát, hogy oldalainak aránya a háromszög bármeddig való kisebbítésében sem változik, mert a *hb* normális által megadott *hgb* háromszögből (egymásra merőleges oldalak) számítható.

A „karakterisztikus háromszög" – legalább 10 évvel Leibniz előtt. S a „Barrow-féle" fundamentális tétel 6 évvel Barrow előtt.

Mint a *Levelezés* kiadói megjegyzik, „valószínűleg" ez a fundamentális tétel legelső kimondása és bizonyítása. Utána Gregory *(Geometriae pars universalis* 1668, prop. 6.) és Barrow *(Geometricae lectiones* 1670, Lecture 10) mondják ki, s maga Newton újra, a *De analysi*-ben (1669) kevésbé frappánsan.[195]

Newton két példát ad a módszerre: Legyen egy vonal alatt levő terület egyenlete $\frac{x^3}{a}$, ill. $\frac{a^3}{x}$. Mik a megfelelő görbevonalak? – Newton felállít két, az érintési feltételeknek eleget tevő egyenletet, az egyenleteket Hudde módszerével „differenciálja", s a nyert egyenlet adja meg a fenti tétel értelmében a keresett görbét, ami az egyik esetben egy parabola, a másik esetben hiperbola.

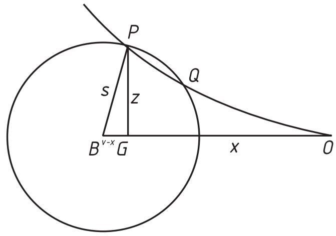
Később a Hudde-féle módszer helyett a Fermat-módszert használja, míg a *De analysi*-ben ki nem alakítja a saját, binomiális-tételen és fluxiós felfogáson alapuló „differenciálási" módszerét. A példákkal kapcsolatban a *Levelezés* kiadói megjegyzik, hogy részben még a jelöléseket is Descartes *Géométrie*-jének (1637) második könyvéből, ill. a Schooten-féle *Geometria a Renato Descartes* (Leyden 1649) 46. lapjáról vette.

Ugyancsak Descartes érintőmeghatározásából származik az a hatodfokú egyenlet, amit a példákban felhasznál. „Descartes egy $B(v, 0)$ pontból úgy találja meg a normálist, hogy egy B középpontú, s sugarú kört húz, aztán s-et úgy választja, hogy P és Q a két metszéspont, egybeessen; úgy, hogy az x-ek megfelelő értékei is egybeessenek.

[195] Corr. II, 167, 2. jegyz. (A jegyzet jelzései a kiadók és Newton ábráihoz képest z-t és y-t felcserélik.)

Ha $z = \frac{x^3}{a^2}$ akkor a *BPG* háromszögből $s^2 - (v - x)^2 = z^2$ ahol *s* és *v* konstansok. Innen Newton *x*-ben hatodfokú egyenlete."[196]

Csak a hatodfokú, ill. négyzetes, az érintési feltételt biztosító egyenlet származik a *Géométrie*-ből? Nyilvánvalóan nem. A módszer egész „szelleme", „stílusa" mélységesen cartesiánus: Descartes módjára tesz át egy geometriai problémát algebrai egyenletekbe; az érintési feltételt mint az egyenlet két gyökének az egybeesését – nem mint a szelő „határhelyzetét"! – adja meg. Ezért is használja a Hudde-féle cartesiánus módszert. Cartesiánus abban is, hogy a tétel bizonyításában az érintőket kezdettől fogva a normálisokkal határozza meg, a szerkesztés a normálisok (és a rájuk merőleges érintők) változatlanságára van felépítve, ezek rögzítettek az indeterminált területbeosztás mellett is.



33. ábra

Modern és régi, newtoni és cartesiánus között a választóvíz nem az infinitézimális kalkulus. Descartes „infinitézimális-fóbiája" – már Tannery felismerte – épp olyan mese, mint a görögöké. S bizonyos tekintetben Descartes „differenciálási" módszere modernebb, mint a Newtoné és főleg a Leibnizé, és szigorúbb, mint utána Cauchyig bármi.

És Descartes módszerei jobbak, pontosabbak, matematikusabbak, mint előtte és két évszázadig utána bármi. Descartes olyan tökéletes, mint Arkhimédész és Euklidész. Egyetlen dolog hiányzik Descartes-ból: a folytonos változás, a mechanikus mozgás matematikai elismerése. Nem a felismerése. Descartes felismeri, s éppen ezért tiltja a „mechanikus" görbéket. Felismeri – és eltiltja, miután ő maga ad kezelhetőségükre néhány ragyogó példát.

Newton, James Gregory és Leibniz nem az infinitézimális számítást teremtik meg, hanem bemerészkednek a tiltott területre a fizika, a matematika és a metafizika nevében.

Ezért lesz háromféle infinitézimális kalkulus: egy fizikai, egy matematikai és egy metafizikai.

Ez a prioritásvita „stílustörténeti" háttere: ha feldobom, differenciál, ha leesik, fluxió, de voltaképpen végtelen-sorbafejtés.

És ha nagyon-nagyon szigorú akar lenni az ember, olyan, mint a hollandiai francia kóborlovag, akkor az egész tojásbűvészetből nem marad semmi, csupán egy egyenletrendszer determinánsának a zérussal való egyenlővé tevése... Nem egy modern algebrában járatos differenciálgeo-

[196] Corr. II, 167, 4. jegyz.

méter fedezte fel, hogy a differenciálhányados voltaképpen egy sajátos „leképezés”? – Nem. Monsieur Descartes.

Nagy Mesterét – az egész XVII. század nagy mesterét – követte itt is Isaac Newton. – Egyben nem követi: a tényleges számolással szembeni ellenszenvben. Newton szabadon dolgozik a számokkal és a számokat jelentő betűkkel.

Ugyanannak a *Commonplace book*-nak egy következő helyén, ahonnan az előbbi kézirat származik, egy valószínűleg 1664 végéről vagy 1665 elejéről származó bejegyzésben többek közt megtalálható a *De analysi* fő, kezdő propozíciója:

„Legyen $ab = x$ és $y = be$, akkor: ...Prop.: 3 ... Ha $a^n x^m = b^n y^m$, vagy $\frac{ax^{\frac{m}{n}}}{b} = y$ akkor $\frac{nxy}{n+m} = \frac{nax^{\frac{m+n}{n}}}{nb+mb} = abef$, azaz az *aef* vonal alatt levő terület...”

A bizonyítás teljesen a Cartesius–Hudde-féle módszerekkel történik, mint a fenti példában. A nagy újság a törtkitevő megjelenése.

Igen fontos a következő propozíció, ami a kvadratúra tagonkénti elvégzésének a lehetőségét mondja ki:

„Prop: 4. Ha $y = ax^m + bx^n$, akkor $\frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1} = abcf$...”[197]

Egyre inkább haladunk a módszer számolási szabályainak a rögzítése és egységesítése, algoritmizálása felé.

A következő propozíciók (Prop. 5.–Prop. 8.) a binomiális tételt mondják ki $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ és $(a+b)^{-\frac{m}{n}}$-re, a binomiális koefficiensek megadásával.

Newton a Leibnizhoz intézett híres *Második levelében* mondotta volt el a binomiális sor felfedezésének a részleteit, s azóta számtalanszor idézték, hogyan jött rá Wallis eredményeinek az interkalálásával a binomiális tételre: ... Sub initio studiorum meorum Mathematicorum ubi incideram in opera Celeberrimi Wallisij nostri...[198]

A *Levelezés* kiadói szerint többek között a N° 191 alatt közölt[199] kézirat lehetett az, amire Newton a Leibnizhoz írt *Epistola Posterior*-ban mint a binomiális tétel felfedezésére hivatkozik.[200] Ugyanott röviden megadják, milyen interkalációs táblákat adott meg Newton az $(1-x^2)^n$ egész n kitevőjű görbék alatti területek formuláinak a segítségével az $(1-x^2)^{\frac{m}{n}}$ a törtkitevőjű görbék alatti területekre.

[197] Corr. II, 191, A manuscript by Newton ?1665, 168.
[198] Corr. II, 111.
[199] Corr. II, 191, 168–171.
[200] Corr. II, 191, 170, 1. jegyz; 188, 150, 10. jegyz.

A binomiális tételhez természetesen nem elegendő a Wallis-féle kvadratúrák „induktív” általánosítása, hanem elengedhetetlen az ugyanezen kéziratban közölt 4. és 3. propozíciók, valamint a fundamentális tétel alkalmazása is.

A binomiális tétel komplex és sok forrásból táplálkozó matematikai fejlődés eredménye: a cartesiánus geometriának legalább annyi része van benne, mint „Celeberrimi Wallisij nostri”... S még valaminek. Newton így fejezi be az $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ és $(a+b)^{-\frac{m}{n}}$ a sorbafejtésének az ismertetését: „Ennek a két propozíciónak az igazsága így is bizonyítható. Ha $(a+b)^{-\frac{1}{1}} = \frac{1}{a+b}$, akkor 1-et elosztom $(a + b)$-vel, mint a tizedestörteknél és az $\frac{1}{a} - \frac{b}{aa} + \frac{bb}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5}\, \&\, c$ hányadost kapom, amint mindkét oldalt $(a + b)$-vel szorozva kitűnik. Ugyanígy $(a^2 + b)$-ből úgy vonok gyököt, mintha tizedesszámok lennének, $\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a} - \frac{bb}{8a^3} + \frac{b^3}{16a^5}\, \&\, c$-ra jutok, ami szintén igazolható a két oldal négyzetre emelésével.”[201]

Nyilvánvaló, hogy ugyanazzal a számolási készséggel, ugyanazzal az algoritmusokba vetett bizalommal állunk itt szemben, amit Cantor a Mercator nagy újításának tartott.

Amit megtalálunk Oughtredben, Collinsban, Gregoryban, Mercatorban; az angol matematikusok nagy részében. És ami nincs meg a cartesiánusokba Newtonban valóságos számolási dühhé fokozódik a hatvanas években. Mindent ki akar számolni: azt a hatást, ami a Föld egyenlítőjén a Föld forgása következtében emeli a testeket, azt *a conatust,* amivel a Föld a Holdat mozgatja maga körül és a Földet a Nap maga körül, az eső test pályáját, ha az parabolikus, az inga „mozgását”. – Galileiből a számpéldákat veszi ki, és végigszámolja, amit az csak elgondolt... Meghagyja az itáliai mértékegységeket, majd áttér angolra – nem a mértékegység, hanem a szám fontos, a tetszőleges pontosságig kiszámítható tizedestört...[202]

A betűkben kijelölt műveletek éppúgy elvégezhetők, mintha közönséges számok lennének, közönséges véges vagy végtelen tizedestörtek. És ha így tekintjük őket, akkor megszűnik a descartesi tilalom a „mechanikus” problémák iránt. Éppúgy tetszőleges pontosságig elvégezhetők lesznek azok is, mint pl. egy osztás, amelyik végtelen tizedestörtre vezet.

A „szám” nem egész és nem racionális tört, a „szám”: végtelen tizedestört. A XVII. század közepi Angliában a „levegőben van” ez a nagy fontosságú tétel. Számoló mesterek és kereskedők, pénzváltók és hajóskapitányok egyaránt használják a tizedestörteket, a számolás könnyű

[201] Corr. II, 170.
[202] Corr. III. 347*,* A manuscript by Newton ?1665 or 1666, 46–54.

velük, elterjed, bizalmat ébreszt maga iránt, minden kiszámíthatóvá válik: nyereség, halálozás, szaporodás, kamat.

Minden kiszámítható: a végtelen tizedestörtek varázsának a formulák sem állhatnak ellen, a végtelen tizedestörtek mintájára gyerekjáték lesz egy csak kijelölt osztást végtelen sorba törni. Egyszerre, mintegy varázsütésre születnek Newton, Mercator, James Gregory, Lord Brouncker, John Collins kezén a 60-as évek végén, 70-es évek elején a szebbnél-szebb sorbafejtések: körterületre és körívre megadott sorok, a hiperbola alatti területre megadott sorok, a logaritmikus sor, a sinus sor, a cosinus sor és így tovább...

És a sorokkal megadott összefüggések azonnal elvesztik titokzatos „mechanikus" tulajdonságaikat, a sorokkal megadott görbék azonnal kvadrálhatók, rektifikálhatók, tanulmányozhatók érintő-tulajdonságaik, szembetűnnek olyan hasonlatosságok, amelyekre a „mechanikus" definícióban gyanakodni se lehetett.

Érthető, ha John Collins olyan szenvedélyes végtelen sor gyűjtővé, és James Gregory olyan szenvedélyes végtelen sor előállítóvá válik.

A végtelen sor, speciálisan a binomiális tétel, ad lehetőséget az érintőszerkesztés és kvadratúra minden „geometriai" és „mechanikus" megkülönböztetéstől független megalapozására. Ezt végzi el Newton a 60-as és 70-es évek fordulóján, ezzel nyit utat egy új világba: a „mechanikus" görbék vizsgálatának a tiltott paradicsomába.

Érthető, ha öreg korában a binomiális tételt vágyott a sírkövére vésetni.

A végtelen sorban való kifejezés adta meg a lehetőségét annak, hogy a „mechanikusan", mozgás által létrehozott görbékkel ugyanúgy bánjon, mint a „geometriai" görbékkel. De ehhez a területet folytonos folyás útján keletkezőnek kell tekinteni, s a folytonos folyást reprezentáló kis *o* momentummal megnövelt mennyiségeket sorbafejteni.

A 60-as évek végén, 70-es évek elején a sorok látszanak a királyi útnak a matematikához. S talán csak James Gregoryban és Isaac Newtonban, a sorelmélet két nagy elindítójában ébred fel a kétely: milyen pontosan írja le, közelíti meg egy sor a szavakban és geometriai jelekkel vagy mechanikai módon definiált összefüggést?

Newton egy 1670 elejéről származó levelében egy speciális sorbafejtési probléma során kísérletet tesz a megközelítés következtében előálló hiba megbecsülésére. A becslés nem általános érvényű, azonban arra mutat, hogy Newton milyen nagy súlyt helyez az „igazság"-hoz leginkább „konvergáló" sor megtalálására.

Ezek az ő szavai: a probléma kétféle megoldását adva, a második sorbafejtés után megjegyzi: „A haladványban minden második tag hiányzik, és így sokkal inkább konvergál az igazsághoz, mint az előbbi." Majd újra, a hiperbola alatti területre egy új sort előállítva, amely sorban „minden második tag hiányzik, és x felével kisebb mint egyébként lenne, ami a sort konvergálóbbá teszi az igazság felé”. (Wich makes ye series more converging toward ye truth.)[203] Könnyű ma megállapítani, hogy a sorok nem az „igazság”, hanem a limesük felé konvergálnak. Egyébként az, hogy becslést végez, mutatja: Newton is ilyesmire gondolhatott...

Mégis a határérték matematikai megfogalmazása előtt a sorelmélet bizonytalan marad, s nem alkalmas arra, hogy az infinitézimális számítást – mint majd a XIX. század teszi – reá alapozzák. A sorelméletnek éppúgy csak a prehistóriája kezdődik a XVII. században, mint a „korpuszkuláris filozófiának”. Mind a kettő jellegzetesen XIX. századi eredmény, egzakt sorelmélet és statisztikus mechanika.

De az infinitézimális kalkulus a maga módján a XVII. században sem primitívebb, mint a XIX. vagy XX. században. Mint ahogy Euklidész vagy Arkhimédész se lesz „primitívvé” soha. A sorokról a XIX. század sokkal többet tud, mint a XVII. század. Az infinitézimális számítás alapfogalmairól csak mást. Megváltozik a matematika kifejezésmód, a stílus, de a lényeg: az integrálás- és differenciálásnak, mint inverz műveleteknek a felfogása, a „folytonosság” és a „szakaszonkénti monotónia” biztosítása megvan a XVII. században is.

Nem naivság folytonosságról beszélni a függvény és a határérték fogalma nélkül? Hogy lehet a határérték nélkül definiálni a folytonosságot? Nos, a differenciálhatósággal. A differenciálható függvények feltétlenül folytonosak. S hogyan lehet biztosítani, hogy csak ilyen „függvények” forduljanak elő a matematikában? A fluenseket kell matematikai mennyiségeknek tekinteni, amelyekhez definíció-szerűen hozzátartoznak fluxióik, az „idő szerint vett parciális differenciálhányadosaik”.

S így eltűnik a nagy ellentét a klasszikus geometriai és modern analitikus módszer között. A fluens-fluxió definíciója biztosítja, hogy akár a fluxiós módszerrel akár a geometriai módszerekkel nyert eredmények – legalábbis elvben – mindig kiszámíthatók, úgynevezett „mechanikus” problémák esetében is. Legfeljebb a kiszámítás nem lesz egészen pontos. Meg kell elégedni bizonyos pontossági határral, mint a végtelen tizedestörtekre vezető számítások esetében.

„Ellentét” a *Principia* elején bevezetett fluens-fluxió definíciók és a későbbiekben alkalmazott „elavult klasszikus geometriai” módszerek között? Ezt az „ellentétet” a XIX. század érzi, nem a XVII. Newton nyugodtan alkalmazza a korabeli Anglia számára megszokott és így egyszerűbb módszereket, annál is inkább, mert a *Principiá*-ban elsősorban kúpszeletekről van szó, ahol ezek a módszerek egyébként is helyénvalóak. S a *Principia* bevezetésében nemcsak az új fluxiós módszerének a körvonalait fejti ki, hanem röviden utal arra is, miként alkalmazhatók az új mód-

[203] Corr. I, 9, Newton to Collins January 1669/70, 18.

szer lényegét jelentő határátmenet-eljárások a klasszikus geometria formuláiban is. Így a *Principia* klasszikus geometriai megfogalmazásai át vannak itatva az új infinitézimális számítás fogalmaival, s mi sem lesz könnyebb, mint a következő században átírni őket a kalkulus megfelelő analitikus formanyelvére. A *Principia* nem az infinitézimális módszereket kerüli, hanem a cartesianus algebrai jelölési módot. Ez annál feltűnőbb, mert Newton a fluxiós módszer kialakításakor, mint láttuk, teljesen szabadon bánt az algebrai jelölésmóddal. Miért nem alkalmazta hát a *Principiá*-ban?

A kérdés ilyen formában feltéve semmivel sem lesz könnyebben megválaszolható, mint a megszokott alakjában. Ha választ akarunk kapni a kérdésre, először is pontosan meg kell vizsgálnunk a *Levelezés* alapján a *Principia* keletkezési körülményeit. Ezt kísérli meg egy következő dolgozatunk.[204]

[204] Lásd kötetünkben Vekerdi László: 'A Principia születése' c. tanulmányt.

INFINITÉZIMÁLIS MÓDSZEREK PASCAL MATEMATIKÁJÁBAN[205]

Madame Périer – Pascal nénje – és Marguerite Périer – unokahúga[206] – megegyezően mondják el Pascal matematikához való „visszatérését”. És mivel Pascal életére vonatkozóan lényegében még ma is erre a két forrás-

[205] Előzménye: Vekerdi László: Infinitézimális módszerek Pascal matematikájában. = Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei 13 (1963) No. 3. pp. 269–*285*.

[206] A Pascal család a francia közéletben a XVII. század eleje óta egyre nagyobb szerepet játszó „hivatalnok nemesség” közé tartozott. Blaise Pascal születésének idején (1623) apja, Étienne Pascal a clermont-i *Cour des Aides* elnöke volt. A kisfiú korán elveszíti anyját, s innentől kezdve apja részesíti rendkívül gondos, elsősorban a matematika és természettudományokra kiterjedő nevelésben. Étienne Pascal 1631-ben három gyermekével Párizsba költözik. A legidősebb, Gilberte, a későbbi Madame Périer, ekkor 11 éves, a legkisebb, Jacqueline hat, Blaise, a két lány közötti egyetlen fiú, nyolc. A harmincas évek Párizsa páratlanméretű társadalmi kohó, ahol spontán alakuló és egymással több-kevesebb összefüggésben levő csoportokban mintegy kikísérleteződnek az újkori szellemi élet szervezeti formái. A szalón, az akadémia, a természettudományos és matematikai társaság és a szabadgondolkozó költőfilozófusok cabaret-klubjai a legfontosabbak ezek között a csoportosulások között. Étienne Pascal elsősorban a Mersenne atya körül összegyűlő természettudósokkal és matematikusokkal van jóban, de bejáratos a kalandos életű Mme Sainctot-hoz is, akinek a testvére, Charles Vion Dalibray, a cabaret költők egyik legjellegzetesebb képviselője. Dalibrayval és barátjával, Le Pailleur-rel Blaise Pascal később is jóban marad, hiszen pl. meghívja őket arra a nevezetes látogatásra is, amivel 1647 nyarán az éppen Párizsban tartózkodó Descartes tiszteli meg a két testvért, Blaise-t és Jacqueline-t, akik ekkor éppen Blaise légnyomás-kísérleteit rendezik sajtó alá, s szenvedélyesen tanulmányozzák azt a vallási-világnézeti irányt, aminek nemrégiben az egész Pascal család, de a francia hivatalnok nemesség nagy része is, egyre inkább, a hívévé vált: a jansenizmust. Blaise életét ettől kezdve a természettudomány, a matematika, a jansenizmus, Jacqueline, a mély hit és az elegáns, nagyvilági élet ma már teljességgel kibogozhatatlan keveredése determinálja. Keveredés, amely néhol már olyan tökéletes, hogy a szintézis látszatát kelti, de ez a szintézis mindvégig látszat marad, amin átütnek újra és újra az ellentétes tendenciák. Ez az ötvenes évek nagy műveinek a jellegzetessége és háttere. A Pascal család azonban, amelyik a politikai reményeit vesztő hivatalnok nemességgel együtt egyre inkább áldozatul esik a megmerevedő, bigottá váló jansenizmusnak, Pascal műveit és életét a szekta igényeinek megfelelően fésüli át. Gilberte leánya, Marguerite Périer, aki gyermekkorától a nagy jansenista apácakolostorban, Port Royal-ban nevelkedett, úgy él és ír, mint egy XII. vagy XIII. századi apáca. Blaise életéről szóló leírása a borzalmas és realista részletek, a vakhit és a babona által átszőtt, jellegzetes „középkori” apáca krónika.

ra vagyunk utalva, az infinitézimális matematika, mint fogfájás elleni gyógyszer, klasszikus receptté vált a matematikatörténeti anekdoták iránt érdeklődő matematikusok körében.

Madame Périer leírása szerint öccsét, aki az 1654-es megtérése óta kizárólagosan vallási kérdésekkel foglalkozott, 1658 elején sajnálatos módon kezdte gátolni ebben az üdvös foglalkozásában betegsége. „Öcsém bajainak ez a kiújulása – írja – fogfájással kezdődött, ami teljesen meggátolta az alvását. De hogyan lehetne ébren egy olyan szellem, mint az övé, anélkül, hogy gondolkozna valamin. Ezért jutott eszébe az egyébként oly gyakori és kimerítő álmatlanságaiban egy éjjel valami a roulette-el kapcsolatban. Az első gondolatot második követte, a másodikat harmadik és végül egymást váltó gondolatok sokasága; s ezek, mintegy akarata ellenére, úgyhogy még saját maga is meglepődött rajta, feltárták előtte a roulette bizonyítását. De mivel minden ilyesmiről már régen lemondott, nem is gondolt rá, hogy valamit is leírjon belőle. Mégis beszélt róla egy olyan személynek, akinek teljes tisztelettel tartozott, mind érdemeit illetően, mind az általa mutatott vonzalom elismeréseképpen, és ez a személy olyan tervet formált erről a felfedezéséről, ami csupán Isten dicsőségét tartotta szem előtt, és rávette öcsémet, hogy írjon csak le mindent, ami erről eszébe jut, és nyomtattassa ki.”[207]

Ugyanígy, de a kegyes körítés helyett realista részletekkel gazdagon mondja el a történetet Marguerite, és megnevezi a „magas személyt” is: „M. de Roannez jött látogatni és azt találva, hogy semmi baja sincs, megkérdezte, mitől gyúgyult meg. Azt felelte, hogy a roulette-től, amin a fejét törte, s amit megtalált. M. de Roannez meglepődve ezen a hatáson, de magán a dolgon is, mert tudta, milyen nehéz probléma az, megkérdezte, mi vele a szándéka. Nagybátyám azt felelte, hogy ez pusztán gyógyszerként szolgált neki, és semmi másra nem akarja használni. M. de Roannez azt felelte erre, hogy jobb hasznát is lehetne venni ennek; hogy az atheisták leküzdésére irányuló igyekezetükben jól meg lehetne mutatni ezáltal, hogy a geometriát és a bizonyítás alá eső dolgokat tekintve is többet tud, mint ők együttesen; és így, ha a hit kérdéseiben engedelmeskedik, az azért van, mert tudja, meddig érnek a bizonyítások, és azt tanácsolta neki, hogy helyezzen letétbe 60 pistole-t és hirdessen versenyt minden kitűnő matematikus között, akit csak ismer és ajánlja fel a nyereséget annak, aki megtalálja a probléma megoldását. M. Pascal így tett, és letétbe helyezett 60 pistole-t M. de Carcavy-nál, aki az egész Európából érkezen-

[207] *La vie de Monsieur Pascal érite par Madame Périer, sa soeu, femme de Monsieur Périer, conseiller de la Cour des Aides de Clermont.* – Oeuvres complètes de Pascal, édition Pléiade. Texte étebli et annoté par Jacques Chevalier. Paris 1954 (továbbiakban: Éd. Pléiade) 3–34, 19.

dő pályamunkák egyik elbírálójává neveztetett ki, és a határidőt 18 hónapban tűzte ki.”[208]

Próbáljuk megérteni először is a két elbeszélés tendenciáját. A Pascal család szemében Pascal főműve a *Pensées* volt, s ez a nagy apologetikus mű az ő szemükben sajnálatos módon befejezetlen maradt, s elsősorban ezt a töredékességet kellett valahogyan megmagyarázni. „Gyengélkedései voltak azok, amik meggátolták abban, hogy tovább dolgozzon tervén” írja Mme Périer. Olyan súlyos beteg lesz – írja –, hogy miután egy évet (1657–58) dolgozott a nagy művön, gyakorlatilag semmit sem képes többé végezni. Tudományra – világi hívság – természetesen már régen nem is gondol, de betegsége és súlyos álmatlansága addig fokozódik, hogy egy fogfájásos éjjel hirtelen, saját akarata ellenére eszébe jut a ciklois-probléma és megoldja. Közlésre – világi hiúság – természetesen nem is gondol, hiszen az egész csak „gyógyszer” volt számára, de barátja, akinek hálával és tisztelettel tartozik, s aki nem más, mint Roannez herceg, Poitou kormányzója, rábírja a kiadásra: végül is Isten dicsőségére szolgál az, ha egy odaadó híve old meg olyasmit, amin a világ legnagyobb matematikusai hiába törték a fejüket. A tendencia nyilvánvaló: a mélyen vallásos Pascal család szemében a *Pensées* szigorú apologetikája után Pascal matematikai hattyúdala kellemetlen zavart jelentene, tehát deus ex machina-val át kell siklani rajta. Ennél súlyosabb dolgokat is tett a Pascal család a geniális matematikus ellen; egyik matematikai főműve, amit még Leibniz látott kéziratban, s sajnos visszaadott a családnak, eltűnt a kezük között.

A különösebb inkább az, hogy a történészek máig mennyire hatása alatt állanak Madame és Marguerite Périer kegyes elbeszéléseinek. Még Pascal életének olyan kitűnő ismerője is, mint Jean Mesnard, törést lát 1658-ban Pascal fejlődésében, amit 1659-ben egy újabb „megtéréssel” kellett a világi hívságba visszaeső Pascalnak kompenzálnia. Ez az újabb „megtérés” azért vált szükségessé, mert az 1658-as év matematikai műveinek – nevezzük továbbiakban rövidség kedvéért *Roulette-leveleknek* – a hangját mindennek lehet nevezni, csak keresztényi alázatnak nem. A Pascalok érthetően igyekeztek átsiklani e felett a számukra kellemetlen tény felett, de Mesnard-t már nem köti a családi és a jansenista diszkréció. „Látjuk, amint ellenfeleit piszkolja – írja Mesnard – amint hevesen reagál a legkisebb ellentmondásra, amint olyan versenyt tűz ki, ami azt hivatott kimutatni, hogy egyetlen európai tudós sem képes versenyezni vele. Úgy rendezi a dolgot, hogy a lehető legkisebbre csökkentse versenytársai esé-

[208] *Mémoire sur la vie de M. Pascal. Écrit par Mademoiselle Marguerite Périer, sa niece.* – Éd. Pléiade 35–41, 40.

lyeit és minden megoldási kísérletet, amit elküldhettek neki, eleve félvállról kezel. Visszatért belé a gőg.”[209]

De a *Roulette-levelekben* nem ez a „gőg” és sértő hang a legfeltűnőbb, ez nem hiányzik Pascal vallásos írásaiból sem. S egyébként is a kor egyházi vitairodalmán edzett füleinek a *Roulette-levelek* sértő kitételei nem lehettek szokatlanok. S végül – ami a legfontosabb – Pascal az 1658-as matematikai kutatásaival párhuzamosan *folytatja* teológiai és egyházpolitikai harcait is, gyakorlati síkon a jezsuiták, elméleti téren a kálvinizmus ellen. A *Roulette-levelek*ben nem a gőg, még nem is a vitatkozókedv a legfeltűnőbb, hanem az, hogy éppen olyan céltudatos és jól szervezett propagandakampány benyomását keltik, mint az 1656-ban a jezsuiták ellen indított *Vidéki levelek.*[210] A *Roulette-levelekben* is teljes harci aktivitásában látjuk Pascalt, félelmetes vitakészsége csúcsán. S így egyszerre más megvilágításba kerülnek a *Roulette-levelek*. Nem egy haldokló nagybeteg fájdaloműző foglalkozását tükrözik többé, de nem is egy világi „gőgbe” visszaeső vallásos lélek válságát. A *Roulette-levelek* jelentését nem elég Pascal biografikus adatai és pszichológiája felől vizsgálni, meg kell kísérelni kibontani a mű tudományos és tudománypolitikai *környezetét* is. Ezt kísérli meg a jelen tanulmány.

1658-ban a ciklois-kérdés már nagyon régi. Magát a görbét[211] – amit

[209] Mesnard, Jean: *Les conversions de Pascal* – Blaise Pascal, l’homme et l’oeuvre. Cahiers de Royaumont. Philosophie N° I. Paris 1956 (továbbiakban: P, Cr.) 46–77, 60.

[210] *Les Provinciales ou les Lettres écrites par Louis de Montalte, à un Provincial de ses amis, et aux RR. PP. Jésuites: sur le sujet de la Morale et de la Politique de ces Péres.* Cologne 1657 – Éd. Pléiade 567–904. Az ötvenes évek során jezsuiták és jansenisták elkeseredett harcot vívnak a vezetőszerep megszerzéséért a kialakuló abszolutisztikus monarchiában. A harc ideológiai téren a kegyelemtan bizonyos tételei körül koncentrálódott, amiket az Egyház Jansenius tanításában eretneknek nyilvánított. A jansenisták vezetője, a „nagy Arnauld” úgy próbál kisiklani az eretnekség vádja alól, hogy a pápa kiátkozáshoz való *jogát* elismeri, de tagadja, hogy a rekriminált tételek *tényleg* benne vannak Jansenius művében. Pascal a *Vidéki levelek*ben az Arnauld álláspontjának a népszerűen megírt védelmét vállalja, miután Arnauld védekezése a Sorbonne előtt elbukott. Pascal azonban messze túllát Arnauld jogászi ügyeskedésén, a *Vidéki levelek* egyre inkább elegáns, világos, nagyvilági stílusban megírt moralizáló esszék lesznek, teológiai tekintetben pedig elhajlanak a hivatalos jansenista ideológiától a tradicionális, thomista felfogás felé.

[211] Görbék mozgások összetételéből való származtatása nem új, jól ismeri már a görög matematika is, de csak mint a kör és egyenes geometriájából adódó problémák – pl. kockamegkettőzés, körkvadratúra, szögharmadolás – segédgörbéivel foglalkozott velük. A XVII. században a mozgásösszetevésből származó görbék, közöttük a ciklois, vagy ahogy a generálására célozva nevezték, *roulette,* az érdeklődés központjába kerülnek. Descartes a mozgásösszetevés által generált görbék között elkülönít egy nagy csoportot, amelyikbe tartozó görbék minden egyes pontja véges algebrai egyenlettel adható meg, s rendszeres vizsgálataiban csak ezekre a görbékre szorítkozik. A nem ide tartozó görbékkel – amiket mechanikusoknak nevez – csak átmenetileg foglalkozik leveleiben. Pascal nem tesz ilyen különbséget a görbék között. Az ő számára egy görbét nem a generáló mozgás, hanem két egyeneshez, a „bázishoz” és a „tengelyhez” való viszonya jellemez.

az egyenesen legördülő kör egy pontja ír le – már a XVII. század elején vizsgálta Galilei, s a harmincas évek közepén az akkor éppen Galilei műveivel foglalkozó Mersenne atya körkérdést intézett leveleiben a francia matematikusokhoz a görbe jellegére, ívhosszára és a görbe alatti területre vonatkozóan. Bizonyos részletkérdésekre adott is valamiféle megoldást[212] a College de France matematikaprofesszora, Giles Personne (1602–1672), vagy ahogy szülőhelyéről nevezte magát, Roberval. Ez a megoldás nehézkes, mechanikus, inkább csak intuitíve megsejtett, semmint bizonyított volt. Nem is mulaszthatta el Roberval nagy ellenfele, Descartes, hogy egy ragyogó, egyszerű bizonyítással meg ne szégyenítse a hivalkodó párizsi professzort, aki élete egyik főfeladatának tekintette a hollandiai filozófus bosszantását.

1658-ban Descartes már nyolc éve halott, de híre egyre nő, nemcsak Hollandiában és Angliában, Párizsban is. Akadnak lelkes hívei a jezsuiták és a bencések között is, sőt, maga a jansenisták vezére a „nagy Arnauld" is vonzódik bizonyos tanításaihoz. Csak két hely van Párizsban, ahol maradéktalanul ellenségei Descartes-nak: Mme de Sablière kényeskedő szalonja és a College de France. Mme de Sablière szalonjában Descartes régi ellenfelének, Gassendinek a hívei uralkodnak és La Fontaine gúnyolja Descartes tanait az állatok és emberek közötti különbségről. A College de France-ban Roberval gyaláz mindent, amit valaha is tanított Descartes.

Roberval egyébként másokat is támadott, ha nem is olyan lelkesen mint Descartes-ot, ugyanis akárhová nézünk a XVII. század két középső negyedében, mindenütt ott látjuk Robervalt, prioritási harcokba keveredve. Roberval rakoncátlankodását egyes történészek azzal magyarázzák, hogy három évenként egy-egy új felfedezéssel kellett megvédenie tanszékét, s így a közbeeső felfedezéseit a védelemre tartogatva, mások megelőzték. Azonban Descartes-tal szembeni viselkedését semmiképpen sem lehet „önvédelemmel" magyarázni, s a prioritás-igényeit is alaposabban át kellene nézni ahhoz, hogy legalábbis részben jogos voltuk felől dönthessünk. Később egyébként sem szorult már tanszéke periodikus védelmére, s azért nem lett semmivel sem barátságosabb. Roberval mindenütt támad, ahol a francia, közelebbről a köréje tömörülő párizsi matematikusok érdekeit sértve látja. Ebben a tekintetben

[212] Roberval egy megfelelő módon definiált görbe – compagne de la cycloide, a mai sinusgörbe – segítségével határozza meg a ciklois területét, teljesen a Cavalieri-féle indivisibiliamatematika szabályainak megfelelően. L. Moritz Cantor: *Vorlesungen über Geschichte der Matematik*, Zweiter Band. Erster Halbband, von 1200–1650. Leipzig ^{2}1899 (továbbiakban Cantor II) 878 – 880.

hasonlít a viselkedése a John Walliséhoz,[213] aki az angol matematikának tesz hasonló „szolgálatokat”.

Blaise Pascalnak még atyai jóbarátja Roberval. Blaise apja, Étienne Pascal még első párizsi tartózkodása alatt, a harmincas években köt vele szoros barátságot, s már együtt harcolnak a Mersenne atya körül kialakuló kis tudóscsoport tagjaiként bizonyos, a csoporton kívül álló matematikusok által képviselt nézetek ellen. Étienne Pascal és Roberval kooperációja később átöröklődik a fiúra, s meglepő, milyen állhatatosan és hűséggel védi mindenütt Blaise Roberval igazát, ott is, ahol a mérges professzornak – mi előttünk nyilvánvalóan – nincs igaza. Pl. a parabola és a spirális ívhosszáról írott értekezésében, ahol az itáliai matematikusok Robervaléval azonos, de sokkal korábbi eredményeit még csak meg sem említi.[214]

A roulette versenyt lezáró vitában is Pascal metsző gúnyja elsősorban Roberval, két ellenfele ellen irányul. Az egyik, Lalouère Toulouse-i jezsuita professzor, azt „merészelte” állítani, hogy ugyanarra az eredményre jutott, de jobb módszerrel, mint Roberval. A másik, John Wallis pedig ugyanazzal a módszerrel kapott az 1655-ben megjelent *Arithmetica infinitorum* c. művében sokkal általánosabb eredményeket, amelyik módszerrel Roberval és Fermat már hosszú évek óta dolgoztak, de eddig még csak az eredményeiket tették közzé. Laouère és Wallis megsemmisítésén kívül a versenyt lezáró vitalevelek feladata a Toricelli Robervallal szembeni jogos prioritás-igényének a cáfolata és Descartes érdemeinek az elkendőzése volt. Őket úgyszólván teljesen kiirtja a ciklois-probléma előtörténetéből. A verseny résztvevői közül pedig egyedül Wren[215] munkája iránt tanúsít megértést, de a Wren által beküldött pályamű nem a kitűzött kérdésekre adott válasz volt, s egyébként is Wren antik módszert alkalmazott, s nem az új, Itáliából elindult indivisibilia-módszert, amivel Roberval és Pascal dolgoztak, s aminek a teljesítőképességét és francia eredetét voltak hivatva igazolni a *Roulette-levelek.* Mert ezek az írások a ciklois ürügyén voltaképpen ezt a Roberval–Pascal-féle módszert védik mások jogos vagy jogtalan prioritás-igényeivel szemben.

[213] John Wallis (1616–1703) foglalkozására nézve anglikán teológus volt, a restauráció után királypárti érzelmeinek jutalmaképpen II. Károly káplánja, majd püspök lett. A forradalom alatt az oxfordi egyetemen tanított, egyik alapító tagja a Royal Society-nek. Ahol csak alkalma nyílott rá, erélyesen – és többnyire igazságtalanul – védte az angol matematikusok prioritás-igényeit.

[214] *Lettre de A. Dettonville a Monsieur A. D. D. S. en lui envoyant la démonstration a la manière des anciens de l'égalité des lignes spirale et parabolique.* – Éd. Pléiade 313–327, 313–314.

[215] Sir Christopher Wren (1632–1723) építész, matematikus és csillagász, a restauráció korabeli London városképének a legfőbb kialakítója. Mint matematikust, a ciklois rektifikációja tette híressé, ami iránt Pascal is elismeréssel adózott, s nem maradt rá hatás nélkül. L. Derek T. Whiteside: „Wren, the mathematician"' *Notes and Records of the Royal Society* 15 107–111, 1960.

A XVII. század egyik legtöbbre tartott, legféltettebb „szellemi tulajdona” ugyanis a módszer volt. Csalhatatlan módszereket dolgoztak ki az üdvözüléstől a szerencsejátékig, a drámaírástól az ABC tanításáig mindenre. S az a módszer, amit a *Roulette-levelek* Roberval és Pascal számára szeretnének biztosítani, semmiképpen sem nevezhető – ez már abban a korban világosan látszott – az ő tulajdonuknak. Hosszú fejlődés eredménye, amiben többek között Torricelli[216] és mesterei: Galilei és Cavalieri,[217] továbbá Descartes és John Wallis is fontos szerepet játszottak. Ebben a fejlődésben az újkori matematika egyik leghatalmasabb eszközének, az infinitézimális módszernek a megszületését lehet nyomon követni. Pascal propagandájának genialitását mi sem bizonyítja jobban, minthogy a legutóbbi időkig éppen a *Roulette-levelek*et tartották az első „integrálszámításról szóló értekezésnek.”[218]

Óvatosabb matematikatörténészek inkább szerettek „Integrálszámítás előtti integrálásról”[219] vagy indivisibilia-matematikáról beszélni. Az elnevezéseknél és dicsérő jelzőknél azonban súlyosabb hiba volt az, hogy az egész módszert sajnálatos módon „végtelen kicsi” elemekből összetevődő véges összeg előállításaként értették félre a matematikatörténészek,[220]

[216] Evangelista Torricelli (1608–1647) a XVII. század második negyedének egyik legjelentősebb matematikusa is. Működése mint kísérletezőnek, fizikusnak és matematikusnak egyaránt számos ponton érintkezik a Pascaléval és Robervaléval, s ez önmagában véve is kiindulópontot jelentett prioritás-vitákra, amit még fokozott, hogy a Torricelli módszereihez csatlakozó Wallis „védelmébe vette” mesterét Roberval–Pascal igényeivel szemben.

[217] Bonaventura Cavalieri (1598?–1647) Galilei tanítványa, a Galilei után fellendülő új itáliai matematikai fejlődés egyik elindítója és legnagyobb hatású mestere. 1621 és 29 között készült, 1635-ben megjelent műve, a *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* a XVII. század új infinitezimális módszereinek első összefoglalása.

[218] Például Émile Picard: „C’est le premier Traité de calcul intégral” cit. J. Chevalier, Ed. Pléiade 175.

[219] Vö. Zeuthen, H. G.: *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVll. Jahrhundert,* Leipzig, 1903, 248–300.

[220] Vö. Cantor II 877: Cavalieri betrachtete die Indivisibilien jeder Oberfläche nach Maassgabe unendlich vieler Linien, die eines Körpers nach Maassgabe unendlich vieler Flächen, und deshalb wurden Vorwürfe gegen Cavalieri erhoben, als meine dieser, die Oberfläche, der Körper beständen wirklich aus Linien, aus Flächen. – Cantor ezzel a kifogással a kortárs-matematikusokra, elsősorban Robervalra utal, de modern matematika történészek sem mindig mutatnak mélyebb megértést Cavalieri munkája iránt, mint Roberval. Vö. pl. Pierre Humbert: *Cet effrayant génie ... L’oeuvre scientifique de Blaise Pascal,* Paris 1947, 216: Cavalieri considérait les lignes, les surfaces et les volumes comme décomposables en une infinité d’éléments qu’il appelait indivisibles: une ligne était une accumulation de points, une surface une accumulation de droites, un volume, une superposition de plans. Telle qu’elle était ainsi proposée, l’idée était fausse, car il est bien évident qu’en entassant les uns sur les autres des plans, dont par définition l’épaisseur est nulle, on n’obtiendra jamais un volume d’épaiesseur non nulle: accumulez zero, cela donnera toujours zero. – Ez az idézet nemcsak azért érdekes, mert bizonyítja a tévedések szívós életét (Roberval–Humbert: 300 év), hanem azért is, mert a

míg A. Koyré egy alapvető tanulmányában meg nem magyarázta, hogy éppen ellenkezőleg, Cavalieri indivisibilia-geometriájában az ez ellen való tiltakozásról van szó.[221] Cavalieri módszerének a lényege nem „végtelen sok” „végtelen kicsi” elem „összegezése”, hanem az antik, *reductio ad absurdum*ra alapuló kimeríthetetlensége elv megkerülése.[222] Cavalieri a síkalakzatokat párhuzamos egyenesek halmazának *(aggregatum)* tekinti, nem összegének. Két ilyen halmaz kétféleképpen hasonlítható össze, *collective, hoc est comparando aggregatum ad aggregatum,* és *distributive, sc. comparando sigillatim quamlibet rectam figurae ABCcba ... cuilibet rectae figurae EFGefg ... in direction existenti.*[223] Azaz, ha két alakzat azonos irányban vett elemei között kölcsönösen egyértelmű megfelelkezés állapítható meg, a két alakzat egészében is megfelel egymásnak. Az indivisibilia módszerben kontinuum számosságú halmazok összehasonlításáról van szó, s ezért nincs szükség határátmenetre. Az exhaustios eljárás és a limes módszer megbontja a kontinuumot, mert a természetes számok sora szerint rendezhető értékekkel közelít meg egy soha el nem érhető, ill. a $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ összefüggésben egy pontosan definiált matematikai szerkesztés eredményeként adódó határértéket. Cavalieri, a kontinuum számosságú halmazokban maradva, elkerüli ebből a kétféle – görög és modern – aritmetizációból adódó nehézségeket.

Ezt nem értették meg a matematikatörténészek, s ezért értették félre, egy helytelenül alkalmazott görög vagy modern eljárásnak, az indivi-

második mondat, amiben Humbert az indivisibiliamatematikát – ti. amit ő annak tart – kritizálja, éppen az indivisibilia módszer egyik alapelve. Végtelenül vékony elemek összegezésének érti félre *Cavalieri* módszerét még Otto Toeplitz is, *Die Entwicklung der infinitesimalrechnung.* Berlin–Göttingen–Heidelberg 1949, 57. – Érdemes kiemelni viszont, milyen tisztán látta már 1912-ben *Cavalieri* módszerének lényegét Léon Brunschvicg: L’essentiel de la méthode est dans la comparaison des elements générateur, qui permet de traiter chaque figure, plane ou solide, „in ratione omnium suorum indivisibilium collectíve et (si in iisdem reperiatur una quaedam communis ratio) distributive ad invicem comparatorum”. Si l’on fait de plus appel à la considération de leur infinité, c’est uniquement afin de ne pas avoir à tenir compte de leur nombre. Léon Brunschvicg: *Les etapes de la philosophie mathématique*, Paris 1912, 166.

[221] Koyré, A.: *Bonaventura Cavalieri et la géometrie des continues* – Évantail de l’histoire vivante. Hommage a Lucien Febvre I–II. Paris 1953, I 319–340.

[222] Az antik kimeríthetetlenségi módszer jó összefoglalása található pl. B. L. van der Waerden: *Erwachende Wissenschaft*, Basel und Stuttgart 1956, 304–305, és főleg E. J. Dijksterhuis: *Archimedes,* Copenhagen 1956, 130–133. Dijksterhuis interpretációját foglalja össze és teszi modern matematikai logikai apparátussal könnyen hozzáférhetővé Whiteside alább idézett monográfiája.

[223] Kollektíve, azaz halmazt halmazhoz hasonlítva, és disztributive, ti. adott irányban összehasonlítva *ABCcba* alakzat egy tetszőleges egyenesét … *EFGefg* alakzat egy tetszőleges egyenesével. cit.: Whiteside, Derek Thomas: Patterns of Mathematical Thought in the Later Seventeenth Century. – *Archive for History of Exact Sciences* 1 (1961) 179–388 (továbbiakban: Whiteside), 313.

sibiliamatematikát. Pascal azonban tökéletesen tisztában volt az indivisibiliamatematika lényegével. Az aritmetikai háromszög problémaköréből kinőtt *Potestatum numericarum summa*ban pontosan az indivisibilia elmélet szellemének megfelelően adja meg az egész számok hatványai között talált összefüggésekből a folytonos mennyiségek között fennálló analóg összefüggésekre való áttérés szabályát. Az elv, amely a diszkontinuus mennyiségekről a folytonos mennyiségekre való áttérést lehetővé teszi az, hogy „bármely számban is adunk folytonos mennyiségeket egy náluk magasabbrendű folytonos mennyiséghez, utóbbin azok semmit sem növelnek. Így pontok a vonalhoz, vonalak a felületekhez, felületek a testekhez semmit sem tesznek hozzá: vagy hogy számokról szóló traktátushoz jobban illő szavakat használjak, semmit sem tesznek hozzá a gyökök a négyzetekhez, a négyzetek a köbökhöz, köbök a kvadrato-kvadrátokhoz. Úgyhogy az alacsonyabbrendű mennyiségeket, mint nulla értékkel rendelkezőket, nem kell tekintetbe venni. Fentieket, amik az indivisibilia elméletben járatosak előtt jól ismertek, azért fűztem hozzá, hogy kitűnjön ebből a példából, amelyben a folytonos mennyiségek dimenzióival való számolást az egész számok hatványainak az összegéhez lehet kapcsolni, hogy látszólag legtávolabb eső dolgokat hogyan fűz egybe az egységet kedvelő természet."[224]

A példa, amit az idézett szöveg említ, pár sorral feljebb olvasható, s nem egyéb, mint az akkor már jól ismert parabolakvadratúra általánosítása:

„A vonalak összessége úgy aránylik legnagyobbikuk négyzetéhez, mint . . . . 1:2.
A vonalak négyzeteinek az összessége úgy aránylik a legnagyobbikuk köbéhez, mint . . . . 1:3.
A vonalak köbeinek az összessége úgy aránylik a legnagyobb negyedik hatványához, mint. . . . . 1:4.

Tetszőleges fokú vonalak mindjének az összessége *(summa omnium)* úgy aránylik a legnagyobbjuk közvetlenül következő magasabb fokához, mint az egység eme magasabbfokú vonal kitevőjéhez."[225]

A mi jelölésünkben:

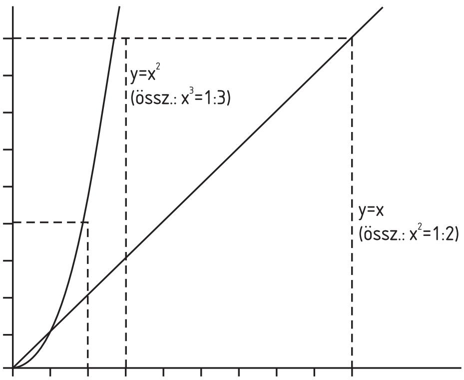
$$\frac{\int_0^x x^n dx}{x^{n+1}} = \frac{1}{n+1}$$

Azonban a mai formulák alkalmazása csak a megértés gyorsabbá tételére jó, a „summa omnium" nem $\int$ és a formula indoklásában nem

[224] *Potestatum numericarum summa* – Éd. Pléiade 166–171, 171.
[225] Uo. 171

összegezés, hanem az az analógia szerepel, amit Pascal az aritmetikai háromszög segítségével egész számok sorainak a hatványaira talált. Pl. a négyzetre emelés esetében: „Természetes számok bármely számmal kezdődő sorában az utolsó tagot közvetlenül követő szám négyzetéből levonva a legkisebb tag négyzetét és a tagok számát, az eredmény egyenlő lesz a tagok összegének a kétszeresével.”[226] Pl. ha a kérdéses számsor 5, 6, 7, 8, akkor $9^2-5^2-4=2\,(5+6+7+8)$.

Innen az indivisibiliamatematika fent megadott elvei szerint a parabolák kvadratúrájánál, mivel itt a „tagok összegé”-nek *(aggregatum ex omnibus)* maga a parabola alatti terület felel meg, s a vonalak négyzetéhez képest első hatványukat nem kell figyelembe venni, azonnal megkapjuk a másodfokút parabolára fent megadott szabályt.



34. ábra

Az egész számokra kapott eredmények kontinuumra való alkalmazását tehát a végtelenek „hierarchiája” tette lehetővé, aminek a felfedezését a matematika- és filozófiatörténészek egészen a legutóbbi időkig Pascalnak tulajdonították, holott maga Pascal hangsúlyozta, hogy *quantum haec notitia ad spatiorum curvilineorum dimensioines conferat, satis norunt qui in indivisibilium doctrina tantisper versati sunt*.[227] A. Koyré vette észre először, hogy Pascal itt megelőző matematikusok munkájához kapcsolódik. „Ami az egész számok hatványainak az összegezése és az indivisibilia (folytonos mennyiségek) összegezése közötti összefüggést illeti – írja Koyré –, ez kétségkívül kevésbé ismert ügy volt, és sokkal újabb, de éppen ez alkotja az alapját Fermat és Roberval munkáinak, akinek a hatása úgy látszik felváltja Pascalnál Désargues hatását.”[228]

[226] Uo. 170.

[227] „Akik valamennyire is járatosak az indivisibilia elméletben, azonnal értik, mennyiben alkalmazhatók ezek a fogalmak görbék által határolt területekre”. Uo. 170–171.

[228] Koyré, *A*.: *Pascal savant*. P. CR. 259–295, 265. Koyré ebben az alapvető fontosságú tanulmányában – melyik Koyré tanulmány nem az? – azt mutatja ki, hogy Pascal távolról sem emelkedett annyira kora tudományos vizsgálatainak a színvonala felé, mint azt az eddigi, hagiographikus-jellegű Pascal irodalom állította. Pascal est un mathématicien d’un trés grand talent, qui a eu la bonne chance d’avoir été, dans sa prime jeunesse, forné par Désargues ou, du moins, d’en avoir sebi une profonde influence, et qui a eu la malchance d’avoir été, dans son âge műr, profondément influencé par Roberval (im. 270). – Jelen közlemény Koyré tanulmányának a téziséhez kapcsolódik, de szeretné kimutatni, hogy szerencsére Roberval hatása nem volt olyan mély, mint azt Koyré – s talán

Az egész számok hatványösszegei és a folytonos mennyiségek hatványai közötti párhuzam képezte azonban nemcsak Fermat és Roberval, hanem még inkább Wallis munkájának az alapjait is. Wallis *Arithmetica infinitorum*-át Fermat és Roberval jól ismerték, s régóta vitában állottak az angol matematikussal.[229] Carcavy, a roulette ürügyén kitűzött metodikai verseny egyik döntőbírája pedig nemcsak Mersenne utódja, hanem Roberval és Pascal barátja is volt, aki már Pascal Descartes-tal vívott prioritási vitájában is Pascal mellé állott.[230] A roulette-kihívás eleve úgy volt megtervezve, hogy Pascal dicsősége és Roberval prioritása biztosítva legyen.

Ezekben a következtetésekben kétségkívül igazat kell adnunk Koyrénak. Azonban Koyré szerint metodikában sem hoztak semmi újat a *Roulette-levelek,* az alkalmazott módszer egyszerűen az indivisibiliamatematika „félreértése". Koyré véleménye szerint Pascal „úgy látszik nem értette meg Cavalieri fogalmainak a mélyebb értelmét, hiszen Cavalieri számára egy geometriai objektum indivisibilis elemei eggyel kevesebb dimenzióval rendelkeztek, mint ez az objektum maga."[231] Pascal viszont a *Roulette-levelek*ben úgy fogja fel a területet, mint „kis négyszögek indefiniált számának az összegét", s az így felfogott területet azonosnak veszi a Cavalieri által definiált „vonalak összegével."[232]

Ugyanez a véleménye a matematikatörténetben is kitűnően járatos Bourbaki-nak,[233] s ez volt már lényegében Cantor felfogása is.[234] Szerintük Roberval és nyomában Pascal „félreértették" vagy legalábbis átinterpretálták Cavalieri infinitezimális módszerét, de ez a „félreértés" termékeny volt, mert ebből született meg Leibniz kezén az integrálszámítás.

maga Pascal is – hitték. Pascal a Reberval-féle indivisibilia zsargon alatt visszatalál a tisztább görög forrásokhoz az infinitezimális matematika területén is.

229 L. Hofmann, J. E. *Geschichte der Mathematik* II., Berlin 1957, 36–37.

230 Descartes és Pascal között Mersenne halála után romlik el véglegesen a viszony, amikor a nagy tapintattal rendelkező és jóindulatú Mersenne feladatát, a tudósok egymás közötti levelezésének – ami akkor a tudományos folyóiratokat pótolta – lebonyolítását a jansenista-szimpatizáns Carcavy veszi át. Carcavy oly módon értesíti Descartes-ot pl. Pascal barométer-kísérleteiről is, ami a nagy filozófusra fölöttébb sértő volt. S már ekkor, 1649-ben kénytelen Descartes a ciklois-kérdésben is védekezni Roberval prioritás-igényeivel szemben: Car, pour l'aire de la ligne décrite par la Roulette, dont il s'est fort vanté, c'est Torricelli qui l'a trouuée: & c'est moy qui luy ay enseigné à en trouuer les tangents (Descartes levele Carcavyhoz, 1649. aug. 17-én. Œuvres, Adam-Tannery-féle kiadás V 391–401, 400.).

231 Koyré, A.: *Pascal savant*. P, CR. 269.

232 Uo. 270.

233 Bourbaki, Nicolas: *Éléments d'histoire des mathématiques,* Paris 1960., 194: Il est vrai que par la suite beaucoup de mathématiciens, tel que Roberval et Pascal, préfèrent voir, dans ces ordonnées de la courbe dont on fait la „somme", non des segments de droite comme Cavalieri, mais des rectangles de mème hauteur infiniment petite, ce qui n'est pas un grand progrès du point du vue de la rigueur (quoi qu'en dise Roberval).

234 Cantor II 877, de Cantor haladásnak tartja Roberval átértelmezését.

Pascal fentebb ismertetett vizsgálatai azonban azt mutatták, hogy ő tökéletesen tisztában volt az indivizibilia módszerrel, s ha a *Roulette-levelek*ben a vonal aggregátumok helyett végtelenül finomítható négyszög beosztás összegeként állítja elő a területet, annak más oka kell legyen, nem az indivisibilia módszer „félreértése". Roberval valóban azt hitte, hogy az indivisibilia módszert „javítja meg", amikor a „vonalösszeget" indefinit-kicsiny négyszögek összegével váltja fel. De Pascal csupán elnevezéseiben követi Robervalt, Pascalnál egészen másról van szó, nem az indivisibilia módszer „megjavításáról". Pascal a *Roulette-levelek*ben más módszert használ, mint amire még az aritmetikai háromszöggel kapcsolatos infinitézimális megfontolásaiban hivatkozott, a *Roulette-levelek* módszere nem az indivisibilia módszer többé.

Már Cantor felhívta rá a figyelmet,[235] hogy a XVII. század Newton–Leibniz előtti matematikájában az indivisibilia módszer mellett kifejlődik egy másik módszer is, amelyik az antikvitás megközelítő módszereihez kapcsolódva területeket keskeny területsávok, térfogatokat keskeny parallelepipeda számának a növelésével akart kimeríteni. *Exhaurire*: a szó is most lép fel először, Gregorius a Santo Vincentio[236] munkájában. Cantor nagy művét azonban G. Eneström kritikája s a nyomában orientálódó matematikatörténet-írás „megbízhatatlannak" minősítette,[237] s mikor több mint egy félévszázad múlva Whiteside újra felfedezi a XVII. század matematikájának ezt a fontos irányát, már nem is hivatkozik Cantorra.

Whiteside alapvető fontosságú monográfiájával egyebütt kell részletesen foglalkoznunk, itt csak az exhaustiós módszereket ismertető fejezetét futjuk át, mert enélkül Pascal infinitezimális matematikáját nem lehet megérteni. Whiteside fedezi fel, hogy a Cavalieri–Roberval-féle indivisibilia módszerekkel ellentétben, amelyek végeredményben kontinuum számosságú halmazok megfelelkezésén alapulnak, az exhaustiós módszerek utat nyitnak a végtelen, ill. a kontinuum aritmetizálása felé. Whiteside szerint a XVII. század úgy általánosítja az „egyszerű" görög exhaus-

[235] Uo. 895.

[236] Gregorius a S. Vincentio (1584–1667) belga jezsuita páter 1647-ben megjelent, de évtizedek óta készen levő műve, az *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni,* Antwerpen 1647. számos nehezen érthető antik geometriai stílusban megírt tétel mellett néhány meglepően modern és a későbbiekben nagy jelentőségű elvet tartalmaz, amit elsősorban J. E. Hofmann nyomán – csak a legutóbbi évek történetírása kezd igazán értékelni. Lásd pl. Ch. Naux: „L'Opus geometricum de Grégorie de Saint-Vincent", *Revue d'Histoire des Sciences* 15 (1962), 93–104.

[237] Egyedül George Sarton kelt ismételten Cantor nagy művének a védelmére. Kétségtelen, hogy Cantor, mint a késő tizenkilencedik század többi nagy történésze is – talán csak Burckhardt és Acton volt kivétel – túlságosan megértette a forrásait, ott is, ahol azok alig, vagy egyáltalán nem érthetőek. Cantor a tudománytörténet-írás kritika és interpretáció előtti korában írt, abban a boldog korban, amikor a történészek még elhitték, hogy a források valóban arról szólnak, ami le van írva bennük.

tiós technikát, hogy az „aequivalenssé válik egy konvex ponthalmazon értelmezett Cauchy–Riemann-féle határozott integrállal.”[238]

Egyelőre tekintsünk el attól a ténytől, hogy a görög módszer csak azért látszik „egyszerűnek” Whiteside előtt, mert a valós számok jólrendezhetőségéből indul ki, s így a görög módszer bonyolult arányelméleti struktúráját a ponthalmazok elméletének a szellemében fogalmazhatja át.[239] A mi szempontunkból most az a fontos, hogy Whiteside interpretációját elfogadva, a görög módszer, Pascal módszere és a Riemann-integrál valóban nagyon közel kerülnek egymáshoz. A XVII. század matematikusainak a Whiteside által megfogalmazott „arkhimedészi modellt” csak az egyenlőség egyenlőtlenség melletti megengedésével kellett általánosítaniuk ahhoz, hogy alkalmassá váljon konvex görbék alatti területeknek a számítására.

Ebben a XVII. század által kibővített exhaustiós modellben centrális szerepet játszik a konvexitás fogalma. Már maga Pascal tisztában volt ezzel, és a *Dimension des lignes courbes*-ban külön *avertissement*-ként, elvként emeli ki: „Feltételezem az arkhimedészi elv érvényességét: Ha két, azonos síkban fekvő, közös végpontú görbe vonal ugyanazon oldal felé görbül, az, amelyik benne foglaltatik a másikban, rövidebb lesz mint az, amelyik magában foglalja.”[240]

A matematikatörténet-írás, folyton Leibniz elődjét keresve Pascalban, Pascal matematikai oeuvre-jéből az „előremutató” (értsd: Leibniz felé mutató) vonásokat emelte ki: a „karakterisztikus háromszöget”, a „görbe mentén történő integrálást”, a „kettős integrálást”–, a „parciális integrálást”, s átsiklott, mint az antikvitás felé való visszatérésen a *Dimension des lignes courbes* problematikáján.[241] Pascal maga is az antik módszer alkalmazásának nevezte ezt a művét, s a matematikatörténet-írás szívesen hitt neki. Ennek a műnek a módszere ugyanis valóban semmiképpen sem illeszthető be azokba a keretekbe, amiket a matematikatörténet-írás gyártott magának a Cavalieri–Torricelli–Roberval–Pascal-féle „indivisibilia” elméletről, mint a Leibniz-féle kalkulus „elődjéről”.[242] Whiteside azonban kimutatta, hogy Pascal éppen ebben a művében, a „kibővített exhaustios modell” egyik legmesteribb alkalmazásával, a kor legfontosabb matematikai tendenciáihoz csatlakozik. S így ez a mű, ahe-

238 Whiteside 335.

239 Uo. 332–333.

240 Éd. Pléiade 320.

241 Hofmann, J. E.: *Geschichte der Mathematik* II. Berlin 1947. 42.: azonban mint *„bedeutende Einzelleistung”*-ot emeli ki.

242 Még az egyébként olyan jól tájékozott Bourbaki is. Im. 194. Egyedül Koyré hívta fel a figyelmet arra, hogy Pascal infinitezimális matematikájában nem szabad Leibniz „elődjét” látni, s hogy pl. a „karakterisztikus háromszög” Pascal számára egyáltalában nem „karakterisztikus”, mivel Pascal ne pense pas *rapport,* il pense *objet* et c’est pour cela qu’il manque 1a décuverte leibnizienne... Koyré, im. 269.

lyett, hogy az antikvitás felé való visszatérést jelentene, a kor legjellegzetesebb matematikai tendenciáinak egyikét fejleszti tovább.

Az alábbiakban megkíséreljük kimutatni, hogy ezt a módszert használta Pascal már a *Roulette-levelek*ben is, csupán ott még az indivisibiliamatematikából származó elnevezések köntösébe öltöztette.[243] De ezt a módszert – Whitesidetől eltérően – nem tekintjük a Cauchy–Riemann-féle integrál elődjének, vagy éppen korai megfogalmazásának, mert Pascal módszeréből hiányzik a konvergencia, a határérték fogalma. Pascal módszerének a lényegét a XVII. század hasonló módszereihez viszonyítva kell megérteni.

Az exhaustiós módszer területszámításra való adaptálásának az ötlete nem új, hiszen ezt használta már Eudoxos a körterület számítására. S láttuk, hogy a XVII. században ez a módszer Luca Valerio,[244] Gregorius a Santo Vincentio és tanítványaik kezén fokozatosan újraéled. Gregorius a Santo Vincentio tanítványa volt A. Tacquet,[245] akinek kitűnő összefoglaló munkáit Pascal is jól ismerte.

És ezt a módszert alkalmazza, s hozzá éppen a ciklois területének a kiszámítására, Descartes is.[246] De nem úgy, amint azt Whiteside modern matematikai-logikai apparátussal dolgozó struktúra-analízise vázolja. És nem úgy, amint Pascal a *Dimension des lignes courbes*-ban. A Descartes eljárásában sajátságosan keveredik indivisibilia módszer és exhaustiós módszer. Az indivisibiliamatematikából megtartja azt az elvet, hogy két geometriai alakzat – folytonos halmaz – összehasonlítását azok elemeinek az összehasonlítására

[243] Jean Itard felismeri ezt a tényt. A *Lettre de Monsieur Dettonville a Monsieur Carcavi*-ból idézve azt a részt, ahol Pascal az indefinit számú négyszög összege helyett a somme des ordonnées elnevezés használatát indokolja (Éd. Pléiade 232), megjegyzi: En fait, c'est un résumé de la méthode d'exshaustion des Anciens, et de son expression plus rapide dans le langage des indivisibles. Jean Itard: „De l'algèbre symbolique au calcul infinitesimal." – *Histoire générale des sciences publiée sous la direction de René Taton, tome II. La science moderne (de 1450 a 1800).* Paris 1958, 207 207–241, 224.

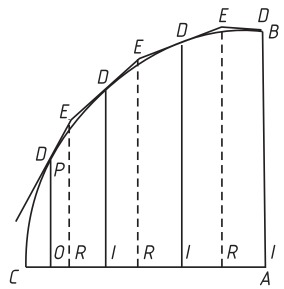
[244] Luca Valerio (1552–1608) 1604-ben megjelent *De centro gravitatis solidorum*-a éppen az antik exhaustiós eljárás felélesztésével hatott a XVII. századi infinitezimális módszerek fejlődésére. Már ez a mű is mutatja, hogy a XVII. századi infinitezimális módszerek szempontjából milyen jelentősek voltak a súlypont-problémák, amik Pascal roulette-kihívásának a lényegét is teszik. Erre a kérdésre nézve lásd Pierre Costabel: „Autour de la méthode de Galilée pour la détermination des centres de gravité", *Revue d'Histoire des Sciences* 8 (1955), 116–128.

[245] A. Tacquet (1612–1660) szerepét ebből a szempontból már Cantor felismerte, Cantor II 896. Andreas Tacquet: *Cylindricorum et annularium libri IV*... Antwerpen 1651 és a folytatását képező *Cylindricorum et annulorum liber quintus*... Antwerpen 1659 címen megjelent könyvei a kor kedvelt tankönyvei közé tartoznak. Lásd: Elisabeth Sauvenier–Goffin: Les sciences mathématiques et physiques a travers le fonds ancien de la bibliotheque de l'Université de Liège. II. Les XVII^{e} et XVIII siècles. – *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*. Cinquième sérietome V., 135.

[246] Descartes levele Mersenne-hez 1638. július 27-én. Adam–Tannery-féle kiadás, II 253– 288.

vezeti vissza. De a területet nem ezeknek az eggyel kisebb dimenziójú elemeknek, a vonalaknak az „összességeként” adja meg, mint ez az indivisibilia módszerben történik, hanem egy végtelenül finomítható területbeosztással kimeríthetetlen *összegként* definiálja. S éppen ez a keverés a lényege annak a módszernek is, amit Pascal a *Roulette-levelek*ben és a *Traité des sinus du quart de cercle*-ben használ. Pascal azonban sokkal világosabban, módszeresebben jár el, mint Descartes. Ami Descartes-nál egyszerű, „evidens” ötletként jelentkezik, az Pascalnál propositiókkal alátámasztott levezetés formáját ölti. Descartes két végtelenül finomítható területbeosztást akkor tekint egyenlőnek, ha a beosztások egyes elemei – a kis részterületek – egyenlőek: „Mivel, ha egy mennyiség minden része egyenlő egy másik mennyiség minden részével, az egész is szükségszerűen egyenlő az egésszel; és ez annyira világos fogalom, hogy azt hiszem, csupán a minden dolognak az igazsággal ellentétes névadás szenvedélyének a megszállottai tagadhatják.”[247]

Pascal nem evidenciára hivatkozik, hanem *definiál:* „Legyen (35. ábra) *ABC* egy körnegyed, melynek *AB* sugarát tekintsük tengelynek és a reá merőleges *AC* sugarat bázisnak; legyen *D* a körív egy tetszőleges pontja, melyből meghúzzuk a *DI* sinust az *AC* sugárra; és a *DE* érintőt, amelyen tetszés szerint vegyünk fel két *E* pontot s húzzunk ezekből merőlegeseket az *AC* sugárra.



35. ábra

Azt állítom, hogy a *DI* sinus és az *EE’* érintő szorzata egyenlő a bázis két párhuzamos közé bezárt *RR’* szakaszából és az *AB* sugárból alkotott szorzattal (36. ábra).

Az *AD* sugár ugyanis úgy aránylik a *DI* sinushoz, mint *EE’* aránylik *RR’*-höz vagy *EK*-hoz: ami világosan kitűnik a *DIA* és az *EKE’* derékszögű háromszögek hasonlóságából, utóbbi pedig az *EE’K* vagy *EDI* és *DAI* szögek egyenlőségéből következik.

I. Propositio

A körnegyed egy tetszőleges ívében vett sinusok összege egyenlő a bázis két szélső sinus közé zárt szakaszának és a sugárnak a szorzatával.

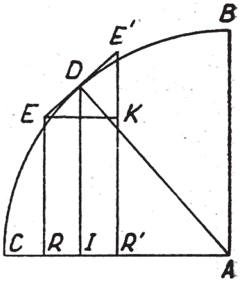
A bizonyítás előkészítése

Legyen *BP* egy tetszőleges körív, amit *D* pontokban indefiniált számú részre osztunk, ahonnan meghúzzuk a *PO*, *DI* stb. sinusokat: ... *AO* méri a *BAPO* ív szélső sinusai közötti távolságot. …

[247] Uo. 262.

Azt állítom, hogy *a DI* sinusok összege (megszorozva mindegyik a *DD* ívek egyikével, amint az magától értetődik) egyenlő az *AO* egyenes és az *AB* sugár szorzatával.

Mert minden *D* pontban meghúzva a *DE* érintőt, amelyek mindegyike *E* pontokban metszi a szomszédját, és meghúzva az *ER* merőlegeseket, látható, hogy mindegyik *DI* sinus és *EE* érintő szorzata egyenlő a megfelelő *RR* távolságok és az, *AB* sugár szorzataival. Így tehát a *DI* sinusok mindegyikét megszorozva a saját (egymás között mind egyenlő) *EE* érintőjével, az így kapott négyszögek halmaza (ensemble) egyenlő lesz az egyes *RR* szakaszok *AB* sugárral képezett négyszögeinek a halmazával; azaz (mivel mindegyik érintő meg van szorozva a sinussal és mindegyik szakasz az *AB* sugárral) a *DI* sinusok összege (somme) megszorozva mindegyik az *EE* érintők egyikével egyenlő az *RR* távolságok összegének, vagyis *AO*-nak az *AB*-vel képzett szorzatával. De mindegyik érintő egyenlő az egymás között egyenlő *DD* ívek egyikével. Úgyhogy az egyenlő kis ívek egyikével megszorzott sinusok összege egyenlő a sugár és az *AO* távolság szorzatával."[248]



36. ábra

Mi sem egyszerűbb, mint ezt az eredményt a vonal mentén vett integrálás nyelvére lefordítani, s ha az ember Leibniz felől gondolkozik, ez szinte elkerülhetetlen. De Pascal még annyira se ismerte Leibniz matematikáját, mint a mai matematikusok, viszont összehasonlíthatatlanul jobban ismerte náluk a görög matematikát és kora modern matematikai módszereit. Ismerte, egyetlen szóban utal is rá,[249] Descartes roulette területét megadó módszerét is. S ez a módszer lényegében, gondolati struktúráját tekintve ugyanaz, amit Pascal használ a fentebb idézett szövegben. Descartes a következőképpen jár el: vesz két területet, az egyik, a kör területe adott, a másikat, a ciklois egy szegmentumának a területét úgy kell kis, végtelenül finomítható területrészletekből megszerkeszteni, hogy mindegyik kis területrészletnek feleljen meg az adott kör egy-egy kis részlete. Ezt a ciklois-szegmentumban s

[248] *Traité des sinus du quart de cercle,* Éd. Pléiade 275–282, 275–277.

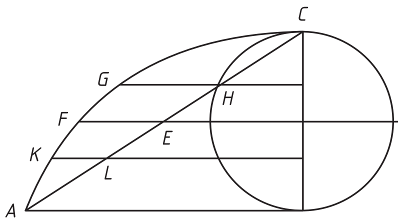
[249] *Histoire de la roulette ...* lo octobre 1658. Éd. Pléiade 194–200, 195: on recut leurs solution – írja Mersenne régi felhívására célozva – presque en même temps, l'une de M. de Fermat, conseiller au parlament de Toulouse, l'autre de feu M. Descartes; et toutes deux différentes l'une de l'autre, et encore de celle de M. de Roberval, de telle sorte néanmoins qu'en les voyant toutes il n'est pas dífficile de reconnaître qu'elle est celle de l'auteur, car il est vrai qu'elle a un caractère particulier, et qu'elle est prise par une voie si belle et si simple qu'on connaît bien que c'est la naturelle.

a neki megfelelő félkörben létesített háromszögbeosztással éri el, a két beosztás különböző alakú, de egyenlő területű háromszögeit megfeleltetve egymásnak. Magát a ciklois-szegmentumot egy jellegzetesen indivisibiliamatematikai megfontolással hozza olyan alakra, ahol ez az összehasonlítás könnyen elvégezhetővé válik: kimutatja két, a kérdéses ciklois-szegmentumban s egy félkörben felvett egyenes sereg egyes egyeneseiről, hogy egyenlő hosszúak. Ahhoz, hogy ebből a két terület egyenlőségére lehessen következtetni, az indivisibiliamatematika alapszabálya szerint a két egyenes seregnek azonosan irányítottnak kell lenni, azonos párhuzamos egyenesekből kell állani. De ezt az azonos irányítottságot létrehozva, Descartes, a kör és a ciklois-szegmentum azonos hosszúságú, párhuzamos egyenes szakaszai közötti összefüggést nemcsak arra használja fel, hogy segítségével a két terület egyenlőségét bizonyítsa. Ezen túlmenően egy-egy területbeosztást létesít a két összehasonlítandó területben az indefinit párhuzamos egyenesek felhasználásával, s az egyes részterületek páronkénti egyenlőségéből következtet a két egész terület egyenlőségére.[250]

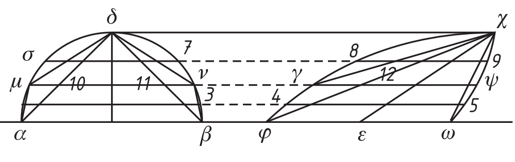
A kis részterületek számát úgy kell szaporítani, *qu'on voudra à l'infini*[251] – írja Descartes –, hogy közben a két összterület egymásnak megfelelő részterületei egyenlőek maradjanak.

Pascal bizonyításában az adott terület – ami Descartes-nál a félkör volt – egy négyszög, az összehasonlítandó, kis részterületekből megszerkesztendő terület a sinusgörbe egy része alatti terület. A két területbeosztás egyenlőségének a kimutatására szolgál a *BC* körívet helyettesítő érintősokszög egyes kis *EE'K* elemi három szögeire alapított bevezető

[250] Az *AKFGCHELA* ciklois-szegmentumot Descartes egy egyszerű, de hosszadalmas indivisibilia geometriai megfontolással *φγχψωεφ* alakra hozza, ebben és egy *αδβ* félkörben azonos párhuzamos egyenes sereg egyeneseinek αβ és φω, μν és γψ szegmentumairól kimutatja, hogy egyenlőek, s ebből az indivisibilia geometria szabályai szerint következik a két idom, *αδβ* és *φγχψωεφ* egyenlősége. De Descartes nem elégszik meg ezzel a bizonyítással. A két idomon átfutó, indefinit számú párhuzamos vonalat arra is felhasználja, hogy egy-egy, a félkört, ill. a *φγχψωεφ* ciklois-szegmentumot egyre jobban megközelítő, indefinit számú háromszögbeosztást is létesítsen a segítségükkel, amelyeknek az egyes elemi háromszögeiről kimutatja, hogy egyenlő területűek.



37. ábra



38. ábra *39. ábra*

[251] Idézett levél. Adam–Tannery-féle kiadás II., 262.

lemma, amit a matematikatörténet-írás a „karakterisztikus háromszög" bevezetéseként ismert félre. Pascalnál azonban szó sincs egy „véges" és egy „végtelen kicsi" háromszög összehasonlításáról, mint Leibniz-nál. Pascalnál ez a lemma egyszerűen két indefinit területbeosztás terület-egyenlőségének a kimutatására szolgál. Pascal matematikája, éppen úgy, mint a Descartes-é, sokkal precízebb, mint Leibniz és a Leibniz nyomában orientálódó matematika. Az infinitezimális módszerek területén egész a XIX. század elejéig nem érik el újra a pascali precizitást.

De ez a pascali precizitás egészen más jellegű, mint a XIX. századi. A végtelen finomítás ugyanis Pascalnál éppen úgy nem határátmenet jellegű, mint Descartes-nál. Nem szabad megtévesszen Pascal olyan megfogalmazása sem, hogy az *EE* sokszögbeosztás a végtelen finomítás esetében egyenlő lesz a *DD* körívvel, „mert ekkor az összes, egymás között egyenlő *EE* érintőknek az összege nem különbözik az egész *BP* ívtől, ill. az egymással egyenlő *DD* ívek összegétől, csak egy bármely adottnál kisebb mennyiséggel".[252]

Csak mi ismerjük itt fel az érintősokszög beosztás „határértékét" a körívben, Pascalnál szó sincs a függvényfogalom által lehetővé tett, a limes-összefüggésben szereplő végtelenről. A Pascal végtelenje még az antik „kimeríthetetlen". De a kimeríthetetlenséget a körülményes reductio ad absurdumra való hivatkozás helyett elvként mondja ki, s ezzel túllép a görög kimeríthetetlen-végtelen fogalmán a modern limes-végtelen felé. Ahhoz azonban, hogy a modern végtelennel összeejthető lenne, hiányzik belőle a konvergencia kritérium. Az a megállapítás hiányzik, hogy az egyre kisebb oldalhosszúságú érintősokszögek és a körív közötti különbségek természetes számok szerint rendezett sorában mindig találhatunk olyant, amelyiktől kezdve minden tag kisebb mint egy tetszőlegesen kicsiny ε, s hogy csak az ε-tól függ hanyadik lesz ez a különbség a természetes számok szerint elrendezett különbségek sorában.

Formulában: ha a $K_m = \left|(EE)_m - BP\right|$ különbségek $K_1, K_2, \ldots, K_m \ldots$ sorában minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik egy $N{=}N(\varepsilon)$ természetes szám úgy, hogy az n-ik különbség $K_n = \left|(EE)_n - BP\right| < \varepsilon$ hacsak $n > N$, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat konvergens és határértéke *BP*; $\lim\limits_{n\to\infty} (EE)_n = BP$.

A mi számunkra ez az összefüggés definiálja a végtelent. A XVII. század azonban nem ismeri a határérték fogalmát,[253] és nem ismeri a függvény fogalmát sem úgy, ahogy azt ma értjük. De a végtelent, azt ismeri a XVII. század is, mint ahogy ismerték a görögök is. Azonban mind

[252] *Traité des sinus du qluart de cercle,* Éd. Pléiade 277.

[253] A végtelen sorok elméletének a kialakulása előtt nem célszerű határértékről beszélni, még abban az óvatosabb és módosított értelemben sem, ahogyan pl. Ugo Cassina teszi: *Il cocetto di limite in Luca Valerio e Pietro Mengoli*, Actes du Symposium International des sciences physiques et mathématiques dans la premiére moitié du XVIIe siècle. Pise–Vinci 16–18 Juin 1958. Paris 1960, 8–18.

a háromféle végtelen más és más. A XIX. század a függvényfogalom segítségével definiálta, mondhatnánk „skatulyába zárta” a végtelent. A görögök nem ismerték a függvényt, de valamire, ami bizonyos fokig helyettesítette ezt a matematika szívét jelentő fogalmat, nekik is szükségük volt. Ez volt az arány. De míg a függvény szinte természetéből következően kívánja magába zárni a zérust és a végtelent, az arány éppen ellenkezőleg, kiveti magából. Az arányelmélet számára a végtelen a nem-arány, az *alogos,* az irrationális. S ahol, mint pl. a körterület kiszámításánál nem lehet kiküszöbölni, ott megkerülik: azt bizonyítják, hogy a körterület soha nem meríthető ki semmiféle egyenes vonalak által határolt sokszöggel, bármilyen kicsire választjuk is a sokszögek oldalait. Ez a nem-kimeríthetőség azonban bizonyítható, s amit bizonyítani lehet, az van. Szabó Árpád vizsgálatai mutatták meg,[254] hogy a bizonyíthatóság kriteriuma milyen óriási jelentőségű volt a matematika kialakulása, szempontjából. S arra is ő hívta fel a figyelmet, hogy ez a kriterium a pontosan megadható és pontosan meg nem adható ellentétpárba alakulva még a Platon korabeli matematikai aranykorban is milyen nagy szerepet játszott a görög matematika fogalomalkotásában.[255]

A mi esetünkben ez a kriterium kétféle terület megkülönböztetésére vezetett. Vannak olyan területek, amik egyenes vonalak által határolt idomokkal kimeríthetők, s vannak olyanok, amik nem. Az előbbi területeket mindig pontosan át lehet alakítani négyzetté, utóbbiakat nem. Ezeket csak megközelíteni lehet, tetszés szerinti pontossággal. A görög matematika nagy hiányossága, hogy kitér ennek a megközelíthetőségnek a direkt, exakt definíciója elől, sohasem jut el a limes fogalom szilárd aritmetikai konstrukciójához. A görög matematika számára nincs határérték, a görög matematika számára csak „kimeríthetetlen” van. Ez a kimeríthetetlen, tartalmát illetően persze nagyon hasonlít a mi limes fogalmunkhoz, úgyannyira, hogy a modern és a görög matematikát egyaránt oly kitűnően ismerő és művelő B. L. van der Waerden azonosnak veszi a kettőt.[256] S ez így is van, ha a modern limes fogalom ismeretében interpretáljuk át a görög eljárást. De a görögök számára ott, ahol mi most jóldefi-

[254] Szabó Árpád: „Hogyan lett a matematika deduktív tudománnyá? I–II”. *Matematikai Lapok,* 8 (1957) 8–36, 232–247.

[255] Szabó, Á.: „Anfänge des euklidischen Axiomensystems.” *Archive for History of Exact Sciences,* 1 (1960) 37–106.

[256] Waerden, B. L. van der: *Erwachende Wissenschaft,* Basel und Stuttgart 1956., 306: Der moderne Limesbegriff ist in seiner vollen Schärfe darin vorhanden: Die einbeschriebenen Polygone nähern sich dem Kreis in dem präzisen Sinn, dass die Differenz kleiner gemacht werden kann als ein beliebig vorgegebenes Flächenstück. – Ugyanezzel a felfedezéssel Moritz Cantor még Wallist ajándékozta meg (Cantor II 901). Leghelyesebb talán, ha megtartjuk Cauchynak. A végtelen aritmetizációja – a határérték fogalma – a sorelmélet olyan fokú fejlettségét követeli meg, ami a XIX. század előtt nem található meg.

niált aritmetikai konstrukcióval dolgozunk, s pontok egymásbatolt végtelen soraival sűrítjük tele a teret, a görögök számára ott nem volt semmi. Ahol mi most egy korlátos halmaz egyetlen sűrűsödési pontját, a határértéket látjuk, ott a görögök egy általuk abszolútnak elismert érvényű, de *közvetett* bizonyítás, a reductio ad absurdum segítségével igazolják valaminek a létezését – adott esetben a körét –, de ezt a valamit nem tudják egy aritmetikai konstrukció segítségével megragadni.

A görög gondolkozás hanyatlásakor, a késő-hellenisztikus korban, amikor a matematika újra épp olyan szorosan összefonódik metafizikai megfontolásokkal, mint a görög gondolkozás kezdetekor,[257] a kör és a gömb esetében ez a bizonyíthatóság és mégis konkrétan meg-nem-ragadhatóság speciális metafizikai értelmet nyer. A körterület, ami nem mérhető és mégis van, mert értelemmel megragadható, magasabb fokú létezést jelent, mint az érzékszervekkel megragadható négyzeté. A kör és a gömb a neoplatonizmusban a magasabb fokú létezés szimbóluma lesz. Azonos az Egy-gyel, ami megint nem más, mint maga a létező, az Isten.

A keresztény gondolkozás ezt a kört kapja örökségül, a kört, amelyik magába zárja az egyet és a végtelent. A keresztény középkor egyik utolsó nagy gondolkozója, Nicolaus Cusanus foglalja talán össze legfrappánsabban ezt a szétágazó, évezredes kommentár-irodalmat: a végtelen a *coincidentia oppositorum* realizációja, ahol az Egyik és a Másik összeesnek, a végtelen egyenes kör, de egyúttal háromszög is, négyszög, ötszög, sokszög.[258] Kör, amelyiknek a középpontja mindenütt van, s kerülete nincsen sehol. A végtelennek csak *a létezését* ismerjük, a természetét nem.

Nous connaissons qu'il y a un infini et ignorons sa nature ... – írja Pascal a híres *Infini. Rien* fragmentumban.[259] A végtelen világmindenség *est une sphère infinie dont le centre est partout, la circonférence nulle part.*[260] Még a szavak is ugyanazok, mint Cusanusnál, akit egyébként Pascal valószínűleg nem ismert első kézből.[261] De erre nem is volt szüksége. Mióta

[257] Vö. Joja, Athanase: „Éléatisme et logique formelle" – *Études d'Historie et de Philosophie des Sciences*. Éditions de l'Académie de la République Populaire Roumaine 1962., 243–287, 287: Dans la conception des Éléates, PHYSIS s'est transformée en METAPHYSIS. Mais tout cela ne fut pas l'avanture personnelle d'un certain Parménide fils d'un certain Pyres, mais une avanture de la pensée humaine. Et point une simple aventure, mais une étape, une halte nécessaire.

[258] Tóth I. hívta fel rá a figyelmet, hogy ezzel a definícióval túllép a görög fogalmon az *aktuális végtelen* felé (I. Tóth: „La géométrie non euclidienne dans le développement de la pensée." – *Études d'Historie des Philosophie des Sciences* 53–70, 68), ami bizonyos fokig könnyíti az „exhaustios végtelen" és az „indivisibilia végtelen" közelítését.

[259] Pascal, Blaise: *Pensées sur la Religion et sur quelques autres sujets.* Avantpropos et notes de Louis Lafuma. Édition Delmas I–II Paris 1947, I C, 188.

[260] Uo. I 14°. 203.

[261] Mesnard szerint a hasonlóságok valószínűleg Gassendi közvetítésével magyarázhatók (P, CR. 380), de a *Pensées* végtelen fogalmához nagyon hasonló gondolatok találhatók,

M. de Gandillac kimutatta,[262] hogy a *Pensées* végtelenre vonatkozó kitételei milyen ősi, elterjedt és sokszor banalitásszámba menő megfogalmazásokon alapulnak, a filozófiatörténészek is egyre nagyobb súlyt helyeznek az irodalomtörténész G. Lanson figyelmeztetésére: Pascalnál csillogó stílus sokszor sejtet eredetit ott is, ahol a kor közismert banalitásait ismétli el.[263] A *Pensées*-ban az indivisibiliamatematika végtelenje – Le fini s'anéantit en présence de l'infini et devient un pur néant[264] – mellett megjelenik a görög-neoplatonikus végtelen is, a *Pensées* végtelen fogalmán ugyanazt a keverést látjuk, mint az 1658-as év matematikai termésében, aminek a kedvéért egy alkalmi fogfájás következtében abbahagyta volna a *Pensées*-n való munkát.

S ha hinni lehet a *Pensées* kronológiáját és eredeti elrendezését illetően oly nagy nehézségekkel küzdő Pascal-filológiának, akkor a matematikai szempontból centrális jelentőségű *Infini. Rien* töredék a *Pensées* genezise és felépítése szempontjából is központi jelentőségű, s lehet, hogy az egész nagy apologetikus mű alapötletét jelentené.[265] S akkor Amos Dettonville[266] és Salamon de Tultie[267] megmaradhat ugyanaz a Blaise Pascal. A *Roulette-levelek* és a *Pensées* ugyanazon a végtelen fogalmon épülnek.

A görögök megkerülték a végtelent, mint „kimeríthetetlent", a modern matematika befogta a limes fogalommal. Pascal a görögök által nyíltan feltárt „kimeríthetetlenséget" elrejtette az indivisibilia geometriából átvett elnevezések és néhol fogalmak mögé. Matematikai munkája leg-

mint Jean Orcibal kimutatta, Charonnál is („Le fragment infini-rien et ses sources" P, CR. 159–195).

262 Gandillac, M. de: „Pascal et le silence du monde". – P, CR. 342–385.

263 Brunet, Georges: *Un prétendu traité de Pascal. Le Discours sur les passions de l'amour.* Paris 1959, 47–48.

264 „A végleges megsemmisül a végtelen jelenlétében és puszta semmivé válik" – *Pensées,* Éd. Lafuma I C, 188.

265 Vö. Brunet, Georges: *Le Pari de Pascal,* Paris 1956, 47–48 és 50–51.: Or le Pari porte sur l'existance de Dieu, et a pour point de départ cette affirmation que „nous sommes incapables de connaitre ni ce qu'il est ni s'il est..." S így nem érvényes az Isten végtelenségére alapozó Istenbizonyíték, mert a végtelen létezését tudjuk." Nous connaissons l'existance de l'infini et ignorons sa nature, parce qu'il a étendue comme nous, mais non pas des bornes comme nous. Mais nous ne connaissons ni l'existence ni la nature de Diou, parce qu'il n'a ni étendue ni bornes." *(Pensées* éd. Lafuma I C, 188). Brunet szerint a Pari – az Isten létére történő „fogadáson" alapuló Istenbizonyíték – az infini-rien fragmentumból nő ki: A l'origine on trouve un projet de réfutation de la preuve de l'existence de Dieu fondée sur l'idée de l'infini (im. 118).

266 *Louis de Montalte*ból*,* amely név alatt Pascal a *Vidéki leveleket* kiadta, készített anagramma, amely alatt a *Roulette-levelek* és általában az 1658-as év matematikai termése megjelent.

267 *Louis de Montalte*ból, készített másik anagramma, amelyen Pascal a nagy apologetikus művét szándékozott publikálni.

végén, a *Dimension des lignes courbes*-ban szétválasztja az indivisibilia fasszádtól a görög lényeget, s ehhez a művéhez szinte törés nélkül csatlakozhatna Cauchy munkája. De Pascal itt is a XVII. század keretei között marad, a „kimeríthetetlenség” nála nem axiomatikus jellegű, a valós számtest jólrendezhetőségén alapuló fogás, mint nálunk, a „kimeríthetetlenség” nála metafizikai realitás. Ugyanúgy, mint még Cusanus számára, ugyanúgy, mint a kortársgondolkozás számára általában.

Ez elől a végtelen elől menekült Descartes az algebrai egyenletek pontos, tiszta világába. A behelyettesíthető világába. Amiből a függvények és a modern matematika formavilága nő ki, aminek a segítségével a XIX. század definiálja majd a végtelent.

A *PRINCIPIA* SZÜLETÉSE[268]

„Már Copernicus és Kepler sejtették az általános gravitációt; Boullian és Borelli pedig határozottan úgy tartották, hogy lennie kell egy, a három Kepler-törvényt összefogó elvnek, – sőt, a zseniális Pascal – ha ugyan a Chasles által közölt kéziratok nem eleitől-végig csalás termékei – már formulába is öntötte volna, egy 1652 körül Boyle-hez írt levelében: *Dans les mouvements célestes la force, agissant de la distance, suffit à tout et fournit des raisons pour expliquer toutes ces grandes révolutions qui animent l'univers;* de még akkor is hiányzott az elv bizonyítása és részletes következményeinek a kifejtése és ezt mindenképp a hasonlíthatatlan Newton végezte el először. ... Úgy tűnik, Gauss kételyei ellenére is hinni kell unokahúga, M^{me} Conduit és barátja, Henry Pemberton elbeszélésének, hogy mikor az 1665-ös pestisjárvány elől Newton Cambridge-ből hazaűzetvén, kedvenc szokása szerint egy fa árnyékában gondolkozott, egy leeső alma arra a kérdésre vezette, vajon ugyanaz az erő tartja-e a Holdat is Föld körüli pályáján, amelyik az almát esni kényszeríti."[269]

Rudolf Wolf, a XIX. század egyik legtekintélyesebb asztronómiatörténésze kérdezte ezt Newton nevében. Azonnal válaszol: a Holdat is ugyanaz a gravitációs erő vonzza a Föld felé, mint a földön szabadon eső tárgyakat, a Hold azért nem esik a Földre, mert a vonzással éppen egyenlő centrifugális erő nem engedi. A kettő éppen egyenlő, s így a centrifugális erő méri a vonzást. Ennek a centrifugális erőnek és a harmadik Kepler-törvénynek a segítségével kiszámítja, mekkora a nehézségi gyorsulás a Földön, a Hold mozgásából számítva.

De a Hold távolságára hibás, a valóságosnál kisebb adatok állnak rendelkezésére, s így a számított nehézségi erőt a tényleges földi gyorsulás kb. 86%-ának találta csupán.

Ez elveszi a kedvét, „Cambridge-be visszatérve ismét optikai vizsgála-

[268] Előzménye: Vekerdi László: A Principia születése. = Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei 14 (1964) No. 2. pp. 162–182.

[269] Wolf, *R.: Geschichte der Astronomie* München 1877, 446–447.

tokkal foglalkozott. Csak 1678-ban tért vissza mechanikai vizsgálataihoz. Hooke-nak egy matematikai fejtegetése, mely a mozgó földön eső test pályájára vonatkozott, Newtont egy fontos tétel felismerésére vezette, hogy ti. a távolság négyzetével fordítva arányos erő hatása alatt álló bolygó ellipszisen mozog, melynek egyik gyújtópontjában áll a Nap. Newton ennek dacára nem gondolt rá, hogy elméletét közzé tegye, míg 1682-ben az új Picard-féle fokmérés megbízható adatairól tudomást szerzett, mire egész számítását ismételte. Most az eredmény a valóságnak elég jól megfelelt. Vizsgálatai közben még más, a bolygók keringésére vonatkozó tételeket fedezett fel. Barátjának Halley-nak unszolására Newton a maga elméletét kidolgozta, és a »Royal Society«-nak beküldte, mely azt 1687-ben »Philosophiae naturalis principia mathematica« cím alatt kiadta."[270]

A jólértesült Wolf még azt is hozzáteszi, hogy a *Principia* kéziratának a Royal Society-ben való bemutatásakor *„hatte Hooke die unglaubliche Unverschämtheit, sich zu stellen, wie wenn ihm das Meiste in den Werke Enthaltene schon lange bekannt wäre."*[271]

Elavult, a tudománytörténetírás „praekritikus" korszakából származó vélemények?

Nézzük meg, a második világháború utáni kor egyik legnagyobb közönségsikert elért tudománytörténete, Stephen F. Mason könyve mit tart a kérdésről. Szerinte is, Galilei és Descartes tehetetlenségi törvénye, Kepler és Borelli spekulációi után nyitva állott az út az általános gravitáció felfedezésére, s az 1660-as években az angol iskola, Robert Hooke, Christopher Wren, Edmund Halley sejtette, hogy a bolygók mozgása a távolság négyzetével fordított arányban csökkenő vonzás és a centrifugális erő kombinálásával magyarázandó. „Ezekkel a kérdésekkel foglalkozott Newton is, amikor az 1665–66-os nagy pestis alatt Cambridge-től távol, a Grantham melletti Woolsthorpe-i birtokán tartózkodott." – S most következik a már ismertek ismertetése – „Jóllehet Newton ezeket a számításokat Woolsthorpe-i tartózkodása alatt végezte, az eredményeit nem tette közzé. Newton 1666-os munkájának a közzé nem tételére a legkülönbözőbb magyarázatokat próbálták adni..." Mindenesetre 1679 körül *„Waren auch andere Wissenschaftler bis zum Gesetz für die Zentripetalkraft und zum reziprok quadratischen Gesetz für die Gravitationskraft* vorgedrungen"[272]

Apró javításokat nem tekintve, a leírás lényegében azonos az előzőkkel. Az „almát" kihagyta, a centrifugális erő helyett a történelmileg igazolható *„Zentripetalkraft"-ot* vette be és a „szemtelen" Hooke-ot az új törvény egyik előkészítőjévé léptette elő.

[270] Heller Ágost: *A Physika története. Első kötet.* Budapest 1891, 181–182.
[271] Wolf, R.: i. m. 466.
[272] Mason, S. F.: *Geschichte der Naturwissenschaft* Stuttgart 1961, 236–240.

A „szemtelen” Hooke ugyanis azóta különös karriert futott be. A két világháború közötti kor egyik legélesebb szemű tudománytörténésze, Jean Pelseneer hívta fel a figyelmet 1929-ben egy addig kiadatlan, Hooke-hoz írt Newton-levéllel kapcsolatban, hogy Newton gravitációra vonatkozó nézetei távolról sem lehettek 1680 körül olyan fejlettek, mint az 1666-os hagyomány tartja.[273] – Ez a levél egy rövid Hooke–Newton levélváltás egyik darabja, 1679. dec. 13-án írta Newton.

Hooke, aki Oldenburg halála után a Royal Society titkára lett, 1679. nov. 24-én egy kedves hangú levelet írt Newtonhoz, közreműködését kérve. És a végén saját kéréssel is fordul hozzá: „Nagy kegynek tekinteném, ha szíveskednék kifogásait közölni bármely hipotézisemről vagy véleményemről, kiváltképpen ha megismertetné velem gondolatait a bolygók mozgásának egy egyenes, (direct) érintő irányában történő és egy központi test felé történő vonzó mozgásból való összetevésére vonatkozólag.[274] S aztán közli, hogy nagyon érdekelné az is, mi a véleménye Newtonnak Flamsteed parallaxis kísérleteiről. A kiadó itt megjegyzi, hogy Hooke évekkel azelőtt kiadott egy kis könyvet, *An Attempt to Prove the Motion of the Earth from Observations* (London, 1674), amelynek a végén „Hooke nagy általánosságban leírja az univerzális gravitációt”.[275]

Newton meglehetősen kelletlenül válaszol 1679. nov. 28-án.[276] Nagyon elfoglalt, most más kérdések érdeklik. Nem tudta, hogy Hooke-nak ilyesféle hipotézise van a gravitációra vonatkozólag, mindenesetre ehhez hasonló hipotézisek igen elterjedtek a *„physical World”*-ban. Mégis, hogy ne adjon teljesen kosarat, küld egy kis idevonatkozó fejtörőt. Mi lesz egy magas toronyból leejtett test pályája a földvonzás hatása alatt, feltéve, hogy az esés a föld felszíne alá is folytatódna? Azt állítja, hogy az eső test az ellenkező véleményekkel szemben nem nyugatra, hanem keletre fog eltérni, s a föld alatt egy csigavonalat leírva jut el a Föld centrumába.

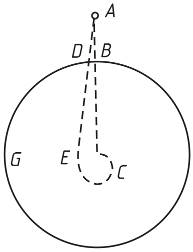
Hooke 1679. dec. 9-én megköszöni, ő javít Newton állításán: a mi szélességünkön nem keletre, hanem délkeletre fog eltérni az eső test, s a pályája nem csigavonal, hanem ellipszis – lenne, legalábbis ha ellenállásmentesen mozoghatna. Így azonban az ellipszisek egyre kisebbek lesznek,

[273] Pelseneer, J.: „Une lettre inédite de Newton” *Isis 12,* 1929, 237–239.

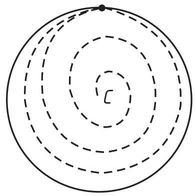
[274] *The Correspondence of Isaac Newton,* Edited by H. W. Turnbull, Cambridge 1959–1961. II 235 Hooke to Newton 24 Nov. 1679, 297. (A továbbiakban *Corr.,* kötet- és levélszám által idézzük.) Ez a kiadás számos eddig kiadatlan Newton kéziratot tartalmaz, Newton hatalmas levelezésének első mintaszerű kritikai kiadása. Hatása a Newton-kutatásra előreláthatóan ugyan olyan nagy lesz, mint az Adam–Tannery-féle Descartes kiadásé volt a Descartes-filológiára.

[275] Uo. 300. 15. jegyzet.

[276] *Corr.* II 236 Newton to Hooke 28 Nov. 1679, 300–304.



40. ábra



41. ábra

s végül a test az excentrikusan elhelyezett, egyre kisebb ellipsziseken a földcentrumba zuhan.[277]

Newton már dec. 13-án válaszol: Való igaz, hogy a test a mi szélességünkön délkeletre esne, de a pálya nem olyan, mint Hooke gondolja. S ez az a levél, amit Pelseneer közölt s amiből világosan kitetszik, hogy Newton még nincs az általános tömegvonzás ismeretének birtokában. Newton beismeri, hogy első levelében tévedett: ha feltesszük, hogy a gravitás uniformis, az eső test „nem spirálisan fog leszállani a Föld centrumába, hanem váltakozó fel- és leszállásban fog keringeni a *vis centrifuga* és a gravitás egymást váltakozva legyőző *(alternately overballancing)* hatása alatt", s végül is Lissajoue-görbe-szerű pályát ír le.[278]

Ez a levél több szempontból, nem utolsó sorban Newton matematikai módszerének a genezise szempontjából is figyelemre méltó. Most azonban csak annyit jegyzünk meg, hogy felmerül benne az a gondolat, hogy egy érintőleges mozgás és egy gravitációs vonzás hatása alatt mozgó test megkerülheti a vonzó centrumot, s a pálya, amit leír, kiszámítható. S ez óriási gondolat, mind a kettő.

Hooke-ot láthatóan nem elégíti ki a válasz. Őt más kérdés izgatja. „Sir – írja 1679/80 jan. 6-án[279] – az Ön számítása a középponttól minden távolságban egyenlő erővel vonzott test pályájára helyes, így mozog egy megfordított konkáv kúpban görgő golyó ... De az én feltevésem az, hogy a vonzás mindig fordított arányban áll a távolság négyzetével, következésképpen a sebesség a vonzás négyzetgyökével lesz arányos *(the Velocity will be in a subduplicate proportion to the Attraction)* és következésképpen fordított arányban áll a távolsággal, amint Keppler felteszi."

A Föld belsejében természetesen nem nő egyre jobban a centrum felé a vonzás, ellenkezőleg, csökken. „De az égi mozgásokban a Nap, Föld, vagy központi test az oka a vonzásoknak, és bár azok nem tekinthetők matematikai pontoknak, mégis fizikai pontoknak tekinthetők és nagy

[277] *Corr.* II 237 Hooke to Newton 9 Dec. 1679, 304–307.
[278] *Corr.* II 238 Newton to Hooke 13 Dec. 1679, 307–308.
[279] *Corr.* II 239 Hooke to Newton 6 Jan. 1679/80, 309–312.

távolságban a vonzásuk a fenti arány szerint mint centrumtól tőlük számítható. *This Curve truly Calculated will shew the error of those many lame shifts made use of by astronomers to approach the true motions of the planets with their tables.”*

A levelezés itt megszakad, Newton többé nem válaszol érdemileg. Más köti le újból a figyelmét.

A továbbiak mindenesetre már jól ismertek; Newton XIX. század közepi hagiografusa, Brewster óta számtalanszor leírták. Hogyan beszélgetnek 1684 tavaszán Hooke, Wren és a fiatal Halley a bolygómozgás törvényéről, Wren 40 shillinget érő könyvet ígér a megfejtőnek, hogyan vallja be a szerény Halley, hogy neki nem sikerült megtalálni, s hogyan henceg Hooke, hogy ő tudja; hogy megy el Halley augusztusban Newtonhoz, s hogy ad az azonnali választ, aminek a részletes igazolását később, az év végén pártfogoltjával Pagettel elküldi Halley-nak, amit 1685 elején a Royal Society regisztrál, hogyan dolgozik étlen-szomjan 18 hónapot a *Principián,* s az első könyv kéziratának a Royal Society-ban 1686 áprilisában történő bemutatásakor hogyan pattan fel a „szemtelen” Hooke, hogy a távolság négyzetével fordított arányban csökkenő vonzás világmindenségre való alkalmazásának a gondolatát tőle vette.

A hűséges Halley természetesen azonnal értesíti Newtont: „Azt mondja, Ön tőle vette az ötletet, bár az így keletkező görbék bizonyítását teljesen Önének ismeri el.”[280]

Newton már május 27-én válaszol; rövid levélben magyarázza el Hooke-al lezajlott levélváltásának lényegét. Ő egyébként már egy évvel a Hooke-levelezés előtt beszélt a dologról Christopher Wrennel és Done-al. „Ön ismeri Sir Christophert, Kérem, tudja meg, honnan és honnan *(whence & whence)* hallott először az erőnek a centrumtól számított távolság négyzetével arányos csökkenéséről.”[281]

Halley küldi a *Principia* kefelenyomatait, nem is említi Hooke-ot,[282] Newton válaszában[283] (1686. jún. 20) egyenesen Hooke-al kezdi. Bizonyos benne, hogy mikor 9 évvel ezelőtt meglátogatta Wrent, az már ismerte a reciprok négyzetes törvényt, Hooke viszont csak 1678-ban megjelent, üstökösökről írt könyvében közli. Így kiderül, hogy Hooke volt „az utolsó hármunk közül, aki rájött”. Ő, Newton, azonban a földi mozgások leírásában sohasem alkalmazta ezt a törvényt, és így Hooke az eső test pályájáról történt levélváltásukból nem következtethet arra, hogy nem ismerte.

Egyébként is 1673-ban, mikor megköszönte Huygens-nek a *Horologium oscillatorium* elküldését, már célzott erre a hipotézisre. „S remélem,

[280] *Corr.* II 285 Halley to Newton 22 May 1686, 431.
[281] *Corr.* II 286 Newton to Halley 27 May 1686, 433–434.
[282] *Corr.* II 287 Halley to Newton 7 June 1686, 434–435.
[283] *Corr.* II 288 Newton to Halley 20 June 1686, 435–441.

nem fognak arra kényszeríteni, hogy nyomtatásban jelentsem ki: nem értem saját hipotézisem nyilvánvaló matematikai alapjait. De tegyük fel, hogy később értesültem róla Hooke-tól, akkor is épp olyan jogom van hozzá, mint az ellipszishez." Kepler is, Hooke is csak sejtették, amit ő bizonyít. A *Principiát* három könyvre tervezte, a másodikat a múlt nyáron fejezte be, „a harmadikból még hiányzik az üstökösök elmélete. A múlt őszön két hónapot töltöttem eredménytelen számításokban jó módszer híján, ami később visszatérített az első könyvhöz és kibővítettem azt különféle propozíciókkal, amik részben az üstökösökre, részben más, a múlt télen talált dolgokra vonatkoznak. A harmadikat (ti. könyvet) mostmár vissza fogom tartani. A filozófia olyan szemtelenül veszekedő Hölgy, hogy az ember akár törvényszéki ügyekbe keveredjen, ha vele kezd. *(The third I now designe to suppress. Philosophy is such an impertinently litigious Lady that a man had as good be engaged in Law suits as have to do with her.)* Ezelőtt is annak találtam, s mostmár nem közeledek felé többé, amég nem hív. Az első két könyvet a harmadik nélkül nem nagyon illeti meg a *Philosophiae naturalis Principia Mathematica* cím, és azért megváltoztattam így: *De motu corporum libri duo:* de ismét megfontolva megtartottam az eredeti címet. Segíteni fog a könyv eladásában, amit most már, hogy az Önöké, nem akarok csökkenteni."[284]

S még el se küldi a levelet, már június 20-án folytatja: „Mióta ezt a levelet írtam, hallottam valakitől, aki olyasvalakitől hallotta, aki ott volt az Önök ülésén..." Eddig nem akarta kiteregetni, hogy ki is ez a Hooke, de most már megmondja, az igazság kedvéért, „hogy Borelli hipotézisét közölte saját neve alatt, és hogy ezt magának tulajdonítsa, és hogy sajátjaként egészítse ki, ez az alapja, úgy hiszem, az egész nagy hűhónak, amit csap". *(That he has published Borell's Hypothesis in his own name & the asserting of this to himself & completing it as his own, seems to me the ground of all ye stir he makes.)*[285]

Egyébként is, Hooke hozzájuthatott az ő, Newton, 1673-ban Huygens-hez írt leveléhez, s onnan szedhette a két erő hatására történő bolygómozgás gondolatát, „és így mindaz, amit később nekem a nehézségről írt, lehet, hogy semmi más mint saját kertem gyümölcse. Akárhogyan is áll, nem tudta (amint könyveiből kiveszem) csak öt évvel azután, hogy bármelyik matematikus megmondhatta neki. Ugyanis mikor Huygens megmutatta, hogyan kell megtalálni az erőt a körmozgás minden esetében, megmondta nekik, hogyan kell eljárniuk ebben éppen úgy, mint bármely más esetben".[286]

Különben is ő már az 1675-ben beküldött, fény természetéről írott

[284] Uo. 437.
[285] Uo. 437.
[286] Uo. 438.

dolgozatában kimondta volt az általános gravitáció gondolatát. És hosszan idéz az 1675-ös dolgozatából: „»És amint a Föld, úgy talán a Nap is bőven beszívja ezt a spiritust *(Spirit),* hogy megőrizze a ragyogását és hogy visszatartsa a bolygókat a tőle való eltávolodástól, és akik akarják, azt is feltehetik, hogy ez a spiritus szolgáltatja vagy hordozza a Nap hevét és a fény anyagi princípiumát: és hogy a hatalmas aether-terek közöttünk és a csillagok között elegendő raktárai a Nap és bolygók eme eleségének.« Ezekben és az ezt megelőző szavakban le van írva a Föld, Nap és minden bolygók felé irányuló gravitás közös oka *(common cause of gravity)* és hogy ez az ok tartja a bolygókat Nap körüli pályájukon. És ez az egész filozófia, amiről Mr. Hooke azt állítja, hogy az ő pár évvel későbbi leveleiből vettem, kivéve a négyzetes arányt."[287]

A kiadók megjegyzik, hogy természetesen mindebben nincs semmi *precise formulation of the law of the inverse square.*[288]

Newtonnak azonban más volt a véleménye. Szerinte, aki elgondolkozik a fenti hipotézisen, láthatja, „hogy a gravitás felfelé csökken és a bolygó felületétől felfelé számítva nem is lehet más, mint a centrumától vett távolság négyzetével fordítottan arányos, de lefelé ez az arány nem áll. Ez akkor csak hipotézis volt, és csak mint sejtéseim egyikét tekintettem, amiben nem nagyon bíztam: de elegendően megmagyarázza Önnek, miért nem használtam a centrumba eső test tárgyalásában a négyzetes arányt. A földön hajított testek kis fel- és leszállásaiban a gravitáció változása annyira jelentéktelen, hogy a matematikusok elhanyagolják. Ezért szerepel náluk az uniformis gravitás egyszerű hipotézise. És mint matematikus, mért ne használhatnám én is gyakran, anélkül, hogy az egek filozófiájára gondolnék vagy filozófiailag igaznak tekinteném?"[289]

A kiadók a levéllel kapcsolatban idézik Hooke naplójának 1688/9. február 15-i bejegyzését: „Halley-nál találkoztam Newtonnal – hiába követeltem jogaimat, mégis információmat elismerte. Érdek nem ismer lelkiismeretet: *a posse ad esse non valet consequentia."*[290]

Halley válaszában[291] biztosítja Newtont, hogy Hooke viselkedését eltúlozva adták át neki, részletezi 1684-es, Wrennel és Hooke-al való beszélgetésüket, s kéri Newtont, nehogy visszatartsa a harmadik könyvet, „amelyben az Ön matematikai tanának az üstökösök elméletére és számos érdekes kísérletre való alkalmazása, amik, ha abból amit írt, jól sejtem, tárgyát teszik, kétségkívül befogadhatóbbá fogja tenni azt azok szá-

[287] Uo. 439.

[288] „...nincs semmi pontos megfogalmazása a távolság négyzetével fordított arányban csökkenő vonzás törvényének." Uo. 141, 16 és 17 jegyzet.

[289] Uo. 440.

[290] Uo. 441, 18 jegyzet.

[291] Corr. II 289 Halley to Newton 29 June 1686, 441–444. 24

mára, akik matematika-mentes filozófusoknak hívják magukat, és akik sokkal többen vannak".[292]

Newton engedékenyebb hangon válaszol.[293] Ezeket tudva, elengedte volna az utóiratot múltkori leveléből. De a felfedezést még előbbre teszi. Azokat a propozíciókat – írja –, amiket 1684 végén Pagettel Halleynek küldött volt, még 20 évvel ezelőtt nyerte a Kepler-törvények alkalmazásával.

A Paget-levél ugyan nincsen meg, vagy legalábbis a legutóbbi időkig nem volt meg, de már a XIX. század közepe óta általában feltételezik, hogy azonos Newton *De motu c.* értekezésével, ami a *Principia* első két könyve magjának tekinthető.[294]

S most Newton újra támad. Felhívja Halley figyelmét, hogy Hooke egyik levelében célzott Halley Szent Heléna szigetén tett megfigyelésére: az inga a hegy csúcsán lassabban járt, mint a tövében, s ezt Hooke a távolsággal való csökkenés igazolására alkalmas kísérletnek vélte. S figyelmeztet rá, hogy ő, Newton, már 14–15, vagy talán 18–19 évvel ezelőtt kiszámította „a Föld napi mozgásából az egyenlítőn keletkező felemelő erőt *(force of ascent),* hogy megtudja, mennyivel fog ott csökkenni a gravitás".[295]

Ez a levél nagy gondot okozott a történészeknek. Egyrészt az 1666-os legenda, most pedig 14–15 év. – Nem hazudott talán csak? Egy Newton! – Nincs más mit tenni, mint feltételezni, hogy a *Principia* írása előtt már két ízben foglalkozott intenzíven az általános tömegvonzás és a reciprok négyzetes törvény problémájával. De miért? – A választ Florian Cajori adta meg egy hosszú fejtegetésében:[296] Az első alkalommal még nem ismerte a földsugár pontos értékét, másodszor már tudta, s helyes eredményhez jutott. Eszerint legkésőbb 1672–73-ban az általános gravitáció elméletének birtokában volt. Erre utal a Huygens-hez 1673-ban írt levél is. Valóban, annak Newton is nagy fontosságot tulajdonított. Már július 27-én újra ír:[297] megtalálta a Huygensnek 1673-ban küldött levél hiteles másolatát, amire hivatkozott volt és idézi.

[292] Uo. 443.

[293] Corr. II 290 Newton to Halley 14 July 1686, 444–445.

[294] A *De Motu* beküldését 1685 februárjában regisztrálta a Royal Society. L. pl. Brewster, D.: *Memoirs of the Life, Writings, and Discoveries of Sir Isaac Newton I-II* Edinburgh 1855, I 299. Edleston feltevését a Paget-levél és a *De Motu* azonosságáról l. Brewster i. m. 299, 1. lábjegyzet. A feltevést általában elvetették, de újabban beigazolódott Edleston feltevésének a helyessége. L. Herivel, J. W.: „Suggested identification of the missing original of a celebrated communication of Newton's to the Royal Society" *Archives Internationales d'Historie des Sciences* 13, 1963, 71–78.

[295] Corr. II 290 Newton to Halley 14 July 1686, 445.

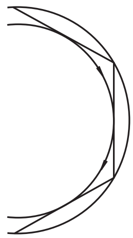
[296] Cit. Hall, A. R.: „Newton on the calculation of central forces" *Annals of Science* 13, 1957, 62–71.

[297] Corr. II 291 Newton to Halley 27 July 1686, 446–448.

Ezt az idézetet, amely a Huygens értelmében vett *conatus* alkalmazása a Hold Föld körüli, és a Föld Nap körüli mozgására, részletesen analizálta Dugas,[298] s arra a következtetésre jutott, hogy a levél éppen azt bizonyítja, hogy az 1670-es évek elején Newton még nincs mechanikája teljes birtokában. *...Il semble* – írja Dugas – *qu'en la circonstance la mémoire de Newton soit quelque peu complaissante...*[299] Sőt, ez a Huygens levél azt a gyanút kelti, mintha a centrifugális erőt – Huygens-től vette volna. S érdekes módon erre fent idézett leveleiben mintha maga Newton is célozna.

Dugas történész-intuíciójának egyik legszebb tette, hogy itt, a látszat és a tudománytörténészek általános véleménye ellenére Newton mellé áll. Szerinte Newton indivisibilia-geometriai módszerekkel, már Huygens *Horologium Oscillatorium*ának az olvasása előtt, önállóan is számítani tudta a körmozgásban fellépő, befelé húzó, centrifugális erőt, lehet, hogy már 1666-ban. Lehet, hogy éppen ez volt az 1666-os nagy felfedezése? Annyi kétségtelen Dugas szerint, hogy Newtonnak a centrum körüli pályán történő mozgás befelé húzó erejének a számítására nem volt szüksége a centripetális erő fogalmára, ami Huygens találmánya, s így a Hold Föld-körüli mozgásából eredő befelé húzó erőt számíthatta a centrifugális erő nélkül is.

Newton ugyanis úgy járt el, hogy a görbevonalú pályát sokszögekből állónak tekintette, ahol a mozgó test minden sarokban egy-egy „lökést" kap, ami kiszámítható. A sokszög oldalszámát minden határon túl növelve, a pálya görbe vonalba, a végtelen sok kis lökés összege a centripetális erőbe megy át.[300]



42. ábra

S bár ez nyilvánvalóan egészen más valami, mint a tömegvonzás $1/r^2$ törvénye, Dugas a Hooke–Newton-levelezés részletes (de nem teljesen megbízható) ismertetése után arra a végkövetkeztetésre jut, hogy Hooke zavaros gondolkozású, kapkodó ember, akinek nincsenek a Huygens-éihez és Newtonéihoz fogható tiszta mechanikai fogalmai.[301] Hooke legfeljebb ha megsejtett valamit, de a vita hevében Newton is olyasmikre hivatkozik, amik nagyon messze esnek a *Principia* nívójától, pl. az 1673-as Huygens-hez írt levélre, és az 1675-ös fény természetéről írt dolgozatára – vonja le analízise végkövetkeztetését Dugas.[302]

Nos, Dugas sejtése, hogy Newton valóban Huygens-től függetlenül jött rá a centrális erő számítására, fényesen igazolódott. A. R. Hall közölt

[298] Dugas, R.: *La mécanique au XVII^e siècle* Neuchatel 1954. Chapitre XII, 7b: *Lettre de Newton à Huygens* (1673).
[299] Uo. 373.
[300] Uo. 360–361.
[301] Uo. 365.
[302] Uo. 377.

egy *„Portsmouth Collection”*-ban talált Newton-kéziratból kivonatokat,[303] amelyekről kétségtelennek tartja, hogy azonosak azzal a számítással, amire Newton a Halley-nek írt 1686. jún. 20. és júl 14. levelében célzott; aminek a létezését Dugas sejtette.

A kéziratban azonban sehol sincs szó centrális erőről, csak *conatusról,* vagyis egy mozgási centrum felé- vagy attól elirányuló tendenciáról, az erő szót csak a gravitással kapcsolatban használja. Számításai gyorsulásokra korlátozódnak, nem a létrehozott erőkre. És a földsugár itt használt értékével sem kap a Hold conatusából számított földi gyorsulásra semmivel se jobb értéket, a „legendás” 1666-os.

Cajori hosszú spekulációi a probléma kétszeri megközelítéséről összeomlanak – írja Hall. Newton az 1670-es évek elején sem ismerte jobban a földsugár helyes értékét, mint 1666-ban. A dokumentum semmi bizonyítékot se hoz arra, hogy írása idejében birtokában lett volna az $1/r^2$ törvénynek vagy az általános gravitációnak bár olyasmi sincs benne, ami inkompatibilis lenne ezzel a feltevéssel, és Newton esetében *the argument from silence is never strong.*[304]

Sajnos, a kéziratot nem lehet pontosan időzíteni – fejezi be közleményét Hall – de feltehetően a 70-es évek elejéről származik, s épp ezért rombolja le a Cajori-hipotézist.

A Newton-levelezés tudós kiadója, Turnbull professzor, már időzíthetőnek ítéli a kéziratot: 1665 vagy 1666-ra.[305] Azért tartja különösen fontosnak a kéziratot, mert „egy idáig nem is sejtett láncszemet jelent Newton és Galilei munkája között”.[306] Ezek a feljegyzések egyenesen Galilei első olvasásának a hatására keletkezhettek. Talán Thomas Salusbury *Dialogo*-fordítását[307] olvashatta Newton, a számításokat mindenesetre az ott talált numerikus példákra alapozza, s a nehézségi gyorsulás ingalengésből való meghatározását is onnan veszi.[308] I. W. Herivel pontosan meg is mondja: a számpéldákat Salusbury *Dialogo*-fordításának a 200. oldaláról vette.[309] A kézirat Herivel és a levelezés kiadói szerint három mozgásféleség gyorsulásának a számítását tartalmazza: 1., a köringáét, 2., a köralakú pályán Nap körül mozgó Földét, és 3., az egyenlítő egy pontjáét.

Az utóbbi különösen érdekes. Newton erre vonatkozó számításait összefoglalva leszögezi, hogy „a gravitációs erő 159,5-ször nagyobb, mint

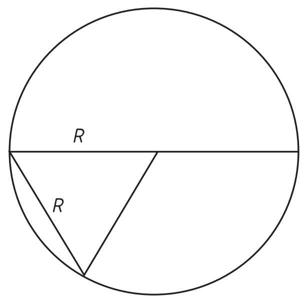
303 Hall, A. R.: i.m.
304 „Newton esetében egy adat hiánya nem bizonyít semmit.” Hall, A. R.: i.m. 71.
305 Corr. III 347 A Manuscript by Newton? 1665 or 1666, 46–54.
306 Corr. III, XIV.
307 Salusbury, Th.: *The System of the World in four Dialogues... By Galileus Linceus* London 1661.
308 Corr. III 347, 52.
309 Herivel, J. W.: „Interpretation of an Early Newton Manuscript” *Isis* 52. 1961, 410–416.

a Föld forgásából az egyenlítőn keletkező erő". *(Ye force from gravity is 159,5 times greater yn ye force from ye Earth's motion at ye Equator.)*[310]

Jogosan háborodott fel Newton: ő ne ismerte volna, hogy az egyenlítőn – a Szent Ilona szigetén – csökken a gravitáció? Jogosan? Hooke ugyanis nem ezt állította rekriminált levelében. Hooke nem azt emelte ki, hogy Szent Ilona szigete az egyenlítőn van, hanem azt, hogy történetesen Szent Ilona-sziget egy magas hegycsúcsán Halley lassabbnak találta az inga mozgását, mint a hegy lábában. S felveti, nem lehetne-e ezt a tényt felhasználni annak a kísérleti eldöntésére, „vajon a gravitás tényleg csökken-e a centrumtól nagyobb távolságra. Ennek a vizsgálatára régebben számos kísérletet végeztem a Szt. Pál tetejéről és a Westminster Apátságéról, de egy se volt meggyőző".[311]

A Hooke–Newton-levelezést és a vitát követve, ugyanez a tendencia ötlik mindenütt szembe: Hooke mindig a centrális *vonzáshoz* ragaszkodik makacsul, Newton mindig ügyesen kitér a centrális *mozgás* felé. A kitérés egyik oka most már nyilvánvaló: a centrális mozgás törvényeit valóban sokkal előbb ismerte, mint Hooke, már 1666-ban, közvetlenül Galileihez csatlakozva. Amikor tehát 19–20 évvel azelőtti felfedezéséről beszél, nem hazudik, formálisan legalábbis nem hazudik: amit állít, a centrális mozgás gyorsulását valóban kiszámította.

Ez természetesen semmit sem mond arra a kérdésre vonatkozóan, ismerte-e a tömegvonzás $1/r^2$ törvényét is. Számunkra a dolog olyan egyszerűnek látszik. De Huygens is nagyon jól ismerte – sokkal jobban, mint az 1666-os Newton – a körmozgás törvényeit, mégsem jut el soha belőlük az általános tömegvonzás gondolatáig. Herivelnek az interpretációja szerint a fenti Newton-kézirat „A centrifugális erő valamilyen világosabb megértését megelőző két primitív számítással kezdődik, s azután kiszámítja a két arányt (ti. a gravitációs erőnek a Föld napi és évi mozgásából eredő centrifugális erőkhöz való arányát) az alábbi eredmény implicit felhasználásával: Ha egy test egy R sugarú körön történő mozgás centrifugális erejével egyenlő erő hatása alatt mozog egyenes vonalon a középpont felé, akkor ugyanannyi idő alatt, ami alatt a körön mozogva R távolságot tett meg, az egyenes vonalban $R/2$-t".[312] Ezt az implicit eredményt egy 1666. május 16-os keltezésű kézirata – amit szintén a *Corres-*



43. ábra

[310] Corr. III 347, 46.
[311] Corr. II 239 Hooke to Newton 6 Jan. 1679/80, 309.
[312] Herivel, J. W.: i. m. 415.

pondence ad ki először – explicite is kimondja.[313] A kézirat jelentősége óriási: a körmozgás egyszerű analízisén túl tartalmazza Newton infinitézimális elképzeléseinek a csíráit. Szinte kézzelfoghatóvá teszi a newtoni mozgásgeometria genezisét.

A kézirat egy 1670-es évek elejéről, valószínűleg 1672-ből származó bővítése és javítása: *The lawes of Motion. How solitary bodyes are moded*[314] pedig már valóságos „ős-principia", legalábbis az első két könyv bizonyos propozícióit illetőleg. Nagyon figyelemreméltó, hogy már itt megvan az abszolút tér gondolatának a csírája, de még nem mint absztrakt, matematikai entitás, még kevésbé, mint „isten sensoriuma", hanem egyszerűen mint *„uniform extension"*. De már benne vannak a testek, már nem *az extensio* jelenti a testek *substantiáját*, mint Descartes-nál.

A tér még csak a testek és a mozgás – elsősorban a körmozgás – színpada, nyoma sincs még benne annak a fenséges, abszolút jellegnek, amit a *Principia* második kiadásának *Scholium Generale*-jában kap meg.

Hiányzik ehhez egy óriási, központi jelentőségű, mindent elrendező törvény: az általános tömegvonzás törvénye.

Hiányzik még csírájában is a *Principia* harmadik könyve. Az a harmadik könyv, amely ennek a törvénynek a diadalútja, az új világmindenség kodifikációja és bibliája. A Harmadik könyv, amit Newton legkésőbb írt meg saját levelei szerint is, aminek a tükrében az első könyvön is változtat, amelyiket inkább visszatart, de amelyikben nem enged egy talpalatnyi-jogot se senkinek. Amelyiknek a keletkezését egyre előrébb teszi: 8–9 év, 14–15 év, 18–19 év, – végül öregkorában visszaemlékezve: 1665–66. A Harmadik könyv, amelyik az alma-mese vulgárisabb vagy tudományosabb megfogalmazásával Newtont az Új Világ Prófétájává avatta.

Newton nem tévedett. Nagyon jól tudta, mihez kell körömszakadtáig ragaszkodnia.

Akkor is, ha nem az ő szellemi tulajdona? Vagy nem csak az övé? Pontosabban: nem teljesen magától jött rá?

Mert hogy Hooke az alaptörvényre – nem többre, de nem is kevesebbre – magától jött rá, az biztosnak látszik. – Miért nem Robert Hooke lett a „Próféta"?

Ezt kérdezte Louise D. Patterson, Hooke egyik késői védelmezője. Két nagy feltűnést keltő cikkben analizálta Hooke gravitációs törvényét és Newtonra való hatását.[315] Kimutatja Hooke levelei és munkái alapján, mennyire tisztában van már az 1670-es évek végén Hooke az általános gravitáció lényegével és jelentőségével, milyen nyíltan közli felfedezését

313 Corr. III 348 A Manuscript by Newton 16 May 1666, 54.

314 Corr. III 349 A Manuscript by Newton ?1672, 60–65.

315 Parrerson, L. D.: „Hooke's Gravitation Theory and its Influence on Newton" *Isis* 40, 1949, 329–341 és 41, 1950. 32–45.

Newtonnal, aki egyszerűen felhasználja a tálcán nyújtott $1/r^2$ törvényt; éppen ez hiányzott a rendszeréből. Azért igyekezik később befeketíteni Hooke-ot, hogy ezzel elfedje, hogy tőle vette az általános gravitáció eszméjét és az $1/r^2$ törvényt. Ezért datálja egyre előrébb a törvény „felfedezését”, míg 1665–66-nál áll meg: a bölcsőig mégsem mehet vissza.

Newton nyomán feketíti máig Hooke-ot az utókor. Mint intuitív experimentátort szokás beállítani, – Newton nyomán – aki matematikához semmit se értett. Pedig inga és rugó vizsgálatai is arra utalnak, hogy kellett matematikai ismereteinek lennie. Csak hallatlan ötletgazdagsága miatt egyik ötletét se tudta kidolgozni, s nagyrészt felkapkodták a többiek, – Newton is. A Royal Society valósággal az ő ötleteiből élt.

Hooke ne értett volna a matematikához? S itt – a hagiográfusok szokása szerint – L. D. Patterson is túllő a célon: Szerinte meg lehet találni Hooke-nak az ingamozgásról szóló írásában a „mozgás második törvényét az alábbi formában: »a vibratio sebességének a meghatározása *a strength* mennyisége és a mozgatandó test nagysága *(bulk)* közötti aránytól függ« vagy modern nyelven, »a sebesség meghatározása az erőnek *(force)* a tömeghez *(mass)* való arányától függ«. Kétségkívül ez volt a későbbi mozgásdifferenciálegyenletek őseinek az egyike”.[316] És még T. L. More – a világhírű Newton biográfus – azt meri állítani, hogy a Newton ellen felhozott plagizálási vádak hamisak! – „Newtonnak az volt a szerencséje, hogy túlélte riválisait, és hosszú ideig uralkodó befolyása volt azokat követő, náluk kisebb tudósok társaságában.”[317]

Nos, kétségtelen, hogy volt egyéb „szerencséje” is, többek között az, hogy az erő és a tömeg fogalmát csak ő fogalmazza meg olyan tisztán, hogy Patterson kisasszony Hooke bizonytalan megsejtését játszi könnyedséggel fogalmazhassa át velük – differenciálegyenletté. Hooke kétségkívül rendelkezett bizonyos matematikai érzékkel, de matematikus, s éppen olyan, aki a differenciálegyenleteket megsejtse, amiktől felfedezőjük, Newton is úgy megijedt, hogy egy életen át elrejtette őket, nos, ilyen matematikus kétségkívül nem volt.

Koyré professzornak nem volt nehéz kimutatni, mennyire nem reális túlzásba csapott Hooke védelmében Patterson.

Hooke – Koyré szerint – először is téved az ingamozgás kiszámításában, amit L. D. Patterson olyan dicsőséggel idéz. S ha rá is jön – Huygens nyomán! – 1679 körül a fordított négyzetes törvényre, nem tud vele mit kezdeni: nem tudja levezetni segítségével a bolygók ellipszis-pályáját. A gravitáció Holdra való kiterjesztésével pedig Kepler *Astronomia Nova*-jában (1609) és W. Gilbert *De Magnete*-jában (1600) találkozunk. Hooke ebben nem anticipálta Newtont. S nem anticipálta főleg abban, ami nem

[316] Uo. 37.
[317] Uo. 43.

volt neki: matematikai gondolatokban. Hooke-nak nem volt meg a szükséges matematikai ismerete, „ami csak azzal magyarázható, hogy hiányzott belőle a kísérlethez való matematikai közeledés alapvető értékének a megértése. Optikában éppúgy mint fizikában, Hooke mindig csak egy baconiánus volt és maradt”.[318]

Láttuk, hogy lényegében Koyré véleményét vette át ebben a kérdésben René Dugas is.

Hooke ügyét ismét egy nő – Margaret Espinasse – karolta fel. *Robert Hooke*-ja (London, 1956) valóságos „Hookeiada”.

Gerd Buchdall szerint azért mégse volt Hooke mártír, mint ahogy Espinasse rajzolja. Inkább egyfajta „mindent kipróbálni” optimizmus volt benne, ami egybevágott a Royal Society kezdő éveinek progresszív, felfelé ívelő, „protestáns” prakticista tendenciáival.[319]

Valójában Hooke se szent nem volt, se mártír, se optimista, se „protestáns”. Milyen volt Robert Hooke? A világirodalom egyik legérdekesebb könyve, a híres *Diary*[320]-ja, amit 1935-ben adtak ki először, felel a kérdésre.

Hooke apja szegény curator volt a Wight-szigeti Freshwaterban, s 13 éves volt Hooke, mikor apja meghalt. Örökségét arra fordítja, hogy a londoni Westminster School-ba iratkozzék be, ahol Euklidész első 6 könyvének egy hét alatt való megtanulásával tűnik ki. 1653-ban kerül kóristaként – kisebb fajta ösztöndíj – az oxfordi Christ Church-be: Wilkins tiszteletes úr felismeri a tehetségét, s ad egy példányt páratlan *Mathematicall Magick*-jából a fiúnak. Szerencsére hathatósabb segítségben is részesíti: bejuttatja Dr. Thomas Willis mellé kémiai kísérleteket Seth Ward mellé asztronómiát tanulni. Willis ajánlja Boyle-nak, aki asszisztensekkel dolgoztat. De Hooke nemcsak egyszerű asszisztens: Euklidészt és Descartes-ot is magyarázza főnökének. Boyle-al végig jó barátságban marad: Boyle ráhagyja mikroszkópját, mágnesét és egyéb „experimentális” apróságait.

1662-ben „Curator of experiments” a Royal Society-ban. Hetenként két új kísérletet kell kigondolnia és bemutatnia az „experimental philosophers” kísérlet-éhségének a kielégítésére. Szerencsére az akkori kísérleteket kigondolni és elvégezni egyaránt könnyebb volt, mint a maiakat, de még így is pokoli elfoglaltság. – Biográfusa és kiadója, H. W. Robinson szerint „Alig túlzás azt állítani, hogy ő volt a Royal Society történelmi megteremtője”.[321]

1664/5 márciusában geometria professzornak választják a *Gresham*

[318] Koyré, A.: „A note on Robert Hooke” *Isis* 41, 1950, 195–196.

[319] Buchdall, G.: „Robert Hooke” *Scripta Mathematica* 23, 1957, 77–82.

[320] The Diary of Robert Hooke, M. A., M. D., F. R. S. 1672–1680. Transcribed from the Original in the Possession of the Corporation of London. Edited by H. W. Robinson and W. Adams London 1935.

[321] Diary... XX.

College-ba. Egyike azon kevés korabeli professzoroknak, akik pontosan ellátták előadásaikat.

1665-ben jelenik meg *Micrographiá*-ja. Akiknek módjukban volt látni ezt a könyvet, s nem elfogultak Hooke-al szemben, egyöntetűen azt állítják, hogy a kor egyik legjelentősebb műve, talán még a *Principiá*val is vetekszik.

„...Hooke csaknem a legtermékenyebb feltaláló géniusz volt, ha ugyan nem a legtermékenyebb, aki valaha élt, és legalább egy könyvei közül, a *Micrographia,* a tudományok történetében a legfontosabb valaha is publikált könyvek között van." – írja bibliográfusa, G. Keynes.[322]

Az a rövid ismertetés és a pár gyönyörű ábra is, amit Keynes közöl, meggyőzhet bárkit arról, hogy nem túloz. A mikroszkópot éppúgy Hooke fedezte fel a tudomány számára, mint ahogy a távcsövet Galilei.

De a *Micrographia* sokkal több mikroszkopikus ismeretek leírásánál és rendszerezésénél. Számos kémiai kísérlet leírását is tartalmazza és többek között korának legjobb égéselméletét adja, ami sokak szerint közel jár az Oxygén felfedezéséhez,[323] először ajánlja a fagyáspontot hőmérők standardizálására, modern módon tárgyalja a kristálystruktúrákat, gömbökből készült modellek segítségével; a thermikus expansiót az anyag általános tulajdonságaként ismeri fel, s a hőt a corpusculák mozgására vezeti vissza. Leírja a vékony lemezek színeit és felismeri, hogy azok a két felületről visszavert fény keveredésére vezethetők vissza.

Foglalkozik a könyv számos, Hooke által feltalált meteorológiai műszer leírásával is, s a kísérleti meteorológia megalapításának tekinthető.

S ha mindehhez hozzávesszük, hogy a légszivattyút is Hooke tette tudományos kísérletekre alkalmas műszerré, s hogy állítólag a Boyle-féle gáztörvényt is ő fedezte fel,[324] valóban nem túlzás azt állítani, hogy az „Experimental Philosophy" igazi megalapozója Hooke.

S ezen túl egy egészen újfajta tudós-típus megszemélyesítője.

Az 1666-os londoni nagy tűzvész után a három *City Surveyor* egyike, működése messze a felmérésen túl a város rendezésére, köz- és magánépületek építésére is, kiterjed. Ő és Wren adták meg a mai London városképének az alapját. Hooke építette a Bedlam Hospital-t, a Montague House-t, a Merchant Taylors Hall-t, a College of Physicians-t, Lady Ranalagh (Boyle nénje) és sok városi tanácsos házát.

Van az épületeiben minden racionalitásuk mellett valami kiszámíthatatlan, szinte azt mondhatnánk, „kamaszos" báj. Nem „szépek" – abban az értelemben, ahogy a kontinens korabeli épületei, a nagy francia Louis XIV

[322] Keynes, G.: A Bibliography of Robert Hooke Oxford 1960, XI.

[323] *Diary*... XXVI–XXVII. L. továbbá Andrade, E. N. da C.: „Robert Hooke F. R. S. (1635–1703)" *Notes and Records of the Royal Society* 15, 1960, 137–145.

[324] Andrade, E. N. da G.: i. m. 138.

vagy az itáliai barokk szép. A Wrennel kapcsolatban hangoztatni szokott „Latinity" Hooke-nál még inkább angol – nem, londoni – jelleget ölt, mint Wrennél. A Principatus Rómája – mint egykor Firenzében a Leonardo Bruni nemzedékének a Köztársaságé – politikai, gazdasági, művészeti és „életstílus" eszmény lesz. A XVII. század második felének a Londonja közelebb van az antik Rómához, mint bármely más európai város. Egy nagy birodalom szíve kezd itt is egyre erősebben verni, de ezt a szívet a nagy szárazföldi utak helyett a végtelen tengerek sós lehelete táplálja.

Fantasztikus karrierek: London egyik legjelentősebb polgára, John Collins (1624/5–83), Newton, J. Gregory, Wallis barátja, F. R. S., a Royal Society annyi értékes tudományos levelezésének a lebonyolítója, könyvkereskedő-tanoncként kezdi, aztán évekig harcol velencei hajókon a törökök ellen, visszatérve matematika tanár lesz, majd állami hivatalnok, a *Council of Plantations* (Gyarmatügyi Tanács) titkára – s emellett állandóan talál időt nemcsak arra, hogy ő maga komolyan, alkotó módon foglalkozzon matematikával, hanem arra is, hogy szünet nélkül, bátorítsa és segítse kevesebb életenergiával megáldott tudóstársait.

A Restauráció Londonja számára életszükséglet volt a természettudomány. Száznál több kávéházának mindegyikében állandó téma az új „Experimental Philosophy", s mindegyikében megfordul, néha egy nap többen is, a fáradhatatlan Dr. Hooke, hogy megigya a maga csokoládéját vagy „rövidebb" italait, s pontosan bejegyezze naplójába:

„1675. november 4. Felolvasás a gyertyáról és a súllyal állandósított lámpáról, és bemutattam a kísérletet a csillámüveggel és a lánggal. A *Garavay*-kávéházban, Hoskins, a fiatal Cambridge-i tudós, Tompion, Adamson. Csokoládét ittam. Jalápgyantát tettem borszeszbe, hogy reggel bevegyem, de nem vettem be, mert egész éjszaka nagyon rosszul voltam, de sok sört ittam és a műhelyben dolgoztam, ami szörnyen jót tett."[325]

Rengeteg könyvet vesz magának is, a Royal Society-nek is. Érdeklődése igen széleskörű. Matematikától és mechanikától alkímiáig és művészettörténeti könyvekig mindent vesz. Sokszor fordul elő a naplóban Vitruvius, Heron, Galilei, Schooten, Harriot. De megveszi Paracelsus *Philosophiá*-ját és Glauber *De mercurio philosophorum*-át is. Feltűnő, milyen sok francia könyvet olvas, s főleg milyen nagy gondja van a *Journall de Scavans,* a rivális-lap rendszeres beszerzésére, olvasására és kölcsönzésére.

Sok – különösen télen – az időjárásra vonatkozó bejegyzés. Tulajdonképpen az egész *Napló* rendszeres időjárás-feljegyzésként indul. Később már az ebédeit és szeretkezéseit is beírja. Nell, Dol, Mary – szolgálói – és a 70-es évek közepétől unokahúga, Grace Hooke (1659?–87) … Grace-

[325] *Diary...* 191.

nak könyvre £ 6 $2\frac{1}{2}$ sh.[326] ... Grace-t Nell látta valakivel. Grace tagad. ... *Things not right*.[327] – De aztán rendbejön minden és Grace – úgy látszik – haláláig hűségesen szereti.

Rugók, órák, távcsövek, legkülönfélébb műszerek, gyülések, kávéház, akadémiai tisztségek és elismerés után való törtetés, egyetemi előadások, hajsza a Pénz után, könyvek, építés, nők: a nagyváros életének lármája, izgalma, boldogsága és gyötrődése kerül Hooke naplójában kézzelfogható közelségbe. Egy új életforma: az újkori nagyváros természettudósának az életformája tükröződik Hooke naplójából.

Ebben a forgatagban születik meg az általános tömegvonzás gondolata Hooke fejében, erről beszél már 1674-ben egyetemi előadásain, erről beszélget Wrennel a Szent Pál székesegyház építése közben, a kávéházakban. … „1677. szeptember 20. Sir Chr. Wrenhez, a Szt. Pálba, találkoztam vele a Greshamben, Jonathans-hez (híres kávéház). Beszélgettem vele a Hold-elméletről. Azt állította, hogy, ha a mozgás fordított arányban állana a távolsággal, a sebesség mindig úgy aránylana, mint a területek, bármi legyen is a görbe...”[328]

Hooke ekkor ennél már sokkal többet tudott. De azt nem Sir Christophernek mondotta el, hanem – Isaac Newtonnak.

Isaac Newtont nem lehetett nagyon elfoglalt embernek nevezni. Csak az évvégi trimeszterben kellett előadnia, heti egy órában. Mindig saját vizsgálatairól beszélt, és előadásai a 80-as évek elején, 70-es évek végén optikáról szóltak.

Már negyven felé járó, nagy-nagy köztiszteletben álló, a matematikában világhírre szert tett tudós volt. Mögötte van a színekről folytatott nagy vitája és híres levélváltása Leibniz-cal, a tudományos diplomáciának ez az iskolapéldája, ahol mindketten úgy akarták kicsalni a másikból a sejtett tudását, hogy a magukéból semmit ne áruljanak el. …Matematikusok és matematikatörténészek generációit vezették félre ezek a levelek. De Leibniz – legalábbis Newton attól félt – többet értett meg belőle a kelleténél. Ez a félelme talán nem is volt olyan alaptalan.

S akkor ez a folyton nyüzsgő Hooke, gyanúsan őszinte leveleivel...

A Royal Society új titkára. A „Nagy Experimentátor”. A Newton által is nagyon tisztelt Boyle barátja. A király is többször, személyesen megdicsérte óráját. De a matematikához, az igazi „Experimental Phylosophy” kulcsához nem ért. Legokosabb az ilyet udvarias formasággal lerázni. Bolygók mozgása egy központ felé mutató vonzóerő és egy tangentiális erő együttes hatása esetén ... Hányan próbálkoztak már ezzel

[326] Uo. 162.
[327] Uo. 166.
[328] Uo. 314.

a „Philosophical World”-ban, még ő is, réges-régen. amikor a körmozgás kérdése izgatta...

De felad egy kis matematikai példát a londoniaknak. – Mennyit dobálták a század közepén tornyok tetejéből a köveket annak az eldöntésére, forog-e a Föld. Az artistoteliánusok ugyanis azt állították, hogyha forogna, akkor, amíg a kő esik, a Föld nyugat–kelet irányban mozogva „kifarolna” alóla, s a kő nem a torony aljába, hanem attól nyugatra esne le. A galileisták viszont állították, hogy a mozgó Földön is a torony tövébe kell esnie, mert átveszi a Föld mozgását. Mint ahogy a sebesen száguldó hajó árbocáról leejtett kő is az árboc tövébe esik.

De Newton már régen tudta, hogy a körmozgást nem lehet az egyenesvonalú, egyenletes mozgással azonos módon tárgyalni. A körmozgás másféle mozgás.

„Igazibb” mint az egyenesvonalú egyenletes mozgás. Abszolút. A torony tetejéről leejtett kő nem eshet a torony tövébe, mert a nyugat–kelet irányba forgó Föld „meglökte” érintője irányában kelet felé. A kő kelet felé fog eltérni, s ha a pályája a föld alatt is folytatódna, csigavonalon a Föld centrumába esne.

Hooke lelkesedik, de korrigál. Nem keletre, hanem délkeletre tér el, és a Föld belsejében sem olyan a pálya, mint Newton írta. Egy centrum felé vonzódó érintőleges mozgással is bíró testnek nem kell a centrumba esni: ha nincs közegellenállás, ellipszisen fog mozogni a centrum körül.

Newton most számol: valóban van ilyen lehetőség. De nem ellipszis, hanem egy bonyolultabb vonal. De Hooke más feltevésből indul ki, abból, hogy a centrális vonzás a távolság négyzetével fordított arányban csökken, s szerinte ez az egyszerű feltevés magyarázza meg valahogy az egész bolygórendszer mozgását, csak éppen azt nem tudja, hogy hogyan.

Jellemző ez a londoni „philosophusokra”. Hipotéziseket állítanak fel „a jelenségek megmentésére”, s nem tudják igazolni azokat. Legjobb ezektől elszakadni, Newton tudta előre. …

Flamsteed, a greenwichi csillagász egészen más jellegű tudós, mint a „zavaros”, kapkodó Hooke. Pontos, türelmes, lelkiismeretes, megbízható megfigyelő és amellett milyen tiszteletteljes...

A megilletődés, a tisztelet és a nagy felfedezés feletti öröm keveredik a levelében, amit 1680. dec. 15-én ír Newtonnak.[329] A november elején itt járt nagy üstökös újra-megjelenéséről számol be. A novemberi üstökös szokatlanul nagy sebességgel haladt a Nap felé. Flamsteed a novemberit nem látta, de azonnal gondolta, hogy miután elhaladt a Nap közelében, újra meg fog jelenni. „...eszerint várva rá – írja –, múlt pénteken az Aquila alatt megpillantottam egy igen kis farkat.”[330]

329 *Corr.* II 242 Flamsteed to Crompton for Newton 15 Dec. 1680, 315–317.
330 Uo. 315.

A kis farok azonban szokatlanul gyorsan kezdett növekedni, dec. 29-én az üstökös már újra a Föld közelébe ért, 1681 januárjában már távolodni kezdett. Az üstökös szokatlanul nagy sebességgel mozgott a Naptól a Föld felé.

Senki nem kételkedett benne, hogy két üstökösről van szó. Az akkor uralkodó Kepleri felfogás szerint az üstökösök ugyanis egyenes vagy alig hajlott pályákon haladtak el a Nap mellett, s elképzelhetetlen volt, hogy az 1680 novemberében oly nagy sebességgel a Nap felé száguldó üstökös azonos lenne a decemberben megjelent, Föld felé tartó üstökössel. Ehhez olyan mértékben hajlott pályát kellett volna feltételezni, amit elképzelhetetlennek tartottak.

Igaz ugyan, hogy a koppenhágai csillagász, Hevelius, 1668-ban megjelent *Cometographia, cometarum omnium motu, generatione variisque phaenomenis* c. művében már feltette a kérdést, nem mozognak-e az üstökösök a Nap közelében hajlított, esetleg parabolikus pályán, de a tudományos közvélemény ezt nem vette komolyan: Különösen nem Angliában, ahol Heveliusról egyébként se tartottak sokat. Hevelius (1611–87) ugyanis régivágású csillagász volt; s kardoskodott a puszta szemmel való helymegfigyelés előnyei mellett. Angliában pedig éppen Hooke, Newton, Flamsteed munkája nyomán óriási lendületet vett a műszeres csillagászat és a teleszkópos helymegfigyelés.

Senki se hitte komolyan, hogy a novemberi és a decemberi üstökös azonos lehet. Csak Flamsteed. Ő ugyanis elmulasztotta a novemberi üstökös észlelését, s most alig várta, hogy újra megjelenjen. S mikor megjelent, elsőnek értesítette róla a nagy Newtont. Tévedett volna? – De miért ne lehetne az üstökös pályája ennyire hajlott? Ha a Nap óriás-mágnes, amelyiknek az örvénye (vortex) mozgatja a bolygókat, s ha feltesszük, hogy az üstökös egy kis mágnes, s még hozzávesszük azt a régi „tapasztalatot", hogy az ágyúgolyó röpülés közben magától sohasem fordul meg, akkor az egész dolog könnyen érthető. Az üstökös, ez a kis mágnes bekerül a Nap vortex-ébe, ami megfordítja, a másik pólusát fordítja a Nap felé, s ha az előbb a Nap vonzotta, most taszítani fogja.

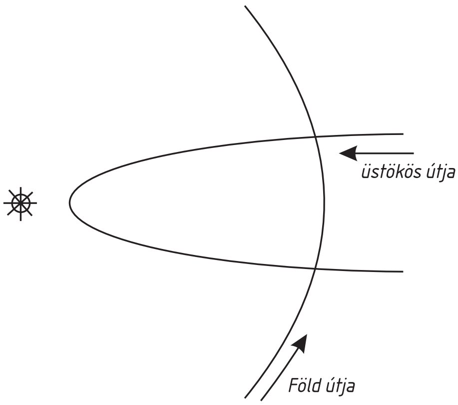
Akárhogyan is van – írja Flamsteed – a Nap vonzza a bolygókat, *and all like bodys that come within our Vortex*.[331]

Az üstökös egyre jobban izgatja Newtont. Hosszú levélben válaszol Flamsteednek.[332] Megköszöni és Flamsteedre hárítja vissza a kapott bókokat, dicséri pontos munkáját. Ami azonban a hipotézist illeti ... az üstökös semmiképpen sem mehet el a Nap alatt, amint Flamsteed hiszi. „Az eset ugyanaz, mintha egy ágyúgolyót lőnének ki nyugat–kelet irányba.

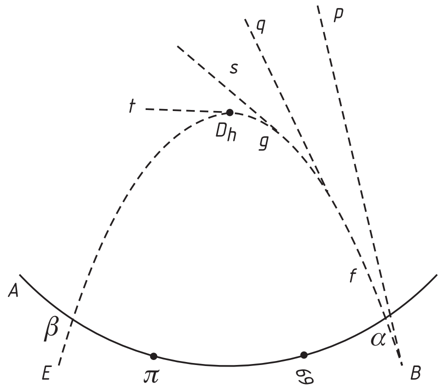
[331] „...és minden hasonló testet, ami bejön a mi örvényünkbe", ti. a Descartes által feltételezett, Nap körül forgó örvénybe. *Corr.* II 250 Flamsteed to Halley 17 Febr. 1680/81, 337.

[332] *Corr.* II 251 Newton to Crompton for Flamsteed 28 Febr. 1680/81, 340–347.

A Föld vonzása gravitásánál fogva *(The attraction of ye earth by its gravity)* az ágyúgolyót egyre inkább lefelé irányítja, de sohasem teszi egyenesen lefelé tartóvá, még kevésbé fogja megfordítani keletről nyugatra. Az örvény mozgása sem segít a nehézségen, még inkább növeli.” Az örvény ugyanis ellenkező irányba, a Naptól elfelé terelné az üstököst.



44. ábra



45. ábra

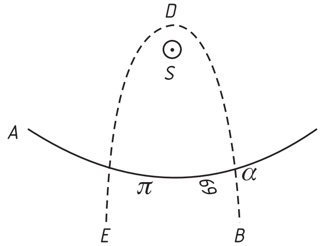
„Az egyetlen út, amely véleményem szerint segít ezen a nehézségen, az a feltevés, hogy az üstökös nem a ⊙ és a Föld között ment el, hanem megkerülte a Napot *(to have fetched a compass),* mint ezen az ábrán.

Másodszor, bár azt könnyen feltehetőnek tartom *(I can easily allow),* hogy a Napban egy vonzó erősség *(attractive power)* van, ami által a bolygókat körülötte történő járásukban megóvja az érintő egyenesekben való elmenéstől, de azt, hogy ez a vonzás mágneses természetű lenne, kevésbé vagyok hajlandó elhinni...”[333] A tapasztalat ugyanis egyértelműen arra mutat, hogy a mágneses testek felhevítve elvesztik mágnesességüket, márpedig a Nap nagyon forró ... S ami még sokkal lényegesebb: a mágnes előbb mindig irányít, s csak aztán vonz, s ha egyszer magához vonzotta a kisebb mágnest, azt többé nem taszítja, el se engedi. A mágnesség elsősorban irányítást jelent, hangoztatja Newton. S különben is, ha a Nap mágnességgel tartaná magához a bolygókat, azok tengelyének mind egyirányba kellene mutatni, mint a Földön a mágnestűknek.

Egyébként is Newton arra gyanakszik, „hogy a novemberi & decemberi üstökös, amiket Mr. Flamsteed egy és ugyanazon üstökösnek tart, két különböző üstökös.”[334] Ugyanis túl szabálytalan a mozgása ahhoz,

[333] Uo. 341.
[334] Uo. 342.

hogy egy pályába lehetne összefogni. Itt vannak például Gallet atya római észlelései ... Azokkal mit csinál Flamsteed?[335]



46. ábra

Végül kéri, küldjön továbbra is pontos jelentéseket az üstökös helyzetéről, s ne vegye zokon, amiket a hipotéziséről írt. – Egyébként a Flamsteed elméletében van egy csomó elfogadható tétel is, pl. hogy a farok híg gőzből áll *(thin vapour),* hogy a farok a fej körüli atmoszférából ered, hogy a Nap fénye okozza a felemelkedését, hogy a Nap fényét visszaverve világít, s nem saját magától.[336]

Flamsteedet azonban ez nem vigasztalja: őt az üstökös útja érdekli, nem a farok. Nagyon tiszteletteljesen, de nagyon határozottan szembeszáll Newton véleményével.[337]

„Mr. Newton nagyon lekötelezett geniális és világos észrevételeivel, amiket a most elvonult üstökös jelenségeinek a megmentésére felállított propozícióimra tett. Be kell vallanom neki, hogy rövidesen közölni szeretném megfigyeléseimet, de ugyanakkor, ami ezeket a fizikai dolgokat illeti, azok egyikével se tudok szembeszállani, mert szeretem a békességet, és nagyon jól tudom, milyen bajt hozhatna rám egy ilyen, saját területemen kívül eső publikáció. Csak az igazság szeretete és ezen jelenségekkel szemben általánosan elfoglalt vélemény nem tetszése késztetett arra, hogy üres óráimban gondolkozzam, mi lehet ezeknek a valódi természete. És mikor úgy véltem, hogy felfedeztem valamit, ez arra késztetett, hogy elküldjem Önnek és hogy megtudjam Mr. Newton érzéseit *(sentiments),* akinek az enyémtől eltérő véleménye, be kell ismernem, nem kis előnyömre szolgált, mert számos további argumentumot juttatott eszembe véleményem *(opinion)* védelmére, amikre egyébként aligha gondoltam volna."[338]

Flamsteed 1646-ban született, ugyanabba a generációba tartozik, mint Newton. Hooke a megelőzőbe. Hooke udvarias hangján is érződik az egyenrangú. Flamsteed tudja, hogyan kell Mr. Newtonnal beszélni.

Ami az üstökös mozgásának a „szabálytalanságát" illeti – írja Flamsteed – Newton téved. Elnézte, hogy Gallet, akinek a megfigyeléseire Newton hivatkozik, a régi naptár szerint adta meg azokat, s azért látszanak a többi közül kiugrani.[339]

[335] Uo. 342–343.
[336] Uo. 345–346.
[337] Corr. II 252 Flamsteed to Crompton for Newton 7 March 1680/81, 348–356.
[338] Uo. 348.
[339] Uo. 348–349.

Abban viszont igaza van Newtonnak, hogy a pálya valóban a Napon túl hajlik vissza, az adatok egyértelműen erre mutatnak. És Flamsteed csatol egy merész szerkesztést – pár megfigyelése alapján![340] – az üstökös valódi, térbeli pályájáról.

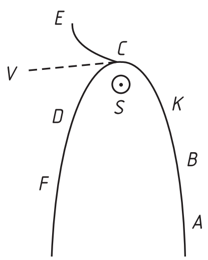
Ami a nagy mágnest illeti, valóban irányít mielőtt vonzana, igaza van Newtonnak. De ez is csak akkor szólna ellene, ha Newton be tudja bizonyítani, „hogy egy nagy álló mágnes ugyanígy hatna egy mellette vagy körülötte hevesen eldobott kis mágnesre is".[341]

Newtont egyre jobban izgatja a „két" üstökös. Maga is pontosan követi a decemberit, amíg csak látni lehet, fonalkeresztes teleszkópjával, s gyűjt minden rávonatkozó megfigyelést.[342]

A pontos megfigyelésre helyezi a hangsúlyt. A lehető legpontosabban rekonstruálni kell a két üstökös térbeli, valódi, „abszolút" mozgását, az üstökösöknek az ekliptikához való hajlása látszólagos sebességüket nagyon megváltoztathatja. Amíg nem ismerjük a két üstökös igazi pályáját, nem lehet semmit mondani.

Az pedig, hogy a nagy mágnesnek a kis mágnesre való irányító hatása erősebb, mint a vonzó, kísérleti tény, itt nincs mit teoretizálni. Az elhajított mágnes? – a mágnestű a leggyorsabban száguldó vitorláson is ugyanarra mutat, mint az állón.

Lám, Newton, az „empirista". Vagy mégse? – „Az, hogy az ágyúból kilőtt golyó mindig ugyanazt az oldalát fordítja előre, régi tüzér-tradíció lehet, de nem tudom belátni, hogy egyeztethető össze a mozgás törvényeivel *(laws of motion)* és azért merem állítani, hogy megfelelő kipróbálás esetén nem így fog történni, kivéve néha, véletlenül.[343]



47. ábra

Tapasztalat ide, kísérlet oda, csak az a mozgás „valóságos", ami összeegyeztethető a „mozgás törvényeivel". Vajon a Flamsteed hipotézise – hogy ti. a két üstökös egy – összeegyeztethető-e a mozgás törvényeivel? És egyelőre csupa kifogásokat hoz fel. Mert ha a Nap vonzaná feléhaladtában, és taszítaná távoztában az üstököst, akkor a taszítás alatt is egyre gyorsabban kellene mozognia, márpedig a megfigyelés azt mutatja, hogy a decemberi üstökös egyre lassabban jár.

Másik kifogás: Mikor az üstökös *C*-be ér, itt se vonzás, se taszítás nem lehet, ez a vonzás és taszítás határa. Ha bármily kicsit túlmegy *D* felé, ott már taszítás érvényesülne, s akkor nemhogy *D* felé haladna, hanem elrepülne *E* felé.

340 Uo. 352.
341 Uo.
342 Corr. II 254 Newton to (?Crompton) ? April 1681, 358–362.
343 Uo. 360.

„De mindezek a nehézségek elkerülhetők, ha feltesszük, hogy a Nap mágnessége irányítja és vonzza az üstököst, és ezáltal épp annyira késlelteti távozásában, mint amennyire gyorsította közeledésében. És ez a folyamatos vonzás egy kerülőt tétet vele a Nap körül *ABKDF* vonalban, *C*-ben a *vis centrifuga* túlsúlyba jut a vonzás felett és arra kényszeríti az üstököst, hogy a vonzás ellenére is távolodni kezdjen a Naptól.

Az üstökös pályájára vonatkozólag még nem végeztem számításokat, bár azt hiszem, van erre egy közvetlen módszerem, bármi legyen is a mozgás pályája."[344]

1681. ápr. ? – Az új világrendszer „qualitativ" születésnapja? A „mozgás törvényei" 1666 óta érnek Newtonban. Pontosabban egy speciális mozgás, a forgó mozgás törvényei, amiben Huygens is olyan nagy eredményeket ért el. A Hold és a bolygók mozgásához, az eső kő mozgás-anomáliáihoz ezek a törvények elegendőek voltak. A „gravitás" mindig érdekelte Newtont, de másként, nem a „törvények", hanem a képzelet, az ötlet, a *fancy* síkján – ahogy az 1675-ös hipotézisben leírta.[345]

Vagy ahogy alig egy éve, a Hooke-kal való levelezés során kiszámította egy „egyenletes gravitás" és egy érintőleges mozgás összetevődéséből kialakuló mozgás pályáját. Ott is egy centrumot került meg a két mozgás összetevődésének a hatására a mozgó test. – De nem ilyen bolond-hirtelen, mint Flamsteed kívánja. Lehet az üstökös pályáját számítani, neki van is erre módszere, s a számítások azt mutatják, hogy az üstökösnek – a decemberi üstököst érti alatta – dec. 3-án kellett metszeni az ekliptikát. Hogy milyen távolságban, azt megfigyelések hiányában nem tudja pontosan megmondani. Mindenesetre jóval túl lehetett a Napon.[346] – De ha a decemberi üstökös dec. elején túl volt a Napon, akkor a decemberi és novemberi üstökösök aligha lehetnek azonosak.[347]

Ha ugyanis a második, a decemberi üstökös pályájából extrapoláljuk az első, a novemberi üstökös pályáját, ez semmiképpen sem vág a novemberi üstökös megfigyelt adataival. Számításai szerint a decemberi üstökös dec. 3-án metszette az ekliptikát, s ekkor a Föld – Nap távolság felével volt a Napon túl, s nem mozgott lényegesen sebesebben, mint később, már megfigyelhető szakaszában. Flamsteed hipotéziséből azonban az üstökös napközelére túlságosan nagy sebesség következne.

Ez pontatlan, rövid parafrázisa a meglehetősen bonyolult stereoastronomiai fejtegetéseknek, de gondos tanulmányozásukból is csak ez derül ki: akármilyen módszere volt is akkor Newtonnak az üstököspálya számítására, az a módszer nem az inverz négyzetestörvény és a cent-

[344] Uo. 361.
[345] Carr. II 146 Newton to Oldenburg 7 Dec. 1675, 362–392.
[346] Corr. II 254 Newton to (?Crompton) ? April 1681, 362.
[347] Corr. II 255 Newton to Flamsteed 16 April 1681, 363–367.

rifugális erőtörvény kombinációján alapult. Akkor ugyanis nem akadt volna fenn a Flamsteed hipotézise által megkövetelt nagy napközelbeni sebességen.

Newton nem lehetett túlságosan elégedetlen az üstökös pályájára végzett számításaival. Ugyanis a levél kéziratából a következő, el nem küldött részt közlik a kiadók:

„Hogy az üstökös a Napon túl járt, a magam részéről meglehetősen biztosnak látom, nemcsak azért, mert úgy tűnik, hogy a dolgok természete ellen van az az üstökösöknél, hogy úgy megforduljanak, mint az Ön hipotézise megkívánja, hanem azért is, mert úgy gondolom, hogy van egy módszerem az üstökös útjának (bármilyen vonal legyen az) a meghatározására, amely csaknem olyan pontos, mint amivel a bolygók pályáit határozzák meg, feltéve, hogy nagyon pontosan végzett, megfelelő megfigyelések állanak rendelkezésre. Ezért érdekelt az üstökös helyének a megfigyelése február végén és március elején..."[348]

Valóban, márc. 9-ig követi nagy érdeklődéssel és pontossággal. De mikor évekkel később megtalálja az üstökös mozgásának törvényét, akkor már nem lesz szüksége a sok pontos megfigyelésre: Flamsteed pár adatából meghatározza a pályát.

Az 1680–81-es üstökös kétségkívül felkeltette Newton érdeklődését az égi mozgások iránt. Az 1682 augusztusában megjelent üstököst is gondosan követte, s Flamsteeddel és más tisztelőivel is figyeltette.

A 80-as évek elejére esik Thomas Burnettel, a londoni Charterhouse főnökével való teológiai levélváltása is a világ szerkezetéről és természetéről.

Burnet többek között megkérdezte, mi a véleménye Newtonnak a Föld alakjáról: gömb-e az, vagy ovális? A válasz – indoklása miatt – meglehetősen érdekes: „Nagyon hajlom afelé a föltevés felé – írja Newton –, hogy gömb alakú vagy enyhén ovális. És legfőbb érvem e vélemény mellett a bolygókról vett analógia. Amennyire teleszkóppal megítélhetők, mind kereknek látszanak. Ha napi mozgásuk oválissá tenné őket, a Jupitert sokkal oválisabbá tenné a maga mozgása, lévén egyenlítőjén a napi mozgása által okozott vis centrifuga 20 vagy 30-szor nagyobb, mint a Föld napi mozgása által okozott vis centrifuga a mi egyenlítőnkön.[349]

Newton figyelme a 80-as évek elején, úgy látszik, több oldalról is a centrifugális erő felé fordul.

A levél további része hosszú teológiai fejtegetés a Genezis értelmezéséről. „Ami Mózest illeti, nem hiszem, hogy teremtés-leírása philosophicus vagy kitalált lenne (philosophical or feigned), hanem hogy a valóságokat írja le mesterségesen a köznép értelméhez adaptált nyelven."[350] – foglalja össze több oldalra terjedő egzegézisét.

[348] Uo. 366.
[349] Corr. II 247 Newton to Burnet Jan. 1680/81, 329.

Sajnos, a *Levelezés* kiadói Newton óriási teológiai munkásságából csak nagyon keveset közölnek – a kiadás láthatóan a „pozitivista” Newtont szeretné feltámasztani – annyi azonban valószínűnek tűnik, hogy Newton kozmológiai érdeklődése nem teljesen „philosophicus” indítású. És nem is új: a 70-es évek nagy éterhipotézisei is ennek a szolgálatában állottak. Most azonban ez a kozmológiai érdeklődés egyre inkább mozgások és erők játékára koncentrálódik, mozgásokra és erőkre, amiket matematikai törvények uralnak.

A 70-es évek bontakoztatták ki Newtonban a nagy experimentátort, a spekulatív experimentális művészet egyik nagy megalapozóját. A 80-as évek Newtona szabja meg a természet matematikai törvényeit. Próféta lesz, egy egész elkövetkező kor prófétája, akit csak azért nem imádtak, mert a XVIII. és XIX. században ez már nem divat. A 80-as évek Newtona lesz az új civilizáció „Mózes”-e, s „tíz parancsolat”-a: a *Principia* három könyve. Leginkább a harmadik.

Ezt a könyvet fejezi be legkésőbb. 1684-től kezdve özönlenek a bolygórendszerre és az állócsillagok helyére vonatkozó kérdések Flamsteedhez. Alig győzi a megválaszolásukat.

Különösen a Jupiter-rendszer és a Szaturnusz érdekli Newtont. 1684. dec. 30-án izgatott hangú levél a Jupiter és Szaturnusz pályájáról:

„A Szaturnusz pályáját Kepler túlkicsinek definiálja a *sesquialteratus* arányhoz. Ez a bolygó, ahányszor csak conjunctióban van a Jupiterrel (a Jupiter reá való hatása miatt) túl kell fusson a pályáján egy vagy két fél-Napátmérővel, vagy még többel is, és mozgása csaknem egész többi részén ennyivel vagy még többel rajta belül kell legyen. Talán ez lehet az oka, hogy Kepler túlkicsinek definiálja. De én szeretném tudni, nem figyelte-é Ön meg, hogy a Szaturnusz Jupiterrel való conjunctiója idején jelentősen eltér Kepler tábláitól?”[351]

Flamsteed már január 5-én küldi a kért adatokat. Figyelemre méltó, hogy a korabeli Anglia legnagyobb asztronómusa, aki hallotta a Royal Societyben Halley beszámolóját Newtonnál tett látogatásáról, s talán már a Paget-levelet is látta – ha ugyan, mint előző levelében írta, „közös barátunk, Mr. Hooke és a többi városi”[352] kielégítette már kíváncsiságát – Flamsteed, aki az elmúlt években Newton egyik legközelebbi munkatársa volt, milyen kevéssé él a Mester új gondolatvilágában.

„Hogy őszinte legyek – írja – alig hiszem, hogy valami befolyásuk lenne egymásra, mert a két bolygónak ebben a helyzetben az egymástól való távola csaknem négyszerese a földpályának *(orbis annuus),* úgyhogy ilyen képlékeny *(yeilding)* anyagban, mint a mi éterünk, nem tudom elképzelni,

[350] Uo. 331.
[351] Corr. II 274 Newton to Flamsteed 30 Dec. 1684, 407.
[352] Corr. II 273 Flamsteed to Newton 27 Dec. 1684, 405.

hogy egyik bolygó másikra való bármilyen impressziója is zavarhatná a másik mozgását.”[353]

Egyáltalán nem valószínű, hogy a bolygóknak valami hatása is lenne egymásra ilyen nagy távolból a Naphoz képest, amelyik „a legnagyobb és leghatékonyabb mágnese rendszerünknek”. S most ő is tapasztalatra hivatkozik, mint pár évvel ezelőtti mágnes-vitájukban Newton: a legnagyobb eddig talált mágnes sem hatott 100 yardnál messzebb...[354]

De Newtont már nem érdeklik a „mágneses” tapasztalatok. Már jan. 12-én újra kérdez, a Szaturnusz-rendszer méretei érdeklik. – És nagy megkönnyebbüléssel veszi a Jupiter-Szaturnusz conjunctiójáról szóló értesítést:

„Kepler Jupiter és Szaturnusz tábláinak a hibáira vonatkozó információi számos gondtól szabadítottak meg. Már azt hittem, valami előttem ismeretlen ok lehet, ami megzavarhatja a Sesquialternatus proportiót... A legutóbbi levelemben végeztem egy becslést *(allowance)* a Jupiter és Szaturnusz egymástól való távolságára azon az alapon, hogy a távolság négyzetével fordított arányban csökken a virtusuk *(virtue)*. De ott csak találomra beszéltem, nem ismerve virtusukat addig, amíg meg nem kaptam az Ön Jupiterre vonatkozó adatait, amikből megértettem, hogy virtusa kisebb, mint gondoltam...”[355]

A továbbiakban megköszöni, hogy átszámolja számára a francia üstökösmegfigyeléseket: „Szándékomban van az 1664 & 1680-as üstökösök által leírt vonalakat (lines) a bolygók mozgásánál megfigyelt elvek szerint leírni...[356]

Ez sem lesz könnyű munka. Láttuk már, hogy azt mondja róla, pár hónap kemény számolást jelentett 1685 őszén... De amikor sikerült, akkor a nyert eredmények alapján az előző könyvek propozícióin is végzett némi javítást...

Amikor készen lett az üstökös-pálya bolygómozgás-törvényei szerint történő számolásával, akkor –

„...aláindula Mózes az hegyről, és az bizonyság tételének két táblái valának az ő kezében, mely tábláknak mind a két része megíratott vala, mind egyfelől, mind másfelől.

Az táblák penig Isten kezének csinálmányai valónak, az írás is Isten írása vala, mellyet kimetszett vala.”[357]

Nem volt-e valóban „bálványimádás” ezzel a művel szemben mindenféle prioritás-követelés? Isaac Newtonnak volt igaza, még akkor is, ha az

[353] Corr. II 275 Flamsteed to Newton 5 Jan 1684/5, 408.
[354] Uo. 409.
[355] Corr. II 276 Newton to Flamsteed 12 Jan 1684/5, 413.
[356] Uo.
[357] Mózes Második könyve, XXXII, 15–16, Károli Gáspár fordítása.

inverz négyzetes törvény és az általános gravitáció ötlete a Robert Hooke állandóan matató agyában született is meg először.

S talán éppen az háborította fel annyira Newtont, hogy Hooke, akit ő semmiképpen sem tartott méltó ellenfélnek, lép fel ilyen követelésekkel.

Newton szeme előtt más, nagyobb, méltóságteljesebb ellenfél lebegett. Olyan, aki törvényt adott annak a világnak, amiben Newton felnőtt, s akinek nagyobb hatása volt Newton fejlődésére, mint hisztoriográfusai, s talán ő maga is, gondolták. Egy „igazi" ellenfél, s nem egy londoni „experimental" filozófus. Aki teremtett egy matematikai világmindenséget, aminél most Newton biztosabbat és „matematikaibbat" hozott létre.

Akit ő a matematikában szinte még gyermekkorában túlszárnyalt, akinek az optikáját egy évtized kemény küzdelmei árán egy mérhetetlenül „színesebbel" váltotta fel, s akinek a „világát" egy fél évtized hatalmas munkájával, a Hooke, Halley, Flamsteed, Huygens, az 1860-as üstökös és „az Isten" segítségével egy pontosabb világgal váltotta fel.

Nem Hooke volt a *Principia-vitában* Newton igazi ellenfele, hanem Descartes.

VÉGTELEN SOROK ÉS FLUXIOK[358]

(A newtoni infinitézimális analízis kialakulásához)

Előző közleményünkben[359] röviden vázoltuk a XX. századi matematika-történet-írás állásfoglalását Newton infinitézimális analízisével kapcsolatban. Láttuk, hogy többnyire a Newton–Leibniz vita és a fizika-matematika ellentétpár felől közelednek a newtoni infinitézimális számítás fogalmainak történeti tisztázásához. Ez annyit jelent, hogy a differenciál- és integrálszámítás, a differenciálgeometria, a limesz-matematika, a sorelmélet és függvényelmélet felől érkeznek Newtonhoz. Olyan matematikai diszciplínák felől, amelyek a Leibnizi jelölési mód és algoritmus kifejlesztéseként és hiányosságainak fokozatos kiküszöbölésével nőttek naggyá. Ezzel párhuzamosan a matematikai gondolkozás fokozódó szigorodása, amelyik egyre pontosabb válaszfalat igyekezett vonni a matematika és annak fizikai alkalmazásai közé, eleve bizalmatlanul tekintett Newton fizikai fogalmakkal átszőtt infinitézimális meggondolásaira.

A matematikatörténészek, fordított Antoniusként dicsérni jönnek Newtont és eltemetik. Talán Jean Pelseneer fejezte ki legvilágosabban és legőszintébben ennek az interpretációnak a lényegét. Szerinte[360] – és ismételjük, hogy ebben a tudománytörténészek legnagyobb részének ugyanez az álláspontja – Newton érdeklődése sohasem volt igazán matematikai. Az infinitézimális módszert csupán új eredmények elérésére alkalmas eljárásnak tekintette. Sohasem tudott áttörni a modern matematikai felfogáshoz, mindvégig a görög matematika fogalmi körében maradt, az egyszerű, szép, harmonikus, ahogyan ő nevezte „simple & elegant" bűvkörében. Nem jutott el, jóllehet abban a korban élt, amit a *synthése algebrico-logique* korának nevez a matematika-történetírás, a matematika algebrai felfogásáig. Nem tudott csatlakozni ahhoz a vonalhoz, amelyik

[358] Előzménye: Vekerdi László: Végtelen sorok és fluxiok. (A newtoni infinitézimális analízis kialakulása, II.) = Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Osztályának Közleményei 14 (1964) No. 4. pp. 423–441.

[359] Lásd kötetünkben Vekerdi László: 'A newtoni infinitézimális analízis kialakulása a XX. századi matematikatörténet-írás tükrében' c. tanulmányát!

[360] Pelseneer, J.: Une opinion inedite de Newton sur "l'Analyse des Anciens" à propos de l'Analysis geometrica de Hugo de Omerique, *Isis,* 14, 163–165, 1930.

szakított a görög gondolkozásmóddal: Descartes, Fermat, Leibniz matematikájához. Korszakalkotó nagy műve a *Principia* éppen azért nem hatott a maga korában, mert a nehézkes, elavult görög geometriai módszereket alkalmazta benne. A *Principia* forradalmi fizikai gondolatait retrográd matematikai módszerekbe öltöztette és ez a tény különös kettősségre vezetett az angol tudományos élet fejlődésében. Newton fizikai kiválósága miatt szerzett tekintélye bizonyos fokig kötelezővé tette Angliában matematikai módszereinek az alkalmazását is, és ez a tény csaknem egy évszázadra visszavetette az angol matematikát a Leibnizi módszereket alkalmazó kontinenshez képest. Csak a XIX. század elején kezdik az angol matematikusok *to accept the „de-ism" of Leibniz in place of the „dot-age" of Newton*[361] – írja szellemesen Newton matematikai műveinek kitűnő ismerője és kiadója, J. F. Scott.

Leibniz szerencsés jelölése – Newton szerencsétlen pontjai, Leibniz bátor előretörése az infinitézimális analízis geometriai alkalmazásainak területén Newton régi, steril görög geometriai módszerekhez való ragaszkodása, Leibniz nagyobb érzéke az algebrai algoritmus iránt, Leibniz nagyobb szintetiko-kombinatorikus képessége, ez az állandó és csaknem elkerülhetetlen összehasonlítgatás Newton és Leibniz infinitézimális matematikája között szükségszerűen vezetett J. E. Hofmann kategorikus megállapításához: „A későbarokk matematikai csúcsteljesítménye a kalkulus felfedezése. Ez G. W. Leibniz, egy lipcsei professzor fiának a kizárólagos érdeme."[362]

Másfelől rámutatott a modern matematika-történetírás a Newtoni infinitézimális matematika elődeinek a hosszú sorára. Newton mestere, Isaac Barrow „fedezte fel" az „integrálás" és „differenciálás" inverz jellegét. Mercator és James Gregory fedezték fel a „transzcendens függvények" sorbafejtését. Fermat fedezte fel, hogy a „differenciál-hányados" a differenciahányados „határértékeként" értelmezendő. Gregorius a Santo Vincentio fedezte fel az infinitézimális analízis szempontjából annyira fontos összefüggést a logaritmus és az egyenlő szárú hiperbola területe között, Descartes a „differenciálegyenleteket", Galilei a fizikai problémából adódó „differenciálegyenlet integrálását", és így tovább.[363]

[361] Scott, J. F.: *A history of mathematics,* London, 1958, 162: szójáték, lényegében ezt jelenti: a newtoni pontoskodást felváltotta a leibnizi deizmus.

[362] Hofmann, J. E.: *Geschichte der Mathematik, 2. Bd.,* Berlin, 1957, 62.

[363] Lényegében már Zeuthen így látta ezt (Zeuthen, H. G.: *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert,* Leipzig, 1903) s az infinitézimális számítás történetének újabb monográfusai, Toeplitz (Toeplitz, O.: *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung,* Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1949) és Boyer (Boyer, C. B.: *The history of the calculus and its conceptual development,* New York 1949) szintén ezt a felfogást követik. Utóbbi szerint pl. a Newton és Leibniz között kitört prioritásharc okát elsősorban abban kell keresni, hogy azonos elődök munkáját folytatják, ill. veszik át.

Amit Newton matematikai munkájában újnak és meglepőnek tartották, az a modern matematika-történetírás szerint elődeitől származik s ezt sem ő fejleszti tovább és juttatja diadalra, hanem Leibniz. Mit fedezett fel Newton, aki – minden matematika-történetírás ellenére – mégiscsak a modern infinitézimális matematika egyik legnagyobb jelentőségű megteremtője volt? Mit tudott a matematikából Newton?

MODERN FOGALMAK ÉS A XVII. SZÁZADI MATEMATIKA

Lássuk először mit nem tudott.

1. Nem tudta, hogy mi a függvény. Sem ő, sem kortársai nem ismerték ezt az egyszerű, számunkra oly mindennapos és nélkülözhetetlen fogalmat.[364] Nem tudta, mit jelent egy adott számhalmaz minden egyes *x* eleméhez egy másik halmaz egy vagy több *y* elemét rendelni. Nem a hozzárendelés fogalma okozta a nehézséget. A Newton korabeli matematika kiterjedten dolgozott táblázatokban kifejezett összefüggésekkel. Newton maga jelentős helyet foglal el az interpolációs módszerek fejlesztésében. Az interpoláció pedig nem egyéb, mint új számértékek adott számértékekhez bizonyos szabályok szerint történő hozzárendelése. Azt is tudta Newton, hogy az algebrai egyenletek adott számokhoz rendelnek hozzá más számokat, de sohasem jutott eszébe *általánosságban* egy adott halmaz minden egyes eleméhez egy másik halmaz egy vagy több elemét ren-

[364] A függvényfogalom XVII. századi előtörténetét jól ismerteti Whiteside, D. Th: „Patterns of Mathematical thought in the later seventeenth century", *Archive for History of Exact Sciences,* 1, 179–388, 1960. Az infinitézimális számítás fontos szerepét a függvényfogalom kialakulásában Boutroux ismerte fel (Boutroux, P.: *L'idéal scientifigue des mathématiciens,* Paris, [2]1955, 118–119.), szerinte viszont Newton semmi egyebet nem tett, mint létrehozta a „végtelen algebráját", a véges algebrának a tetszőleges pontosság figyelembevételével történő folytatását (i. m. 129.). Boutroux végeredményben az Euler-féle függvényfogalmat vetíti vissza a XVII. századba, az algebrai és nem-algebrai *függvények* megkülönböztetését keresi ott, ahol nem erről van szó, hanem végtelen „egyenletekről" és infinitézimális számításról. Vö. Szőkefalvi-Nagy Béla: *Valós függvények és függvénysorok,* Budapest, 1954, 11.: „A valós változós függvények elmélete a differentiál- és integrálszámításnak Newton és Leibniz által a XVII. században történt felfedezésével kezdődött. E számítások tárgyának: a függvénynek a fogalma együtt fejlődött az elmélettel. Descartes a század első felében a 'geometriától' még minden olyan görbét távol kívánt tartani, amely nem definiálható algebrai műveletekkel. A differentiál- és integrálszámításból megszülető matematikai analízisben azonban rendre polgárjogot nyertek az algebraiakon kívül más egyszerű függvények is, mint a logaritmus, exponenciális, trigonometrikus és arcus függvények, s ezekkel együtt minden olyan függvény is, amely belőlük ered akár közvetlenül, akár az infinitézimális számítás eszközeivel: kvadratúrákkal vagy végtelen sorok összegeként. Legalábbis ezeket tekintette pl. Euler igazi függvényeknek".

delni hozzá. Newton nem általánosítja a hozzárendelés fogalmát, s így ahol alkalmazza is ott sem szabad ebben „függvényt” látnunk. Nem szabad még az Euler-féle függvényfogalom értelmében sem, mert az Euler-féle függvényfogalom már a modern függvény szűk körben érvényes intuitív megsejtését jelenti.

2. Nem ismerte Newton a határérték fogalmát sem.[365] Több helyen beszél ugyan „eltűnő” és „megszülető” mennyiségekről, sőt ír – különösen levelezésében – minden adott értéknél kisebb eltéréssel történő megközelítésről is és kísérletet tesz a végtelen sorral nyert megközelítés esetében az elhanyagolás folytán előálló hiba megbecsülésére, de a határérték fogalmát, ami a konvergencia kritériumokkal körülbástyázottan a modern infinitézimális analízis lelkét jelenti, a határérték fogalmát nem ismeri. Újból nem azt akarjuk ezzel mondani, hogy nem *dolgozik* vele. Hiszen számos olyan feladatot old meg, amit mi a limesz-fogalom segítségével végzünk el. Szinte boszorkányos ügyességgel dolgozik végtelen sorokkal. Nyoma sincs nála Cavalieri bizonytalanságának vagy Wallis próbálgatásainak. Magabiztosan jár azon a területen, ahol előtte sötétben tapogatóztak, vagy – sokszor még James Gregory is – klasszikus módszerekkel megkerülve a problémát, indirekt bizonyítást alkalmaztak. De a határérték és a konvergencia fogalmát, azt, hogy „bármely kicsiny ε számhoz rendelhető egy N küszöbszám úgy...” – azt *nem ismeri.*

3. Nem ismerte a „folytonosság” fogalmát. Fölöslegesnek tűnik talán külön kiemelni ezt; mert mi a folytonosságot a függvényeknél vezetjük be a limesz-fogalom segítségével, de a folytonosságnak a mi mai felfogásunk szerint centrális jelentősége van a differenciálszámítás elméletében és így nem árt szem előtt, tartani, hogy ennek az elméletnek egyik megteremtője, Newton nem ismerte azt.

4. Ugyanezen okból jegyezzük meg, hogy nem ismerte a monotónia fogalmát sem.

5. Nem ismerte, még sík esetében sem, az analitikus geometriát,[366] helyesebben azt, amit ma ez alatt a kifejezés alatt értünk: a sík pontjaihoz rendelt számpárok közötti kapcsolatok vizsgálatát. Pl. az ellipszis számára nem a sík azon x, y pontjainak a helye, amelyek kielégítenek egy bizo-

[365] Lásd kötetünkben Vekerdi László: ’Infinitézimális módszerek Pascal matematikájában’ c. tanulmányát!

[366] A matematika-történetírás régen megcáfolta azt a makacsul tovább élő tévhitet, hogy Descartes „fedezte fel” az analitikus geometriát. Jól tudjuk, hogy nem ismerte a „Descartes-féle” koordinátarendszert sem. Vö. Boyer, C. B.: *History of analytic geometry,* New York. 1956.

nyos – a koordinátarendszertől függő másodfokú egyenletet. Newtonnak az ellipszis koordinátarendszertől független geometriai fogalom, kis és nagy átmérővel, fókuszokkal, érintőkkel és azoknak megfelelő átmérőkkel és ezek között a vonalak között fennálló arányokkal. Számára a geometria adekvát matematikai módszerét az arányok jelentették, nem az egyenletek. Newton sokat dolgozott egyenletekkel, de azt tartotta, hogy a két tudományt, geometriát és aritmetikát nem szabad összezavarni. Milyen gondosan ügyeltek a görögök ennek a kettőnek az elkülönítésére! S milyen sok bajt okoznak a modernek a kettő összekeverésével: elveszik a geometria „egyszerűségét és eleganciáját".

Számunkra, akik sokszor napokig töprengünk a *Principia* egy-egy „egyszerű" ellipszis-tételén, amit modern analitikus geometriai módszerekkel percek alatt megértünk, különösnek tűnhet Newton ízlése. Azonban ha a Newtoni matematikát kívánjuk megérteni, alkalmazkodni kell hozzá. A függvény, a határérték, a folytonosság, a monotonia fogalmai és a koordináta geometria nélkül kell közelednünk a Newtoni analízishez.

A XVII. SZÁZADI ANGOL MATEMATIKA NUMERIKUS TRADÍCIÓI

A XVII. századi matematika egyik legfontosabb tette az algebrai egyenletekkel kifejezhető, Descartes által „geometrikus"-nak nevezett (algebrai) és az így ki nem fejezhető „mechanikus"-nak nevezett (transzcendens) problémák közötti különbségtétel s utóbbiak lépésről lépésre történő tisztázása volt. Az angol matematika azonban sohasem tett olyan éles különbséget geometrikus és mechanikus problémák között, mint a Cartesianus. Sőt, eleinte meg sem értik a mély megkülönböztetés lényegét.

William Oughtred, I. Károly korának legnagyobb matematikusa írta pl. egy mechanikus segédeszközökkel megoldható problémával kapcsolatban: „Vonalzók és körzők nem mechanikusak-e és mégis nem minden geometrikus problémát ezekkel oldunk meg? És nem használunk-e kúpszeleteket a maguk megfelelő műszereivel és maradunk mégis a nem-mechanikus problémák körében?"[367] A mechanikus problémákat épp úgy meg kell oldani, mint a geometrikusakat, a különbség csak az, hogy előbbiekben általában nem lehet teljes pontossággal számítani, meg kell elégedni megközelítésekkel. Ilyen megközelítő számításokba ütközünk mindenütt, ahol pl. a kör kerületének, ívhosszának vagy szögeinek a mérése szükséges: az egész trigonometriában. A trigonometrikus számítások a

[367] *Correspondence of scientific men of the seventeenth century. Ed. by* Stephen Peter Rigaud, 2 vols., Oxford, 1841. (Továbbiakban *Corr. Rigaud*) *I, 22,* Oughtred to Price Junii 6°. 1642, 60–63, 61.

XVI. és XVII. század során igen nagy jelentőségűekké váltak a geográfia és a hajózás fejlődése miatt, azért megkönnyítésükre nagy táblázatokat állítottak össze, s a sok számjegyű, megközelítő számokkal oly nehéz szorzás megkerülésére vezették be a logaritmust. Oughtred főműve, a *Clavis Mathematica* ezeknek a trigonometriai megközelítő számításoknak az ismertetését tartalmazza. Az angol matematika a gyakorlati számolás felől indulva nem látta olyan nagynak a különbséget geometriai és mechanikai problémák között, mint az elméleti megoldásokra törekvő Cartesianus. Angliában erős számolótradíció él a XVII. század elején, amely a kiszámíthatóságra helyezi a súlyt a matematikai problémákban, nem az elvi különbségekre.

Descartes geometriájához képest szinte gyerekesen hat ez a számolós angol matematika. Íme idézet egy egykorú levélből: „*A, E,* és *I* így okoskodtak: *A* azt mondotta, hogy ha 480 fonttal több pénzem lenne mint amennyi van, akkor annyi lenne, mint amennyi *E*-nek és *I*-nek van együtt; *E* azt mondotta: 480 fontot adva a pénzemhez, kétszer annyi lenne, mint *A* és *I*-nek; *I* azt mondotta: 480 fontot adva a pénzemhez, háromszor annyim lenne mint *A* és *E*-nek együtt...” Ezt és két hasonló kérdést Oughtredhez, kora legnagyobb angol matematikusához intézte a levélíró és hozzáfűzte: „Uram, tudom, hogy ön meg tud felelni a kérdésekre, vagy ha nem, úgy senki emberfia; mert nincs élő ember, aki többet tudna matematikából, mint ön...”[368]

Egyenletek felállítása, transzformálása valamilyen ismert alakra, a gyökök – szükség esetén táblázatok segítségével történő – pontos vagy közelítő kiszámítása a XVII. század közepén az angol matematika centrális problémaköre. Egyenletek és sohasem függvények. Ismeretlenekről van bennük szó, nem változókról, ismeretlenekről, amiket ki kell számolni vagy egyszerű aritmetikai műveletek, vagy ha ez nem lehetséges, táblázatok segítségével. Ehhez az egyenleteket különféle ügyeskedésekkel már ismert formára kell hozni, transzformálni kell. Az algebra ebben a felfogásban közönséges számolás, csupán a számok helyett betűkkel dolgozik. Amint Newton alapvető algebrai művében, az *Arithmetica universalis*-ban megfogalmazza, csupán annyiban különbözik a számokkal történő számolástól, hogy meghatározatlan jelekkel dolgozik az adott számok helyett.[369] Az egyenletekben az ismeretlent vagy ismeretleneket meghatározott számok helyett ezekkel az indefinit jelekkel kell kapcsolatba hozni.

[368] *Corr. Rigaud I, 35,* R. Shuttleworth to Oughtred 22. Jan. 1656, 88–90.

[369] Arithmetica universalis sive de compositione et resolutione arithmetica auctore Is. Newton, Eg. Aur. Cum commentario Johannis Castillionei Amstelodami 1761, 1. – Az Arithmetica universalis orosz fordítását kitűnő jegyzetekkel és kísérő tanulmánnyal adta ki A. P. Juskevics. (Iszaak N’juton,Vszeobscsaja arifmetika ili i kniga ob arifmeticseszkih szinteze i analize. Perevod, sztat’ja i kommentarii A. P. Juskevicsa. Moszkva 1948.) A következőkben ezt a két kiadást használjuk és Castill, ill. Juskevics jelzéssel idézzük.

Az egyenletek megoldása az ismeretleneknek ezen meghatározatlan jelek általi kifejezéséből áll s éppen ezért, mert jelekkel dolgozik, a megoldás általános érvényű: az algebra ilyen értelemben véve univerzális tudomány, amelyik tételekre vezet.[370] Ezek a tételek az egyenletek megoldására vonatkoznak. Az algebra Newton felfogásában az algebrai egyenletek megoldásának a tudományát jelenti. Olyan problémák oldhatók meg a segítségével, amiket egyenletekbe lehet önteni. De nem minden probléma fordítható le algebrai nyelvre már a geometriában sem, még kevésbé a mechanikában és a csillagászatban. Az algebra Newton szemében korlátolt tudomány. Csak előkészítője egy általánosabb, minden – vagy legalábbis minden *fontos* – probléma kezelésére alkalmas tudománynak, az analízisnek. A probléma megoldása azonban az analízisben is éppen úgy, mint az algebrában, *a kiszámítás.* Newton művei, még a legelvontabb matematikai munkái is, számolási szkémákkal vannak tele. Newton matematikájának egyik alapvető vonása a számolási könnyedség, a számolás szkematizálására való törekvés. Ebben teljesen az angol matematikai tradíció folytatója. Descartes univerzális módszert keresett a matematikában, Newton számolási szkémákát.

ALGEBRA ÉS INFINITÉZIMÁLIS ANALÍZIS

Az algebrát Newton az infinitézimális analízis bevezetésének tekintette. Ebből a szempontból nagyon fontos az *Arithmetica universalis* egyik fejezete,[371] amelyben Newton az egyenletek „határainak” (limites) a kiszámítását tárgyalja. Egy egyenlet határain azt a két számot értették, amelyek közé az egyenlet gyökei esnek. Newton úgy jár el a megkeresésükben, hogy lépésenként „redukálja” az egyenletet addig, amíg az az ismeretlent már csak első hatványon tartalmazza. Az egyenletek redukált sorába egymásután az 1, 2, ..., ill. –1, –2, ... értékeket helyettesíti be. Az a szám, amelynek a behelyettesítésére a redukált egyenletek mindegyike azonos előjelű eredményt ad a határ, ennél nincs az egyenletnek nagyobb pozitív vagy negatív gyöke.

Az eljárás lelke, a redukció nem Newton felfedezése. A holland Cartesianusok, elsősorban J. Hudde dolgozták ki. Az egyenletek redukciója a XVII. század hatvanas éveiben a matematikai kutatás egyik centrális kérdése volt. „Amit ön az algebra nagy kívánalmának tart – írja 1670-ben James Gregory Collinsnak – és Slusiustól vagy Ricciotól várja a megoldását, azt én könnyen megoldom (megbízható módon) általános érvénnyel így: legyen

[370] *Juskevics* ... 7.
[371] Caput IV.

$$x^5 - ax^4 - b^2x^3 + c^3x^2 - d^4x = N^5,$$

szorozzuk meg minden tagját saját kitevőjével, az így előálló egyenlet

$$5x^5 - 4ax^4 - 3b^2x^3 + 2c^3x^2 - d^4x = 0,$$

vagy

$$5x^4 - 4ax^3 - 3b^2x^2 + 2c^3x - d^4 = 0,$$

amely második egyenletnek bármely gyökét behelyettesítve az első egyenletbe x helyébe, az eredő mennyiség az az érték, amelyen túl (ha N^5-t nagyobbnak vesszük, mint az eredő mennyiség) az első egyenlet két gyökének lehetséges voltát veszíti el...”[372] A bizonyítást nem közli, az „túl fáradságos” – írja – „és felteszem, hogy kipróbálhatja anélkül is”[373] – fűzi hozzá.

A XVII. században nagy divat volt formulák közlése azok bizonyítása nélkül. Kézről kézre jártak a nagy matematikusok képletei és eljárásai, számpéldák tömegére alkalmazták matematikus és amateur tisztelőik – a kettő között a XVII. században nem volt olyan nagy szakadék, mint ma – s éppen ezek a példák okozták, hogy a műveltek kis köre lassan szinte átitatódott – ha sokszor csak felületesen is – matematikával.

A XVII. század matematikájában nagyon fontos szerepet játszottak az egyenletek, s a Hudde-féle módszertől azok néhány fontos tulajdonságának a megismerését várták. Elsősorban pl. azt, hogy milyen szélsőértékekkel rendelkezik egy adott egyenlet? Gregory 1672-ben hosszú levélben[374] magyarázta meg Collinsnak, hogyan kell használni a redukciós módszert az egyenletek maximum-minimumának a meghatározására. Az egyenletnek ott van szélsőértéke, ahol azt a redukált egyenlet gyökei mutatják. A maximum, ill. a minimum értékét pedig úgy kapjuk meg, hogy a redukált egyenlet gyökeit behelyettesítjük az eredeti egyenletbe.

Ez az egyszerű szabály, amit ma minden első éves matematikus azonnal helyére tesz, a XVII. század legnagyobb matematikusainak okozott súlyos fejtörőt. Tudták, hogy a szabály valamiképpen összefügg a görbéhez vont érintő meghatározásával. Tudták, hogy a redukált egyenletből a görbe sok más fontos tulajdonságára is lehet következtetni a szélsőértéken kívül. Pl. tudták azt, hogyha adva van két görbe metszését kifejező egyenlet, akkor a két görbe metszéspontjainak megfelelő összeeső gyököket a Hudde-féle redukcióval lehet meghatározni. Nem hiába nevezte Collins az egyenletek redukcióját az „algebra nagy desideratumának”.

Maga Newton már 1664-ben kimutatta egy megfelelőképpen felállított egyenlet Hudde-féle redukciójának a segítségével, hogy a kvadratúra

[372] *The Correspondence of Isaac Newton* (továbbiakban *Corr.)* Vol. I. 1661–1675. *Ed. by* H. W. Turnbull, Cambridge, 1959, 20, Gregory to Collins 23 Nov. 1670, 45–49, 45.

[373] Uo. 46.

[374] *Corr. Rigaud* II, 206, J. Gregory to Collins 14 Febr. 1672, 232–237.

és érintőszerkesztés összetartozó műveletek, sőt, ismerte már az összetartozás jellegét is: egy adott görbéhez érintőt szerkeszteni annyit jelent, mint meghatározni egy másik, alkalmasan felvett görbe alatti területet és megfordítva.[375]

Később ez a tétel lett az infinitézimális számítás ún. „fundamentalis tétele", s e miatt a tétel miatt lett Barrow – aki hat évvel Newton kézirata után feltehetően először közölte azt nyomtatásban – az infinitézimális számítás egyik „felfedezője".

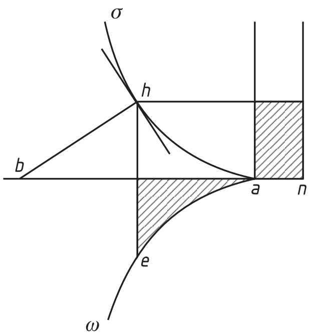
Azonban a XVII. század közepén, amikor nem ismerték a „primitív függvény" és a „derivált függvény" fogalmát – hiszen nem ismerték még a „függvény" fogalmát sem – akkor ennek a tételnek nem tulajdonítottak olyan nagy jelentőséget, mint ma. Az egyenletek redukciójának, annak igen. *Az* volt a „nagy desideratum" – ahogy Collins nevezi – nem a „Fundamentalsatz". A fundamentális tétel csak azután vált az infinitézimális számítás alaptételévé, miután kezdtek függvényekben gondolkozni a matematikusok, s a tétel csak számukra mondja majd a „primitív függvény" és a „derivált függvény" inverz voltát. A végeredmény ugyanaz, de a sorrend különböző, s történeti szempontból ez nem közömbös. Mi a függvény felől haladunk a differenciálás és integrálás művelete felé, a fejlődés útja azonban fordított volt. Előbb tudtak differenciálni és integrálni, mint azt megmondani, hogy mi a „függvény". A függvény fogalom megszületéséhez az egyik legfontosabb impulzust éppen az infinitézimális módszer kialakulása és gyors fejlődése szolgáltatta. A XVII. század nem függvényekben, hanem *egyenletekben* gondolkozott. Véges (algebrai) vagy végtelen sok tagú (transzcendens) egyenletekben, s az egyenletek tették a XVII. század matematikusai számára lehetővé a kvadratúra és az érintőszerkesztés közötti összefüggés definiálását.

„MÓDSZER KVADRÁLHATÓ GÖRBE VONALAK KVADRÁLÁSÁRA"

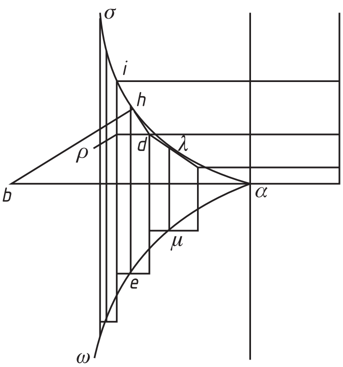
Az elv egyszerű: ha adva van két görbe úgy, hogy az egyik érintőjének az adatai határozzák meg a másik görbe alatti területet, akkor ez a terület mérhető, kvadrálható. Az érintő adatainak a meghatározása Descartes nyomán történt. Newton is Descartes módszerét alkalmazza 1664-es, az infinitézimális számítás „alaptételét" kimondó kéziratában: egy körrel metszi a görbét, amihez érintőt kell vonni, s azután egybeejti a két metszéspontot. Ekkor a kör és így ebben a pontban vont érintője is érinti a görbét. A metszéspontok egybeesését a kör és a görbe metszését kifejező egyenlet két gyökének az egybeesése adja meg. Ezáltal megkapja az érin-

[375] *Corr.* II, 190, A mannuscript by Newton (?1664), 164–167.

tőre merőleges egyenesnek, az érintő normálisának az adatait. Így megszerkesztve egy σha görbe minden h pontjában az érintőt, s az érintőt definiáló bgh normális háromszög $\frac{bg}{gh}$ oldalarányának tetszőleges an-szerését véve egy másik $ae\omega$ görbe $ge = an\frac{bg}{gh}$ ordinátáinak, ez alatt a másik görbe alatti terület egyenlő lesz a tetszőleges an távolság és a görbe h pontjához tartózó gh ordináta szorzatával.



48. ábra



49. ábra

A bizonyítás nagyon egyszerű: Newton az érintősokszöggel helyettesíti a σha görbét és az érintősokszög d, i, ... csúcsaiból az ab egyenesre bocsátott merőlegesekkel kis téglalapokra osztja be az $ae\omega$ görbe alatti területet, s azután a sokszög oldalait egyre kisebbnek véve, a téglalapbeosztás összege egyre jobban megközelíti az $ae\omega$ görbe alatti terület értékét. A sokszög h pontjában – a σha görbe egy tetszőlegesen felvett pontja – azonban a $d\rho i$ háromszögből megadott $\frac{i\rho}{\rho d}$ érintőarány a beosztás finomítása közben is állandó marad. Ugyanis bármely határon túl csökken is az érintősokszög di oldala, a $d\rho i$ háromszög $d\rho$ és $i\rho$ oldalai mindig merőlegesek maradnak a bgh háromszög gh és bg oldalaira s így az érintő hajlását megadó $\frac{i\rho}{\rho d}$ arány mindig azonos marad s egyenlő a bgh normális háromszög állandó $\frac{bg}{gh}$ oldalarányával.

Mindezt nem mondja el ilyen részletesen Newton. Az eljárás, az érintő és a normális háromszögeknek ez a viselkedése, valamint a téglalapbeosztás finomításával történő területmeghatározás a XVII. század közepén már közismert. Közismert a hatvanas években az érintőszerkesztés és a kvadratúra közötti ilyen összefüggés is. A kor matematikusainak a leveleiben nagyon gyakran fordulnak elő ezt az összefüggést jelölő diagramok sokszor minden utalás nélkül. James Gregory 1668-ban nyomtatásban is közölte. Az elv már egy évtizeddel azelőtt megjelent egyébként nyomtatásban Franciaországban, Pascal alkalmazta a szinuszgörbe alatti terület meghatározására.[376]

Mint ismeretes, utóbbi vezette Leibnizet a „karakterisztikus háromszög" fogalmára. Az egész fogalomkör, amiből az infinitézimális számítás algoritmusa konkretizálódik, távolról sem új már a XVII. század közepén. „Karakterisztikus háromszög" és az érintőszerkesztés-kvadratúra közötti összefüggés – amiket Leibniz és Barrow nagy felfedezéseiként tart számon a történetírás – pl. már valószínűleg mint közismert anyag kerül egy 21 éves Cambridge-i diák, Isaac Newton Descartes-ból készített jegyzetei közé.

Nem az infinitézimális számítás geometriai alkalmazása, nem az érintőszerkesztés és kvadratúra közötti összefüggés felismerése az új ezekben a jegyzetekben. Még csak nem is az, hogy egyenletekbe önt egy geometriai problémát. Ezt Descartes-ból veszi, úgyannyira, hogy átveszi még a betű jelöléseit is. Az az eljárás sem új, ahogyan a probléma egyenletéből megkapja az érintési feltételt s így az *aeω* görbe *ge* ordinátáit. Ez az eljárás nem egyéb, mint a Hudde-féle redukció. „A kifejezésnek két egyenlő gyöke van és ezért megszorozzuk a Hudde-féle módszer szerint" – írja Newton.

Kis túlzással azt lehetne mondani, hogy ebben az 1664-es Newton kéziratban egyedül a cím az új: „Módszer kvadrálható görbe vonalak kvadrálására". Nem minden görbe vonal kvadrálására, hanem csak az olyan görbe vonalakéra, amik kvadrálhatók. Newton már 21 éves korában is Newton: a definíciók, a pontos meghatározás, az axiomatizálás mestere. A többiek, nem csak Collins, hanem még az olyan nagyon nagy matematikusok is, mint James Gregory, egyre-másra használják a „minden", az „általános" az „univerzális", jelzőket módszereikre. Newton igyekszik pontosan fogalmazni: „amik kvadrálhatók". Melyek azok a görbék, amelyek kvadrálhatók? Az 1664-es kézirat világosan felel erre: Olyan görbék, amelyeknek a területét egy másik görbe *érintősajátságai* adják meg. A kézirat két példát hoz fel, egy x^3/a egyenletű parabolát és egy a^3/x egyenletű hiperbolát. Ezeket az egyenleteket kombinálva a metsző kör egyenletével, a Hudde-féle redukcióval azonnal megkapjuk az érintési feltételt, az új, kvadrálható görbe egyenletét. Az x^3/a egyenletű

[376] *Traité des sinus du quart de cercle. = Oeuvres completes de Pascal, édition Pléiade. Texte établ eti annoté par* Jaques Chevalier. Paris 1954. 275–282, 275–277.

parabola esetében $ge = \frac{3xx}{a}$ lesz az új görbe egyenlete, az a^3/x hiperbola esetében pedig $ge = \frac{a^3}{xx}$. A $\frac{3xx}{a}$ görbe alatti területet $\frac{x^3}{a}$, az $\frac{a^3}{xx}$ alatti területet $\frac{a^3}{x}$ adja meg. A görbék kvadrálhatók, mert úgy vettük fel, hogy azok legyenek. A feltétel – ismételjük meg – az volt, hogy a kvadrálható görbe egyenletét egy másik görbe érintőjének az adatai szabják meg.

A megoldás, ha a kvadráltató görbe egyenlet, mint a fenti két példában, hatvány, nagyon egyszerű. Ha $\frac{3axx}{b}$ a görbe egyenlete, ahol a és b állandók, akkor a görbe alatti terület $\frac{ax^3}{b}$. Ha általánosságban $\frac{ax^m}{b}$ a kvadrálható görbe egyenlete, a terület $\frac{ax^{m+1}}{(m+1)b}$ lesz. Nem szükséges egész számokhoz ragaszkodni a kitevőben, lehet a kitevő bármilyen tört. És ha a kvadrálható görbe egyenlete nem egytagú, hanem hatványok összegéből vagy különbségéből áll, akkor a kvadratúra képlete tagonként alkalmazható. Ha pedig a görbe egyenlete nem hatványok összegéből álló kifejezés, akkor meg kell kísérelni ilyenné alakítani. Hogyan? Egyszerűen úgy, hogy elvégezzük a kijelölt műveleteket. *Számolni* kell az algebrai jelekkel, mintha csak közönséges számok lennének. „Ha $a + b = \frac{1}{a+b}$ – írja Newton 1665-ben –, elosztom 1-et $(a + b)$-vel úgy, mintha tizedes törtek lennének és az

$$\frac{1}{a} - \frac{b}{aa} + \frac{bb}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} \,\&\, c,$$

hányadost kapom, ami kitűnik abból is, ha mindkét részt (kifejezést) megszorzom $(a + b)$-vel. Ugyanígy vonom ki a gyököt $(a^2 + b)$-ből, mintha tizedestörtek lennének és azt találom, hogy

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a} - \frac{bb}{8a^3} + \frac{b^3}{16a^5} \,\&\, c,$$

ami kitűnik, ha mindkét részt négyzetre emelem."[377]

Ugyanebben a kéziratában kimutatja azt is, hogyan adható meg m/n tetszőleges értéke esetében hatványok végtelen sorával egy $\overline{a+b}\}^{\frac{m}{n}}$ alakú kifejezés:

[377] *Corr.* II, 191. A mannuscript by Newton (?1665), 168–171, 170. A négyzetet a Newton korabeli matematika a betű megduplázásával jelöli, a harmadik hatványt már az általunk is használt módon. &*c* jel a mi +... jelünk megfelelője.

$$\overline{a+b}\big\}^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}\cdot\frac{b}{a}\cdot a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}\cdot\frac{m-n}{2n}\cdot\frac{bb}{aa}\cdot a^{\frac{m}{n}} +$$

$$+\frac{m}{n}\cdot\frac{m-n}{2n}\cdot\frac{m-2n}{3n}\cdot\frac{b^3}{a^3}\cdot a^{\frac{m}{n}}\,\&c$$

Az „új" itt sem a tételben van. Már Pascal használta a binomok kifejtésére az aritmetikai háromszöget és már arab szerzőnél is előfordul a „binomiális tétel". De csak *egész* kitevők esetében. Newtonnál azonban m/n tetszőleges lehet, pl. 1/2, és akkor a sor éppen $a + b$ négyzetgyökét adja meg. Kifejthető pl. ennek a sornak a segítségével $1–xx$, az egység sugarú kör egyenlete, s az x hatványainak az összegéből álló kifejtett alakban tagonként végezhető el a kvadratúra. Közvetlen módszerrel egyszerűen megoldható a kör területének a kiszámítása, a közvetett és körülményes eudoxoszi és a pontatlan és nem egészen megalapozott indivizibilia módszer nélkül.

Így a bonyolultabb kifejezéseket sokszor kvadrálható alakra lehet hozni, ha elvégezzük rajtuk a kijelölt műveleteket, „mintha csak tizedes törtek lennének". S ha az eredmény végtelen sor lesz, attól éppen úgy nem kell megijedni, mint ha pl. egy osztás vagy gyökvonás végtelen tizedes törtre vezet.

Az „infinitézimális számítást" már régen nem kellett felfedezni a XVII. század hatvanas éveiben. Descartes, Pascal, Fermat, Cavalieri, Torricelli, Ricci, Hudde és Sluse munkái után már nem volt erre szükség. De azt a tényt, hogy a végtelen hatványsorba fejthető kifejezések állítják elő a „kvadrálható görbéket", azt fel kellett fedezni. Ezt nem tudták a többiek, csak Newton és James Gregory.

A két angol a hatvanas évek második felében egymástól függetlenül csaknem ugyanarra a nagy felfedezésre jutott. Függetlenül? Személy szerint kétségkívül igen. De nem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy mindketten az angol matematikai tradíciónak megfelelően, konkrét számoláshoz szokott szemmel olvasták – a Cartesianus „geometriai algebrát" (ahogyan Descartes módszerét nevezhetnénk valamivel találóbban a mindenképpen anakronisztikus analitikus geometria helyett).

Mindketten kétségkívül jól ismerték a Cartesianus matematikát. James Gregory nem egyszer nyíltan is kifejezi Descartes iránti hódolatát.[378] Newton sokkal tartózkodóbb volt ebben a tekintetben. Descartes-ból indultak ki, de a végtelen sorok segítségével átlépték a Descartes által vont szigorú határvonalat a „geometriai" (algebrai) és „mechanikus" (transzcendens) problémák között. Azt a határvonalat, amit „Levelezése" ragyogó matematikájában maga Descartes is nem egyszer átlépett, s ami ellen

[378] *Corr. Rigaud* II, 220, J. Gregory to Collins 20 Aug. 1675, 269–272, 269.

– ha helytelen alapokon is – az angol matematika már Oughtred óta lázadt. De csak Gregory és Newton dolgozták ki, a végtelen sok tagú egyenletekkel való *számolás* segítségével a két nagy területet egységesítő *analízis* alapjait.

„ANALÍZIS VÉGTELEN SOK TAGÚ EGYENLETEKKEL...”

A XVII. század hatvanas éveinek végén, hetvenes éveinek elején egymással versengve küldik Newton és Gregory Collinsnak szebbnél szebb sorbafejtéseiket. Nagy figyelemmel kísérik egymás munkáját. „Nagyon szeretném megismerni – írja Gregory 1670. nov. 23-án Collinsnak – Mr. Newton módszerét a kéttagú egyenletek végtelen sorrá való alakításáról, amely formában logaritmusokkal megoldhatók: én bármely egyenletet át tudok alakítani végtelen sorrá, de nekem a logaritmusok semmit sem segítenek, mert az én soraimban nincs semmi *in ratione continua* (folytonos arányban). Van egy módszerem, amellyel nem-geometrikus problémákat (legalábbis amiket eddig tárgyaltam) végtelen sorba tudok átalakítani. ... Azt hiszem, hogy azok a sorok, amiket mellékelten küldök, némi hasonlóságot mutatnak azokhoz, amikről értesített, hogy Mr. Newton és Mr. Mercator felfedeztek: ezért volt, hogy oly gyakran kértem Önt, közölje velem az ő felfedéseiket.”[379]

Gregory tudta, hogy egy sorban jár Newtonnal. Még egy hónap sem telt el, s már újra ír Collinsnak: „Legutóbbi levelemben – írja – nem vettem észre, hogy Mr. Newton sora körcikkre (amit Ön régen küldött volt nekem) hasonló sorok sokaságával együtt következménye annak, amit én a logaritmusokra vonatkozóan küldöttem Önnek, *viz. Dato logarithmo invenire ejus numerum vel radicem potestatís cujuscumque purae in infinitam seriem permutare* (adott logaritmusból megkeresni a numerust vagy hatvány tetszőleges gyökét végtelen sorrá alakítani)”.[380]

Gregory a hatvanas évek legvégén ugyanott tart, ahol Newton. Felfedezte, hogy végtelen hatványsorba fejtett kifejezések tagonkénti kvadrálásával vagy redukálásával olyan kifejezések kvadrálhatók vagy redukálhatók, olyan kifejezésekkel megadott görbékhez szerkeszthető érintő, számítható súlypont, olyan egyenletek gyöke kereshető meg, amelyeknek zárt, kifejtetlen formáival szemben tehetetlenül áll a matematika. Amelyekkel szemben eddig legfeljebb egyes kivételes esetekben, fáradságos egyszeri módszerekkel értek el valamilyen eredményt. Általános módszerről eddig szó sem lehetett. Most a végtelen sorba való átalakítás és a hatványok kvadrálásának – redukálásának az összekapcsolásával olyan ál-

[379] *Corr.* I, 20, Gregory to Collins 23 Nov. 1670, 45–49, 47.
[380] *Corr.* I, 21, Gregory to Collins 19 Dec. 1670, 49–52, 49–50.

talános módszerhez jutottak, amely előtt nem állanak többé hozzáférhetetlenként az általános kezeléssel szemben eddig dacoló „mechanikus" problémák.

Azok a kifejezések, amelyeket addig táblázatokban összefoglalva, a gyakorlati számolás segédeszközeinek tekintettek: szögfüggvények és a hozzájuk tartozó körívek, a kamatos kamat táblázatok, a körív hosszát és a körcikk területét megadó táblázatok most mind elméleti megalapozottságot nyertek és sok közülük egymásból levezethetővé vált. A táblázatok adathalmazai mögött Gregory és Newton munkái nyomán kezdett felderengeni az *összefüggés.*

Azok a problémák, amelyeknek a megoldására eddig „mechanikus" eszközöket, ill. körző-vonalzó segítségével meg nem szerkeszthető görbéket kellett igénybe venni és táblázatokat szerkeszteni gyakorlati megoldásukra, mint pl. a szögharmadolás, szögötödelés, szöghetedelés..., ill. a nekik megfelelő négyzetgyök, negyedik gyök, hatodik gyök ... vonás; a különféle spirálisok, conchoid, ciklois ívhossz és szegmentum területmeghatározásai; a kör ívhossza és kvadratúrája ... egyszóval mindaz a hatalmas terület, amit Descartes mint „mechanikus" problémákat megpróbált távol tartani a geometria „tiszta" épületétől, a zárt algebrai alakban meg nem adható problémák egyre növő világa a végtelen sorok módszerével egyszerre bebocsátást nyert a „törvényes" matematika keretei közé.

Newton már hosszú évek óta dolgozott ezen a módszeren, amikor Gregory értesült róla. A nemes skót azonnal elismeri prioritását: közli Collins-szal, hogy addig semmit nem publikál ide vonatkozó kutatásaiból, amíg Newton műve meg nem jelenik.[381]

Várhatott volna Gregory, amíg Newton infinitézimális módszere napvilágot lát. A módszert előszónak szánta egy holland szerző, Kinckhuysen algebrájának tervezett angol kiadásához. A könyv sohasem jelent meg, a módszer rövid összefoglalását Newton 1669-ben elküldte Collinsnak. Ez a híres levél, a *De Analysi per Æquationes Numero Terminorum Infinitas*[382] a kvadratúra alaptételének a szabályokba foglalásával kezdődik. Az I. szabály a tetszőleges kitevőjű hatvány kvadrálási szabályát adja meg, a már ismertetett módon. A II. a „tagonkénti integrálhatóságot" mondja ki, s azután adja meg a számunkra jelen összefüggésben legfontosabb III. szabályt:

„Ha maga y értéke vagy annak valamely tagja a fentieknél összetettebb, egyszerűbb kifejezésekre kell visszavezetni; ugyanúgy dolgozva a betűkkel, mint ahogy az aritmetikában végzik a tizedes törtekkel az osz-

[381] *Corr.* I, 25. Collins to Newton 5 July. 1671, 65–67.

[382] = Isaaci Newtoni *Equitis aurati opuscula mathematica, philosophica, et philologica. Collegit partimque latine vertit ac recensuit* Joh. Castillioneus. I–III. Lausannae & Genevae 1744. I, 1–28.

tást, gyökvonást vagy többtagú egyenletek megoldását; és ezekből a kifejezésekből a keresett görbe alatti területet a fenti szabályok alkalmazásával azonnal megkapjuk."[383]

Példaként az $\frac{aa}{b+x}=y$ hiperbola és a $\sqrt{aa-xx}=y$ kör esetében végzi el az osztást és gyökvonást, mintha közönséges számok lennének a betűk, s a kapott végtelen sorokra alkalmazva a II. és I. szabályt, azonnal megkapja – egy másik végtelen sor formájában – a hiperbola, ill. kör területét.

Harmadik példaként[384] egy harmadfokú egyenlet

$$y^3-2y-5=0$$

megoldását mutatja be. Ez a példa nagyon jellemző Newton matematikai gondolkozására. Úgy jár el, hogy felvesz egy olyan számot, amely saját értékének 1/10-ével kevesebbel tér el a keresett számtól. Jelen esetben ez pl. 2. Azután $2+p$ értéket helyettesít be az egyenletbe y helyébe és az így előálló

$$p^3+6p^2+10p-1=0$$

egyenlet p gyökének a kiszámításában elhanyagolja p elsőnél magasabb hatványait. Így a $10p-1=0$ egyenletből $p=0{,}1$-et kap első közelítésként p-re. Most $0{,}1+q$ értéket helyettesít a p egyenletében p helyébe s a kapott

$$q^3+6{,}3q^2+11{,}23q+0{,}061=0$$

egyenletben a q elsőnél magasabb hatványait újból elhanyagolva kiszámítja $11{,}23q+0{,}061=0$ egyenletből q-t. Az eljárást tetszés szerint folytatva, a részleteredmények összegezésével tetszés szerinti pontossággal megkapja a keresett gyököt: 2,094551...

A számpélda azonban csak arra való Newtonnak, hogy annak a mintájára járjon el általános esetben is. Áttéve a fenti eljárás lépéseit betűkbe, pl. az

$$y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$$

egyenlet gyökét

$$y=a-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}\,\&c$$

alakban kapja meg, amiből az I. és II. szabály alkalmazásával azonnal megadja az y görbe alatti területet:

383 Uo. 7.
384 Uo. 10–11.

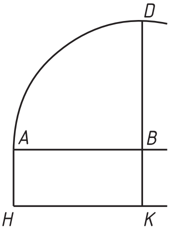
$$ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \&c$$

Azután tárgyalja a módszer alkalmazásait „geometrikus", majd „mechanikus" görbék esetében. A két eset semmiféle elvi különbséget nem jelent a módszer alkalmazása szempontjából. „Semmi olyanról nem tudok – írja – amire ez a módszer valamilyen formájában ne lenne kiterjeszthető. Sőt, ennek a. segítségével érintők húzhatók mechanikus görbékhez (akkor is, mikor másképpen nem lehet) és amit a közönséges analízis véges, állandó számú tagból álló egyenletekkel elvégez (amikor az lehetséges), ez végtelen egyenletekkel mindig teljesíti: úgyhogy ne kételkedjünk abban, hogy ezt is megilleti az analízis elnevezés (értsd: algebra). A számítások ugyanis ebben semmivel sem kevésbé biztosak, mint amabban, sem az egyenletek nem kevésbé egzaktak; mi, véges értelmű emberek nem tudjuk jelölni minden tagjukat és így felfogni sem, de mint megkövetelt mennyiségeket (quantitates desiseratas) egzakt módon felismerjük: ugyanúgy, mint ahogy véges egyenletek irracionális gyökeit sem vagyunk képesek sem számokkal, sem bármely analitikus módon úgy kifejezni, hogy az maradék nélkül, pontosan állíttassék elő valamely mennyiséggel."[385]

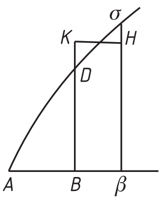
A dolgozat elején megadott I. szabály bizonyítását Newton a munka legvégén közli. A matematikatörténet-írás elsősorban ezt szokta kiemelni a *De Analysi* ... gazdag gondolatvilágából, mert a kifejlett differenciálszámítás felől nézve a differenciálhányados képzésének primitívebb formáját ismeri fel benne.[386] Valójában pedig ez a mű legkevésbé eredeti része, az itáliai iskola és Barrow mozgásgeometriai megfontolásainak a körében marad. A módszer egy geometrikus eljárás általánosítása. Úgy határozza meg az *AD* görbe alatti *ABD* területet, hogy a görbét a *BD* ordináta „egyenletes mozgásából" származtatja és a változó *BD* „momentummal" történő „növekvést" egy állandó *KB* egységnyi momentummal történő növekvéssel hasonlítja össze. A változó *BD* momentum által kisepert *ABD* terület így az állandó, egységnyi *KB* momentum által leírt *AHKB* területtel mérhető.[387]

Ezt a megfontolást viszi át algebrai formába és bizonyítja segítségével a mű elején megadott hatvány-integrálási szabályt. A *BD* momentumot egy kis *BKHβ* négyszöggel helyettesíti – mintegy „széthúzza" erre a négyszögre – és ezzel a kis négyszöggel megnövelt területet helyettesíti az

[385] Uo. 24–25.
[386] Pl. Child, J. M.: „Newton and the art of discovery". = *Isaac Newton 1642–1727. A memorial volume ed. by* W. J. Greenstreet. London 1927, 117–129.
[387] *De Analysi* ... 19.



50. ábra



51. ábra

ABD területet kifejező egyenletbe. Ugyanakkor az *AB* helyébe a *Bβ*-val megnövelt értéket teszi be, az egyenletet rendezi, egyszerűsít, azután *Bβ-t* zérussal teszi egyenlővé és minden tagot elhagy, amiben előfordul.[388]

Ez a bizonyítás nem egyéb, mint a mozgásgeometriai területszámítás megfejelve Fermat érintőszerkesztési módszerével. Ennek megfelelően ugyanazok a kritikák hozhatók fel ellene, amiket a kortárs-matematikusok Descartes-tól kezdve oly gyakran s annyi joggal szegeztek szembe az új infinitézimális matematikával. Azokkal a bizonytalanságokkal terhelt ez a bizonyítás, amik miatt a XVII. század egyik legnagyobb matematikusa, Huygens, sohasem fogadta el az új módszereket.

A *De Analysi...*-ben különös fordulattal állunk szemben. Ami addig „érthetetlen" volt, a „mechanikus" problémák megoldása a végtelen egyenletek segítségével fogalmilag tisztázottá, gyakorlatilag tetszőleges pontossággal kiszámíthatóvá vált.

Ami addig egyszerűnek látszott, a közönséges algebrai egyenletekkel leírható „geometrikus" görbék kvadrálása viszont visszasüllyedt a descartesi tisztaságból a század jól-rosszul megfogalmazott infinitézimális módszereinek a zűrzavarába.

A FOLYTONOS FOLYÁS MATEMATIKÁJA: A FLUXIOSZÁMÍTÁS

A mi számunkra, akik a folytonos függvények ismeretében közeledünk a differenciálhatóság fogalma felé, ez a bizonyítás jobbnak látszik, mint amilyen valójában. Ne unjuk meg ismételni, hogy a XVII. század nem ismerte a függvények és a folytonosság fogalmát, de annál inkább az egyenleteket és a „matematikai" mozgást. Nem ismerte a differenciálhányadost, de tudta, hogy az érintőszámítás, maximum-minimum feladatok, egyenletek redukciója közös módszeren alapulnak. Tudta azt is, hogy ez a módszer speciális összefüggésben áll a kvadratúrával. A hatvanas évek-

[388] Uo. 27–28.

ben Newton és Gregory felfedezték, hogy ha az algebrai jelekkel ugyanúgy számolunk, mint a közönséges számokkal és ha a közönséges egyenletek helyett „végtelen egyenleteket” alkalmazunk, akkor semmi elvi különbség nincs az alkalmazott módszerek szempontjából a „geometrikus” és a „mechanikus”, nem-algebrai problémák között. A végtelen sorokkal történő analízis egységes nagy módszer, ez a módszer a matematikában. Ezért mondotta Newton, a nagy algebrista a „véges” algebráról, hogy az „kontárok matematikája.”

De hiányzott még az új analízis elméleti megalapozása. Annak a megadása, miféle mennyiségekre érvényesek a használt új módszerek.

A görög matematika az eudoxoszi arányelméletben találta meg a maga módszereinek ilyen jellegű megalapozását, a XIX. századi matematika a valós számok Dedekind-féle elméletében és a Cantor-féle halmazelméletben. A XVII. századi matematika a Newtoni fluxioszámításban.

A fluxioszámítás ebből a szempontból az egész XVI–XVII. századi matematikai fejlődés csúcsa. A fluxioelmélet definiálja azt a matematikai mennyiségfogalmat, amelyikre a XVII. század infinitézimális módszerei a legjobban illenek. Ez a fluxioelmélet lényege, nem nehézkes matematikai szimbolisztikája. A „végtelen egyenletekkel” való számolás a newtoni analízis jövőbe mutató oldala, ígéret-teljes kezdet, s mutatja a kezdet minden nehézségét és pontatlanságát. A fluxioszámítás teljesen a XVII. század fizikai-matematikai módszereihez alkalmazkodó elmélet; zárt és tökéletes a maga nemében.

A módszert Newton a *De Analysi...* végén közölt pontatlan mozgásgeometriai megfontolás továbbfejlesztésével építi ki. Már a hetvenes évek legelején készen van, s ezt a módszert rejti titkosírásba az 1676-ban Leibniznak írott híres levelében: „...tetszőleges számú fluens mennyiségből megtalálni a fluxiokat és megfordítva.”[389]

Nyomtatásban azonban csak 1736-ban jelent meg a módszer, *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum cum ejusdem applicatione ad cutvarum geometriam*[390] címen. A *Methodus*-ban nagyon jól követhető a módszer genezise. A fluxioszámítás két problémára vezethető vissza, írja Newton. „I. A mindig (azaz bármely időpillanatban) megadott megtett út hosszúságából meghatározni az adott időben a mozgás sebességét, II. ha mindig adva van a mozgás sebessége, meghatározni egy adott időpillanatban a megtett utat.”[391]

A kérdésfeltevés azonnal mutatja a forrást: Galilei. Már maga ez a tény is arra utal, hogy a fluxioszámítás szerves része a XVII. század nagy

[389] *Corr.* II, 188, Newton to Oldenburg 24 Oct. 1676, 110–161, 115. „fluens” a mi terminológiánkban az időparaméter valamely folytonos függvénye, „fluxio” ennek idő szerint vett differenciálhányadosa.

[390] = *Opuscula* ... Castillioneus-féle kiadás I, 29–199.

[391] Uo. 53–54.

élményének, amit a világkép mechanizálódásának szokás nevezni. Ugyanezt mutatják az elnevezések is: „Mármost a következőkben fluenseknek nevezem azokat a mennyiségeket, amelyeket mintegy fokozatosan és határozatlanul növekvőknek tekintek...” Ezeket a mennyiségeket az ABC végéről vett betűkkel jelzi: *z, x, y, u,* ... „Azokat a sebességeket, amelyekkel az egyes, a mozgás által létrehozott fluensek nőnek (amely sebességeket fluxioknak vagy egyszerűen sebességeknek vagy celeritasnak nevezek) ugyanazon betűk felé tett ponttal fejezzük ki ..”[392]

Ezeknek az elnevezéseknek a segítségével a fenti két fizikai probléma következőképpen fordítható le matematikai nyelvre: „I. probléma. Határozzuk meg fluens mennyiségek között fennálló adott *relációból* azt a *relációt,* amely fluxioik között áll fenn”. És ugyanígy a „II. probléma. Fluxiokat tartalmazó adott egyenletből határozzuk meg, milyen *reláció* áll fenn a fluens mennyiségek között.”[393]

Az első probléma megoldása és a megoldás bizonyítása egyszerű, lényegében úgy történik, amint azt az 1664–65-ös kéziratban és a *De Analysi*...-ben láttuk. De pontosabban fogalmaz: „Fluens mennyiségek momentumai (azaz meghatározatlanul kicsiny részei, amelyeknek az idő meghatározatlanul kicsiny részeiben való csatlakozásával maguk a fluens mennyiségek folytonosan növekednek) úgy aránylanak, mint a sebességek, amelyekkel folynak vagy nőnek.

Ezért, ha valamelyik (tegyük fel, *x)* momentumát sebességének ($\dot{x}$) és a meghatározatlanul kicsiny mennyiségnek a szorzatával (azaz, $\dot{x}o$-val) reprezentáljuk, a többi *u, y, z*-nek a momentumát $\dot{u}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$-val kell reprezentálni, mivel $\dot{u}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ & $\dot{z}o$ között ugyanaz az arány áll fenn, mint $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ között.”[394] Ugyanaz az egyenlet, amely egy adott időben kifejezi a fluensek közötti relációt, megadja a fluensek $\dot{x}o$, $\dot{y}o$ stb. értékekkel megnövelt mennyiségei között fennálló relációt is. Behelyettesítve az $x+\dot{x}o$, $y+\dot{y}o$ stb. értékeket az egyenletbe, összevonva és egyszerűsítve, az o-t tartalmazó tagokat elhagyva azonnal megkapjuk az I. probléma megoldását.

A II. probléma már sokkal nehezebb, jóllehet elvben igen egyszerű. Az előbbi megfordítottja és így „megfordított műveletekkel kell megoldani.”[395] Ez a probléma nem egyéb, mint a kvadratúra általánosítása.

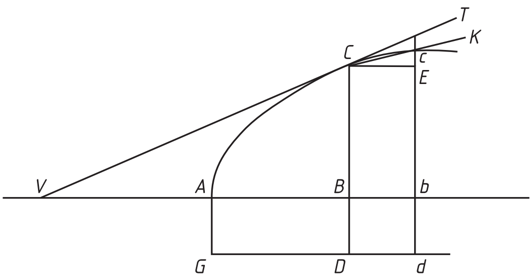
A tényleges keresztülvitel azonban csak a legegyszerűbb esetekben könnyű, már valamivel bonyolultabb fluxióegyenletek megoldása is komoly nehézségeket okoz. Mindenesetre mivel egyenletekről van szó, az algebrai egyenletek mintájára kell eljárni. Éppen ezért nevezi Newton a gyökvonás mintájára a fluensek fluxióegyenletből történő meghatározá-

[392] Uo. 54–55.
[393] Uo. 63.
[394] Uo. 59–60.
[395] Uo. 63.

sát a fluensek „kivonásának”. Az algebrai egyenletekhez hasonlóan, először osztályozni kell a fluxioegyenleteket, azután a normálalakoknak megfelelő, alkalmas egyszerű egyenleteket megoldani, végül gondoskodni olyan átalakításokról, amikkel egy tetszőleges fluxióegyenlet a megoldott alakok egyikére hozható.[396]

Newton világosan felismeri, hogy ez a probléma nem egyéb, mint egy speciális feladat, a kvadratúra általánosítása. Egy 1704-ben, az *Opticks* függelékeként megjelent összefoglalásában[397] fejti ki talán ezt legszebben. A probléma címe: *„Megkeresendők azok a görbék, amelyek kvadrálhatók”,* mutatja az 1664-es gondolatkörhöz való közvetlen csatlakozást. Legyen *ABC* a megkeresendő terület, *BC* a görbe ordinátája a *C* pontban, *AB* az abszcissza. Hosszabbítsuk meg *CB*-t *D*-ig úgy, hogy *BD* = 1 legyen és egészítsük ki az ábrát az *ABDG* parallelogrammával. Legyenek az *ABC* és az *ABDG* területek olyan arányban, mint *BC* és *BD.* Vegyünk fel mármost bármely egyenletet, amely a területek viszonyát definiálja, és ebből az az I propozícióval (ugyanaz, mint a *Methodus* ... első problémája) adódik a *BC* és *BD* ordináták relációja, amit kerestünk.”[398]

Az ábrán több vonal van, mint ami az itt mondottakhoz szükséges, mert annak a demonstrálására is szolgál, hogyan lesz a *Bb,* ill. *Ec* „születő növekmények” (augmentum nascentium) eltűnésekor „végső arányukból” (ultima ratio) az érintő hajlását megadó *CB : VB* arány. Ehhez „a *C* és *c* pontoknak teljesen össze kell esni. Matematikai dolgokban mégoly kis hibák sem megvetendők.”[399]



52. ábra

A Galilei–Torricelli-féle mozgásmatematikából kiindulva a fogalmak jelentős tisztázásáig ért el. Eltűntek a vonalakat „végtelen kis területekké” szétmosó mozgásmatematika bizonytalanságai. A számításhoz szük-

[396] Uo. 84–85.
[397] *De Quadratura Curvarum.* London 1704. = *Opuscula* ... Castillioneus-féle kiadás I, 201–244.
[398] Uo. 212.
[399] Uo. 205.

séges „folytonosságot” nem a szétkenés, hanem a fluxiok *definíciószerű* létezése biztosítja. Érintő pl. olyan görbékhez szerkeszthető, amelyeknek az ordinátáit és abszcisszáit kifejező mennyiségeknek fluxioik *vannak.* S ha azt akarjuk; hogy a görbe kvadrálható legyen, akkor a görbét kifejező egyenletnek egy fluens mennyiség fluxiojának *kell* lenni. Definíciószerűen. Mert „matematikai dolgokban még oly kis hibák sem megvetendők”.

A FLUENSEK HIERARCHIÁJA

Most már csupán a kvadrálható görbék általános alakját kell megtalálni. A legalkalmasabbak erre természetesen a végtelen hatványsorokkal előállított görbék, amelyekkel tagonként lehet bánni. Ezek egyben a legáltalánosabbak, mert ezekkel bármely görbe összehasonlítható megfelelő szabályok szerint. Az összehasonlítás megkönnyítésére Newton a legegyszerűbb görbék kvadratúráját két hatalmas táblázatban[400] adja meg, amely így kezdődik:

TÁBLÁZAT a kvadrálható egyszerű görbékről

A görbe alakja	A görbe alatti terület
Első forma	
$dz^{n-1} = y$	$\frac{d}{n} z^n = t$
Második forma	
$\frac{dz^{n-1}}{ee + 2efz^n + ffz^{2n}} = y$	$\frac{dz^n}{nee + nefz} = t$, *vagy* $\frac{-d}{nef + nffn^n} = t$
$\vdots$	$\vdots$

Itt z jelenti a görbe abszcisszáját, y a derékszögű ordinátáját, t a területet, d, e, f adott mennyiségek.

Hajlandók lennénk azt hinni, hogy az első nagyszabású integráltáblázatokkal állunk szemben. De figyeljük meg, hogy Newton táblázatai „formákat” tartalmaznak, nem formulákat. y és z még nem függő és független változók, hanem ismeretlenek. Még az egyenletek világában vagyunk, nem a függvényekében. Csupán a név hiányzik? A matematikában azonban sokszor éppen a dolgok nevükön nevezése a legnehezebb. És a legjellemzőbb: Newton más nevet mondott, nem a függvényét. Newton matematikája fluensek és fluxiok egymásra épülő hierarchiáján alapult. Min-

[400] Uo. 233.

den fluxio valamely fluens mennyiség fluxioja és egyben egy további fluxio fluense. Ebből azután minden más levezethető, ezt a tényt azonban definíciószerűen posztulálni kell. A matematika Newton számára az a tudomány, amelyik a fluens mennyiségekkel dolgozik. A mennyiség nem egyenesdarab, nem egész számokból összetevődő racionális tört, a matematikai mennyiség *fluens.* A növekvésnek, ill. a csökkenésnek, magának a *változásnak* az absztrakciója. A legnagyobb mértékben összetett valami, fluxiok végtelen egymásra következésének a lehetőségét rejti magába és ő maga más fluensek fluxioja. A fluensek közötti reláció még nem függvény. Ehhez túlságosan igényes. Kevés függvény lesz majd, amelyik kielégíti azokat a feltételeket, amiket a fluensek közötti relációk megkövetelnek. Egyszerűsíteni, kevésbé igényessé kell tenni ezt a túlságosan bonyolult mennyiségfogalmat ahhoz, hogy a XVIII. század nagy matematikusai kezében megszülethessen a függvény fogalma.

A FLUENS-FLUXIO MENNYISÉG ÉS A VÉGTELEN SOROK

Addigra az infinitézimális számítás már több mint egy évszázados múltra tekint vissza. S éppen az infinitézimális számítás gyors fejlődése tette lehetővé és szükségessé a függvényfogalom kialakulását. S ez a fogalom menti majd meg a különböző rendű „végtelen kicsinyek” zavaros rengetegében való elveszéstől, ahová – Leibniz iskolája nyomán – a XVIII. század során került. A XVII. századi infinitézimális analízis azonban a csúcsán – Newton és Gregory kezében – még nem annyira a „végtelen kicsi”, mint a „végtelen sok” analízise volt. De, ha szabad így kifejeznünk, egy „nyitott” végtelen soké, soroké, amelyeknek „se vége, se hossza”. Meg kellett állani az elejükön, a végük elveszett a végtelenben. A két legnagyobb, Newton és Gregory érezte, hogy ezen a téren tenni kellene valamit. Ők ketten sejtik a sorok konvergenciájának a jelentőségét. Newton becslést is próbál adni, mekkora hibát követ el egy adott végtelen sorban egy adott tag után következő végtelen sok tag elhagyásával. De – talán nagyon jellemző módon – Newton, aki alig követett el számolási hibát életében, ebben a becslésben téved. Éppen olyan felesleges lenne konvergenciakritériumokra alapító, modern sorelméletet keresni náluk, mint függvényt. A konvergencia elnevezést használja Newton is. De számára a sorok nem határértékük felé konvergálnak, hanem az „igazság” felé.[401]

Mégis, sorelméleti alapjainak legnagyobb bizonytalansága mellett is a sorok *alkalmazásában* sohasem téved. Bámulatos biztonsággal jár olyan területeken, ahová a mai sorelmélet birtokában is félve követi a matemati-

[401] *Corr.* I, 9, Newton to Collins January 1669/70, 18.

kus. De ez nem az alvajáró biztonsága, hanem a matematikusé, akin a határérték biztosító öve helyett a fluens-fluxio hierarchia biztosító kötele van. Ez szolgáltatja – definíciószerűen – a végtelen hatványsorba fejtéshez szükséges „differenciálhányadosok” létezését. A fluensek között felírt relációkat – definíciószerűen – mindig sorba lehet fejteni, s akkor már hozzáférhetők a végtelen soktagú egyenletekkel dolgozó analízis számára.

Éppen ezért, ha biztosítjuk, hogy az egyenleteinkben szereplő mennyiségek fluensek legyenek, a továbbiakban alkalmazott módszer szinte már nem is lényeges. Lehet ez könnyebb érthetőség kedvéért akár a megszokott, antik geometriai módszer is, mint a *Principiában.* A *Principia,* mint ismeretes, részletes fluxioelméleti bevezetéssel kezdődik, s később is folyton felbukkannak benne az antik geometriai köntös alatt a direkt infinitézimális módszerek. Láttuk már, hogy nem az infinitézimális módszereket, hanem az algebrai jelölési módot kerüli Newton a *Principiában.* Azt is láttuk, hogy a *Principiát* a Cartesiánus világrend legyőzésének tekintette.[402] Az algebrai jelölési mód pedig a XVII. század matematikusai és műkedvelői előtt erősen összeforrt Descartes nevével. Azonban Descartes eleve kizárta algebrájából a végtelen figyelembevételét igénylő „mechanikus” problémákat. Az ilyen „véges algebrára” mondotta Newton, hogy „kontárok algebrája”.

Kontároké? Lehet, hogy a bölcs dilettáns talán nem is tiltakozott volna nagyon az elnevezés ellen.

[402] Lásd kötetünkben Vekerdi László: ’A Principia születése’ c. tanulmányát!


GODEFROI GUILLAUME LEIBNITZ. Né le 3. Juillet 1646. mort le 14 Novembre 1716.
Il fut dans l'Univers connu par ses Ouvrages,
Et dans son Païs même, il se fit respecter :
Il instruisit les Rois, il éclaira les Sages,
Plus sage qu'eux il sut douter.
VOLTAIRE.

JEGYZETEK LEIBNIZ FIZIKÁJÁRÓL[403]

Leibniz fizikai gondolatait már kortársai roppant különbözően értékelték, s ugyanígy ítélte meg később a filozófia- és tudománytörténet-írás is. John D. Bernal szerint például „Leibniz minden filozófiai és matematikai tehetsége, valamint a vallási harcok által feldúlt Európa békéjéért való szüntelen szónoklatai ellenére, lényegileg középkori gondolkozó volt”,[404] s a „középkori” Bernal értékrendszerében egyáltalában nem dicsérő jelző. A mechanika történetének legkiválóbb modern ismerője, René Dugas szerint „azonban Leibniz halhatatlan érdemet szerzett a mechanikában, elsőként hidalva át új kalkulusa logikájával a statika és az energetikai szemlélet közötti szakadékot”.[405]

Történészek értékítéleteit – éppen úgy, mint a kortársakét – mindig saját értékrendszerünkhöz viszonyítva lehet csak elfogadni, Leibniz esetében azonban világnézeti különbségekkel nem magyarázható ellentéteket is találunk bőven. Így például Bertrand Russel szerint[406] Leibniz filozófiájában teljesen jelentéktelen az egész mechanikája a logikai megalapozáshoz viszonyítva, Martial Guéroult viszont azt állítja,[407] hogy az egész leibnizi metafizika valósággal következik dinamikájából. Ugyanez volt egyébként a véleménye a Leibniz-művek nagy múlt századi kiadójának s máig legjobb kommentátorának, C. I. Gerhardtnak is. Russellel azonos módon vélekedik azonban a Leibniz-kutatásban Gerhardt után kétségkívül legtöbb érdemet szerzett Louis Couturat.[408] A modern kommentátorok sorában viszont nem kisebb szaktekintély áll a tradicionális értelmezés mellett, mint Pierre Costabel.[409] Még nehezebb a helyzet, ha Leibniz

[403] Előzménye: Vekerdi László: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Jegyzetek Leibniz fizikájáról. = Fizikai Szemle 16 (1966) No. 11. pp. 337–342.

[404] Bernal, J.: Tudomány és történelem. Bp., 1963, 333.

[405] Dugas, R.: La mécanique au XVII^{e} siècle. Paris-Neuchâtel, 1954, 519.

[406] Russel, B.: A critical exposition of the philosophy of Leibniz. London, 1900.

[407] Guéroult, M.: Dynamique et métaphysique leibniziennes. Paris, 1934.

[408] Couturat, L.: Sur la métaphysique de Leibniz. Revue de Métaphysique et de Morale, 1902.

„kartéziánus" voltáról kívánunk tájékozódni a vonatkozó szakirodalom alapján. Gerhardt szerint Leibniz gondolkozásának semmi köze a kartéziánizmushoz; Paul Mouy szerint[410] az egész leibnizi fizika nem egyéb a kartéziánus fizika „belső" revíziójánál; Yvon Belaval pedig vastag könyvben[411] mesélte el, hogyan rombolta le minden területen – alapjában támadva a kartéziánus nézeteket – Descartes gondolatvilágát nagy tanítványa. R. C. Taliaferro igen jól dokumentált dolgozatában[412] azt fejtegette, hogy Leibniz fizikája egyenes következménye a descartesi „barokk" anyagfogalomnak, Joachim Otto Fleckenstein csinos kis Leibniz-könyve[413] szerint azonban a leibnizi „barokk" fizika nem Descartes-ból, hanem a „németek titkos és igazi vallásából", a panteizmusból táplálkozik.

A modern történetírás megalapítóinak egyike, a hirtelenharagú és nagylelkű Lucien Febvre ilyen esetekben szokta írni, hogy bizonyosan a kiinduló kérdés, az hibás.

*

Képzeljük el, hogy egy alapos jogi, filozófiai és logikai képzettségű fiatalember, aki még egy kevés kémiát is tanult, értekezést akarna írni az elemi részecskék fizikájáról, valamilyen természettudományos társaság jóindulatának a megnyerése céljából. Nyilván kikerülné a nehéz matematikai megfogalmazásokat, de az eredményeket, kiváltképpen az afféle hangzatos elnevezéseket, mint „nyolcas út", meg „töltésaszimmetria", annál inkább hangoztatná. Gyakran szerepelne továbbá a dolgozatban M. Gell-Mann neve, de ebből nem következne, hogy az illető valamit is olvasott tőle, még kevésbé, hogy „gellmanniánus" lenne. Ha azután a fiatalember később történetesen nagy matematikussá és filozófussá válna, s sokat bajlódnék fizikai kérdésekkel is, nem lenne-e nagyon csábító fizikai gondolkozásának gyökereit ebben a primitív, iskolás kompilációban keresni? Pedig talán az egész semmi egyéb a kor népszerűsített tudástöredékeinek többé-kevésbé sikerült ismertetésénél?

A 'Theoria motus concreti'[414] nem az első természettudományos műve a fiatal Leibniznek. Évekkel előbb írt már egy alkimista értekezést a

409 Costabel, P.: Leibniz et la dynamique. Paris, 1960.

410 Mouy, P.: Le développement de la physique Cartésienne 1646–1712. Paris, 1934.

411 Belaval, Y.: Leibniz, critique de Descartes. Paris, 1960.

412 Taliaferro, R. C.: The concept of matter in Descartes and Leibniz. Notre Dame, Indiana, 1964.

413 Fleckenstein, J. O.: Gottfried Wilhelm Leibniz, Barock und Universalismus. Thun-München, 1958.

414 Hypothesis physica nova, qua phænomenorum naturæ plerorumque causæ ab unico quodam universali motu, in globo nostro supposito, neque Tychonicis, neque Copernicanis asperando, repetuntur…, Mainz, 1671.

nürnbergi rózsakeresztesek közé való felvétele céljából. Az új értekezés sokkal komolyabb társulat, a londoni Royal Society figyelmét akarta a szerzőre irányítani, amint hogy Leibniz is sokkal komolyabb emberré vált azóta a mainzi érsek-választó, Johann Philipp von Schönborn (1605–1674) szolgálatában. Johann Philipp frankofil udvara volt a XVII. század közepén a német világ legfontosabb szellemi gócpontja.[415] Itt gyűltek össze a németség politikai, gazdasági, technikai és kulturális fejlődését óhajtó emberek. Az érsek-választó háziorvosa pl. Johann Joachim Becher (1635–1682) volt, híres paracelzista kémikus, a flogisztonelmélet előkészítője. Itt is, mint mindenfelé a XVII. században, divatos volt technika és természettudomány, de Németországban más volt a tudomány, mint nyugati szomszédainál. Lehetséges és tényleges, álom és valóság nem vált még el élesen, a Paracelsusok és Doktor Faustusok kora Németországban még a XVII. század második felében sem járt le.

A fiatal Leibniz értekezése is paracelsusi tudomány. A bolygók mozgásjelenségeinek az analíziséből a fényhordozó és mozgásközvetítő éter segítségével közvetlenül Basilius Valentinus és Paracelsus misztikus „princípiumaihoz" jut, Van Helmont, a híres alkimista 'Archaeus'-áig, s nem szabad elfelejteni, hogy nemcsak – mint emlegetni szokták – Hobbes, Wren, Hooke és Boyle nevét említi, hanem a fentebbi német alkimisták mellett angol megfelelőjüket, Digby lovagot is. Továbbá „Cartesius és Gassendi" (jellemző módon – hisz csak hírből ismeri – együtt említi a két nagy ellenfelet) elveinek és híveinek kijáró minden tisztelet ellenére megjegyzi, hogy nem lehet ám mindent megmagyarázni kiterjedésből, alakból és mozgásból, s a különféle atomok meg örvények talán nem is egyebek a képzelet játékánál. A jelenségek megértéséhez mindenekelőtt az éterre van szükség, az éter nélkül „minden erő, conatus, mozgás (a szellemiek kivételével) egyszer teljesen megszűnik és képtelen magától feltámadni, még ha az akadály eltávolítódik is… Semmi ugyanazon az úton, amelyen létrejött, magától vissza nem megy soha."[416]

Az efféle „hőhalál-elméletek" a XVII. században gyakoriak voltak, ezt tanította például – igaz, jó fél évszázaddal Leibniz előtt – Isaac Beeckman,[417] Descartes első és egyetlen tanítómestere: „A mozgás az űrben sohasem nő, mindig csökken. Miért nincs mégis általános nyugalom?" Az atomista Beeckmannak a plenista Leibniz egyszerűen válaszol: mert nincs űr, mindent betölt a folytonos éter, amit állandó mozgásban tartanak a napsugarak. Így a világ mozgásainak végső forrása a Nap, és a

415 Wiedeburg, P.: Der junge Leibniz, das Reich und Europa. I. Teil. Mainz, Viesbaden, 1962.

416 G. W. Leibniz: Mathematische Schriften, herausgegeben von C. I. Gerhardt (továbbiakban: Math. Gerhardt). Bd. Vi. 49–50.

417 Taliaferro, R. C.: I. m., 19.

Nap mozgásait, tengelykörüli forgását és a naprészecskék ettől különböző saját mozgását közvetíti többek között a Földnek is az éter, ami mindent áthat, s talán nem is egyéb, jegyzi meg Leibniz, „mint az Úr lelke, amely a vizek felett lebegett…”[418] Mindez nem különleges misztika vagy „német panteizmus”, XVII. századi fizikai-filozófiai közhely. Idézzünk példaként Newton egyik leveléből: „És a Föld meg a Nap bőven beszívja ezt a Szellemet, hogy megőrizze ragyogását, s visszatartsa a bolygókat az eltávolodástól; és akik akarják, azt is képzelhetik, hogy ez a Szellem szolgáltatja vagy hordozza a Nap hevét és a fény anyagi princípiumát; és hogy a hatalmas éterterek közöttünk és a csillagok között elegendő raktárai a Nap és bolygók eme eleségének.”[419] Nemcsak Leibniz volt „középkori”. A XVII. században még mindenki a „középkorban” állt egyik lábával… Newton az antik geometria és a kartéziánus algebra szilárd talajára lépett a másik lábával, de Leibniz nem értett semmit a matematikához. Legalább is addig nem, amíg Párizsban Huygens segítségével fel nem fedezte magának a matematika egy egész új világát.

*

Jos. E. Hofmann híres kis könyve[420] segítségével bárki könnyen követheti, hogyan alakult ki párizsi tartózkodása alatt Leibniz képzeletvilágában az új matematika, a differenciál- és integrálszámítás algoritmusa. Az új algoritmus szemszögéből azután a matematika sok, mindaddig reménytelenül távoli területe hirtelen meglepő közel került egymáshoz. Érintőszerkesztés, terület- és térfogatszámítás, ívhossz-számítás, súlypont-meghatározás, a görbe meghatározása érintőtulajdonságából (az ún. „fordított érintő feladat”), mind egyetlen egyszerű eljárás konkrét, egyedi alkalmazásaivá lettek. S ami még ennél is sokkal-sokkal fontosabb volt, az új algoritmus alkalmazásában nem kellett többé kínosan ügyelni a „geometrikus” és „mechanikus” (azaz az algebrai egyenletekkel kifejezhető és ki nem fejezhető) problémák megkülönböztetésére, s nem kellett – mint az angolok tették – a mechanikus problémákat „végtelen sok tagú egyenletekkel” (azaz sorbafejtéssel) megkerülni. Leibniz egyszerű algoritmusa alkalmazható volt a mechanikus, vagy ahogyan ő elnevezte, „transzcendens” feladatok esetében is. Mintha csak éppen ezekre a problémákra lett volna szabva Leibniz új algoritmusa: a szétszórt, nehezen és egyedi módszerekkel kezelhető esetekből egységes nagy elmélet nőtt ki, amely-

[418] Math. Gerhardt, Bd. Vi. 22.

[419] The Correspondence of Isaac Newton. Ed. by H. W. Turnbull, Volume II. No. 288. Newton to Halley 20 June 1686, 439.

[420] Hofmann, Jos. E.: Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizischen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris (1672–1676). München, 1949.

ben az *ismeretlen* szerepét a *változó* vette át, az *algebrai egyenletek*ét pedig a *függvény*. Leibniz nagy felfedezésének, a függvények elméletének, az *analízis*nek a fényében azután hirtelen egészen másnak látszott az addigi matematika is. Az egész matematika egységes lett, és kimondhatatlanul hajlékonyabb, alkalmazásra-termettebb, mint addig volt. A kétezer éves vén tudomány csodálatosan megifjodott. És csak ebben a megifjodott formában derült ki, hogy valóságos előre megállapított harmónia fűzi össze a matematikát a fizikával. Azt lehetne hinni, hogy az új matematika egyenesen a fizikai alkalmazások reményében és tudatában keletkezett. De nem így történt. Leibniz matematikáját nem a fizikai alkalmazások inspirálták, az alkalmazása ingerétől és lehetőségétől teljesen függetlenül keletkezett. Leibniz maga sem gondolta, hogy a fizika reformját, az elméleti fizika megszületését éppen az ő módszerének az alkalmazása eredményezheti. A differenciálegyenleteket a tiszta matematika (másféle akkor nem volt) adekvát módszerének tekintette, nem a matematikai fizikáénak. „A transzcendens görbék vizsgálata – írja 1690-ben Huygensnek – tökéletessé válhatna, ha mindig sikerülne ilyen egyenleteket alkalmazni. A differenciálegyenletek éppen erre valók. Sokat töprengtem, mit lehetne tenni az ügyben, s ha meglenne a szükséges nyugalmam, vagy néhány értelmes fiatal matematikus a közelemben, azt hiszem, a mai állapotánál sokkal tökéletesebbé alakíthatnánk ezt a tudományt. Adná az Isten, hogy ilyen mértékben lehetne haladni a fizikában is."[421]

*

Miért nem lehetett? Igen érdekes, hogy a modern matematikai formavilág két leghatásosabb alakítója, Descartes és Leibniz, fizikai munkáikban jóformán soha nem alkalmazta az új matematikai módszereket. Newton – az utókor véleménye szerint – egyenesen a fizikai alkalmazás kedvéért dolgozta ki fluxiós módszerét, a fizikát forradalmasító nagy művében mégsem alkalmazta ezt a módszert sehol. A newtoni természetfilozófia matematikai elvei klasszikus görög elvek, s csak ahol illik a klasszikus keretbe, segít óvatosan valamilyen kartéziánus fogalmazással. Ami a matematikát illeti, a newtoni fizika születhetett volna akár Alexandriában is. A XVII. század legnagyobb matematikai fizikusa, Huygens, mindig antik módszerekkel dolgozott, az új analízis formavilágát nem értette meg. A XVII. század nagy matematikusai megteremtették a matematikai fizika klasszikus módszerét, az infinitézimális számítást és a differenciálegyenletek elméletét, de a kész módszerrel nem tudtak mit kezdeni a fizi-

[421] Œuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la Société Hollandaise des Sciences, tome IX., No. 2632. G. W. Leibniz à Christiaan Huygens, (Novembre) 1960, 533.

kában; a XVII. század fizikája az új matematikai módszertől függetlenül fejlődött. A helyzetért nem a matematikai módszer volt felelős, a fizika nem volt olyan állapotban, hogy eredményesen lehetett volna alkalmazni problémáira az új matematikát. Az újkori fizika születése az elcserélt királyfi meséjére emlékeztet: az antik matematika koldusgúnyájában nevelték fel, s mint meglett ifjú kapta csak vissza a saját ruháját. Leibniz esete talán még szebb példa, mint Newtoné.

Leibniz 1676 őszén Londonnak kerülve indult Párizsból haza, s egy hétig a Temze-torkolatba szorította a kedvezőtlen szél. Ezt az időt egy fizikai gondolatait összefoglaló rövid dialógus írására használta. Nemrégiben fordította volt Platón két dialógusát, a 'Theaithétosz'-t és a 'Phaidrosz'-t, s a modern kommentátorok ezért „Platón-hatásra" szeretnek találni a Temze-torkolatban írt dialógusban s Leibniz későbbi filozófiájában. Csakhogy „platóni hatás" kedvéért nem kellett Leibniznek Platónt fordítani, még mainzi ifjúsága idején asszimilálta ezeket is, mint a „Cartesianus hatások"-at, anélkül, hogy olvasta volna Descartes-ot.[422] A dialógusa pedig nem a különféle hatások miatt érdekes, hanem mert azt láthatjuk belőle, hogyan próbálta meg új matematikája gondolatvilágát a mozgás jelenségeihez igazítani, sikertelenül.

A dialógus a mozgás *folytonos helyváltoztatásként* történő definíciójának az ellentmondásos voltát fejtegeti. Az érvelés lelke Leibniz új, nagy felfedezése: a kontinuum – pl. az egyenes vonal – nem fogható fel (megszámlálhatóan) végtelen sok pont összességeként, és minden pontja által két részre osztható. Ebből következik, hogy a mozgó testnek nem lehet pontosan megadni a helyét és a sebességét: hiszen ha pontosan valahol van, akkor szükségképpen áll, és így nincs sebessége, ha meg mozog, akkor a helye nem rögzíthető pontosan. „Így tehát az a valami – következtet a Leibniz álláspontját képviselő Pacidius – amitől a test mozog és helyét változtatja, nem maga a test, hanem olyan ok, amely hatva nem változik, amint azt Istenről szoktuk mondani. Mondhatjuk tehát, hogy a test magától nem képes folytatni a mozgását, hanem mintegy Isten impulzusára, aki azonban legfőbb bölcsességében állandó és meghatározott törvények szerint cselekszik. – Charinus: De hogyan kerül a test a *B* pontból a (szomszédos, érintkező) *D* pontba, hogyha minden átmenetet és közbülső állapotot elvetettünk? – Pacidius: Nem tudom ezt jobban megmagyarázni, mint ha felteszem, hogy az *E* test a *B*-ben valamiképpen megsemmisül, s azután a *D*-ben újraképződik. Új, de alkalmas szóval *transcreatio*nak nevezhetnénk ezt a folyamatot…"[423] S végül megjegyzi Leib-

[422] Loemker, L. E.: Leibniz and the Herborn Encyclopedists. Journal of the History of Ideas, 22, 1961, 323–338.

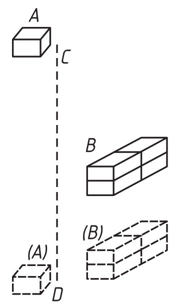
[423] Pacidius Philalethi = Opuscules et fragments inédits de Leibniz, par Louis Couturat. Paris, 1903. 594–627, 623–624.

niz, hogy ez a transcreatio analóg a középkori teológusok mondásával: a megmaradás állandó teremtés. Ez volt hát az új matematikai módszer nagy hiányossága a fizikai alkalmazások szempontjából: csak a változást lehetett matematizálni a segítségével, s ez a megmaradás matematizálása nélkül ellentmondásra vezetett. Kis anakronizmust megengedve úgy is mondhatnánk, hogy a differenciálegyenletek megoldásához szükséges határfeltételek hiánya miatt a matematika még nem lehetett a teológiával egyenértékű segédtudománya a fizikának. A természet legközönségesebb jelenségeinek a magyarázatához is kellett még az Isten. Matematizálható megmaradási elveket kellett találni elébb, s csak azután lehetett lefordítani a mechanikát az analízis nyelvére.

*

Leibniz előtt két ember sejtette ezt, Kepler és Descartes, s ha egyáltalán van valami közvetlen kapcsolata Leibniz gondolkozásának a Descartes--éval, akkor ezen a ponton van. 1686-ban egy rövid értekezést közölt Leibniz ’Descartes egy figyelemreméltó tévedéséről’ a lipcsei Acta Eruditorumban.[424] Ebben az értekezésben azt bizonyította be Leibniz, hogy Descartes tévedett, mikor a tömeg és sebesség szorzataként definiált *mozgásmennyiség*et tekintette a „mozgatóerő” mértékének, s azt állította, hogy a mozgásmennyiség az a valami, amely – Isten akaratából – megőrződik a természetben.

A bizonyítás roppant egyszerű. Tegyük fel ugyanis *először*, hogy az eső test akkora „erőre” tesz szert, melynek következtében ismét ugyanolyan magasra emelkedhet, mint amilyen magasról esett; „*másodszor* pedig, hogy ugyanannyi „erő” szükséges az egy fontnyi *A* test (53. ábra) négy könyöknyi *CD* magasságra emeléséhez, mint amennyire szükség van a négy fontnyi *B* test egy könyöknyi *EF* magasságba való emeléséhez.



53. ábra

Ezzel a kartéziánusok és korunk egyéb filozófusai meg matematikusai mind egyetértenek. Következik ezekből, hogy ha az *A* test *CD* magasságból leesik, pontosan akkora „erőre” tesz szert, mint a *B* test *EF* magasságból leesve… Lássuk mármost, hogy vajon a mozgásmennyiség egyenlő-e a két esetben. Reményünk szerint ugyanis nagy különbséget kell találnunk, amit következőképpen mutatok meg. Bebizonyította Galilei, hogy a *CD* távolságon át való esésben nyert sebesség kétszerese az *EF* esésben nyert

[424] Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum circa legem naturalem, secumdum quam volunt a Deo eadem semper quantitatem motus conservari, qua et in re mechanica abutuntur. = Math. Gerhardt, Bd. Vi. 117–123.

sebességnek”,[425] így az utóbbi esetben nyert sebességet egységnyinek tekintve, az *A* mozgásmennyisége $1 \cdot 2$, a *B* testé pedig $4 \cdot 1$; nyilvánvaló tehát, hogy a mozgásmennyiség nem maradhat meg, és „az erőt olyan hatás mennyiségével kell mérni, melyet adott nagyságú és fajtájú súlyos testet fel bír emelni, és nem azzal a sebességgel, amelyre a testet hozni képes.”[426]

Ebben a kinetikus energiát megsejtő, a mechanika fejlődésére alapvető fontosságú dolgozatban a legfigyelemreméltóbb tévedés nem Descartes-é, hanem Liebnizé. Kétségtelen, hogy Leibniz – szokása szerint – most sem olvasta el Descartes megfelelő passzusait (ennyiben igazi kartéziánus volt, melyik -iánus vagy -ista olvassa ugyanis szektája szent könyveit?), hiszen akkor semmiképpen sem kerülhette volna el a figyelmét, hogy Descartes az egyszerű gépekről szóló híres értekezésében határozottan kijelenti, a „kétszer akkora súlyt fele olyan magasra…” középkori statikai elv alkalmazásában *nem* a Galilei-féle tömeg és sebesség szorzatából álló *momentum*ot tekinti „erőnek”, hanem a *súly* és a súly megtámasztási ponttól való *távolság*ának a szorzatát. „Mindenek előtt vegyük észre – írta Descartes ezzel kapcsolatban –, hogy arról az erőről beszéltem, amely súlynak valamilyen magasságra emeléséhez szükséges, és ez az erő mindig kétdimenziós… Ha a sebességet is tekinteni akarnánk a hosszúság mellett, három dimenziót kellene tulajdonítani az erőnek, míg én mindig kétdimenziósnak tekintettem, éppen, hogy kizárjam a sebességet… Mert a sebességre vonatkozóan (ti. az emelő és az egyszerű gépek esetében, Descartes fejtegetése ezekre vonatkozik) semmi okosat és bizonyosat nem lehet mondani, anélkül, hogy megmagyaráznánk, micsoda a nehézkedés.”[427] Az okfejtés lényege éppen az, hogy a sebesség nem szerepel az „erő” (mai terminológiában munka vagy energia) meghatározásában.

Más mechanikai rendszerek, például az ütközés esetében azonban nem lehet a sebességet nélkülözni, s ekkor fel kell tételezni, „hogy van egy meghatározott mozgásmennyiség minden teremtett anyagban, amely se nem nő, se nem csökken soha; és így mikor egyik test mozgásba hozza a másikat, annyit veszít mozgásából, amennyit átad a másiknak.”[428] Erre a tételre szüksége volt Descartes-nak az ütközés matematikai leírásához. Az ütközés törvényeit hét szabályban foglalta össze. Ezeknek a szabályoknak a téves voltát már Descartes korában felismerték, Huygens kiemelte, hogy az első kivételével mind hibás. Descartes azonban nem is a tényleges ütközés magyarázására szánta ütközéselméletét. Absztrakt el-

[425] Math. Gerhardt, Bd. Vi. 118.
[426] Uo. 118.
[427] Œuvres de Descartes, Ch. Adam et Paul Tannery, tome II. No. 142. Descartes à Mersenne, 12 sept. 1638, 352–362.
[428] Uo. No. 161. Descartes à (Mr de Beaune), 30 avril 1639, 541–544, 543.

mélet volt, a világ felépítésében feltételezett tökéletesen kemény részecskék mozgásában megnyilvánuló szabályokat kereste Descartes.

Az első szabály: két egyenlő nagyságú, egymás felé egyenlő sebességgel haladó test az ütközés után ugyanezzel a sebességgel visszapattan.

A második szabály azt mondja, hogy ha *B* test nagyobb, mint *C*, és egyenlő sebességgel haladnak egymás felé, akkor ütközés után azonos sebességgel haladnak abba az irányba, amerre *B* ment. Jelekben, ha $B > C$ és $v_B = v_C$, akkor $v'_C = v'_B$.

A harmadik szabály azt állítja, hogy ha két azonos nagyságú test különböző sebességgel halad egymás felé, akkor ütközés után olyan közös sebességgel haladnak a nagyobb sebességgel érkező test mozgásirányába, amelyik sebesség a két test sebessége közötti különbség felével nagyobb a lassúbb test sebességénél. Ha $B = C$ és $v_B > v_C$, akkor $v'_{BC} = v_C + \frac{v_B - v_C}{2}$.

A negyedik szabály azt mondja ki, hogy egy kisebb test semmiképpen sem tud megmozdítani egy *nyugvó* nagyobbat. Legyen pl. $C = 2B$ és $v_C = 0$, akkor $v'_B = v_B$, $v'_C = v_C = 0$.

Az ötödik szabály a negyedik megfordítása: ha az ütköző *B* test nagyobb, mint a nyugvó *C*, átad „mozgásából" annyit, amennyi ahhoz szükséges, hogy az ütközés után közös sebességgel haladhassanak.

A hatodik szabály a legérdekesebb, ez árulja el igazán, miről is van szó az egész elméletben. „Ha a *C* test nyugalomban volt és teljesen egyenlő nagyságú *B*-vel, amelyik *C* felé mozog, szükségszerű, hogy részben meglökessék a *B* által, részben visszalökje *B*-t; úgyhogy ha pl. *B* négy sebességfokkal közeledett *C* felé, át kell adjon neki egyet, és a maradék hárommal vissza kell forduljon arra az oldalra, amelyről jött. Ugyanis szükségszerű lévén, hogy vagy *B* meglökje *C*-t anélkül, hogy visszapattanna, és így két fokot adna át mozgásából, vagy hogy visszapattanjon anélkül, hogy meglökné, és hogy következésképpen megtartsa ezt a két sebességfokot a másik kettő mellett, amit nem lehet tőle elvenni, vagy végül, hogy visszapattanjon a mondott két fok egy részét megtartva és a másik részét átvíve meglökje *C*-t; nyilvánvaló, mivel egyenlőek és így nincs értelme, hogy inkább visszapattanjon mint hogy meglökje *C*-t, ennek a két hatásnak egyenlően kell megoszlani: azaz *B* ama két sebességfok egyikét át kell adja *C*-nek, s visszapattanjon a másikkal."[429] Vagy modern parafrázisban:

Ha $B = C$ és $v_B = 4$, $v_C = 0$; akkor $v'_B = 3$, $v'_C = 1$.

Ugyanis

a) $v'_{B^1} = 2$, $v'_{C^1} = 2$, vagy

b) $v'_{B^2} = 4$, $v'_{C^2} = 0$,

azaz

[429] Principia Philosophiae, II., 51.

$$\frac{a)+b)}{2}: v'_B = \frac{2+4}{2} = 3, \quad v'_C = \frac{2+0}{2} = 1.$$

Világosan látszik itt, hogy az ütközés szabályai arra valók, hogy elosszák az ütközésben résztvevő testek sebességét eme testek között úgy, hogy az ütközés után a sebességek a lehető legegyenletesebben, legszimmetrikusabban osztozkodjanak a lehetséges eseteken, s közben egy *pozitív* mennyiség, a tömeg és a sebességfok (a sebesség abszolút értéke) szorzata, a „mozgás" vagy „mozgásmennyiség" állandó maradjon.

Nem valódi testek ütközésére vonatkoznak a szabályok, hanem a világ anyagi mechanizmusának a felépítésében szereplő fiktív kemény gömböcskékre. Az ütköző gömböcskék sebessége olyan lesz az ütközés után, hogy a lehető legegyenletesebben oszoljon meg a mozgásmennyiség állandóságának a feltétele által megengedett konfigurációk között. Kisebb test nem hozhat mozgásba nyugvó nagyobbat, mert ehhez annyit át kellene adjon „mozgásából", hogy a saját „mozgása" kisebb lenne, mint a meglökött testé, s ez nem lehetséges, mert a mozgást a „mozgás" átadása hozza létre, s annyit hogy' adhatna át, hogy magának kevesebb maradjon, mint amennyit átadott? Nem, nem a valódi rugalmas testek ütközését tárgyalta Descartes, hanem a valódi világ mögött meghúzódó „igazi világ" mozgástörvényeit kereste. Volt annyira platonista, hogy ne zavarja a kétféle megmaradási törvény, a mi árnyékvilágunkban szükséges munkamegmaradásnak és az ideák világában érvényes „mozgás"-megmaradás törvényének az össze nem egyeztethetősége.

Leibniz azonban nem volt igazi platonista. Nagy békéltető volt, megegyezések és harmóniák nyughatatlan keresője. Olyan megmaradási elvre volt szüksége, amelyik kielégíti a világ igazi „szimmetriatörvényét": az ok és az okozat teljes egyenértékűségének az elvét. „Mindig tökéletes az egyenlőség a teljes ok és a teljes okozat között", hangoztatja újra meg újra Leibniz, metafizikájának egyik alappilléreként. „Sohasem történhet meg – írja 1693-ban, a *Brevis demonstratio* által kiváltott nagy vita során –, hogy a természet olyan állapotot helyettesítene egy másik helyébe, amelyekben az „erők" nem egyenlőek. És hogyha az L állapot helyettesítheti az M állapotot, akkor megfordítva, az M állapot is helyettesítheti az L-et, anélkül, hogy perpetuum mobilétől kellene félni."[430] „Ugyanis, ha az „eleven erő" növekedhetne, lenne oknál erősebb hatás, azaz lehetséges lenne a mechanikai örökmozgás: valami, ami reprodukálni tudná saját okát, s még valami többet, ami lehetetlen. Ha meg csökkenhetne az eleven erő, végül teljesen elveszne, ami kétségkívül ellentmond a dolgok rendjének."[431] Az ok és okozat szimmetriájából tehát szükségképpen következik az eleven erő megmaradásának az elve.

[430] Cit. Costabel P.: I. m. 26.

Ez a megmaradási elv volt a Leibniz-féle új kalkulus és a mechanika közötti praestabilizált harmónia első megnyilvánulása. „Az eleven erő – írja Leibniz 1695-ben Burcher de Voldernek – úgy viszonylik a közönséges holt erőnek (a mai erőnek) a sebesség megváltoztatására irányuló késztetéséhez, mint a végtelen a végeshez, vagy mint a mi differenciálszámításunkban a vonal a vonalelemhez.”[432] „Következésképpen súlyos test esésekor, mely esése minden pillanatában azonos végtelen kicsiny sebességnövekedést nyer, a holt erőből az eleven erőt is kiszámíthatjuk, ugyanis a sebesség az idővel egyenes arányban nő, az eleven erő pedig a megtett út szerint, vagyis az idő négyzetével arányosan, azaz az okozat szerint. Így tehát geometriánk vagy analízisünk analógiája értelmében, ha a késztetések olyanok, mint dx, az eleven erők pedig mint xx vagyis $\int x dx$”.[433]

D'Alembert az új matematikai mechanika pompás módszereinek a birtokában már könnyen megállapíthatta, hogy az eleven erők vitája jelentéktelen félreértés miatt dúlt harminc évig: ha figyelembe vették volna a sebesség előjelét, rögtön észrevehették volna, hogy a $\sum mv$ és a $\sum mv^2$ mennyiségre egyaránt érvényes megmaradási elv. De az analitikus mechanika létrejöttéhez az volt szükséges, hogy a metafizikai szimmetriaelveknek megfelelő fizikai megmaradási tételek előkészítsék az utat az analízis alkalmazásához. Kétségtelen, hogy ebben a tekintetben Leibniz Descartes nyomán járt, s nagy elődje, önmaga és kora halmozott tévedésein át tört utat máig érvényes megfogalmazások küszöbéig. A természettudomány fejlődéséhez többek között sok-sok termékeny tévedés és türelem is szükséges. Tolerancia.

431 Essay de dynamique… = Math. Gerhardt, VI. 215–231, 220.
432 Leibniz an de Volder. Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz. Herausgegeben von C. I. Gerhardt, II., 154.
433 Uo. 156.

LEIBNIZ-VÁLTOZATOK[434]

I.

A XVII. század minden nagy tudósának és filozófusának az arca jó ismerősünk. *Galilei* (1564–1642) értelmet és akaratot sugárzó, dacos vonásai, *Descartes* (1596–1650) okos, gőgös, metsző tekintete, *Pascal* (1623–1662) bájos gyerekkori angyalképe és félelmes halotti maszkja, a nagy *Newton* (1642–1727) neuraszténiás vonásai, *Spinoza* (1632–1677) Ész és Isten jelenlétének eksztázisától tündöklő aszkéta arca: mind jó ismerősünk. Jól ismert Christian *Huygens* (1629–1695) nyílt, barátságos, kerek arca és John *Locke* (1632–1704) bizalmatlan, sovány, keserű vénasszonyfeje is. Jól ismert Thomas *Hobbes* (1588–1679) öntelt, felfuvalkodott, pökhendi képe és Pierre *Bayle* (1647–1706) okos, szelíd, komoly arca.

Leibnizről életében készült kép négy maradt, három egyazon művész, Andreas *Scheits* (1670–1735), hannoveri udvari festő alkotása. „Ez a négy Leibniz-portré – írta a Leibniz-ábrázolások legnagyobb szakértője, Hans Graeven – annyira különböző, hogy alaposabban megnézve, mindegyik teljesen más jellemet tükröz. A braunschweigi kép öntudatos, kissé édeskés kifejezésével olyan, mint valami agyonretusírozott fénykép, a wolfenbütteli kép gyenge, karakter nélküli. A berlini kép tiszta és szellemes kifejezésű, de túlidealizált. Ezekkel az udvari portrékkal ellentétben a kötött házikabátos firenzei kép sokkal emberségesebb, bensőséges élettel tele. …Próbáljuk a közöst, az ismétlődőt megkeresni a képekben: ez talán a szigorú tekintet, a tiszta, alacsony boltozatú, széles homlok, a kiugró járomív a pompás arckoponyán. Az orrgyök háromszöge mindegyik ábrázoláson feltűnően megrajzolt átmenetet képez a nagy, erőteljesen formált orrhoz. …Az orca beesett, az ívelt, elhúzott száj a szellemes udvaroncra utal, az energikus áll a céltudatos szellemre."

Ugyanilyen nehéz lenne a művek és a levelezés alapján a belső arcképet megkeresni. Vagy még nehezebb, mert itt nem négy, hanem ezerféle Leibnizcel találkozhatnánk, aszerint hogy a tekintett írás – Leibniz még

[434] Előzménye: Vekerdi László: Leibniz-változatok. In: Kalandozás a tudományok történetében. Művelődéstörténeti tanulmányok. Bp., 1969. Magvető Kiadó pp. 81–108.

logikai és tudományos műveit is mindig valakinek vagy valakiknek írta – kinek szól. Leibniz mindig beszélget, és mindig a beszélgető partnerhez alkalmazkodik, témában és színvonalban egyaránt. Még nehezíti a helyzetet, hogy életműve mindent tartalmaz: logika, kombinatorika, matematika, fizika, politika, jog, állambölcselet, alkímia, heurisztika és számológépek elmélete, történeti forráskritika és szövegkiadás, könyvtártudomány, bányaművelés és bányagéptan, őstörténet, nyelvészet, tudományszervezés, spekulatív és gyakorlati teológia, metafizika, s még sok más szaktudomány található a szorgalmas tudós kiadott s máig kiadatlan műveiben. S ami a legcsodálatosabb: ez a sokféle tárgy egyáltalán nem keveredik, nem kavarog. Leibniz műveiben minden a legnagyobb rendben, minden a helyén, minden érthető, tiszta. S izgalmas, akár Pascal nehezen érthető s a ténylegesnél többet sejtető gondolattolulása. Közérthető, s mégis mindig el tudja kerülni Locke ásíttató unalmasságát és Hobbes szakállas közhelyeit. Kortársai körében egyedül nagy ellenfele, Pierre Bayle versenyezhet vele műveltség és írni tudás tekintetében. Ők ketten, Leibniz és Bayle a XVII. század végén megizmosodó tudományos és ismeretterjesztő folyóiratirodalom legnagyobb szállítói és ezen keresztül egy új, a természettudomány és matematika fejlődése szempontjából nagyon fontos olvasóközönség első nagy nevelői.

*

Gottfried Wilhelm Leibniz 1646. július 3-án született Lipcsében. Apja, aki a helybéli egyetemen az etika professzora volt, fiatalon meghalt. Az árván maradt gyermek kiolvasta az apa könyveit, majd megtanult mindent, amit a lipcsei és jénai egyetemeken tanulhatott (egy csomó lutheránus teológiát és jogot, skolasztikus filozófiát és logikát, egészen kevés elemi aritmetikát), és miután még jóformán gyerekfejjel beadott disszertációját tudós professzorai elutasították, örökre elhagyta Kelet-Németországot. Nürnberg egyetemén sikerrel doktorált. A tehetséges ifjút az akkori Németország egyetlen felelősségteljes fejedelme, Johann Philipp von Schönborn (1605–1674) mainzi érsek-választó udvarába hívta, s fontos politikai-jogi feladatokkal bízta meg. Az érsek-választó szolgálatában utazott Leibniz 1672-ben az akkori világ fővárosába, XIV. Lajos Párizsába. Itt ismerkedett meg a kor legfontosabb szellemi áramlatával, az új matematikai-természettudományos műveltséggel. Ismereteit két rövid londoni és egy hollandiai utazás egészítette ki. 1676 késő őszén tért vissza Németországba, miután a kor sok nagy tudósával és gondolkodójával megismerkedett.

A mainzi érsek-választó már nem élt, új gazdát kellett keresnie. Johann Fridrich von Braunschweig-Lüneburg hannoveri herceg szolgálatába lépett, s ettől kezdve élete végéig a Braunschweig-Lüneburg-i ház szolgálatában maradt mint könyvtáros, a harzi bányák felügyelője, a ház udvari történetírója, s két kedves hercegnő, Sophie és leánya, Sophie-Charlotte udvari filozófusa, társalkodója és barátja.

*

Amikor Leibniz fiatalkorában a mainzi érsek-választó szolgálatába állott, úgy látszott, hogy a harmincéves háború borzalmaiból kiemelkedő Németország jobb jövőt remélhet. Nyilvánvaló volt ugyan, hogy a vesztfáliai béke (1648) nyitva hagyta az utat a francia hatalom behatolása előtt, azonban a háborúban gazdaságilag és kulturálisan tönkrement Németországra a hasonlíthatatlanul fejlettebb nyugati szomszéd közvetlen hatása még előnyös is lehetett volna, feltéve, hogy a francia politikai terjeszkedéssel szemben valamiféle német egység erejét lehet érvényesíteni. Erre a szerepre az akkori körülmények között a Német–Római Császárság látszott a legalkalmasabbnak, s Leibniz, aki műveltsége és filozófiája tekintetében annyi mindent köszönhetett a franciáknak, ezért ragaszkodott élete végéig a Birodalom elvi egységéhez. Az egység érdekében bajlódott annyit a német világot tragikusan kettéhasító egyházszakadás megszüntetésével. Az egyházak újraegyesítésének a tervét a mainzi érsek-választó felvilágosult, toleráns udvarából hozta magával, s később, a hannoveri udvarban is ez volt politikai működésének egyik fő célja. Leibniz mindig inkább az elképzelt lehetőségek világában élt, a gyakorlati megvalósíthatóság iránt nem sok érzéke volt. S lehet, hogy a német világ akkori helyzetében éppen erre volt szükség.

A harmincéves háború derékba törte a német polgárság fejlődését, a vezetés mindenütt az arisztokrácia kezébe került. Ilyen körülmények között a francia fejű és német szívű műveltség a független s laza szövetségbe fűzött kisebb-nagyobb fejedelemségek s hercegségek felett inkább álom és lehetőség volt, semmint realizálható valóság, de olyan álom, amelyik majd a „német felvilágosodás” felnövő polgárságánál pótolni segített az évszázados elmaradottságot.

A német műveltség leginkább Leibniznek köszönheti, hogy nem pusztult el végleg a harmincéves háború őrültségében. Leibniznek, aki úgy közvetítette népének kora európai tudását, hogy egész Európa tanult belőle.

*

A XVII. század tudománya zárt, ezoterikus, nagyon kevés embernek megközelíthető világ volt. Descartes matematikáját és Newton műveit még százalékosan számítva is kevesebben értették, mint ma például a Hilbert-terek matematikáját és a Dirac-féle kvantumelméletet. A XVII. századi matematika és természettudomány nagy eredményei és egy nagyon művelt, akkori ember tudása között nagyobb szakadék volt, mint ma a Nobel-díjas tudós és a nyolc általános iskolát végzett diák tudása között. Ma ugyanis a különbség inkább csak kvantitatív: a diák sokkal kevesebbet tud *ugyanarról* a valamiről, amiről a tudós sokkal többet tud. A XVII. században azonban kvalitatív volt a különbség: néhány nagy tudós és filozófus egészen más világban élt és gondolkozott, mint a többi tudós és művelt ember. A néhány kivételes nagy tudós világa az akkor újonnan meghódított matematikai-természettudományos módszer volt, a többi művelt ember világa pedig, éppen úgy, mint a műveletlen nagyközönségé, a *tételes* vallás világa. A tételes vallások világából kellett átvezetni az embereket a természettudományos módszer új világába. Ez csak a vallásos világkép valamilyen tisztultabb, dogmamentes, türelmesebb formáján keresztül történhetett. A fontos a dogmamentesség és a *tolerancia* volt, nem a vallásos elemek kiirtása. A XVII. század nagy gondolkozói nem ateisták, rendszerükben valamilyen formában mindig helyet kapott a vallás. De mindnyájan egy-egy tisztultabb, tételektől mentes világképhez közeledtek, s küzdöttek a tételes vallások rideg, kegyetlen, értelmetlen dogmatizmusa ellen, s ebben a küzdelemben mindnyájan a természettudományok és a matematika új, nagy eredményeire támaszkodtak.

S közben megteremtették a természettudományok és a matematika fejlődéséhez elengedhetetlenül szükséges nyíltabb, kritikusabb, szabadabb klímát. A Galilei heorikus drámájától Leibniz és Bayle törhetetlen szorgalmú zsurnalizmusáig terjedő kor fontos jellemzője, hogy a bosszúálló, rettenetes, mindenütt jelenlevő isten uralmát felváltotta a szelíd, bűnbocsátó, seholsincsen isten uralma.

*

Két út állott a XVII. századi gondolkozás előtt, hogy a matematika és a természettudomány új eredményei alapján új világképet dolgozzon ki. Az egyik az volt, hogy ok-okozati láncba szedje a dolgokat s a történéseket. Ezt az utat követte a gondolkozók nagyobbik része, kiváltképpen az angolok: Hobbes, Newton, Locke. Szerintük megérteni annyi, mint ok-okozati összefüggést találni, a determizmus teljesen áthatotta gondolkozásukat, és a valóságot az ok-okozatiság rabláncára fűzték a teológiájé helyett. Itt istenre csak mint a lánc első szemére volt szükség, de a matematika és a természettudomány fogalmai is, mint idő, szám, folytonosság stb. segédeszközzé és fikciókká váltak a determinizmus mindent uraló valóságához képest.

Egészen másként gondolkozott Leibniz. „Elismerem – írja –, hogy az idő, a kiterjedés, a mozgás és a folytonosság általában azon módon, ahogyan a matematikában értik, csak eszmei dolgok, azaz dolgok, amelyek a lehetőségeket fejezik ki, egészen úgy, mint a számok. Hobbes a teret mint a létező képzetét határozta meg. Azonban helyesebben szólva a kiterjedés a *lehetséges együttlétezések* rendje, amint az idő a *nem egyszerre létező lehetőségek rendje*, amelyek azonban mégis összefüggenek egymással. Így tehát az egyik az együttlétező dolgokra, a másik a nem együtt létezőkre vonatkozik, melyeket az ember mégis létezőnek tekint, és ez az, amiért egymásra következnek. De Tér és Idő együttvéve az egész Világ lehetőségeinek rendjét alkotják, …s habár a természetben nincsenek soha teljesen egyforma változások, olyanok, amilyeneket a matematika által leírt mozgásfogalom követel, s szigorúan véve éppoly kevéssé vannak oly természetű valódi alakok, amilyeneket a geometria tanít, mert a való világ nem maradt meg a lehetőségek közömbösségében, hanem felosztásokba és tényleges sokaságokba jutott, melyeknek eredményei az előttünk megjelenő és legkisebb részeikben változatos jelenségek: mégis, a természet tényleges jelenségei nemkevésbé jól vannak elrendezve, s olyanoknak kell lenniök, hogy soha semmi ne történjék, ami megsértené a folytonosság törvényét és a matematika összes többi tökéletes pontosságú szabályait."

Az eleve meglevő szabály és rend, nem az oksági lánc szabja meg a valóság szerkezetét. „És ez oly igaz, hogy a világban tetszés szerint felvett pont mozgása meghatározott természetű vonal. …Ez a vonal kétségkívül egyenes vonal, ha az a pont egyedül lehetne a világon; most azonban a mechanika törvényei miatt valamennyi test összeműködésének az eredménye, és éppen ezen összeműködés által eleve meg van állapítva."

Egyetlen anyagi pont mozgásában is az *egész* világmindenség jelenléte tükröződik: nem csoda, ha minden ok-okozati láncra bonthatóság eleve reménytelen, akkor is, ha a történések *önmagukban* determináltak. Hogyan is lehetne gyakorló oksági láncokba fonni a világmindenség végtelenjét?

*

Csak az valósul meg, ami lehetséges, és minden lehetséges megvalósul. A valóság éppen a lehetségesség létezési formája. A lehetőség nem a logika durva „*A* nem lehet nem-*A*" törvénye, a lehetőségek birodalma maga a mindenség, melynek minden része mindig érvényesül minden pontjában. Minden pont szem-pont (a szót is ő teremtette: point de vue), ahonnan az egész mindenség látszik. „Ezt minden éleselméjűsége mellett sem látta eléggé Bayle úr, midőn azt hitte, hogy lehetséges a Buridán szamaráéhoz hasonló eset, és hogy az ember tökéletes egyensúlyban álló körülmények közé helyezve is, nem kevésbé volna képes választani. Meg kell ugyanis jegyeznünk, hogy a tökéletes egyensúly esete agyrém, amely sohasem következik be, minthogy a mindenség két egyenlő és hasonló részre sem nem osztható, sem nem szelhető. A mindenség nem olyan, mint az ellipszis vagy más hasonló tojásdad idom, mely a középpontján keresztül húzott egyenessel két megegyező részre osztható. A mindenségnek nincs középpontja, részei végtelenül változatosak. …Még az anyagnak legkisebb részeiben is teremtmények, élők, állatok, entelechiák és lelkek egész világa létezik, …nincsen a világegyetemben semmi míveletlen, terméketlen, halott, nincs káosz, nincs zavar, csak látszólag, körülbelül úgy, mint távolabbról szemlélt halastóban, amelyben csak zavaros mozgást látnánk és úgyszólván a halak sürgését-forgását, anélkül hogy magukat a halakat megkülönböztethetnők."

II.

Louis Couturat és Bertrand Russel Leibniz-monográfiája óta a leibnizi gondolkozás kiindulásának és középpontjának logikáját szokás tekinteni. Maga Leibniz is efféleképpen nyilatkozott öregkorában Gabriel Wagnernek, a hamburgi *Vernunftübungen* című filozófiai hetilap kiadójának: „…Mihelyst logikát kezdtem hallgatni – írja visszaemlékezve a lipcsei Nicolai-Schulében töltött éveire –, igen meghatott a gondolatok eloszlása és rendje, amit a logikában találtam. Rögtön észrevettem, már amennyire 13 éves gyerek ilyesmit észrevehet, hogy itt valami nagyszerű dolog rejtőzik. A legnagyobb örömöt az ún. osztályozásokban találtam, valósággal a világi dolgok mintáját láttam a predikamentumokban, és mindenféle logikakönyvben böngésztem, hogy valahol a legjobb és legrészletesebb efféle regiszterre találjak. …Az ismeretek ilyen tabulírozása közben addig gyakoroltam magam a különféle osztásokban és alosztásokban, míg ezekben láttam a gondolatok kapcsolatát és rendjük alapját. S ekkor azután volt mit hallgatni Ramistáknak és fél-Ramistáknak! Mihelyst összetartozó dolgok valamilyen regiszterét találtam, kiváltképpen ha nemre vagy közös tulajdonságra bukkantam, amelybe megadott fajtákból adott számú tartozott, mint pl. az indulatok száma vagy az erények száma vagy a bűnök száma, s táblázatba rendezve megnéztem, hogy is alakulnak egymás után a fajták, rendszerint azt láttam, hogy a felsorolás nem teljes, mindig még több fajtát lehetett az addigiakhoz csatolni. …Sok minden eszembe jutott ezzel kapcsolatban, időnként a tanítómnak is elmondtam egyetmást, pl., hogy nem lehetne-e ahhoz hasonlóan, mint ahogyan a simplex terminusokat (a fogalmakat) az ismert predikamentumokkal elrendezzük, nem lehetne-e, mondom, elrendezni így valamiféle predikátumokkal a komplex terminusokat, azaz az igazságokat is. Akkoriban ugyanis még nem tudtam, hogy amit keresek, éppen matematikusok bizonyításaiban találom meg."

Ezt a visszaemlékezést már a második gyerekkor küszöbén, 1697-ben írta Leibniz, amikor filozófiai rendszere végérvényesen készen volt. Annál fontosabb ez a gyerekkorba visszavetített párhuzam a teljes felsorolás lehetetlensége és a tökéletes matematikai dedukció között. Egyetlen általános tulajdonság sem meríthető ki egymást követő alosztások sorozatával, és bármilyen bonyolult igaz ítélet bebizonyítható. De az osztályozásokkal dolgozó elemzés és a formális bizonyítás mégsem két külön világ: összefüggenek az emberi megismerés síkján. Az általános fogalom ugyanis konkrét kategóriákkal való kimeríthetetlensége ellenére sem „flatus vocis", mint középkori elődeinél, a nominalistáknál. Az általános fogalmak, az universaliák, emberi ismeretek, s mint ilyenek, szükségképpen konfúzusak. A nyelv, amit a dolgokról beszélve használunk, eleve pontatlan, a fogalmak a gondolkozás termékei, csak a dolgok valóságosak. De ha valahogyan a dolgokat a nyelv szavainál jobb jelekkel, „karakterekkel" lehetne jelölni, a matematika jeleihez hasonlóan, akkor néhány alkalmas karakter és a közönséges számok segítségével a gondolkozás különleges kombinációszámításra lenne redukálható. Ha ismernénk ennek az ideális, univerzális nyelvnek a szavait s a nyelvtanát, akkor a gondolkozás akár *gépesíthető* lenne.

Mindebben semmi eredeti gondolat nincsen, a nominalista felfogást Leibniz lipcsei tanára, Jacob Thomasius (1622–1684) lutheránus skolasztikájából vette át, az ideális nyelv álmát jénai professzorától, a lulliánus Erhard Weigeltől (1625–1699). Ha megmarad a német egyetemek középkort újratermelő s dédelgető világában, fényes értelme talán a skolasztikus filozófia reneszánszát eredményezte volna. Szerencsére a lipcsei egyetem visszadobta a túl fiatal és túl öntudatos ifjú titán doktori disszertációját, s a megsértett diák örökre odahagyta szülővárosát. Első állomása a Lipcsét Nürnberggel összekötő nagy kereskedelmi út nyugati végpontja volt. Az altdorfi egyetemen és Nürnbergben egészen más környezetbe került, mint amit Lipcse meg Jéna lutheránus skolasztikával telített egyetemein látott. Nürnberg volt a német világ legfontosabb itáliai kapuja, egy darab németföldi Itália, ahol beáramlott s transzformálódott a nagy déli példakép kereskedelme és kultúrája. A kíváncsi diákot minden érdekelte a mozgalmas városban: még a rózsakeresztesek közé is felvétette magát, egy félig tréfás, félig komoly alkimista írással. A német egyetemek középkorából Nürnberg reneszánszába cseppent diák megtanulta az emberek közötti mozgáshoz szükséges társadalmi „sliffet". Diplomata lett.

*

De a XVII. század hatvanas éveiben Itália már a múltat képviselte, a német világ viszonylag leghaladottabb atomjai már régen nem Itália, hanem a két nyugati szomszéd, Franciaország és Hollandia után igazodtak. Főleg Franciaország hatott, politikai okok miatt is, igen erősen. A kis Rajna menti választók és hercegecskék mind Versailles-t utánozták, a Rajna menti német világ kultúrában és beszédben kétnyelvű lett, s egy része végleg beolvadt a fejlettebb gazdasági és szellemi kultúrájú francia nyelvterületbe. Az egyetlen erő, amely a hasonlíthatatlanul finomabb és magasabb francia műveltségnek ellenállhatott volna, a Szent Német–Római Császárság imaginárius egysége volt, ami ellen azonban a franciák mindig könnyen kijátszhatták a kis német fejedelemségek ragaszkodását „libertas”-aikhoz, a vallási ellentéteket, s nem utolsósorban a Habsburg-ház ülepét rágó törököt. Az öt tényező – francia-imádat, Német Birodalom képzete, a „libertas”-ok, vallási ellentétek és a török – különféle kombinációjából tevődött össze a XVII. század második felében a német világ bonyolult spektruma.

Ebben a pokoli zűrzavarban egyetlen német fejedelem látott tisztán: Johann Philipp von Schönborn (1605–1674), mainzi érsek-választó. Ez a francia fejű és német szívű nagyúr, aki mindig szívesen hangoztatta „paraszt származását”, egész életében a harmincéves háború sebeit igyekezett gyógyítani. Nagy építő volt, a német barokk terjengős eleganciája az ő udvarából áradt szét mindenfelé a német világban, egész Magyarországig. Bár hivatalból katolikus volt, katolicizmusa az a német augusztinianizmus, amit inkább csak külsőségek különböztetnek meg a lutheránus augusztinianizmus bensőséges Chrisztológiájától. Egyébként is uralkodásának egyik vezető elve volt a türelem; ő volt az első fejedelem Európában, aki megtiltotta a boszorkánypereket. Mint később kedves emberének, Leibniznek elárulta, Friedrich von Spee, a nagy német jezsuita-misztikus hatására. Johann Philipptől tudta meg Leibniz, hogy annak a híres boszorkányüldözés ellen írott könyvnek, amelyik egy protestáns pap fordításában terjedt el Németországban, Friedrich von Spee a szerzője.

Johann Philipp volt a Fejedelem, akit azután Leibniz egész életében keresett, s nem talált újra, soha. Johann Philipp volt a Hatalom, aki Isten eleve elrendelt jogi igazságait közvetíthette volna a Földre, a Hatalom, aki az isteni jog logikailag tiszta formuláit átültethette volna az emberi jogviszonyok zűrzavaros világába.

Johann Philipp értett hozzá, hogy udvarába gyűjtse a német világ legértelmesebb embereit. Az ő kancelláriáján dolgoztak a kor legjobb német politikusai, Arnold von Hörnigk, Wilhelm von Schröder s a nagy jogász, Johann Christian von Boineburg, Leibniz patrónusa. Az érsek-választó háziorvosa Johann Joachim Becher (1635–1682) volt, a híres paracelzista kémikus, a flogisztonelmélet előkészítője. A mainzi udvarban ismerte meg Leibniz későbbi legjobb barátját, Johann Daniel Crafftot (1624–1697), ezt a nyughatatlan, örökké mozgó, tervek és találmányok tömege alatt roskadozó Doktor Faustust, nagy álmodót, fejedelmek hitegetőjét, az új, nagy pénzeket kívánó és bonyolult mechanizmusokat használó technika egyik jellegzetes alakját.

Ez az új technológia sem volt német találmány, itáliai–holland–francia mesterek évszázados munkájának az eredménye volt. De mint mindent, amit utánozni kezdtek, a németek ezt is transzformálták, s a mechanizmusok kauzális elméletéből és gyakorlatából náluk álom lett: az élő természet, az eleven erők célszerű szolgálatába állításának az álma. Ott van az „erő” földben, vízben, szélben, állandó mennyiségben, fogyhatatlanul. Az ember feladata az „eleven erő” átalakítása. S ehhez az út a *természet* megismerésén át vezet. Nem a *mechanizmusokén*. Itt kezdődik a híres „Leibniz kontra Descartes” téma, Mainzban. S voltaképpen nem egyéb, mint a Descartes kontra Paracelsus-pör soron következő lépése.

*

Hogy megtehesse ezt a lépést, először meg kellett ismernie az ellenfélt. S Leibniz, egy időre legalábbis, karteziánus lett. A karteziánizmus sohasem volt a XVII. században általánosan elfogadott filozófia. Pontosabban, a karteziánizmust csak részben fogadták el: a mechanisztikus alapelveket és a geometrizmusát. Lélek és anyag összeférhetetlen dualizmusára építő metafizikáját vagy borzadva utasították el, vagy megpróbálták tompítani. A mechanizmus és geometrizmus azonban a kor leghőbb vágyait fejezte ki, s mindenki, még az antikarteziánusok is elfogadták.

Milyen lehetett a geometria szerepe a XVII. század középi emberek gondolkozásában? Leginkább talán a mi korunk „kibernetika” név mögött rejtőző komplexumához lehetne hasonlítani. Olyasvalami volt a geometria – mégpedig a klasszikus, Euklidész, Apollóniosz és Arkhimédész modorában elképzelt geometria –, amitől homályosan, közelebbről meg nem határozottan és meg nem határozhatóan a kor gondolkozásának univerzális megváltását várták. Aki „more geometrico” csinált valamit, azaz plauzibilis axiómákból levezetett tételek formájában, biztos lehetett a sikerben.

A német természetfilozófia és a skolasztikus logika világából érkező Leibniz megpróbált ugyanolyan jó geométerré válni, mint a többi párizsi filozófus. A kor legnagyobb geométere, Huygens tanította matematikára, s jóindulattal javítgatta az okos, de a geometriában járatlan politikus szarvashibáit. Talán az egész Leibniz-életmű viszonylag legjobban tisztázott része Leibniz matematikája, s ez elsősorban a modern matematikatörténet-írás ma élő legnagyobb szaktekintélyének, Jos. E. Hofmann úrnak köszönhető. A hatalmas Leibniz-irodalomból óriásként emelkedik ki Leibniz párizsi éveiről írott monográfiája. Ha a meggyőző, gazdag, de csak matematikus szakembereknek megközelíthető részleteket átugorva az összefoglalásra lapozunk, a következőket olvashatjuk Leibniz párizsi matematikai eredményeiről: „Egészében véve tudatos haladást láthatunk nála a régi, tisztán geometrikus szemléletmódtól a modern analitikus-funkcionális szemléletmód irányába. A szavakból jelekre tér át, és a kezdeti naiv indivizibiliaelképzelést (hogy ti. a felület ordinátái összességéből »van összetéve«) javított indivizibiliaelképzeléssel (a karakterisztikus háromszög segítségével) helyettesíti; a Leibniz-féle szimbolika pontosan ezt a felfogást tükrözi. Ezáltal megteremtette a sikeres differenciálgeometriai vizsgálatok előfeltételét…"

Lényegében ugyanezzel a „javított indivizibilia-elképzeléssel" dolgozott már jóval Leibniz előtt Pascal és Newton is, és megkísérelték, sokkal pontosabban, mint valaha is Leibniz, matematikailag teljesen precizírozni, a mi határátmenetünkhöz hasonlítható fogalmakat alkalmazva, az egész eljárást. Leibniz láthatóan sohasem törődött a kontinuum valamiféle „aritmetizálásával". Skolasztikán nevelkedett gondolkozása feltehetően éppen ott nem látott semmi nehézséget, ahol a többiek szerint a probléma magva rejtőzött. Nem interpretálta elődeinél jobban az indivizibiliákat. Egyáltalán nem interpretálta. A szubsztanciális formák világába sorolta, s csak a *műveleti szabályokat* kereste, ahogyan létezésük *bic et nunc* meglátszik a dolgokon.

S a többi nagy skolasztikus gondolkozóhoz hasonlóan már csak a kész szabályokat közölte, évek múlva. A jegyzetei, ahogyan a szabályokhoz jutott, máig kiadatlanok. A múlt század szemérmes történészei tiszteletlenségnek érezték ezeknek a – ahogyan ők nevezték – „hibákkal" zsúfolt zseniális útkereséseknek a közlését. Azok a műveleti szabályok azonban, amiket Leibniz 1684-es *Acta Eruditorum*-beli cikkében közölt, tiszták és egyszerűek. Legkevésbé sem új az elvük: már Fermat és Descartes érintőszerkesztés-vitája mélyén ugyanez az elv rejtőzött. Leibniz nagy felfedezése a szabályok egyetlen egységes *műveletként*, a differenciálszámítás *algoritmusaként* való összefoglalása. Ez a nagy újság, a geometria interpretációtól függetleníthető *operatív* szemlélet. Az egyes szabályokat már régen ismerték. Senki nem vette azonban észre Leibnizig, hogy ezek a szabályok egy nagy és egységes számítás *alapműveletei*. Akárcsak az algebra műveleteivel, ezekkel az új műveletekkel is felírhatók egyenletek, s ahogyan a közönséges algebrai egyenletekből gyökvonással, ezekből a *differenciálegyenletekből* is meghatározott művelettel, az *integrálás* (megint megfelelő számítási szabályokkal megadott) *műveletével* ki lehet számítani a differenciálás jele alá foglalt „ismeretlent". Ahogyan a differenciálás érintőszerkesztésként volt értelmezhető, az integrálás is *interpretálható* volt az indivizibiliák vagy a kor divatos geometriai transzformációinak a köntösébe öltöztetve. Leibniz a jobb megértés kedvéért tényleg megpróbálkozott efféle hagyományos interpretációkkal, s a kilencvenes évektől kezdve – a méltatlan támadásoktól is sértve – belebonyolódott a módszere indoklásába, a különféle „végtelen kicsinyekkel". Ugyanakkor azonban – s ez volt a fontos – a differenciálás és integrálás *algoritmusának* alkalmazásával valóságos hálót font lazán összetartozó eredményekből a műveleti szimbólumok jele alatt szereplő „ismeretlen" köré; s észrevette, hogy a differenciál- és integrálszámítás hálójába befogott „ismeretlen” nem az többé, ami az algebrában volt. Új fogalom jött létre, s ezt új néven kellett nevezni. Leibniz a módszere által teremtett új fogalmat a lehető legszerencsésebb névvel *függvény*-nek nevezte. Új világ született a matematikában, a függvények elmélete, az analízis, ami nélkül az újkori természettudomány fejlődése elképzelhetetlen.

Leibniz módszere a matematikai egzaktság szempontjából kifogásolhatóbb, mint Newton vagy akár Pascal és Wallis eljárása. De egy differenciálatlanabb, ősibb és ígéretteljesebb gondolkozási mintáig menve vissza új, gazdag, százféle variánsra bomló és ezért alkalmazkodásképes matematika forrására bukkant. Newton híres félreértése, a „lusus Naturae”, nagyon találó félreértés volt. Éppen ez a *lusus naturae*, a természet játékos és tréfás kedve, a fejlődés motorja. Ahol ez kivész, megmerevednek a gondolatok. Lehet, hogy csonttá fagyott tökéletességben, mint Newton fluxiós-módszere. Folytatni azonban csak a sok-sok változatot megengedő játékot lehet.

*

Leibniz láthatóan nem szívesen indult Londonba és Hollandián át haza 1676 késő őszén. Ha nem kényszeríti a megélhetés, még sokáig Párizsban maradt volna. Mainzba nem mehetett vissza, két nagy patrónusa, az érsek-választó és Boineburg meghalt. A német duodec-fejedelemségek áttekinthetetlen, kusza mozaikja folyton változott. A weszfáliai béke bomlasztó hatása mostanra világosan manifesztálódott. A nyugati fejedelemségek francia hatás vagy uralom, a bajorok és szászok önmagukba zárt, elmaradt, feudálisnál is rosszabb arisztokratikus-rendi autarkiában, a császár törökkel küzdve és magyarokkal bajlódva: ez volt a Német Birodalom. Városok, ahogyan Itáliában, Franciaországban, Németalföldön, Angliában értették a „várost”, nem voltak. A társadalmi, gazdasági és szellemi élet gócpontjai fejedelmek és hercegecskék udvarai voltak. Ha valaki ebben az ezeregy-hercegországban érvényesülni akart, először is egy „von”-t kellett szerezzen magának, udvari frakkot és parókát. S ha szerencséje volt, s illően hajlott gerince, felléphetett szerény szereplőként a Hatalom karneválján, amit úgy hívtak, hogy Német Udvari Világ.

Leibniz *„Johann Friedrich von Braunschweig–Lüneburg hannoveri herceg”* szolgálatába lépett, udvari tanácsosként, s elsősorban a hercegi könyvtár felügyeletével megbízva. Johann Friedrich viszonylag értelmes herceg volt, sok pénzt elköltött a könyvtárára. Azonban hamar meghalt (1679), s utóda, Ernst August már egészen másféle ember volt. A könyvtár költségvetése jelentéktelenre zsugorodott, s Leibniz kénytelen volt másféleképpen hasznosítani magát. Ért a matematikához – ajánlkozott – s különféle alkalmazásaihoz: földméréshez, térképkészítéshez, az ország kereskedelmi mérlegének a megtervezéséhez. Több érdekes találmánya ismert, például a számológép, „amelynek modelljét – írta 1680 elején –, merem állítani, megcsodálták Párizsban. Több más matematikai gépet is feltaláltam, meg azután egy szerkezetet ágyúk és más igen nehéz tárgyak fogatolására”; s azután kínálja pumpákra, malmokra s más hasonló dolgokra alkalmazható találmányait.

A herceg birtokaihoz tartozó Harz-hegységi bányákban éppen efféle találmányok kellettek. Akkoriban a bányaüzem s az ércelőkészítés energiaforrása a vízierő volt, s így száraz esztendőkben a termelés erősen csökkent. Leibniz függetleníteni akarta a víz szeszélyétől a termelést, éspedig a levegőenergia szolgálatába állításával. Nagyszabású szélmalmok építését tervezte. „Ami a bányaműveket illeti – írja a harzi munkálatairól 1682-ben –, ezek víz- és most már szélművek is, és ilyen műveket használunk a víz kiszivattyúzására, az ércek kiemelésére és továbbítására, a zúzóművekben az ércek aprítására s végül a fújtatók üzemeltetésére. A vízművekhez tavak kellenek, árkok, vízfolyás. Kell a kerekeknek épület, kell vízvezeték, árkolás. A szélműveknek az az előnye a vízművekhez képest, hogy mennyiségük és erejük nem korlátozott. Mert vízikerék nem lehet több, mint vízesés, és a kerekeket sem lehet magasabbra csinálni a vízesésnél, és a lapátokat sem szélesebbre, mint ahogyan a víz mennyisége megszabja. Ezzel ellentétben, ahol egy szélmalom áll, állhat akár 10 is, és olyan magasra meg szélesre lehet csinálni, amilyenre csak akarjuk, ha már egyszer megy a dolog, s egyetlen legény akár 10 szélmalmot is eligazíthat, ha elég közel vannak egymáshoz…”

Újra meg újra magyarázza, részletesen, hivataloknak és hercegeknek, a szélmalmok előnyeit. S hogy a már meglévő vízműveket is használni lehessen, s hogy függetlenítse magát az időjárás szeszélyétől, zseniális energetikai megoldást gondolt ki: a „közvetett szélmalmok” rendszerét, amely „az egyébként túl mélyen folyó és vízkerekeinkre már nem hasznosítható vizet nagy mennyiségben a tartaléktóba emeli, ahonnan most már újból a vízikerekekre folyhat”. S hogy a víz felemelését minél gazdaságosabbá tegye, kidolgozott „egy roppant csodálatraméltó eszközt, amely erőveszteség nélkül, in distans, igen nagy távolságban tud operálni, és így vízikereknél applikálva, igen nagy erő- és költségmegtakarítás nyerhető, amely a bányagépészet legfőbb desiderátuma.” „Úgy járok el – írja egy másik levelében –, hogy levegővel tele csöveket alkalmazok, és ezzel lököm meg a vizet 100 lépésnél is nagyobb távolságból, s ha még messzebb akarok hatni, nem kell egyéb hosszabb csőnél.”

Leibniz zseniális technikai elképzeléseihez sem az anyagok, sem az emberek nem voltak elég jók. A csövek széthasadtak a nagy nyomás alatt, az első közvetett szélmalmok ugyan elkészültek, s ideig-óráig jártak is, de mindig eltört valami, folyton javítani kellett, a költség nőtt, a bányahivatal megunta a dolgot, s végül nyíltan szabotálta Leibniz kísérleteit.

„A Harz – írja az elkeseredett feltaláló – valóságos Teátruma a Természetnek s a technikának, mely kettő egymásnak feszülve hajtja ott egymást, hanem az emberek, azok azután nem *curios*-ok, inkább minden kísérletben kerékkötők, pedig itt különösen hasznos lenne minden curiositas és invenció…”

Ha csak fele igaz a sok kellemetlenkedésnek s ártásnak, amiről Leibniz beadványaiban panaszkodik – pedig Leibniz levelei mindig szárazak, tárgyilagosak –, már az is bőven elegendő bukása magyarázatára. 1685-ben végleg, megverten távozott a Harzból, de egykori munkatársai, igazi „curios” emberek, egyszerű bányamesterek, falusi kovácsok és gépészek, még évek múlva is értesítik a Tanácsos Urat a harzi újságokról. „Véletlenül láttam itt legutóbb egy közeli vendégfogadó előtt Krafft urat – írja Jobst Dietrich Brandshagen 1691-ben Clausthalból – a kocsijából kiszállni, és mivel tudom, hogy milyen hűséges barátja az Udvari Tanácsos Úrnak, hozzája léptem, és a Tanácsos Úr nevében felajánlottam szolgálatomat…”

Hiába harcolt Leibniz Don Quijoteként a jövendő szélmalmaival. Technikai géniusza s a társadalmi környezete között túlságosan nagy szakadék volt. Azonban a szél és a víz munkavégző képességével foglalkozva, a sok kísérlet után, a nyolcvanas évek végén, nyilván nem a harzi tapasztalataitól függetlenül fogalmazta meg a mechanikai munkavégző képesség, a mechanikai energia, vagy ahogyan ő nevezte, „eleven erő” megmaradásának az elvét. Az integrál- és differenciálszámítás algoritmusa mellett talán ez a legfontosabb a legmaradandóbb alkotása. S ezt az elméletet a víz- és szélerőművek bármilyen tökéletlen, de tényleges, kézzelfogható realizációja „váltotta ki”. Olyan az ember is, mint a többi állat: csak azt érti meg, amit megfog. Kiváltképpen a német ember, amint a „begreifen” szó is mutatja.

*

A bányavállalkozás csődje után az Udvari Tanácsos Úrnak új jogcímet kellett keresni Legkegyelmesebb Urainál az eltartásra. A Braunschweig–Lüneburgi ház szerencsés házasságok s még inkább más Házak szerencsétlensége miatt gyorsan emelkedett. Ernst August előtt a Választófejedelemség, a Ház előtt még szebb lehetőségek reménye fénylett. Kapóra jött Leibniz ajánlata: megírja a nagy jövőjű Ház múltját. Az ötlet alapja egy régi gyanúja volt, miszerint a Braunschweigi Ház és az Esték közös őstől származnak. A terv realizálása hosszas levéltári kutatásokat és utazást kívánt; a kutatás nagy részét ki lehetett adni albérletbe, s a megmaradt idővel értelmesebbet kezdeni: ez tetszett a tervben Leibniznek. Ha a Ház múltját levéltári adatokkal igazolhatóan a tiszteletre méltó középkor arisztokratikus homályáig lehet követni, az nem lehet közömbös a Ház jövőjére: ez vonzotta a tervben a herceget. Kisebb-nagyobb alkudozások után létrejött az egyezség, s Leibniz elkezdette egész életét kísérő, végeláthatatlan történetírói munkáját.

Egy hercegi ház történetét akarta megírni, de hogyan! Egy darab föld s egy nép története lehetett volna belőle, úgy, ahogyan még ma sem tudunk történelmet írni. „Hogy felségednek valami fogalma legyen – írja tervéről 1691-ben –, először is ennek a Földnek legrégibb korát kell tárgyalnom, attól kezdve, hogy valószínűleg (a Harz kivételével) az egész víz alatt állott; azután azt, miért találhatók a lüneburgi pusztán afféle „kígyónyelvek”, mint Málta szigetén, amik nem egyebek, mint ősi tengeri lények fogai, aminthogy a Burmans-barlangban meg a scharzfeldi lyukban is ismeretlen állatok csontjai lelhetők; én magam is hoztam ilyeneket a Burmans-barlangból. Azután el kell mondani, hogyan töltődtek fel egész tengerek, s miért található meg a halak nyoma a kőben, mint a borostyánkőben a legyek, hogyan töltődtek meg a repedések érccel…”

Ezek után kell tárgyalni a földrész lakóit, a legrégibb időktől kezdve, archeológiai és nyelvészeti adatok alapján, míg eljutunk az írott emlékekig. Leibniz ezután figyelmeztet a perzsa és a német nyelv valamilyen „rokonságára”. S miután mindezt részletesen tárgyalta volna, azután tervezte elkezdeni a Braunschweigi Ház közvetlen őseinek, a Welfeknek a történetét.

A Braunschweigi Ház és az Esték közös eredetét levéltári kutatással sokáig nem sikerült igazolnia. „Ezek után olyan szerencsés voltam – írja Leibniz a beszámolójában –, hogy egy pisai szerzetestől megtudtam, van Lombardiában egy kolostor, Vangadizza a neve, ahol sok régi őrgrófokat temettek el, és emlékek találhatók ott, amik hasznosak lehetnek az Esték története szempontjából. Odamentem, s látom, ott van eltemetve Azo Marchio, a Legfelségesebb Braunschweigi és Este Ház közös ősapja, feleségével, a Welf-Házból való Cunigundával.”

*

Az itáliai utazás nemcsak a történetírónak hozott eredményt. Ez az út Leibniz egész életének a csúcsa. Itáliában végre olyan emberek között élt, akik értették és értékelték gondolatait, akikkel beszélgethetett a kor nagy kérdéseiről: a mozgásról, az új matematikai módszerekről, a folytonosság és a lélek problémáiról, a kegyelemről, az egyházak újraegyesítéséről, XIV. Lajos gonoszságáról, a törökökről, a német s az olasz nép jövőjéről s ezer, csak tudós és irodalmár embereknek fontos apróságokról, amit kívülállók meg sem tudnak érteni, s csak a „tudósok respublikájába” tartozók érzik az ízét.

Rómában az Accademia fisico-matematico tudósaival nap mint nap találkozott: Ciampinivel, Bianchinivel, Auzout-val. Sorra adták kézről kézre Vitale Gordani, Domenico Quarteroni, Giovanni Battista del Palagio. Francesco Bianchininek értekezést írt a kopernikánus világrend és az egyház tanításának összeegyeztethetőségéről, gyakran beszélgetett a Kínába induló jezsuita atyákkal, Páter Claudio Filippo Grimaldival és Páter Giovanni Laureatival, s kérte őket, hogy ne csak a keresztény hit terjesztésére ügyeljenek, hanem arra is, hogy feltárják Kína évezredes kultúráját s bölcsességét. XI. Innocent halálakor hosszú latin költeményben üdvözölte a trónra lépő VIII. Sándor pápát, abbate Raffael Fabrettivel járt a katakombákba. Annyira illett Rómába, hogy a Vatikáni könyvtárban ajánlottak állást neki. Firenzében Antonio Magliabechi, a Nagyherceg tudós könyvtárosa látta vendégül, s az Accademia del Cimento tagjaival beszélgetett, Vincenzo Vivianival, „Galilei utolsó élő tanítványával", Francesco Redivel, a Nagyherceg orvosával. Abbate Bodeni néven akkoriban Firenzében élt Rudolf Christian von Bodenhausen. Leibniz megígérte neki, hogy elküldi *Dynamiká*-ja kéziratát. Bolognában őslénytani kutatásait a kor legnagyobb anatómusával, Marcello Malpighivel beszélte meg, Pármában Benedetto Bacchinivel, a *Giornale De' Letterati* kiadójával találkozott, Páduában Charles Patinnel, a humanistával, Francesco Spoletivel és a kor egyik legnagyobb matematikusával, Stefano degli Angelivel értekezett. Itt volt igazán otthon, ennek a nagyszívű és a nyomorban is törhetetlen kedvű, tehetséges népnek a földjén… Egy egyszerű pisai szerzetes, Teofilo Marchetti, meghallván, hogy miben fáradozik a messziről jött tudós, üzent, hogy menjen el a Vangadizza kolostorba… S a boldog történész diadalmas levélben számolhatott be híres kollégájának, Pater Jean Mabillonnak a nagy eredményről.

*

Itáliából hazatérve még évekig tartott az élmény melegítő ereje, a filozófus nagy, végleges vázlatba foglalhatta háláját: jól van így, Uram, jól van. Azután lassan, alig észrevehetőket lépve, reá tört az öregség, a hatalom önzése, a magány. A német világ áttekinthetetlen mozaikja újból más erők szerint rendeződött, s a megvénült filozófus hiába keresett magának új, méltóbb gazdát az angol királlyá választott Georg Ludwignál.

III.

„Mint a kutyát, úgy temették el." A mai Leibniz-kutató generáció egyik ismert képviselője, Yvon Belaval írja ezt a mondatot szép, száraz, mindenféle romantikától, irodalomtól és hatásvadászattól mentes Leibniz-könyvében. A nagy filozófus, Birodalmi Báró, Cár tanácsosa, az új matematikai módszer megalkotója, a Berlini Akadémia létrehozója, uralkodók és hercegek barátja úgy halt meg, hogy jóformán észre sem vették. Egyedül a francia tudományos akadémia egyik ülésén emlékezett meg haláláról Fontenelle, de Fontenelle-nek az volt a foglalkozása, hogy kisebb-nagyobb emberek haláláról megemlékezzen. Ő volt a tudósok respublikájában a siratóasszony.

A XVIII. században két nagyon nagy író, Voltaire és Swift gúnyolta ki filozófiájának egy-egy alappillérét. A *Candide* (1759) máig a leibnizi etika leghűségesebb ismertetése, a *Micromégas*-ban pedig utolérhetetlenül világosan jellemzi Voltaire az eleve elrendelt harmónia elvét: „Hát te, barátom – fordult (Micromégas) egy Leibniz-hivőhöz, aki ott tartózkodott –, a te lelked micsoda? – Így válaszolt a Leibniz-hivő: – Mutató, mely az órákat mutatja, míg testem harangozik hozzá; vagy ha úgy kívánja, ő harangozik, míg a testem mutatja az időt; vagy a mindenség tükre a lelkem, és a testem a tükör szegélye: hiszen ez nyilvánvaló!”

Swift támadása még veszélyesebb, mert a leibnizi filozófia logikai alapjait rendíti meg, amikor Gulliver a nagy lagadói akadémián meglátogatja a spekulatív tudományok részlegét, ahol a tudósok a kombinatorikus-heurisztika segítségével kutatnak. A XVIII. században nem nagyon bíztak a kombinatorika heurisztikus erejében. Ma, a kombinatorikus módszerek nagy reneszánsza idején természetesen a XVII. századi kombinatorika s legnagyobb képviselője, Leibniz újból nagyon tisztelt. A XVIII. században azonban éppen úgy kacagtak a kombinatorikát kigúnyoló Swifttel, mint az eleve elrendelt harmóniát és a leibnizi optimizmust kigúnyoló Voltaire-rel.

Még méltatlanabbul bánt Leibnizcel a XIX. század: a német filozófiatörténet-írás Kant elődjét fedezte fel benne. Mert Pangloss úrhoz és a lagadói kombinatorikushoz tényleg van valami köze Leibniznek, Kanthoz azonban semmi. Lassan, a matematikai és formális logikai módszerek újfent divatbajöttével párhuzamosan kezdődött a XX. században a valóságosnak megfelelőbb Leibniz-kép megrajzolása, azonban még ma is nagyon távoli cél a leibnizi életmű teljes megértése. Magyar nyelven S. Beke Anna Leibniz-könyvében találhatja a legjobb tájékoztatást az olvasó.

A következőkben a fentebb idézett egyetlen mondatot próbáljuk kommentálni: „Mint a kutyát, úgy temették el.”

Amikor Leibniz iskolába járt, a német nevelésben mindenfelé a skolasztika uralkodott. Katolikus és protestáns iskoláztatás ebben a tekintetben nem különbözött, talán a protestáns skolasztika még merevebb és még elmaradottabb volt, mert az új vallásban elevenebben élt a dogmatizmus. Különösen híres volt hitbéli szilárdságáról a lipcsei egyetem, ahol Leibniz atyja morálfilozófiát tanított. Mutatja az atyai ház szellemét az a kis anekdota, melyet később maga Leibniz szeretett mesélni. Még kicsi gyerek volt, mikor egy vasárnap reggel olyan magasról, hogy azt akkora gyerek ki nem szokta bírni élve, leesett. „Apám – írja Leibniz – azonnal isten különös kegyelmét ismerte fel ebben, s rögtön üzent a templomba, hogy istentisztelet után mondjanak hálaadó imát istennek. Erről az eseményről azután sokáig beszéltek a városban."

A lutheránizmusnak nem volt önálló filozófiája, a reneszánsz-arisztoteliánizmust vette át, s mellé válogatott fejezeteket az antik, középkori és reneszánsz misztika hatalmas birodalmából. A XVII. század első felében különösen a számmisztika, kabbala és kombinatorika különféle formái divatoztak a német világban. Raymundus Lullus (1232?–1315) *Ars magná*-ját újra és újra kiadták a XVII. század első felében, s a kor leghíresebb német tudósai írtak hozzá kommentárt, például Johann Heinrich *Alstedt* (1588–1638), a gyulafehérvári főiskola megszervezője, és Athanasius *Kircher* (1602–1680) atya, a jezsuita rend nagy tekintélyű természettudósa. A lutheránizmus és a németországi jezsuitizmus között gondolkozás tekintetében nem volt nagyon nagy különbség, ugyanazt a korhoz képest elmaradt, misztikus elemekkel kevert arisztoteliánizmust tanította mind a kettő.

A német gondolkozás a XVII. században nagyon elmaradt Itáliához, Franciaországhoz, Hollandiához, Angliához képest. Leibniz életművét ehhez az elmaradottsághoz kell mérni. Ő egymaga, emberfeletti szorgalommal teremtett a németeknek a kor színvonalának megfelelő filozófiát, matematikát, természettudományt és történetírást. S közben soha nem felejtette el, honnan indult, a XVII. századi német gondolkozás zavaros áradása alatt is megtalált valami ősi, még Cusanusból és a német reneszánsz mesteremberek józan bölcsességéből táplálkozó forrást. Cusanustól megtanulta azt a mély természetimádatot, amelyet Dilthey a németek igazi, „titkos" vallásának nevezett, a német polgároktól a tiszta beszédet, szorgalmat, munkaszeretetet, amit azután jelmondatként követett egész életében: *In Worten die Klarbeit, in Sachen den Nutzen* (a tiszta beszédet s a hasznos dolgokat keresd).

*

Leibniz egész életében szolgálatában állott valakinek, sohasem tudott olyan úri módra, szabadon filozofálni, mint Descartes. Ezt nem szabad elfelejteni, mert másként gondolkozik az ember, ha a fejével kell megkeresni a hasába valót. Kiváltképpen, ha valakinek olyan nagy az étvágya, mint Leibniznek. A mainzi érsek-választó, Johann Philipp von Schönborn (1605–1674) azonban igen jó gazdája volt Leibniznek, soha többet nem volt azután ilyen jó gazdája. Johann Philipp, akit a nép halála után „német Salamon" néven emlegetett, volt a harmincéves háborúban szörnyen elpusztított Németország legfőbb reménysége.

A harmincéves háború nemcsak emberéletben s anyagi javakban okozott borzasztó pusztítást (egyes becslések szerint Németország lakossága

16 millióról 6 millióra csökkent), teljesen megbénította a német nép gazdasági, társadalmi és szellemi fejlődését is. Az egykori büszke s gazdag városokkal ékes német birodalom helyén három és félszáznál több pici hercegség és fejedelemség civódott, s a harcias katona-arisztokratákat valószínűleg csak szegénységük akadályozta egymás tökéletes kiirtásában.

Pedig ez a kor máshol a nagy nemzeti államok kialakulásának a kora volt, s különösen a 20 milliósnál is nagyobb, Richelieu okos békepolitikája következtében megerősödött és egységessé vált Franciaországgal szemben a háromszázötven, egymás ellen mindig kijátszható fejedelemségből összetett német udvari világ ugyan hogyan is tudott volna helytállani? A harmincéves háborút formálisan befejező wesztfáliai béke (1648) is olyan volt, hogy a háború tényleges győztesei, a franciák, mindig beleszólhattak a német államocskák belügyeibe. A mainzi választó tudta ezt, s ha már így volt, igyekezett a francia védnökséget a béke fenntartására és minél több német állam szövetségbe egyesítésére használni. Ennek érdekében mindenfelé tompította a németséget széttépő vallási ellentétet, türelmes, józan egyházpolitikával remélte az egyházak újraegyesíthetőségét. Később – gondolta – a nemzetközi politikai helyzet kedvező alakulása esetén talán a német államszövetség a császár vezetése alatt még a franciákkal is szembenézhet. Addig is igyekezett mindent, ami hasznos, átvenni a sokkal fejlettebb nyugati szomszédtól: kultúrát, tudományt, politikai és diplomáciai tudást, gazdasági képzettséget, még a nyelvet is, ha előnyös volt. Ennek a nagy célnak az érdekében gyűjtötte össze a német világ legkiválóbb szellemi és gazdasági tehetségeit mainzi udvarába. Így került oda Leibniz is. Így lett „politikus”. Egész életében fáradozott azután, ha kellett, fejedelmek és hercegek ellenére is, hogy megszője a német haza politikai „háló-tervét”. A szót is ő teremtette, hogy „patriotizmus”. Ezt az imaginárius német hazát képviselve utazott a mainzi érsek-választó megbízásából 1672-ben Párizsba.

*

Ma már elképzelni is nehéz az ellentétet a pici német városka s a világ fővárosa között. A fiatal politikust azonban nem a fény, csillogás, szalonok, gazdagság, még csak nem is a társasági élet hallatlan édessége kápráztatta el, hanem az az új valami, aminek akkoriban Párizs volt a legfontosabb otthona: a matematikai-természettudományos műveltség. Hacsak tehette, mindig a tudósok társaságában sürgött-forgott. Hallgatta elméleti vitáikat, segített kísérleteikben. A kor legnagyobb matematikusa, maga a fényeselméjű Huygens (1629–1695) vállalta a matematikában teljességgel járatlan ifjú diplomata oktatását. Huygens figyelmeztette Leibnizet Pascal (1623–1662) munkáira és kézirataira. A szorgalmas ifjú másolt, naphosszat másolt, s Pascal sok műve a nagy másoló munkája következtében maradt a hálátlan utókorra. Pascaltól nemcsak matematikát tanult, talán elsősorban nem is matematikát. Valamit, ami Cusanuson nevelkedett gondolkozásához sokkal jobban illett Descartes racionalizmusánál, valamit, ami az ész értelmével egyenlő rangúnak tanította a szívét, valamit, ami a geometriai megértés merevségét a megsejtés finomságával enyhítette. Párizsban lett Leibniz, Pascal tanítványaként, „gondolkozó nádszál". A levegő minden rezdülésre érzékeny, sok hasonló társával együtt, s mégis különmozduló, önmagában teljes individuum. Később, tudományosabban, úgy mondja majd, hogy „monász".

Leibniz négy párizsi éve a matematika történetének legnagyobb csodája. Egy arisztotelészi szillogizmusokon és obskurus kombinációs-kabbalisztikán felnőtt keleti barbár megtalálta az egyedül alkalmas kulcsot ahhoz a természettudományos-matematikai műveltséghez, amelyet ő maga akkor még nem is ismert. Olyan nagy felfedezés volt, hogy a legtöbb matematikus, azonosnak gondolván a geometriát és a matematikát, meg sem értette sokáig, mi történt. Meg sem értették, hogy a matematikában vége lett a geometria egyeduralmának. Meg sem értették, hogy ezután majd sokkal szubtilisabb, sokkal finomabb, sokkal elképzelhetetlenebb, sokkal képtelenebb dolog lesz a matematika. Meg sem értették, hogy nincs helye semmiféle prioritásharcnak, mert Leibniz nem a differenciál- és integrálszámítás módszertanát fedezte fel, hiszen 1674-ben erre már nem volt szükség, felfedezték és kidolgozták azt tökéletesen mások: Galilei, Torricelli, Cavalieri, Roberval, Hudde, Slusius, James Gregory, Newton. Meg sem értették, hogy Leibniz sokkal egyszerűbbet és sokkal fontosabbat fedezett fel: az új matematikát, a függvények elméletét, az analízist. S ezen a területen csak két ember járt előtte, Pascal és Descartes. De Leibniz messzebbről jött, mint ők, s távolabb látott. Az ő hazájából még látszott a cusanusi misztika.

*

„Hol volt, hol nem volt, Vesztfáliában, Thunder-ten-Tronckh báró úr kastélyában… A báró úr egyike volt a tartomány leghatalmasabb urainak, már azért is, mert kastélya ajtóval és ablakokkal is dicsekedhetett. Sőt a kastély fogadótermét még faliszőnyeg is díszítette. A baromfiudvar kutyáiból szükség esetén vadászfalkát formálhatott; istállószolgái, ha kellett, hajtóknak is beváltak. S a falusi plébánost kinevezte házikáplánjának. Mindnyájan Nagyuramnak szólították, s udvariasan nevettek, ha mesélt nekik valamit."

Voltaire jellemzi így a derék Pangloss úr gazdáját, de ha röviden kellene jellemezni Pangloss úr mesterének, Leibniznek új gazdáit, a Lüneburg–Braunschweigi herceget, alig lehetne találóbb sorokat találni. Legalábbis akkor, amikor Leibniz a ház szolgálatába állott, 1676-ban. Nem-sokkal Leibniz szolgálatbalépte után ugyanis gyorsan emelkedni kezdett a Ház, szerencsés házasságok és nem utolsósorban Leibniz ügyes diplomáciája következtében. A döntő fordulatot a Ház életében Ernő-Ágost uralkodása (1679–1698) hozta. Ernő-Ágostnak sikerült kiharcolnia a kilencedik választófejedelemséget – Leibniz segítségével.

Ernő-Ágost leányát, Sophie-Charlotte-ot, a Brandenburgi választóhoz adta nőül, aki 1700-ban I. Frigyes néven porosz király lett. Brandenburg hatalma a XVII. század második felében fokozatosan nőtt, az északnémet síkság leghatalmasabb államképződménye lett. A nantes-i ediktum visszavonása (1685) után mintegy 6000 hugenotta menekült Franciaországból Berlinbe, s az ő szorgalmas munkájuk a nagy falut várossá növelte, igazi fővárossá. A Lüneburg–Braunschweigi Háznak jó kapcsolata volt XIV. Lajossal is és a Császárral is. A XVIII. század elején az angol trónviszonyok alakulása miatt komoly esélyes lett Ernő-Ágost fia, György-Lajos, I. Jakab király dédunokája.

Így lett a hannoveri udvar az európai dinasztikus politika egyik fontos centruma, s Leibniz fáradhatatlanul, különböző formában és minőségben szolgálta gazdáit. Volt a harzi bányák felügyelője és lángeszű bányagépész, mikor erre volt szükség, volt a Ház történetírója, s ennek ürügyén megteremtette a német középkor-történetírást és kritikai szövegkiadást; állandóan tárgyalt régi kedves tervéről, az egyházak újraegyesítéséről vagy legalább a protestáns egyházak egyesítéséről; megalapozta a földtörténetet, Bécsben a város repceolaj-világításáról tárgyalt, hosszú itáliai utazása alatt matematikusokkal, természettudósokkal és történészekkel értekezett; a század végén kibontakozó tudományos folyóiratirodalom legnagyobb szállítója volt Pierre Bayle (1647–1706) mellett.

Tanítványa, Sophie-Charlotte porosz királynő támogatásával megteremtette a német nép büszkeségét, a berlini tudományos akadémiát. A XVIII. század elején leginkább Berlinben élt, a királynő herrenhauseni kastélyában mindennapos vendég volt. A világpolitikai helyzet kedvezően alakult: XIV. Lajos ellen a spanyol örökösödési háborúban szövetkezett hatalmak: Anglia, Hollandia és a Császár végleg megállították a francia terjeszkedést, a töröktől felszabadított területen stabilizálódott a Császár uralma. Úgy látszott, hogy Leibniz politikai célja, amiért egész életében harcolt, megvalósulhat.

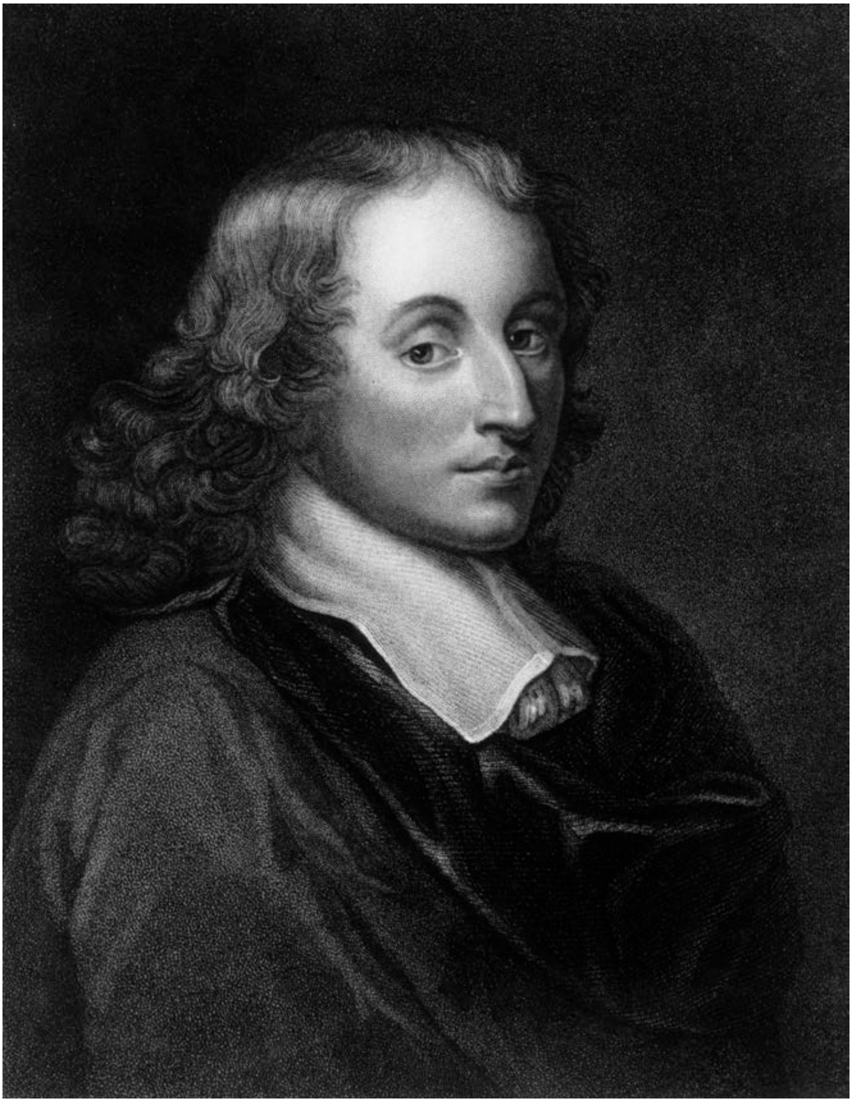
1705-ben váratlanul meghalt Leibniz leghűségesebb támogatója, Sophie-Charlotte. Berlinben nem volt maradása az irigyeitől, s Hannoverben, ahol már a buta, erőszakos, korlátolt György-Lajos uralkodott, gyanús szemmel nézték. Megpróbálta felajánlani szolgálatait Bécsnek, Nagy Péter cárnak – hiába. Mikor ura, György-Lajos 1714-ben az angol trónra jutott, az agg és érdemdús Udvari Tanácsos remélte, hogy magával viszi – hiába. Hiába minden tehetsége, ügyessége, érdeme, a hatalmasoknak nem volt szüksége rá. Bécsben nem kellett, mert nem akart katolizálni, Angliában nem kellett, mert a jelenléte sértette volna a nagy Newtont. A francia akadémián elsiratta Fontenelle, de az élve jelentkezőt a francia akadémia is elutasította. Sehol sem volt rá szükség. Pedig a XVIII. század a filozófusok százada volt, és sokkal jelentéktelenebb gondolkozók is híresek s gazdagok lettek.

*

A múlt század végén „glaszékesztyűs filozófusnak” nevezte egyik kommentátora, békülékeny és szelíd modorára célozva, diplomatikus ügyességére. Ez a jellemzés azonban nem egészen helytálló. Az „engedékeny” filozófus néhány nagyon lényeges, fontos kérdésben tapodtat sem engedett soha. S ahogy öregedett, egyre inkább ellentétbe került korával. Először a nagy elődök, Descartes és Spinoza rendszerét bírálta. Azután vita vitát követett a kortársakkal. Leibniz gondolkozása funkcionális volt, az ő világában minden összefüggött mindennel, mint a görög kozmoszban. Az új korszak gondolkozása kauzális, a jelenségeket az ok-okozati összefüggés láncára fűzték. Leibniz a lehetőségek gazdag világába ágyazta a jelenségeket, az ifjú filozófia Locke nyomán a tapasztalatok esetlegességétől függő ok-okozati viszonyon kívül nem ismert el semmit. Leibniz világa esztétikus és megbonthatatlan egész volt, a hit és az ész támogatta egymást benne. Az új gondolkozás egyik alaptétele volt, hogy hit és ész szigorúan elkülönítendő. A világ, amelyben Leibniz felnőtt, s amelyet szeretett, megváltozott. Túlságosan bonyolulttá vált, akár a kor látványos, nagy operáinak a színpada.

Leibniz gondolatvilága pedig egyre tisztult és egyszerűsödött. Lehet, hogy alapjában egész filozófiája, egész életműve nagyon egyszerű, akár azok a húsvéti énekek, amelyeket annyira szeretett. „Vannak mondatok – írja az öregember 1709-ben –, amelyek, akárhol találjuk, meghatnak s megtisztítanak. Száz nagyáriából alig akad egy-kettő, amelyet szépnek és nemesnek találnék, és megfigyeltem, hogy amit a szakemberek legtöbbre becsülnek, abban igen sokszor semmi sincsen. Az egyszerűség sokkal inkább meghat, mint a kölcsönzött díszek. Mi egyszerűbb, mint ennek a szövegnek nótája: Ecce quomodo moritur justus. Mégis, ahányszor csak hallom (és hányszor hallottam az idei böjtben, amint a kórista gyerekek fújták az utcán), mindig meghat, és megfigyeltem, hogy másoknak is tetszik.”

Ez az egyszerű összhang: ez az eleve elrendelt harmónia. És a monászok a világmindenség iskolás gyerekei. Vidáman, egymásra alig figyelve fújják a közös nótát, aminek még a szövegét sem értik: ecce quomodo moritur justus.



Pascal