Hoffmann Miklós – Kicsák Lóránt

A matematika mint performatív észjáték

I. Platonista és nem-platonista megközelítések; a performatív szemlélet

Éppen húsz éve annak, hogy megjelent Paul Ernest *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics* című könyve (Ernest 1998), ami újra felszította a matematika alapvető természetéről, létrejöttéről és alakulásáról szóló, matematikusokat és filozófusokat egyaránt megmozgató vitát, új lendületet adva az Émile Durkheim által elindított (az uralkodó platóni állásponthoz képest azonban addig inkább marginális) nézetnek, miszerint a matematika nem eredendő, az emberiségtől független igazságok gyűjteménye, hanem társadalmi képződmény, az egyéni teljesítményt társadalmi konszenzus által validáló tudományág (Durkheim 1895). Ez a (szociál)konstruktivista irányzat, mely tehát nem csupán a matematikai entitások emberi alkotását, de e konstrukció társadalmi meghatározottságát is lényeginek tartja a matematika értelmezésében és működésében, radikálisan szakít a (matematikai) platonizmussal – vagy ahogy Paul Ernest találóan jellemzi, a „matematikai abszolutizmussal" –, mely a matematikai létezőket és igazságokat csupán felfedezni (és nem feltalálni) való dolgoknak tekinti.

Mivel a platonisták úgy gondolják, hogy a matematikai létezők időtlen objektumok, azokat és tulajdonságaikat a tudósok a régészhez, vagy inkább a kincskeresőhöz hasonlóan találják meg. Az egymástól egyébként lényegesen különböző nem-platonista irányultságú elméletek – például az intuicionisták, a formalisták és a konstruktivisták felfogása – szerint viszont a matematikai létezők (az ember által elgondolt, kimondott, leírt definíciók, tételek és bizonyítások lévén) feltalálás vagy kitalálás útján keletkeznek és rendeződnek fogalmak alá. Ennek az egyébként sok tekintetben termékeny megkülönböztetésnek azonban egy ponton elvész a jelentősége: abban minden eddigi, mégoly különböző értelmezés is egyetért, hogy a matematikai fogalmakra és rendszerekre, akár felfedeztük, akár megalkottuk őket, létrejöttük után egyként változatlan (időtlen vagy időtlenné váló, történelem nélküli) formákként tekintenek. Szembenállásuk ellenére a platonista és nem-platonista megközelítések fundamentális közös nevezője, hogy filozófiai nézeteik középpontjában továbbra is a matematikai *objektumok* eredete és létmódja áll, anélkül azonban, hogy objektum voltukat megkérdőjeleznék, a matematikai igazságokat tekintve pedig evidensnek veszik, hogy (a platonisták esetén eredendően, a nem-platonisták esetén létrehozásuktól számítva) állandó, történelmen kívüli létmóddal ruházhatók fel.

Jelen írásunkban mi a matematika mibenlétére irányuló vizsgálódások centrumába nem a matematikai létezők ontológiai státuszának kérdését állítjuk, hanem a matematika néven intézményesült gondolkodói (megismerő, megértő, modellalkotó és műveleti) *tevékenység* tényleges működését. Amikor az ontológiai kérdések és válaszok korlátait a matematikai tevékenység hermeneutikai aspektusai felől szeretnénk meghaladni, akkor a megtalálás vs. feltalálás fogalomkettősével megragadható folyamatok közül ez utóbbinak tulajdonítunk kitüntetett jelentőséget. Amellett érvelünk, hogy a matematikai létezőket valójában nem a szubsztanciális vagy tárgyszerű statikusság, hanem a folyamatszerűség jellemzi, aminek lényegi következménye, hogy a fogalmak, tételek és rendszerek valódi történeti és sajátlagos idődimenzióval rendelkeznek. Ez nem annyit jelent csupán, hogy a statikus tárgyszerűség helyébe a genetikus vagy konstituált tárgyszerűséget állítjuk (de továbbra is tárgyakról beszélünk, csupán azok eredetét firtatjuk). A matematikai létezőkre ugyanis nem létrejövési és megvalósulási folyamataik teleologikusan megelőlegezett *végeredményeiként* tekintünk, hanem olyan időben és idővel változó kvázi-entitásokként, melyek a mindenkor a kollektív tudatban zajló (játszódó) matematikai megismerési és közlési *folyamatokkal* azonosak, amelyeknek egy adott időpontban csupán pillanatfelvételeivel dolgozunk, és amelyek így időleges, nem tárgyi, hanem *funkcionális koherenciával* bírnak. Ez pedig mindazon tulajdonságuk *fogalmilag* megképzett egysége, amelyek a matematikai tevékenység időbeli kibontakozása során és révén bukkannak fel. A leírható tulajdonságok nem egy tárgy elemi alkotórészei, hanem funkciók, melyek révén ezek az entitások éppen matematikai folyamatok generálói és résztvevői egyben, azaz egy adott játékrendszert határoznak meg, és benne a rendszerből következő szerepben és értékben funkcionálnak, ami nem zárja ki, sőt mintegy előírja számukra, hogy újabb folyamatok alakító részesei legyenek, és maguk is újabb folyamatokhoz illeszkedően módosuljanak.

A matematikai gondolkodás és megismerés tényleges végbemenetelének és megnyilvánulásának megértésében sokat merítünk a tudományhermeneutikai megközelítés belátásaiból és – ahogyan a vizsgálódásunk perspektíváját megnevező cím megidézi – Wittgenstein nyelvjáték-elméletéből, akinek elképzelései jelentősen meghatározzák írásunkat, a legtöbbször azonban csak közvetetten, a performatív értelmezések alapját képező (austini és searle-i) „beszédaktus-elméleteken" keresztül. Értelmezésünk irányultságát mindezek mellett a wittgensteini elgondolásnál[1] határozottabban performatív megközelítésnek ne-

[1] Wittgenstein matematikáról alkotott felfogását többféle „izmussal" szokás több-kevesebb sikerrel rokonítani, aminek részletekbe menő elemzése túlmutat ezen írás keretein (lásd erről pl. Ohtani 2018). Itt most azt hangsúlyozzuk ki, hogy a matematikai fogalmakat Wittgenstein sem koherensen folyamatként, inkább statikus, az adott játék szabályainak (axiómáinak) véglegesítése után rögzült entitásokként gondolja el, amit a (cselekvő) matematikus más-más

vezzük, amivel egyben csatlakozunk Hans Diebnerhez, aki a bölcsészet- és a természettudományok performativitását vizsgálva a performatív tudomány vagy a tudomány performativitásának jellemzőit ekként határozta meg: „[A performativitás] fókuszpontjában az »ontológiai értelemben adott« helyett a »konstitúció«, a »reprezentáció« helyett a »jelenlét« áll. Az alkotás pillanata és folyamatossága, inherens időbelisége, a jelennel való kapcsolata adja a koncepció alapját.”[2] (Diebner 2006. 21.)

A fentebbi értelemben vett matematikai entitások megértése során a „Mi az eredendő létmódjuk?” kérdésről mi is a „Mi módon történnek meg és válnak részévé újabb történéseknek?” kérdésre helyezzük át a hangsúlyt. A történés-dimenzióval azt is kiemeljük, hogy a tudós szinguláris gondolkodói tevékenysége, a sokrétűen értelmezendő jelenléte nem puszta járuléka vagy időleges, ám kiiktatható és kiiktatandó kísérőjelensége a matematikának, hanem létezésének tulajdonképpeni „közege”. Azonban, hogy az alanyi pólust érintő ontológiai kérdések se bénítsák a vizsgálódást, a zajló matematikai tevékenységet – a léttapasztalatokat történetileg nyilvánvalóvá és megoszthatóvá, vagyis „láthatóvá” tevő, „láthatatlan” médiumnak, az észnek a jelentőségét kiemelve – nevezzük ebben az írásban performatív *ész*játéknak. A médium nem közvetítőt, hanem közeget jelent, az értelemartikulációk közegét, melyben gondolat és nyelvi megformálás elválaszthatatlanul egyek. A matematikai entitások, állítások és műveletek, a megértési és heurisztikus stb. folyamatok sajátlagos törvényszerűségek alapján ebben a közegben jönnek létre, léteznek, nyernek értelmet és érvényességet, válnak mértékadóvá mások számára is. A sajátlagos törvények szabályozta mozgás idézi meg a játék fogalmát, amennyiben a törvények valójában konstitutív szabályok: részben a gondolkodás, részben a matematikai tevékenység szabályai, melyek meghatározzák a lefolyását, a megképződő tapasztalatok artikulációját és archiválódását. Vagyis diskurzusteremtő szabályok (a diskurzus foucault-i értelmében, a történeti, társadalmi meghatározottságok hangsúlyozásával). S ezzel már kínálkozik a performatív jelző, hogy egyszerre jelezze a matematikai tevékenység jellegzetességeit és azt a perspektívát is, amelyből ez megérthető. A performativitásnak ezt a kettős értelemirányát egyszerre kell szem előtt tartanunk, hiszen valójában egybeérnek: a matematika performatív kibontakozása teszi lehetővé (és kívánja is meg), hogy ebből a perspektívából értelmezzük.

Azt mindenki beláthatja, hogy elemeiben mindegyik matematikafilozófiai elképzelés olyan *tapasztalatokra* támaszkodik a matematikával kapcsolatban, ame-

perspektívából nézhet: „Nicht »der Kreis hat diese Eigenschaft, weil er durch die beiden unendlich fernen Punkte […] geht«, sondern »die Eigenschaften des Kreises lassen sich aus dieser (merkwürdigen) Perspektive betrachten. Es ist wesentlich eine Perspektive und eine weit hergeholte.” (Wittgenstein 1999. 280 [Teil V. 21].)

[2] „It consists of the focus on »constitution« instead of »ontologically given« or »presence« instead of »representation«. The moment of action, its continuity, the inherent temporality, and the relationship to the present, form the basis of the concept.”

lyek helyénvalóak (képesek vagyunk belehelyezkedni ezekbe a tapasztalatokba a diskurzusaik révén), s elegendő támpontot nyújtanak az egyes irányzatok elkülönülése számára. Ahogyan az általában lenni szokott azonban, az elkülönülésükben mindegyik kizárólagosságra törekszik, és – ami ezzel együtt jár – egyetlen és végérvényes választ akar adni egy alapjában véve nem is eldöntendő kérdésre. A performativitás szemlélete korántsem akarja magát ekként feltüntetni, sokkal inkább olyan perspektívát nyit meg, amelyben egyszerre vagyunk képesek rátekinteni a különböző irányzatok helyénvaló belátásaira, és amelyben ezek maguktól egymás mellé rendeződnek. Mégpedig azért – és ez alkotja a mi előfeltevésünket –, mert a performativitás valójában az emberi szellem működésének, sajátosságainak megnyilvánulása, mondhatnánk, hogy amit szellemnek nevezünk, performatívan létezik és bontakozik ki (önreferenciális valóságteremtés). A már említett konstruktivizmus, intuicionizmus vagy formalizmus felfoghatók valójában úgy is, mint amelyek ennek a működésnek egy-egy aspektusát ragadják meg, vagy mint amelyekben a szellem különböző aspektusaiban differenciálódik.

Amikor – többek között Lakatos Imre matematikáról alkotott nézeteire, illetve Gadamer fogalomtörténetére *(Begriffsgeschichte)* alapozva, azt kiterjesztve – a matematikai megismerést ebből a perspektívából vizsgáljuk, a matematikai észjátéknak éppen azokat a vonásait igyekezünk felmutatni és megerősíteni, melyek alapján a matematikát a diebneri értelemben (is) performatív tudománynak tekinthetjük. Hogy jól értsük meg elmélkedésünk irányát: nem a matematikai tárgyak létmódját illető döntésre megy ki a játék (mindazzal, ami vele jár), hanem éppen abból a helyzetből akarunk kitörni, amelyben a hagyományos értelmezések által előfeltevésként és végeredményként felkínált alternatívák közötti *döntésre kényszerülnénk*. A performatív értelmezés tétje annak a komplex eseménynek minél átfogóbb megértése, mely matematikaként *történik*, és amelynek a hagyományos értelmezések csak reduktív leírására képesek. Amikor a matematikai rendszerek, az őket alkotó és működtető entitások és folyamatok időbeliségét és történetiségét hangsúlyozzuk, és mindezt az egyéni gondolkodás által életben tartott kollektív észben (az emberi szellemben) játszódó folyamatokhoz rendeljük, azt az időlegesen mindig nyugvóponton érezhető, ám gyakorlatilag végeérhetetlen szellemi kalandot szeretnénk láttatni, mely talán éppen attól kitüntetett az időbeliségnek alávetett ember szellemi létezésében, hogy mintaszerűen képes ezt az időbeli alávetettséget *elrejteni* és *meghaladásának illúzióját* kelteni. A történeti alakulást elrejtő időtlenség, vagyis az idealizáció minden tudás (hozzáférhető, megosztható, megismételhető tapasztalat) feltételének látszik. Meglehet, ezért egyeseknek mindez illúziórombolóként hat majd, de egy olyan illúziótól (az örök létezőkről szóló abszolút tudás illúziójától) szabadulunk meg, melyet legtisztább és példaértékű formában maga a matematikai észjáték keltett, és időről időre – most épp ezt az időt éljük – maga leplez le.

Az kétségtelen tény, hogy a performatív szemlélet, melyet az tesz lehetővé vagy egyenesen kényszerít ki, hogy a matematika végső soron a tudósok – akár századokat átívelő, mégis mindenkor jelen idejű – személyes együttjátszásán alapuló művelésében *van*, annyiban közelebb áll a szociálkonstruktivista állásponthoz, amennyiben a matematikát szintén tisztán az időben kibomló emberi szellem működésének eredményeként értelmezi. Látni fogjuk azonban a döntő különbséget: a performatív megközelítésben majdhogynem irreleváns, hogy a folyamat eredetéről mit gondolunk. Szemléletünk még erősebb értelemben *an-archéikus*, amennyiben elsősorban a kezdetbe és az eredetbe kódolt végkifejlet, a kezdettől kijelölt út és beteljesítendő cél előítéletes gondolatát számolja fel. A platóni és a különböző nem-platóni iskolák nézőpontja ebből a szempontból egyaránt „abszolút”. Hiába adunk ugyanis más nevet – mint pl. konvergens vs. divergens gondolkodás, vagy deduktív vs. induktív eljárás – ezeknek a megközelítéseknek, abban a tekintetben semmi nem változik, hogy a matematikai objektumok (bármily esetleges létrejöttük utáni) megváltoztathatatlanságát, eleve elrendelt keretek közti szükségszerű kibontakozását és rögzülését mindkét nézet vallja. A performatív értelmezés dinamikus szemléletében ellenben a kezdet történelmi és matematikai értelemben nemcsak kikutathatatlan, de a folyamat egészében nem játszik determinisztikus szerepet, és nem jelöli ki a folyamat célját sem. Amennyiben a matematika mindenkor az emberi megismerés és tudás archeoteleologikus mintaképe, s mint ilyen a gondolkodás válságos időszakaiban és mozzanataiban az emberi szellem egyedüli kapaszkodója volt, az an-archéikus performatív felfogás szakít azzal az elképzeléssel, hogy az emberi megismerésnek örökkévaló igazságokkal lehet és van dolga. Ez „rákényszerítheti” vagy inkább felszabadíthatja a tudományokat is arra, hogy önnön performativitásukra reflektáljanak.

De mindenekelőtt azt provokálhatja ki, hogy filozófia és matézis egymásba szövődését új aspektusból vizsgáljuk meg. Éppen ennek az egymásba fonódásnak a következtében a matematika performatív szemléletű felfogása közelebb vihet egy performatív szemléletű filozófiához, és egyúttal elhárulhat az akadálya annak, hogy az egyébként mind a filozófiában, mind a matematikában – hol egymástól inspiráltan, hol egymástól függetlenül zajló – önnön „alaptalanságukra” és megalapozhatatlanságukra reflektáló vizsgálódások is egymásba fonódjanak, mégpedig nem a (közönséges értelemben vett) szkepszis, hanem a gondolkodás vagy az emberi szellem sajátlagos performativitásának platformján. Az alap nélküli (tudás)építmények nem szükségképpen a fenyegető bizonytalanságuk miatt érdemelnek figyelmet, hanem azért, mert a szellem eredendő performatív működésére mutatnak rá, amennyiben az emberi megnyilatkozásokra mint saját feltételüket önmagukban hordozó megnyilatkozásokra tekintenek. Ilyen értelemben Gödel híres nemteljességi tételei,[3] amelyek a tökéletes axiomatikus

[3] Gödel két tételében (lásd Gödel 1931) azt bizonyította, hogy semmilyen axiomatikus rendszerről, amely elég gazdag ahhoz, hogy legalább az aritmetikát (egészen precízen a Robinson-féle aritmetikát) tartalmazza, nem dönthető el a rendszeren belül, hogy ellent-

rendszer, az abszolút tudás keresésének hiábavalóságával szembesítik a matematikusokat, nem kudarcként, hanem megerősítésként hatnak.

II. A TÖRTÉNELMEN KÍVÜLI ABSZOLÚT TUDÁS PÉLDÁJA

A minden emberi tudás számára mintaként szolgáló matematikai tudás abszolút voltának, létezői és igazságai időbeli változatlanságának *vallása* hosszú filozófiai hagyomány része (valójában egyidős vele), amit lehetetlenség lenne végigkövetnünk. Ehelyett egy tanulságos példán keresztül mutatjuk meg, miként öröklődött ez a hit a jelenkorra úgy, hogy közben felszámolta önmagát.

Descartes megállapításából indulunk ki, melyet az első *Elmélkedés*ben, a módszeres kétely kezdetén tesz a tudást illetően:

> talán nem következtetünk helytelenül, ha azt mondjuk, hogy a fizika, az asztronómia, az orvostudomány és az összes többi olyan tudomány, amely az összetett dolgok szemléletétől függ, bizony kétséges. Ezzel szemben az aritmetika, a geometria s a többi efféle tudomány, amely csakis a legegyszerűbb és legáltalánosabb dolgokkal foglalkozik, s ügyet sem vet arra, hogy *léteznek-e ezek a valóságban vagy sem*, nagyon is tartalmaz valami bizonyosat és kétségbevonhatatlant. (Descartes 1994. 28, kiemelés tőlünk.)

Látjuk, a matematikai dolgok bizonyossága egyszerű voltukban van megalapozva, a minden érzéki-tapasztalati adottságot nélkülöző egyszerűségükben, azaz tisztán szellemi-észbeli adottságukban. Az ész ezeket az egyszerű dolgokat úgy képes *bizonyosságok*ként elgondolni, hogy közben ügyet sem kell arra vetnie, *egyáltalán léteznek-e vagy sem*, azaz érzékileg tapasztalhatók-e. A matematikai dolgok annak ellenére (vagy éppen azért) bizonyosak és egyszerűek, hogy (mert) semmilyen empirikus tartalmuk nincs, empirikus verifikációjuk irreleváns a bizonyosság tekintetében. Descartes nem kutatja saját meglátásának valódi mélységét, azt a sajátos létmódot (helyesebben konstellációt), amely bizonyosságot szolgáltat annak ellenére (és annál inkább), hogy nem támaszkodhatunk, de nem is szorulunk tapasztalati igazolásra. A matematikai létezők léte egyfelől érdektelen, miközben, másfelől, nagyon is létezők: tiszta észbeli léttel bírnak, sőt egyenesen annak köszönhető létük, hogy az ész elgondolja őket. Ezek után

---

mondásmentes-e, illetve az ilyen gazdagságú axiomatikus rendszer nem lehet teljes, ahol nemteljesség alatt azt értjük, hogy mindig lesznek benne eldönthetetlen állítások. Léteznek a matematikának ilyen értelemben teljes részei, pl. a Tarski-féle axiómarendszeren alapuló elemi geometria (lásd erről pl. Greenberg 2010). A matematika túlnyomó része azonban az aritmetika gazdagságát megkívánó vagy azt meghaladó axiomatikus alapokon nyugszik, így összességében lehetetlen a teljes ismert matematika „tökéletes" (azaz teljes és ellentmondásmentes) axiomatikus felépítését létrehozni.

azonban Descartes így folytatja: „akár ébren vagyok, akár alszom, kettő meg három az öt, a négyszögnek pedig négy oldala van, s lehetetlennek látszik, hogy ennyire átlátható igazságok a hamisság gyanújába keveredjenek" (uo.).

Ahogy az imént mindegy volt, hogy léteznek-e a matematikai dolgok, a gondolkodás akkor is bizonyosnak tartja őket, ha „valóságosan" nem léteznek (sőt, épp azért tartja őket bizonyosnak, mert nincs bennük empirikus lét, azaz egyszerűek), most Descartes szerint az is mindegy, hogy ébren vagyok-e vagy álmodom, hogy milyen gondolati aktust végzek – a matematikai igazságok bizonyosak maradnak. Ez azt is jelenti, hogy akkor is 5 lesz 2 + 3, a négyszögnek akkor is négy oldala van, *ha el sem gondolom*. Ez látszólagos önellentmondás, hiszen eszerint a bizonyosság mégsem az elgondoltságban van megalapozva. Akkor azt mégis csak a matematikai dolgok jellemzői adják? De hogyan adhatja ezt a bizonyosságot valami, aminek valóságos léte lényegtelen, csak a gondolkodásbeli léte döntő, ugyanakkor teljesen független is ettől a gondolkodástól? Valóban mindegy, hogy ébren vagyok vagy pedig alszom, kettő meg három mindenképpen öt marad?

Ez csak kétféleképpen lenne magyarázható, és az első magyarázatot rögtön el is vethetjük: nem feltételezhetjük ugyanis, hogy a matematikai létezők önmagukban, „magánvaló" létükben és tulajdonságaikban hordozzák a bizonyosságot, hiszen csak észbeli elgondoltságukban adódnak, mintegy annak függvényeiként, és rögtön bizonyosként. Ezért viszont a második magyarázatunk szerint egyáltalán nem lehet mindegy, hogy miként gondoljuk el őket. Figyeljünk fel arra, hogy Descartes nem merészkedik addig, hogy állítása radikális következtetését levonja, tudniillik, hogy akkor is bizonyosak ezek a dolgok, ha senki nem gondolja el őket. Pedig adódna ez a következtetés, és látszólag egybecsengene a matematikai ismeretek kikezdhetetlenségével. Az éber vagy álombeli elgondolás közömbössége azonban nem egyenlő azzal, hogy léteznek akkor is, ha egyáltalán nincsenek elgondolva. Ez az elgondolásbeli közömbösség annyit jelent, hogy pszichológiai értelemben nem feltétlenül kell őket itt és most nekem elgondolni, de létmódjukat tekintve csak *elgondoltként* lehetnek bizonyosak.

Descartes a gondolkodás performatív erejével vet itt számot (ahogyan az egész *Elmélkedések* is erre apellál, arra tudniillik, hogy a végső bizonyosság a tiszta értelmi belátásból adódik, melynek feltétele a gondolkodás tényleges végbevitele, az elmélkedések követő elismétlése). Ami azonban megakasztja ennek a témának a kibontását, vagy meghatározza a további irányát, az nem más, mint Isten létének kérdése. Descartes a módszeres kétely és a Csaló Szellem megkockáztatásának merészsége ellenére sem olyan vakmerő, hogy a (matematikai) észigazságok bizonyosságának erejét a maga vagy általában az *ember* észbeli elgondolásának tulajdonítsa. Ennek az észnek további alapot kell vetnie az isteni észben: az emberi ész vagy értelem valójában azonos az isteni ésszel, ha nem is hatókörében, de működésmódjában teljes mértékben. Az emberi értelem önmagában még áldozatául eshet a Csaló Szellem ármánykodásának (*ad absurdum* a Csaló Szellem *csalása* is lehet a 2 + 3 = 5 bizonyos *igazsága*). A matematikai igazság mint észbeli bizonyosság, éppen felfedezése pillanatában, további megalapozást igényel, amit, mint tudjuk, az emberi értelem alapját is jelentő isteni igazságszeretet (az igazság és jóság egybeesése) kínál.

Ha azonban a tudás kora újkori megalapozásának további történeti útját tekintjük, beigazolódik Derrida megállapítása: „a karteziánus isten, akárcsak a nagy klasszikus racionalisták istene, valójában egy rejtett történelem neve csupán, az empirikus történelem és a természeti világ redukciójaként »funkcionál«, ez a redukció pedig minden tudomány értelméhez hozzátartozik" (Derrida 1995. 28–29 [1. lábjegyzet]). Ami azt is jelenti, hogy Isten után és helyett, hasonló funkcióban, az empirikus történelmen és a természeti világon kívül eső létszféra megnevezésére az „időtlen, történelmen kívüli létmódok" elnevezést találjuk. Ez hasonlóképpen elrejteni igyekszik azt a tényt, hogy minden tudásbizonyosság az emberi ész és értelem performatív teljesítménye.

Kant már következetesebben az apriori szemléleti formákból, vagyis az emberi megismerőképességből és az észből eredezteti a matematikát. Nincs szó isteni értelemről, ez az értelem és ész nagyon is emberi. Kant kerül a legközelebb a tudás és a matematikai tudás konstruktivista, s még inkább performatív felfogásához. Ahogyan a *Vizsgálódás a természetes teológia és a morál alapelveinek világosságáról* című írásának első elmélkedésében kifejti (vö. Kant 2003. 258–259), a matematika és a metafizika egyaránt tiszta észmegismerés, ám a fogalomképzésük módjában különböznek egymástól, ami egyben közelebb visz annak megértéséhez is, amit Descartes a matematikai dolgok egyszerűségének nevezett. A matematikában ugyanis az ismeretet hordozó fogalommal együtt határozott definíció jár, helyesebben a definíció a megismerési folyamat kiindulásaképpen egyértelműen megadja a fogalmat, más tudások esetében viszont mind a fogalom, mind az egyértelmű definíció a megismerési folyamat végeredményeként áll(hat) elő: a helyesnek tartott fogalmat mintegy rá kell szabni a tapasztalásra. Míg a matematika a tudása gyarapításaként az egyszerű, definitív módon megragadott elemekből szintézissel hoz létre újabb fogalmakat úgy, hogy a szintézissel beépülő elemek sem külön-külön, sem összegükben nem érvénytelenítik a korábbi értelemelemeket, a metafizika és a tapasztalati tudományok meglévő fogalmak analízisével igyekeznek adekvát, a dologra illő fogalmat alkotni, aminek nem puszta mellékterméke, hanem egyenesen célja, hogy a korábbi értelmeket felülírja (kritika), azaz a változó tapasztalatokhoz (történetiség) igazodva újabb és újabb értelemkonstellációkként alkosson újabb fogalmakat. A matematikának a maga sajátos fogalomképzése biztosítja a bizonyosságot, és ennek révén válik valamiképpen időtlenné és „történelmen kívülivé" is. Nem lesz azonban explicit felismeréssé, hogy mindez az ész képessége és effektusa (mely az ideáció és idealizáció képességéhez, s ezzel együtt az egyértelmű nyelvi megformáláshoz kötődik), nem pedig az elgondolt-megragadott tárgy eredendőnek tételezett sajátossága. Ezért a bizonyosság és a történelmen kívüliség gondolata továbbra is klasszikusabb felfogásban tapad a matematikai megismeréshez, noha az elemzések egyre inkább feladják a platonikus értelmezést (vagy maga a platóni megismeréselmélet és ideafogalom is új megvilágítást nyer), anélkül azonban, hogy valódi áttörést idéznének elő a tudományról és az igazságról alkotott elképzelésünkben.

Látszólag Gadamer is jóváhagyólag veszi át ezt a megkülönböztetést és megerősíti a matematikát a történelmen kívüli létmód státuszában. A megerősítés azonban együtt jár azzal, vagy egyenesen azt a célt szolgálja, hogy közben a történeti megismerés hermeneutikai kritériumait kiterjessze rá (és az esztétikára) is. Valójában ez a kettős kötés, a történeti megértés aspektusainak kiterjesztése a történelem nélkülinek tételezett létmódokra jelenthet valódi áttörést a matematikai megismerés filozófiai értelmezésében.

Mivel a megértés, Heidegger nyomán ma már talán közhelynek számít, nem a szubjektum egyik különös viselkedésmódja, hanem az emberi lét lényegi alkotómozzanata, egzisztenciáléja – s ekként valójában az ember létezési módja, akinek végessége és történetisége az egész világtapasztalását áthatja –, a hermeneutikai szemléletet minden emberi megismerésre ki kell terjeszteni. Ezért írja Gadamer az *Igazság és módszer*ben: „Nem tartom helyesnek, ha azt mondják, hogy a hermeneutikai szempontoknak határt szabnak a történelmen kívüli létmódok, például a matematikainak vagy az esztétikainak a létmódja." Majd az esztétikai kapcsán teszi világossá, hogy milyen értelemben tekint a matematikára is mint történelmen kívülire: „a műalkotások esztétikai minősége olyan *felépítési törvényeken* és *alakítási színvonalon* nyugszik, amelyek végül is a történeti eredet és a kulturális hovatartozás valamennyi korlátján túllépnek" (Gadamer 2003.[2] 13–14, kiemelés tőlünk). Ebben az értelemben a matematikai létezők történelmen kívülisége is a „történeti eredet és a kulturális hovatartozás valamennyi korlátján" túllépő „felépítési törvényeken és alakítási színvonalon nyugszik", vagyis sajátlagos értelmi és észtevékenység hatásaként és következményeként áll elő. Tegyük azonban hozzá, hogy – akárcsak a műalkotások vagy az esztétikai minőségek megképződése – a matematikai igazságok *felbukkanásának tényleges végbemenetele* is történeti-kulturális paraméterekkel rendelkezik. Így bármennyire is elengedhetetlen, hogy a matematikai formák, fogalmak jelentését egy adott elmélet keretei között rögzítsük, amivel egyúttal jelezzük azt is, hogy az aktuális jelentés kizárja a korábbi változatokat, a rögzítés tartalmilag a történetileg felbukkanó értelmekről készült pillanatfelvétel. Két nem azonos tartalmú fogalom valóban kizárja egymást egy adott rendszerben, de az aktuálisan elfogadott fogalomtartalom ettől még történetileg feltáruló tulajdonságokat gyűjt egybe, melyek részben a „meghaladott" fogalmakban is jelen vannak. Arról nem beszélve, hogy a jelentésrögzítést és a kizárását elrendező szabályrendszert meg minden ízében átitatja a történetiség, s vele a konvencionalitás. A fogalom értelemtartalmának rögzítése és a korábbi fogalmak kizárása csak abban az esetben jelentene leválást önnön történetiségéről, ha feltételeznénk, hogy az aktuális fogalom egy tárgy tulajdonságainak leírása (platonizmus), vagy egy ilyen tárgy végső megkonstruálása (konstruktivizmus, ha tételez ilyen végső, teljes konstrukciót).

Erre a problémára, amely a mi szempontunkból is lényegi, szép példát kínál Wittgenstein a *Filozófiai vizsgálódások*ban (vö. Wittgenstein 1992. 324–326). A matematikai bizonyosság-fogalmunk azon (és nem máson) alapszik, hogy pl. számolás közben egy szám nem változik meg, az emlékezetünk sem csal meg, vagyis mindvégig egyértelműen ugyanaz a jelentése. Ezért egy számolás eredményéről valódi vita nem kerekedhet, mert hamar el lehet dönteni a helyességét vagy helytelenségét. De ez a változatlanság nem a papíron és tintán múlik, hanem azon a szabályrendszeren, amelyen belül mozgunk. Amíg követjük ezt a szabályrendszert, a számolás technikája elvezet bennünket matematikai állításokhoz: pl. hogy „2 × 2 = 4". Ha azt mondjuk, „azt hiszem, 2 × 2 = 4", ez nem egy matematikai állítás, legfeljebb azt jelentheti, hogy rájöttem egy matematikai állításra.[4] A 2 × 2 = 4 matematikai igazsága nem azon múlik, hogy ezt elhisszük-e a szó valódi értelmében: akkor is igaz, ha ezt senki nem hiszi. „De mit is jelentene akkor *ez*: 2 × 2 még akkor is 4 volna, ha minden ember azt hinné, hogy 2 × 2 = 5. – Milyen is volna, ha minden ember ezt hinné? Nos, elképzelhetném, hogy más kalkulusuk van, vagy olyan technikájuk, amelyet mi nem neveznénk számolásnak." (Wittgenstein 1992. 325.) Vagyis matematikai állítássá csak akkor válna, ha tudnánk köré építeni olyan szabályrendszert, amelyben értelmes és érvényes volna ez az állítás. És akkor hogyan viszonyulna ez a két szabályrendszer, s vele a bennük megfogalmazott állítások egymáshoz? Ez utóbbi „hamis volna-e"? Az igaznak és hamisnak, a helyesnek és helytelennek is az a szabályrendszer adja meg az értékét és kritériumait, mint amelyik a jelentéseket meghatározza. Éppannyira lenne értelme hamisnak tartani azt a másik szabályrendszert, mint amennyire azt kérdeznünk: „*Hamis*-e egy királyi koronázás? Olyan lényeknek, akik tőlünk különböznek, fölöttébb furcsának tűnhetne." (Wittgenstein 1992. 326.) Egyfelől a királyi koronázás ceremónia, olyan cselekvések sorozata, melyet konstitutív szabályok írnak elő. Ilyen ceremóniák nem tudnak semmiképpen sem igazak vagy hamisak lenni, csakis sikerültek vagy sem. Vagyis performatív igazságuk van. Ugyanakkor zárt értelmezői közeget alkotnak, és amennyiben áthágjuk a szabályokat, és rendre „rossz lépéseket" teszünk, valójában nem rosszul vagy helytelenül cselekszünk, hanem megszűnünk ugyanazt a játékot játszani, kilépünk belőle, vagy be sem léptünk igazán, kétségbe vonjuk a szabályokat, és egy másik szabályrendszert és vele új játékot alapítunk.

Azt azonban nem gondolhatjuk, hogy újabb, történetileg felbukkanó matematikai igazságok, entitások és tulajdonságok ilyen „rossz lépésnek" minősülnek, és rendre újra kell írnunk a szabályrendszert. Hiszen ez éppen hogy támo-

[4] A „2 × 2 = 4" állításnak a két mondatban más a használata, ahogyan az „azt hiszem"-nek is más az értelme, mint az „Azt hiszem, hogy vannak ufók" mondatban.

gatja és ösztönzi a feltalálást. Semmilyen játék nem lenne játék, ha a szabályok önnön mechanikus alkalmazásukat tennék lehetővé és írnák elő. A váratlan, az új, a „jó húzás" éppen a szabályok betartása mellett teszi élvezetessé a játékot. Ebben pedig mint olyan lehetőségfeltétel-együttesben, mely nem lekorlátoz, hanem felnyit lehetőségeket, minden korábbi játékmozzanat jelen van. Így van jelen minden műalkotásban is az a történeti dimenzió, amelyik lehetővé teszi.

A matematikai tevékenység a szabályrendszerein és a jelentéstartalmain keresztül ezer szálon *funkcionálisan* kapcsolódik a történelemhez, önmaga kibontakozásának történeti folyamatához, ezért a történeti megértés hermeneutikai elvét hatékonyan lehet alkalmazni rá, beleértve a történeti megértés pszichológiai aspektusát is, melyet Gadamer – Schleiermacherre is visszautalva – így jelöl meg: egy beszéd/írás megértésekor nem csupán magát a beszédet/írást, hanem a beszélőt/írót is meg kell értenünk. Ez a pszichológiai aspektus azt kívánja meg, hogy az értelmező belehelyezkedjék a beszélő/író gondolataiba, felfogja a belső folyamatokat, megismételje a teremtő aktust. Ahogy Boeckh-öt felidézve megfogalmazza: „A megértés tehát […] a megismert megismerése" (Gadamer 2003.[2] 220).

Nagyon erős érvek szólnak amellett, hogy a matematikai megismerés éppen úgy zajlik le, hogy lényegét a Gadamer által történeti megértésként leírt folyamattal lehet csak megragadni. Ami ebben kétséget ébreszthet, és ami egyúttal a történelmen kívüliség előítéletét szüli, az éppen a felépítési törvényének és alakítási színvonalának egyik lényegi eleme. A matematikai ismeretek leírása ugyanis a görögök óta deduktív módon történik, azaz a kiinduló pontból (általános érvényű állításokból) logikai következtetések sorozatával jutunk el a végső állításig. Szélsőséges formája ennek a deduktív megközelítésnek az axiomatikus felépítés, amikor néhány nagyon egyszerű állításból építjük föl az adott matematikai terület teljes ismeretanyagát, egészen a legbonyolultabb tételekig. A matematikának ez azonban csak a kanonizált *leírási* módja, miközben az alkotás folyamata lényegében fordított irányú: a matematikus induktívan gondolkodik, megsejt egy állítást, de semmilyen logikai bizonyítás nincs még a kezében. A bizonyítás különböző módjait és útjait próbálgatja, sokszor szintén visszafelé („ehhez még ezt kellene bizonyítanunk, és akkor kész lennénk" típusú gondolkodással), míg végül – ha sikerrel járt, tehát utólagosan – már deduktív lépésekben leírja az első lépéstől az utolsóig a logikai következtetéseket.

Az utólagos leírása a matematikának nagyon messze áll a létrejöttének mikéntjétől. Ez utóbbi mégsem tűnik el nyomtalanul a leírásban, hiszen a kész leírást olvasó matematikusnak nem csupán a matematikai leírást, de a tétel létrejöttének fázisait, azaz nemcsak az írást, hanem az írót, annak eredeti gondolatmenetét is meg kell értenie és a lehetséges mértékig rekonstruálnia ahhoz, hogy teljes képet kapjon az általa olvasottak értelméről. Hogy „a megértés […] a megismert megismerése", azért érvényes kitüntetetten a matematikai megértésre, mert semmilyen más támpont nincs valamely meghatározás értelmének és igazságának felfogására és belátására, mint hogy „végigfuttatunk" egy gondolkodási folyamatot (valójában belebocsátkozunk ebbe a folyamatba, amivel utalunk arra is, hogy minden szigorúság ellenére a matematikai gondolkodásban éppúgy jelen van a passzivitás és az uralhatatlanság, mint bármely más megismerési és megértési folyamatban). Ez azonban *nem* a leírás folyamata (ekkor legfeljebb megtanulhatjuk, bemagolhatjuk a tételt, a bizonyítást), hanem a tényleges megalkotás folyamata. A megértés során *valóban* megalkotjuk a definícióként adott entitás szemléletét, *valóban* elvégezzük a leírt műveleti lépéseket, *valóban* megtapasztaljuk az elágazási lehetőségeket, és követjük is őket (kizárás vagy újabb felfedezések révén), és *valóban* magával ragadónak tapasztaljuk a szükségszerű következtetések vonzerejét, mígnem *valóban* végbemegy az igazság belátása. Ezenközben, és főleg ehelyett semmilyen más megértést támogató, igazolást helyettesítő s megerősítő műveletre nincs módunk, például nem tudunk félrepillantani és egy empirikus tényt szemlélni. Természetesen ez nem zárja ki, hogy szemlélnünk lehet és kell is, azonban a szemléletalkotás magának a matematikai gondolkodásnak a része, nem leképez valami eleve adottat, hanem mindenkor megképezi a szemlélet nélküli fogalmit és szimbolikusat.

Annyira így van ez, hogy sok matematikus kifejezetten úgy írta és írja le eredményeit, hogy annak „nagyságát" csak a bennfentesek (értsd: akik felfejtették a gondolatmenetet is, nem csak a technikai leírást) érthetik meg, vagy nemegyszer csak intuitívan *érezhetik* meg. Tipikus példája ennek Carl Friedrich Gauss, kora elismerten legnagyobb matematikusa, aki rengeteg korszakos, látványos eredményt közlő tétele között egy látszólag semmitmondó, technikai számítást bemutató tételt jelölt meg „Theorema egregium"-ként – a nagy tudós gondolatmenetét komoly szellemi erőfeszítések árán megértők jönnek csak rá, hogy miért épp ez a tétel érdemelte ki a „kiváló" címet.

A matematikai megértésnek tehát éppen úgy sajátja ez a történeti-pszichológiai aspektus, a beszélő/leíró gondolataiba való értő belehelyezkedés, mint a Gadamer által hagyományosan ilyennek tekintett más megismerési módoknak. Továbbmegyünk: a matematikának ez a természettudományokhoz képest még inkább inherens része, hiszen míg a természettudományokban a másik tudós helyett-mellett fordulhatunk a természethez is, hogy külső forrásból szerezzünk ismereteket, a matematikában ilyen külső forrás nem létezik, saját gondolataink mellett csakis tudóstársaink élő vagy nyomtatott ismeretközlésére hagyatkozhatunk.[5]

Itt jegyezzük meg, hogy ha a matematikai és filozófiai performativitás az emberi szellem lényegi performativitását példázza, akkor ennek pedagógiai követ-

[5] Még az esetleg „megvalósítható", térben modellezhető matematikai entitások, például a poliéderek is nyilvánvalóan gondolati konstrukcióként jelennek meg először, realizálásuk szükségképpen tökéletlen (hiszen nem tudunk pontos négyzetet, háromszöget megvalósítani), így nem tekinthetők a fenti értelemben külső forrásnak.

kezményeivel kell talán legelőször számot vetni. „A megértés […] a megismert megismerése” elv nevében a tanulás valójában soha nem lehet a leírt igazság reprodukciója, csakis az ismeret megalkotási folyamatának elismétlése, vagyis maga is alkotás. Számos alternatív pedagógia törekvésének alapja válik itt láthatóvá: a tanulási folyamatnak involválódnia kell a felfedezés folyamatába, ahogyan erre épül az élményközpontú pedagógia és a drámapedagógia, ez motiválja a „tudatlan tanár” és a „facilitátor” szerepében működő tanárfelfogást stb., hogy csak néhány mozzanatot említsünk.

III. FELFEDEZÉS VAGY FELTALÁLÁS – MATEMATIKAI HEURISZTIKA

Descartes is figyelmes volt arra, hogy a tudományban együtt fut, de egymástól elkülönül a felfedezés útja és az igazolás útja. Az utóbbi biztosítja mások (az első másik maga a felfedező!) számára a felfedezett igazsághoz való hozzáférést, vagyis a tanítást készíti elő (vagy azonos vele).[6] Míg az induktív módon építkező tudásformákban a felfedezés és az igazolás lépései egybeesnek, a matematikában a felfedezés elrendezését és továbbadását lehetővé tevő igazolás vagy szintézis módszere a deduktív építkezés okán elfedi a felfedezés folyamatát.[7]

A matematikai felfedezés-föltalálás, azaz a matematikai heurisztika természetének vizsgálata, bár nyomokban évszázadok óta fel-felbukkan a filozófiában, Pólya Györggyel és Lakatos Imrével csak a múlt században érkezett meg teljes jogú tagként a tudományfilozófiába (vö. Pólya 1945; Lakatos 1976). Hiába irányult ugyanis figyelem a matematikai felfedezés-föltalálás jelentőségére és mibenlétére, ha a deduktív leírás és igazolás centralizált szerepe továbbra is megkérdőjelezhetetlen maradt. A két magyar tudós, bár más-más környezetben – Pólya inkább didaktikai szempontokat vizsgálva, Lakatos viszont szélesebb, elméletibb összefüggésben – taglalja a matematikai heurisztikát, a lényeg bennük közös: mindketten a felfedezés-föltalálás logikájának, módszerének, viselkedéstanának megértésére törekednek, mégpedig szembeállítva azt a deduktív – az előbbiekről már semmilyen információval nem szolgáló – matematikai leírással. Amivel azt is jelzik, hogy a matematikában ez a két út nemcsak különbözik egymástól, de sem felcserélni, sem azonosítani nem lehet őket, és nem is redukálhatók egymásra. Míg Pólya a konkrét matematikai feladatmegoldás

[6] „Kétfajta módszer létezik: az egyik az igazság felfedezésének módszere, amit *analízis*nek vagy a *megoldás módszeré*nek neveznek, és amit a *feltalálás módszeré*nek is hívhatunk, a másik annak a módszere, hogy ha már megtaláltuk az igazságot, azt megértessük másokkal is: ezt nevezik *szintézis*nek vagy a *kompozíció módszeré*nek, de a *tanítás módszeré*nek is hívhatjuk” (*Logique de Port-Royal*, IV., II. – idézi Derrida 1987. 46).

[7] A matematikai tudás példaszerű privilégiuma éppen a deduktív építkezésből ered, amit mi sem tükröz jobban, mint hogy az újkor elején Francis Baconnek komoly kritikai erőfeszítéseket kellett tennie, hogy a tudás területén az induktív eljárások létjogosultságát mint a természet megismerésének egyedül adekvát módját elismertesse.

heurisztikus lépéslehetőségeit rendszerezi, Lakatos egyenesen a matematikai heurisztika alapmintáit igyekszik feltérképezni. Ezek részletezésétől eltekintve csak annyit emelünk ki, hogy visszaigazolódik bennük közös vonásként, hogy a matematika nem statikus igazságok halmaza, hanem folyamatban lévő tevékenység, így természetes és inherens módon társul hozzá az időbeli-történeti dimenzió. Lakatos a könyvének címével azt is jelzi, hogy a matematikai entitások és igazságok – bizonyítások és cáfolatok, azaz matematikai *diskurzus* révén jönnek létre és ekként léteznek.[8] „A matematikai heurisztika nagyon hasonlít a tudományos heurisztikára; nem azért, mert mindkettő induktív, hanem mert mindkettőt sejtések, bizonyítások és cáfolatok jellemzik" (Lakatos 1998. 114). Ez a mindenkor problémákhoz kötődő, történetként kibontakozó folyamat egy *kutatási programot* határoz meg, melyet a program kezdetekor a tudósközösség által kialakított metodológiai szabályok fognak össze. A kutatás nagy vonalakban megadott játékszabályai alkotják az ún. *heurisztiká*t. Egy kutatási program nem akkor ér véget, ha cáfolattal találkozik (mint Poppernél), mert a cáfolatok kivédhetők, hanem akkor, amikor a heurisztika kimerül, vagyis amikor a meglévő szabályok között a kutatásnak nincs további iránya, a diskurzus nem futhat tovább.

Lakatos szerint a matematika racionális volta nem másban gyökerezik, mint abban, hogy a matematikus nyitott a kritikára és képes választani, hogy elfogadja-e a cáfolatot, vagy kitart nézetének védelme mellett. Ám a választásában semmiféle kitüntetett metodológia nem nyújt számára segítséget, választása helyes vagy helytelen volta csak utólag derül majd ki. A matematikus viselkedése tehát nem racionális – erre nincs mérce, nem létezik a racionalitásnak „egzakt fogalma" –, legfeljebb tisztességes lehet: a becsületes belátások és a választások következetessége, nem pedig valamiféle szubsztanciális racionalitás szükségszerűsége alapozza meg a matematikusról leváló matematika épületének racionális voltát. Mert az épület a matematikusok választásain keresztül épül: létrehozzuk, nem pedig készen felfedezzük. Noha Pólya is, Lakatos is elsősorban példákon keresztül mutatják be a heurisztika működését, munkásságuk nyomán a matematikai heurisztika rendszerré szerveződött, és mint a matematikai megismerés filozófiája is elfogadottá vált,[9] amit aztán Paul Ernest fent említett műve tetőzött be.

Jegyezzük még meg, hogy a matematikai felfedezésre-föltalálásra, illetve általában a matematika keletkezésére és változására többször próbáltak meg ráhúzni klasszikus tudományos megismerési sémákat, mint amilyen a Kuhn-féle paradigmaváltás, vagy a Popper-féle, sejtésekre és cáfolatok sorozatára épülő *(trial-and-error)* séma, amit implicit módon (ám, láttuk, lényegileg módosítva) maga Lakatos, illetve később mások is alkalmaztak (vö. Glas 2001a; Glas 2001b).

[8] Kiválóan foglalja össze Lakatos ilyen irányú gondolatait Kutrovácz Gábor *A racionalitás rekonstrukciója* című esszéje (http://hps.elte.hu/~kutrovatz/latyak.html).

[9] Ahogy Lakatos ezt a szükségszerűséget megfogalmazza: „a matematika története, a filozófia iránymutatását nélkülözve, vakká, a matematika filozófiája, mellőzve a matematika történetének legérdekesebb problémáit, üressé válik" (Lakatos 1998. 15).

Véleményünk szerint nem véletlen azonban, hogy ezek a kísérletek csak mérsékelt sikerrel járhattak – a matematika és így a matematikai felfedezés, minden heurisztikai hasonlóság ellenére, fontos pontokon mégis különbözik a természettudományos megismeréstől. A tudományos forradalmak, paradigmaváltások elmélete elsősorban azért nem alkalmazható rá, mert minden paradigmaváltás előfeltétele a megfigyelt és az elméleti eredmények közötti ellentmondás: „A tudóst minden kutatási probléma anomáliákkal szembesíti, amelyeknek forrását nem tudja határozottan beazonosítani. Elméletei és megfigyelései sohasem egyeznek teljes pontossággal." (Kuhn 1977a. 140.) A tiszta matematikában ez a konfliktushelyzet nem jön létre, hiszen nincsenek „megfigyelt", külső forrásból származó adatok, így az elmélet nem konfrontálódik a saját világán kívüli elemekkel. Nem véletlen az sem, hogy maga Kuhn klasszikus művében csak marginálisan ejt szót a matematikáról, és az előzőekkel összhangban mintegy kiemeli a matematikát a megismerésben történetiséggel rendelkező tudományágak közül. Kuhn a matematikai megismerést és tudást önmagában nem is, csak mint a modern természettudományok számára modelleket, nyelvet és eljárásokat biztosító segédtudományt veszi tekintetbe.[10] Ennek hátterében az a klasszikus vágyképzet húzódhat, hogy a matematikában úgyis minden rendben van, vagy magától rendben lesz, a matematikai heurisztika esetlegessége, időbelisége vagy általánosabban a performativitása (időbeli kifejlése) mellékes kérdés.

A tudományhermeneutikától eltérően a klasszikusabb alapokon nyugvó tudományfilozófia a matematikára továbbra is történetietlen, történelmen kívüli tudományként tekint, és elkülöníti a többi természettudománytól. Holott a természettudományok történetiségvizsgálatának hermeneutikai nézőpontjai egyáltalán nem idegenek a matematika megértésétől. Segíthet talán közelebb hozni az álláspontokat Schwendtner Tibornak a Kuhn rendszerét Heidegger hermeneutikai eszközkészletével vizsgáló tanulmánya (vö. Schwendtner 2000). A szerző megállapítja, hogy a természettudományok az ember eredendő történetiségébe, a világtörténelembe ágyazódnak, s mint ilyenek történeti voltukat ennek a mélytörténetiségnek köszönhetik. Ebből a történetiségből ered és ebbe illeszkedik a tudományos forradalmak és paradigmaváltások diszkontinuitásával tagolt tudománytörténet. Azonban a tudományok akkor is történetiek, amikor éppen nem játszódnak le paradigmaváltások: kibontakozásuk bizonyos szakaszaiban – a „forradalommentes", Kuhn által „normál tudománynak" nevezett szakaszokról van szó – szintén megjelenik egyfajta történetiség: „a normál tudomány belső mozgásában is olyan teleológia tételeződik, melyet a történetiség egy módjának tekinthetünk. A kumulatív fejlődésideára gondolhatunk, mely

[10] Kuhn az idézett könyvében a „matematika" szót összesen kilencszer írja le, tipikus megjelenései: „to develop the mathematics required for applications" (Kuhn 1977. 32); „only the mathematics of the application had been wrong and that Newtonian theory could stand" (Kuhn 1977. 81).

szerint a tudomány folyamatosan bővíti ismereteinek körét." (Schwendtner 2000. 145.) Véleményünk szerint ez a belső történetiség, amely egyelőre a külső világ történetiségétől elkülönülni látszik, a matematikára, éppen a természettudományokkal szemben kizárólagosnak bizonyuló kumulatív természete miatt, szintén alkalmazható. A következő fejezetben megvizsgáljuk a matematikát jellemző történetiség, időbeliség tulajdonságait.

IV. A MATEMATIKAI ENTITÁSOK TÖRTÉNETISÉGE ÉS IDŐBELISÉGE

A mi nézőpontunkból a történetiség és az időbeliség nemcsak hogy nem iktatható ki a matematikai megismerésből, hanem annak inherens része. Azt állítjuk, hogy a matematikai entitások lényegi idődimenzióval rendelkeznek, és sokkal természetesebb, ha folyamatokként tekintünk rájuk, hiszen létrejöttükben (hogy itt maga a megértő konstruktivista értelemben genuin teremtőként vagy platonista értelemben feltalálóként van-e jelen, az most irreleváns) éppúgy, mint létükben áthatja őket az időbeliség, annak minden jegyével együtt: beléjük íródik a keletkezés, a változás kiszámíthatatlansága, az időleges érvényesség, a történetiség és a társadalmiság. Ugyanakkor vigyázzunk: amikor a matematikának (de nem csak a matematikának) a performativitás perspektívájában elgondolt történeti folyamatszerűségét (melyben az egyéni jelenlétnek kiiktathatatlan szerepe van, a heurisztika megelőzi a leírást, a feltalálás lényegibb a felfedezésnél, az entitások inkább funkcionális, mint ideál-objektum-egységek stb.) a szükségszerűséggel, időtlenséggel, örökkévalósággal szemben hangsúlyozzuk, akkor nem a közönséges értelemben vett esetlegességet vagy véletlenszerűséget tulajdonítjuk neki. Abban a gondolati rendben gondolkodunk, amely az egész ellentétpárt meghaladja, hiszen a performatív játék történései egyszerre szükségszerű-determinisztikus és esetleges-kiszámíthatatlan történések. A játékszabályok ilyen történéseket generálnak: tesznek lehetővé és engednek megtörténni.

Már amikor kvázi-entitásként határoztuk meg a matematikai létezőket, és létmódjukat illetően a funkciójukra helyeztük a hangsúlyt, hozzárendeltük őket ahhoz az időbeli és a kollektív tudatban kibontakozó történeti-társadalmi folyamathoz is, melyben egyáltalán értelmes róluk beszélni. Ezzel elvitattuk ugyan tőlük az időtlenséget és az abszolút létet, de nem vitattuk el, hogy képesek, éppen a matematikai játék szabályrendszeréből adódóan, és csakis ekként időtlennek és abszolútnak *tételeződni*. Nem rejtettük el azt a további problémát sem, hogy ez az álláspont, mely a matematikai észjáték szabályrendszerének effektusaként tekint az időtlen létezőkre és az abszolút igazságokra, magának az észnek a működési módjára támaszkodik. Az ész az egyetemes igazságok megalkotására törekszik, ahol – Derrida megfogalmazását és tudásról alkotott nézetét kölcsön véve – „az egyetemesség azonos az idealitással, azaz a korlátlan ismételhetőséggel" (Derrida 1987. 50).

Vizsgáljuk meg most mindezt egy konkrét matematikai példán keresztül! Elsőre meglepő lehet a természetes számokat vagy az euklideszi geometriát időben változónak tekinteni, hiszen ezekhez a rendszerekhez és fogalmakhoz az állandóságot és megváltoztathatatlanságot társítjuk, de a matematika létrejöttének sajátságaival, a matematikai invenció lényegi elemeivel mégis ez a látásmód egyeztethető össze legtermészetesebben. Azt a tényt, hogy a 2-es számmal kapcsolatban egyre többet tudunk, az eddigi elméletek úgy interpretálják, hogy a több ezer éve gyűjtött információink egy állandó (megtalált vagy létrehozott) objektum tulajdonságainak a számát gazdagították (pl. a 2 prímszám, páros prímszám, ikerprím, a páros számok algebrai gyűrűjében nem nullosztó stb.). Ennek következtében a platonista vs. nemplatonista ontológiai vita abszolút súlypontját az képezi, hogy a 2-es szám „prímszám" vagy „nem nullosztó" mivolta vajon mindig is a sajátja volt-e ennek az objektumnak (platonista), vagy mi találtuk ki ezt a tulajdonságfogalmat, melynek a 2-es szám (mint általunk korábban megalkotott objektum) megfelel, és így új objektumként, egy új tulajdonsággal gyarapodva tekintünk rá (nem-platonista).

A platonista álláspont nyilvánvalóan mentes bármiféle történeti aspektustól, a 2-es számnak nincs időbelisége, az pedig marginális kérdés (és nem is a 2-es számról szól, hanem a matematikusokról), hogy ki találta meg az adott tulajdonságot, ami egyébként mindig sajátja volt a 2-esnek, és csak a felfedezésre várt. A konstruktivista irány számol ugyan a létrejövés pillanatával, de ahelyett, hogy ezt *valódi* történetiségbe ágyazva a matematikai létezők és igazságok folyamatos kibontakozását hangsúlyozná, melyben azok a pillanatnyilag ismert tulajdonságok mindenkor koherens egységeként adottak, minden egyes új tulajdonság felbukkanásával és fogalmi megragadásával egy miniatűr paradigmaváltást ír elő: amíg a prímszám fogalma nem társult a 2-es számhoz, addig „rosszul gondoltunk" a 2-es számra, az nem az „igazi" 2-es objektum volt, az csak most, a prímszámsággal vagy a nullosztóság cáfolatával jött létre.

Hiába érthetünk egyet Ernesttel és konstruktivista követőivel abban, hogy „a matematikai igazság cáfolható és korrigálható, és soha nem tekinthető a revízió és korrekció fölött állónak",[11] ha ebből arra is következtetnek, hogy a matematikai *objektumok*ról (pl. a 2-es számról) szóló állítások megkérdőjelezésével, tulajdonságai felülbírálásával és korrigálásával az eredeti objektum addigi léte is megkérdőjeleződik: az új tulajdonságok mindig új objektummá alakítják azt. Hiszen ha jobban meggondoljuk, ez a felfogás ebben a megfogalmazásban korántsem áll messze a platonista elképzelésektől; a rendre felbukkanó „új" tulajdonságok (bár a valós időben zajló, tényleges konstrukciós folyamatok révén, de mégiscsak) olyan létezők megalkotásához vezetnek, melyek *önmagukban* már rendelkeznek az igaz tulajdonságok összességével, csak pillanatnyilag nem tu-

[11] „…mathematical truth is fallible and corrigible and should never be regarded as being above revision and correction" (Ernest 1998. 9–10).

dunk róluk. Véleményünk szerint helyesebb azt a felfogást képviselni a még nem ismert tulajdonságokkal kapcsolatban, hogy előzetesen semmilyen módon nincsenek, csak magában a matematikai észjáték*ban*, ennek részeként a matematikai heurisztiká*ban* és ennek *révén* bukkannak fel akként, amiként a játék lehetővé teszi, megengedi és létrehívja őket.

A performatív látásmódunk szerint a „2-es szám" fogalommal egyáltalán *nem objektumot*, hanem egy időbeli változást, egy *történeti folyamatot* jelölünk, melyben a 2-es szám az új és új tulajdonságok révén folyamatosan megképződik. Mivel a 2-es szám a felbukkanó tulajdonságok összefoglaló neve, helyesebb magával a felbukkanási folyamattal azonosítani. Egy adott pillanatban természetesen ezen tulajdonságok meghatározott számúak és tartalmúak, így a 2-es szám fogalmának, a folyamatnak az adott pillanatban ismert és neki tulajdonított összes tulajdonság mintegy a pillanatfelvétele. Soha nem állíthatjuk azonban, hogy a lehetséges tulajdonságok (vagyis azok a funkciók, melyek révén a 2-es szám további matematikai folyamatokban meghatározott szerepet tölthet be) lezártak lennének, sem pedig hogy – akárcsak a „2" nevet viselő entitás – léteznének anélkül, hogy valaki (értsd: konkrét személy és közösség) elgondolta, megnevezte, leírta volna, vagy tekintetbe venné őket. Ezzel nem zárjuk ki annak a lehetőségét, hogy újabb megismerési folyamatokba lépve, ma nem ismert tulajdonságokkal bővül. A „működésben lévő" matematika számára a matematikai entitások funkciójukban érdekesek, a lét*érvényesség*ükben, ami viszont a matematikai megismerési folyamat heurisztikus szabályai által meghatározott gondolati aktusokhoz rendelt. Márpedig a matematikai heurisztika eljárásrendje történetileg meghatározott, így a matematikai létezőkbe és tulajdonságaikba, valamint az igazságok létérvényességébe és értékébe beleíródnak a rájuk irányuló és velük korrelatív aktusok jegyei.

Ha azonban ilyen mértékben függővé tesszük a matematikai entitásokat az egyedi gondolkodástól, nem szolgáltatjuk-e ki őket a pszichologizmusnak? A válasz határozottan az, hogy nem, mert egy matematikai fogalom azt a történetileg zajló egyéni és kollektív gondolkodási folyamatot jelöli, amelyben a fenti tulajdonságok (maguk is folyamatok) egyre gazdagabb rendszere nem csupán összeszövődik, de olyan formába rendeződik, amely kiemeli az egyéni és pszichológiai meghatározottságából. Ez az ideális rögzítő forma teszi lehetővé, hogy az egyéni történeti megismerési folyamat ellenére, más számára is ugyanakként legyen elgondolható, tulajdonképpen elismételhető. Ilyen értelemben a 2-es számhoz esszenciálisan hozzákapcsolódik egy történeti és egy matematikatörténeti horizont, amelyen ő folyamatosan megvalósul, mely megvalósulás nem mellékesen, hanem lényegileg olyan formaöltést is jelent, amely nem fölé emeli a történetiségnek és időbeliségnek, hanem mindenkor jelenlévővé teszi a horizont egészén. Bizonyos értelemben kiterjesztése ez a nézet a Gadamer által bevezetett fogalomtörténetnek *(Begriffgeschichte)*: a „2-es szám" matematikai fogalma a történetiségben kialakuló és átalakuló új és új értelmezéseket foglalja magában, végül ennek az értelmezés-sorozatnak a folyamatát jelöli.

Számot adva itt azokról a felépítési törvényszerűségekről és alakítási színvonalról, amelyek hatására a matematika történelmen kívülinek tűnik, jegyezzük még meg, hogy amikor történetiségről beszélünk, valójában két különböző időbeliséget értünk rajta, melyek elválaszthatatlanul, de az elemzés szándékával elkülöníthetően játszanak szerepet a matematika megvalósulásában. A matematikának mint performatív észjátéknak létezik egy belső, a fenti folyamatok, entitások fogalomteréhez kapcsolt időbelisége, mely a matematikai *leírásban* az egymásutániság szigorú rendjét követve épül ki. Másrészt, mivel mindez emberi cselekvésként jön létre és valósul meg, természetesen létezik egy külső, történeti idő, amiben a performatív tudomány cselekvő résztvevői léteznek, és amiben a *matematikai heurisztika* ténylegesen zajlik. Ezt a két időbeliséget éppen a matematikatörténet kapcsolja össze, amennyiben a fogalomtér belső idejében történteket mintegy ráaggatja a külső, valós idő szövetére. A matematikatörténet tehát ennek a két időhorizontnak az összeolvadása, melyen a matematikai entitások és igazságok téridőbeli *Vollzug*ja játszódik.

A valós történeti és a fogalomtérbeli dimenzió megkülönböztetésével jutunk oda, hogy a matematikai entitásoknak tulajdonított lényegi időbeliséget értelmezzük. Amikor a matematikai entitások fogalomterének belső, rendszerbeli időbeliségéről beszélünk, arra kívánunk utalni, hogy a matematikai entitások időbeli megképződésének van egy, az őt magában hordozó rendszerre jellemző és belőle fakadó konstitúciós folyamata, s ezzel együtt időbelisége (az időbeliséget jellemző egymásra következés és irreverzibilitás az axiomatikusan építkező rendszer kiépülését vezérli: az „és ebből következik…” egymásutánisága). Ez az időbeliség, amennyiben átível történeti korokon, függetlenedik a tényleges időbeliségtől, melyben a konstitúciós aktusok ténylegesen lefutnak, és amelyek, amennyiben egyéni tudatok aktusai, az emberi létezés időbeliségében gyökereznek. A függetlenedést technikailag az jelzi például, amikor hibát vétve, *elölről kezdjük* a számolást, a bizonyítást, vagy köztes lépéseket iktatunk be, illetve hagyunk el. De a két időbeliség a lefolyásának sebességében is különbözhet: lehet, hogy egy bizonyítás egyetlen hiányzó kulcsmozzanatát a bizonyítás gondolatmenetének létrejötte után (a külső időt tekintve) csak évekkel vagy évtizedekkel később tudjuk beilleszteni abba a keretbe, amit korábbi matematikusok felvázoltak. Ekkor a bizonyítás belső, rendszerideje alig változott, a performatív észjátékban egyetlen lépés történt, miközben a külső időben esetleg évtizedek teltek el. Szélsőséges példája ennek a derékszögű háromszögekkel kapcsolatos Pitagorasz-tétel: miközben a sumérek a görögök előtt évezredekkel is használták már ezt a matematikai összefüggést, Püthagorasz volt az, aki be is bizonyította azt. Ezek a „külső” évezredek a derékszögű háromszög entitása szempontjából változatlanul teltek el, így a fogalomtér belső idejében a sumer matematikusok és Püthagorasz hozzájárulása a fogalom bővüléséhez közvetlenül egymás utáni pillanatoknak tekinthetők.

Egy másik, többszereplős példa a valószínűség fogalma. De Méré lovag problémafelvetése indította el azt a folyamatot, amelynek során Pascal, Fermat és Bernoulli gondolataiban először a valószínűség kockadobással kapcsolatos (klasszikusnak nevezett) aspektusai bomlottak ki (mi a valószínűsége, hogy hatost dobunk?), ezt Buffon terjesztette ki olyan (geometriainak nevezett) helyzetekre, mint a mai darts játék (mi a valószínűsége, hogy a nyíllal *bull*t dobunk?), majd Kolmogorov formálta mindezt axiomatikus rendszerré. Ebben a mondatban a „valószínűség" címkével ellátott folyamatot, performatív észjátékot a matematikai fogalomtér belső ideje szempontjából írtuk le. A folyamat ilyen leírása szempontjából irreleváns az a tény, hogy a fent említett tudósok egy asztalnál ültek-e ezalatt vagy sem. A külső idő nézőpontjából tekintve közülük némelyek (pl. Pascal és Fermat) valóban leveleztek egymással ez ügyben, míg másokat (pl. Bernoullit és Kolmogorovot) több száz év választott el, azonban egymás eredményeit, hozzájárulását ismerve és megértve gond nélkül folytatták tovább a „beszélgetést". A két idősíkot az a matematikatörténeti leírás köti össze, miszerint: 1654-ben de Méré lovag Pascalhoz fordult egy kockajátékkal kapcsolatos kérdéssel. Pascal még abban az évben barátjával, Fermat-val levelezve oldotta meg a problémát, amit Bernoulli, aki a kérdés évében született, 1713-as könyvében, tehát a kérdés születése után 60 évvel fejlesztett tovább. Buffon, aki a fenti könyv megjelenésekor 6 éves volt, 50 évvel később sikeresen terjesztette ki a vizsgálódásokat geometriai problémákra. Végül újabb 130 évnek kellett eltelnie, mire Kolmogorovnak sikerült a fogalmat axiomatikus alapokra helyeznie.

A rendszeridő függetlenedése, benne a bármikori újrakezdés lehetősége és ugyanakkor a konstitúciós folyamatok egymásra következésének szigorúsága (honnan máshonnan tudnánk, hogy tévedünk, ha nem abból, hogy lépést, vagyis sorrendet tévesztettünk) készíti elő a matematikai entitások önálló, a valós időtől elszakadó s mint ilyen időtlen szférájának gondolatát és tapasztalatát. A performatív szemlélet inkább azt hangsúlyozza, hogy a matematika, ahogyan valójában minden tudás, a maga történetiségében az, ami. Mi más lenne bármely tudomány, mint a történetileg kibontakozott és folyamatosan zajló heurisztikának a pillanatfelvétele? És nem abból adódik-e számos probléma, hogy a történeti kibontakozást el akarjuk mismásolni, csak a célhoz vezető útnak tekintjük? Holott ez a történeti dimenzió adja meg mindennek az értékét, érvényét és értelmét, amire nem reflektálunk a tudomány művelése közben. Ám mindig ezek válnak lényegivé, s épp a történetiségükben rejlő, átvilágítatlan előfeltevéseikkel, amikor egy adott tudományt ért kihívások megválaszolhatatlansága a tudósokat továbbgondolásra (vagy, ahol ez releváns, paradigmaváltásra) sarkallja. Minden olyan nézetnek a hátterében, mely nem akar erről – a tudás történetiségéről – tudomást venni, a teljes, végső, tiszta, abszolút tudás eszméje áll. Ezt az eszmét azonban pont azok őrzik, akik reflektálatlanul művelik a tudományt.

V. SZEMÉLYES JELENLÉT A HAGYOMÁNYTÖRTÉNETBEN

A matematikusi tevékenység a matematikai észjátékba való bekapcsolódás, ami csak a(z addig érvényes) szabályok megértésével történhet meg. (Már csak emiatt is kiiktathatatlan a matematikai megértés történetisége.) Döntő jelentőségű, hogy Searle megkülönböztetését már eddig is alkalmazva, a matematikai észjáték szabályai *konstitutívak* és nem regulatívak, vagyis nemcsak szabályoznak, de egyben meg is teremtenek egy viselkedésformát.[12] A matematikus bekapcsolódása első lépésben *ennek* tudatosítását jelenti. Ezért tartjuk érvényesnek ismét Gadamer megállapítását:

> a megértés nem annyira módszer, melynek segítségével a megismerő tudat egy általa választott tárgy felé fordul és objektíve megismeri, hanem inkább a benne állás valamilyen hagyományfolyamatban. *Maga a megértés is történésnek bizonyult.* (Gadamer 2003.[2] 345, kiemelés az eredeti szövegben.)

A gondolatot a matematikai észjátékra alkalmazva, az ebbe való bekapcsolódás tehát már kezdeti szakaszában sem más, mint bekerülés egy éppen zajló történésbe. A matematikus semmilyen értelemben nem emelkedik ki a történelemből, nemcsak individuális személyként, de specifikusan matematikusi tevékenységében sem, a legzseniálisabb matematikus is egy mindenkor zajló történeti folyamathoz kapcsolódik:

> Míg a romantikus hermeneutika […] a kongeniális megértőt minden történeti feltételezettségből kiszakította, a történeti tudat önkritikája végül is oda vezet, hogy nemcsak a történést, hanem ugyanúgy magát a megértést is történeti mozgásként ismeri fel. *Magát a megértést nem annyira a szubjektivitás cselekvéseként, hanem valamely hagyománytörténésbe való bekerülésként kell elgondolni*, melyben szüntelen közvetítés van a múlt és a jelen között. (Gadamer 2003.[2] 325, kiemelés az eredeti szövegben.)

Azt láthatjuk, hogy ez a személyes bevonzódás már a matematika alappillérénél, az axiomatikus felépítésnél is nyilvánvaló. Az axiómák és posztulátumok, mivel természetüknél fogva nem tesznek lehetővé és nem is kívánnak meg bizonyítást, nem támaszkodnak a területen belül semmilyen bizonyítható háttérre, így szükségszerűen az őket létrehozó személy döntésétől függnek. Az euklideszi geometria első ismert axiómarendszere óta számos más axiómarendszere született ugyanennek a területnek, és csak egy részüknek volt célja az euklideszi rendszer „javítása", más axiómarendszerek létrehozói egyszerűen azzal indo-

[12] „A regulatív szabályok egy már létező tevékenységet szabályoznak, amelynek létezése logikailag független a szabályoktól. A konstitutív szabályok megalkotnak (és persze szabályoznak) egy olyan tevékenységet, amelynek létezése ily módon logikailag függ a szabályoktól." (Searle 2009. 46–47.)

kolták a saját rendszerüket, hogy az szerintük alkalmasabb pl. oktatási célokra (Birkhoff). Az adott terület axiómarendszere performatív értelmezésünkben – Wittgensteint követve – játékszabályok gyűjteményeként funkcionál: egyesek elfogadhatják azt, és így részt vehetnek a játékban, mások elutasíthatják, amivel kizárják magukat ebből a játékból – miközben természetesen létrehozhatnak alternatív játékszabályrendszert, ahogy azt például Bolyai János tette a nemeuklideszi geometria megalapozásakor.

De még ennél is erősebbnek tűnik a személyes aspektus az axiomatikus rendszerek kidolgozásánál. Ahogy arra Karl Popper rámutatott, bármilyen (elég gazdag) axiómarendszerből végtelen sok „érdektelen" állítás is kijön, nemcsak a „jelentős" állítások. Az „érdektelen" és „jelentős" jelzők szubjektív értékítéletet zárnak magukba, hiszen nem arról van szó, hogy az egyik állítás logikailag korrekt, a másik pedig nem, hanem két, logikailag igazolt, az axiómákból levezethető állítás egyikét a matematikai észjáték résztvevői „érdektelennek", a másikat „érdekesnek", „jelentősnek" ítélik meg. Polányi hasonlóan vélekedik: sokkal többet is tudhatnánk (a matematika szempontjából értsd: sokkal több konkrét tételt is bebizonyíthatnánk), de csak azt kutatjuk, amit érdekesnek tartunk. Annak választása, hogy az axiómarendszerünkből következő egyik adott lehetséges irányt valóban követjük-e a kidolgozásnál, csupán egyéni – vagy kollektív – ízlés kérdése, azaz mindenképpen személyes döntés.

Félreértések elkerülése végett jegyezzük itt meg, hogy a fenti gondolatmenet végig az úgynevezett tiszta matematikáról szól, azaz nem vesszük most figyelembe azt a helyzetet, amikor a „jelentős" azt jelzi, hogy az eredmény valamilyen nem matematikai problémának a megoldásához visz közelebb – ez az alkalmazott matematika területe, ahol az értékítéletet az alkalmazási kényszer szükségszerűen befolyásolja (ahol tehát „jelentős" = „jól használható"). Az alkalmazott matematika tárgyalásunkból való kizárása azonban nem jelent komoly megkötést, hiszen a matematikának nem lényegi eleme az alkalmazás. Még ha a valós életből vagy más tudományágakból érkező problémák inspirálják is a matematikusokat, a performatív észjáték legtöbbször jelentősen túlnő a kiindulási problémán és önmaga szépségéért, izgalmáért folytatódik tovább.

VI. KONKLÚZIÓ

A már idézett Diebner is megfogalmazza – igaz, nem a matematikára nézve – ezt a központi fontosságú álláspontot: a tudományos performansz egyfajta játék, amely éppen attól performatív jellegű, hogy a kutató aktívan részt vesz annak alakításában.[13] Hangsúlyozza továbbá, hogy a performativitás nem mellékszál, nem díszlet itt, hanem a tudomány művelésének megkerülhetetlen eleme, a heurisztika egyik alapvető eszköze és forrása, amit a szerző konkrét kísérleti fizikai problémák vizsgálatával (pontosabban: a problémák vizsgálatának vizsgálatával) támaszt alá.[14]

Hogy mi a geometria, azt senki nem tudja és talán nem is akarja pontosan körülírni, hiszen minden pillanatban születnek új tételek, másokat esetleg megcáfolnak, de azzal, hogy Euklidész megalkotta az első szabályrendszert, egyúttal egy folyamatos játékra, 2300 éves performanszra hívott minket, és így ahelyett, hogy a tételek bizonyos halmazát neveznénk tökéletlen módon geometriának, valójában ennek a – nyilvánvalóan idődimenzióval rendelkező – performansznak kell a geometria nevet adnunk. Az, hogy a következő pillanatban, napban, évben ez a performansz – a szabályok keretei között, vagy akár új szabályokat kialakítva – hogyan alakul, megjósolhatatlan, illetve az aktív „játékosok", a matematikusok döntésein, *ízlésén* múlik, és nem pedig valamilyen determináló erővel rendelkező, egyetlen és abszolút szabályrendszeren. Még a legtöbbször ilyennek gondolt kétértékű (igaz-hamis) logika is vizsgálat és módosítás tárgya lehet, ahogy az meg is történt a háromértékű vagy akár végtelen sok értéket tartalmazó (úgynevezett fuzzy) logikák vizsgálatával.

Filozófusok és matematikusok sora, Kanttól Russellig, vizsgálja azt a problémát, hogy az axiomatikusan felépített, objektívnak hitt matematika is folyamatos – és evidens módon szubjektív – döntésekkel terhelt, azonban ezek mögött a döntések mögött a korábbi interpretációk többnyire valamilyen titkos, szükségszerű döntési elveket, „igazi" matematikát keresnek. Ha azonban nem úgy tekintünk a matematikára, mint viták, szubjektív döntések sorozatának *végeredményeként* előálló valamiféle örök igazságra, hanem éppen *ezt a folyamatot* tekintjük matematikának, azaz a döntéseknek és azok eredményének, tehát az egész processzuális kibontakozásnak az időbeliségét is számba vesszük, akkor a fentiek fényében a matematikára mint észjátékra tökéletesen illik a performatív, a történetiséget és játékosok személyes bevonzódását egyaránt lényegi elemként tartalmazó jellemzés, melyet úgymond külső „zavaró tényezőktől" mentesen játszanak. Ilyen értelemben tehát a matematika nemcsak hogy performatív módon értelmezhető, hanem a tudományok közül – a filozófia mellett – a legtisztább formában performatív módon kibontakozó tudomány.

[13] „It fits into our idea of scientific performances that the researcher is actively involved in what he/she is examining. There is something playful in the performative approach." (Diebner 2006. 21.)

[14] „The performance is […] an uncircumventable and constituent element of concrete practical investigations" (Diebner 2006. 25; a fizikai példák a könyv 26–35. oldalán találhatók).

IRODALOM

Derrida, Jacques 1987. *Psyché. Inventions de l'autre*. Paris, Galilée. 11–63.

Derrida, Jacques 1995. Introduction. In Husserl, Edmund 1995. *L'Origine de la géométrie*. Traduction et introduction par Jacques Derrida. Epiméthée, Paris, PUF. 3–173.

Descartes, René 1994. *Elmélkedések az első filozófiáról*. Ford. Boros Gábor. Budapest, Atlantisz.

Diebner, Hans 2006. *Performative science and beyond*. Wien, New York, Springer.

Durkheim, Émile 1895. *Les Règles de la méthode sociologique*. Paris, Félix Alcan.

Ernest, Paul 1998. *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. Albany/NY, State University of New York Press.

Gadamer, Hans-Georg 2003[2]. *Igazság és módszer. Egy filozófiai hermeneutika vázlata*. Ford. Bonyhai Gábor. A fordítást ellenőrizte Radnóti Sándor, a második kiadás számára átnézte és felfrissítette Fehér M. István. Budapest, Osiris.

Glas, E. 2001a. The Popperian Programme and Mathematics. Part I. The Fallibilist Logic of Mathematical Discovery. *Studies in History and Philosophy of Science*. Part A. Vol. 32. 119–137.

Glas, E. 2001b. The Popperian Programme and Mathematics. Part II. From Quasi Empiricism to Mathematical Research Programmes. *Studies in History and Philosophy of Science*. Part A. Vol. 32. 355–376.

Gödel, Kurt 1931. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. *Monatshefte für Mathematik und Physik*. 38/1. 173–198.

Greenberg, Marvin Jay 2010. Old and New results in the Foundations of Elementary Plane Euclidean and Non-Euclidean Geometries. *The American Mathematical Monthly*. 117/3. 198–219.

Husserl, Edmund 1995. *L'Origine de la géométrie*. Traduction et introduction par Jacques Derrida. Epiméthée, Paris, PUF.

Kant, Immanuel 2003. Vizsgálódás a természetes teológia és a morál alapelveinek világosságáról. Ford. Aradi László. In uő: *Prekritikai írások*. Ford. Ábrahám Zoltán et al. Budapest, Osiris / Gond-Cura Alapítvány. 255–284.

Kuhn, Thomas S. 1977. *The Essential Tension. Selected Studies in Scientific Tradition and Change*. Chicago, The University of Chicago Press.

Kuhn, Thomas S. 1977a. The Essential Tension. Tradition and Innovation in Scientific Research. In Kuhn 1977. 139–147.

Kutrovácz Gábor é. n. A racionalitás rekonstrukciója (http://hps.elte.hu/~kutrovatz/latyak.html).

Lakatos Imre 1976. *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press.

Lakatos Imre 1998. *Bizonyítások és cáfolatok*. Ford. Boreczky Elemér. Budapest, Typotex.

Ohtani, Hiroshi 2018. Philosophical Pictures about Mathematics. Wittgenstein and Contradiction. *Synthese*. 195. 2039–2063.

Pólya György 1945. *How to Solve It*. Princeton University Press.

Schwendtner Tibor 2000. Thomas Kuhn és a hermeneutika. *Replika*. Vol. 41–42. 139–148.

Searle, John R. 2009. *Beszédaktusok. Nyelvfilozófiai tanulmány*. Ford. Bárány Tibor. Budapest, Alkalmazott Kommunikációtudományi Intézet – Gondolat.

Wittgenstein, Ludwig 1992. *Filozófiai vizsgálódások*. Ford. Neumer Katalin. Budapest, Atlantisz.

Wittgenstein, Ludwig 1999. Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik. *Werkausgabe*. Band 6. Frankfurt am Main, Suhrkamp.