

WINKELMESSUNG UND DIE ANFÄNGE
DER TRIGONOMETRIE*

I

Der Begriff des Winkels in der Planimetrie scheint eine Neuschöpfung der altionischen Wissenschaft in der Zeit um Thales herum gewesen zu sein. Darf man sich auf die Erörterungen von O. Neugebauer verlassen, so gab es diesen Begriff im vorgriechischen Ägypten und in Babylon noch überhaupt nicht. Neugebauer spricht nämlich über die interessante Begriffsbildung etwa im folgenden Sinne.¹ Wollte man in Ägypten eine 'geneigte Fläche' beschreiben, so hat man dazu angegeben: um wieviel *Handbreiten* die Böschung bei einer vertikalen Höhe von einer *Elle* zurückspringt. Anstatt des Winkels selbst maß man also in diesem Fall die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, denn 'Höhe' und 'Zurückspringen' entsprechen ja in Neugebauers angedeuteten Schilderung den beiden kürzeren Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks. Interessant ist dabei, daß die Maße der beiden Längen auch nicht nach derselben Einheit angegeben werden; das 'Zurückspringen' — dies ist gewöhnlich wohl die *kürzere Kathete* — wird in *Handbreiten* gemessen, während die *andere Kathete*, die 'Höhe' als *eine Elle* (= 7 Handbreiten) genommen wird. Eine völlig ähnliche Begriffsbildung sei auch für Babylon charakteristisch; und auch dort hätte man noch die horizontalen und vertikalen Längen — also die für den fraglichen Winkel bezeichnenden Katheten des rechtwinkligen Dreiecks — nach verschiedenen Maßeinheiten angegeben.

Es ist demnach fraglich: ob es bei diesen älteren orientalischen Völkern einen solchen Begriff — und auch ein Wort für die Bezeichnung des betreffenden Begriffes — wie die griechische *γωνία* überhaupt schon gab? Denn 'Böschung', 'Höhe' und 'Zurückspringen' sind ja in diesem Zusammenhang nur Hilfsbegriffe, die den fehlenden Begriff 'Winkel' ersetzen.

Der griechische Begriff *γωνία* entstammt nun offenbar der Architektur. Der 'Winkel' ist nämlich die innere *Ecke*, die zwei Mauern oder zwei Wände

* Vortrag anlässlich eines Symposiums der 'Angewandten Mathematik', veranstaltet von der 'Union Balkanique des Mathématiciens' in Thessalonike, 16–21 August 1976.

¹ O. NEUGEBAUER: Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften. I. Bd. Vorgriechische Mathematik. Berlin 1934. S. 124.

miteinander bilden. Daher ist auch der 'rechte Winkel' $\acute{\alpha}\rho\theta\eta\ \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha$ = *rectus angulus*) der ursprünglichen Wortbedeutung nach gar nichts anderes als die normale, gewöhnliche Ecke zweier aufeinander stoßenden Wände.

Die Überlieferung der Griechen schrieb die ältesten und einfachsten Sätze über Winkel dem Thales zu. Er hätte als erster solche grundlegenden Theoreme ausgesprochen, wie z. B.: «zwei gerade Linien bilden, wenn sie einander schneiden, *Scheitelwinkel*, die einander gleich sind»;² die *Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks* sind untereinander gleich;³ alle auf einem Halbkreis ruhenden *Peripheriewinkel* sind rechte Winkel,⁴ und noch einiges ähnliche.

Diese einfachen und grundlegenden Sätze bezeugen nicht nur das erwachte Interesse an dem neuentdeckten Begriff 'Winkel', sondern auch, daß man schon frühzeitig versucht hatte, die Winkel untereinander zu vergleichen und messen.

Es gab eine Maßeinheit für das Messen der Winkel ursprünglich natürlich nicht. Euklid unterscheidet, wie bekannt, nur die drei grundlegenden Begriffe:⁵

(1) «Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist ein jeder der beiden gleichen Winkel ein *rechter Winkel*»,

(2) «Der *stumpfe Winkel* ist größer als der rechte Winkel», und

(3) «Der *spitze Winkel* ist kleiner als der rechte Winkel».

In der Tat genügen diese drei Begriffe — wie man bald sehen wird — um jene wichtigen 'Winkelmaße' zu schaffen, die die Elementargeometrie der Griechen gebraucht hatte. Dagegen war das Messen der Winkel in *Graden*, *Minuten* und *Sekunden* in der Geometrie der Alten eigentlich *nicht* üblich. Dieses andere Messen wurde erst durch eine Art angewandte Geometrie, nämlich durch die *Astronomie* eingeführt. Man beachte, wie diese Neuerung der Astronomie in der heutigen historischen Literatur gewöhnlich beurteilt wird. Man liest z. B. bei B. L. v. d. Waerden:⁶ «Für astronomische Rechnungen waren die gewöhnlichen Brüche zu unpraktisch; deshalb haben die Griechen die babylonischen Sexagesimalbrüche übernommen. Eine Teilung des Volltages (Tag + Nacht) in 360 'Zeitgrade' nach babylonischem Muster kommt schon bei Hypsikles (um 180 v. u. Z.) vor. Im Almagest des Ptolemaios (2. Jh. u. Z.) wird der Kreis nach babylonischem Beispiel in 360 Grade geteilt, jeder Grad in 60 Minuten, jede Minute in 60 Sekunden, usw.»

² Euklid. Elem. I 15. Vgl. Procli Diadochi In I. Eucl. Elem. librum comm., ed. G. FRIEDLEIN. Lipsiae 1873. S. 299, 1–5.

³ Euklid, Elem. I 5. Vgl. Proclus, In Eucl. (F) 250, 20–251, 2.

⁴ Diogenes Laërtios I 1, 24. Im allgemeinen über Thales siehe T. HEATH: A History of Greek Mathematics. Oxford 1921. I 130–137.

⁵ In den drei Definitionen des Buches I. der Elemente: 10, 11 und 12.

⁶ 'Erwachende Wissenschaft'. Basel–Stuttgart 1956. S. 82–83.

Ein anderes Zitat aus demselben Werk besagt dazu noch folgendes:⁷ «Der große Vorgänger des Ptolemaios, Hipparchos (um 150 v. u. Z. herum) benützte auch schon die sexagesimale Kreisteilung. Er kannte die babylonische Astronomie durch und durch: Er hat babylonische Finsternisbeobachtungen und Mondperioden überliefert. Wie Ptolemaios hat auch Hipparchos schon Sehntafeln berechnet, die sexagesimal eingeteilt waren. Etc. etc.»

Liest man solche Worte — die in der heutigen historischen Literatur gar nicht so ungewöhnlich sind —, so glaubt man in der Tat, daß die Babylonier das Messen der Winkel in Graden — eben mit ihrer Einteilung des Kreises in 360 Grade — angeregt, ja, begonnen hätten, und daß bei den Griechen dies gar nichts anderes als eine Übernahme, oder vielleicht die bloße Anwendung einer babylonischen Errungenschaft wäre. Aber ist dies überhaupt wahrscheinlich? Wir haben ja eben gesehen, daß nach Neugebauer selbst der Begriff des geometrischen 'Winkels' in der babylonischen Wissenschaft noch nicht regelrecht ausgearbeitet war. Und doch wären dieselben Babylonier auf dem Gebiete des Messens der Winkel den Griechen weit vorangegangen.

Noch mehr Zweifel bekommt man gegen B. L. v. d. Waerdens historische Konstruktion, wenn man etwas aufmerksamer die Erörterungen jenes Gelehrten untersucht, der heute als der allgemein anerkannte Fachmann der babylonischen Wissenschaftsgeschichte gilt. Dieser ist der schon mehrmals genannte O. Neugebauer, der einmal betonte, daß das sexagesimale Zahlensystem der Babylonier viel älter als die Einteilung des Kreises in 360 Grade wäre, und gar nichts mit astronomischen Überlegungen zu tun hätte. Auch Neugebauer glaubte zwar, daß die Einteilung des Kreises in 360 Grade von der babylonischen Astronomie her käme, aber dies wäre dort — wie er behauptete — *erst in den letzten Jahrhunderten vor unserer Zeitrechnung eingeführt worden*.⁸ Vermutet man also, daß Hypsikles oder Hipparchos im 2. Jahrhundert v. u. Z. die Einteilung in 360 Grade 'nach babylonischem Muster' angewendet hätte, so heißt dies auch soviel, daß diese beiden griechischen Astronomen ziemlich neue, ja vielleicht sogar zeitgenössische und eben erst aufgekommene Methoden ihrer babylonischen Kollegen übernommen und unter den Griechen eingeführt hätten.

Nun ist dies natürlich *nicht* der Fall. Es ist zwar nicht ausgeschlossen, daß manche Elemente des Winkelmessens in der griechischen Astronomie vielleicht in der Tat babylonischen Ursprungs sind, aber in Wirklichkeit sind die Dinge doch nicht so einfach, wie man sie sich nach den obigen Zitaten leicht denken könnte. Es gab in diesem Fall überhaupt kein solches 'babylonisches

⁷ Ebd. S. 84.

⁸ O. NEUGEBAUER: *The Exact Sciences in Antiquity*.² Providence, Rhode Island. p. 25: «The division of the circumference of the circle into 360 parts originated in Babylonian astronomy of the last centuries B. C. The sexagesimal number system as such is many centuries older and has nothing to do with astronomical concepts.»

Muster', dem die griechischen Astronomen hätten folgen können. Es ist viel wahrscheinlicher, daß die griechische Astronomie die Methode des Winkelmessens in Graden, Minuten und Sekunden aus sehr alten, auch in Babylon bekannten Elementen sich selber ausgearbeitet hatte. Es gab nämlich in der griechischen Astronomie — wie ich es gleich zeigen werde — auch eine ältere, einfachere Art des Winkelmessens, die noch *nicht sexagesimal* war, aus der sich jedoch die spätere, als 'sexagesimal' bezeichnete Winkelmessung konsequent entwickeln ließ. Bevor ich jedoch diese ältere astronomische Winkelmessung bespreche, möchte ich hier zunächst daran erinnern, wie die Alten Pythagoreer einige spezielle Winkelmaße in der Geometrie gewonnen und bezeichnet hatten.

Man könnte eigentlich auch schon aus den oben angeführten drei Euklidischen Definitionen erschließen, daß die *Einheit* für das Messen der Winkel der 'rechte Winkel' selber war. An ihm gemessen erscheinen ja der *stumpfe* und der *spitze Winkel* als ein 'größerer' bzw. als ein 'kleinerer'. Dieselbe Winkelmaß-Einheit erscheint auch im Euklidischen Satz, Elem. I 13: «Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, Winkel bildet, dann muß sie entweder *zwei Rechte* oder solche bilden, die zusammen *zwei Rechten gleich* sind.» Eben deswegen, weil man mit dem 'Rechten Winkel' als mit der *Einheit* rechnet, kann es auch heißen, daß die Summe der inneren Winkel in jedem Dreieck '*zwei Rechten gleich*' ist.⁹ Das Winkelmaß also, das wir gewöhnlich als '*gestreckten Winkel*', oder als 180° bezeichnen, wird nach dieser klassischen Art des Messens als *zwei Rechte* gemessen.

Dieses alte System des Winkelmessens war bei den Pythagoreern auch in seinen weiteren Einzelheiten benutzt, wie wir dies aus dem Text des Proklos einmal beinahe zufällig erfahren. Es war nämlich eine alte pythagoreische Entdeckung,¹⁰ die Proklos als 'paradoxon theorema' bezeichnet, daß es nur *drei* solche regelmäßige Polygone gibt, die die Fläche um einen Punkt herum auszufüllen vermögen; diese sind nämlich: das regelmäßige (gleichseitige) *Dreieck*, das *Viereck* (Quadrat) und das *Sechseck*. Man würde dieselbe Lehre heute in der Schule etwa folgendermaßen behandeln.

Nur solche regelmäßige Polygone vermögen die Fläche um einen Punkt herum auszufüllen, bei denen *das Maß je eines Winkels — in Graden ausgedrückt, und mit einer ganzen Zahl vervielfältigt 360 ausmacht*. Und dies trifft in der Tat nur in den drei genannten Fällen zu. Denn ein innerer Winkel des regelmäßigen Dreiecks ist 60° , und $6 \times 60 = 360$; der Winkel des Quadrats ist 90° , und $4 \times 90 = 360$, während ein Winkel des regelmäßigen Sechsecks 120° ausmacht, und $3 \times 120 = 360$ sind.

In diesem Sinne wird die Frage auch bei Proklos behandelt, doch er benützt, anstatt der Grade, das oben eben angedeutete Winkelmaß. Um eine

⁹ Proclus, In Eucl. (F) 379, 2 ff. Vgl. Euklid, Elem. I 32: *αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι ὁσίων ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.*

¹⁰ Vgl. auch E. FRANK: Plato und die sog. Pythagoreer. Halle (Saale) 1923. S. 223.

leichte Übersicht zu bieten, fasse ich hier in einer kleinen Tabelle alle jene Winkelmaß-Bezeichnung zusammen, die bei Proklos in diesem Zusammenhang vorkommen.¹¹

- 1) Den Winkel von 30° bezeichnet er als $\tauρίτον \acute{\alpha}ρθή$ = «ein Drittel eines rechten Winkels» ;
- 2) Der Name des Winkels von 45° heißt $\acute{\eta}μισον \acute{\alpha}ρθή$ = «die Hälfte eines Rechten» ;
- 3) 60° ist $\deltaίμοιρον \acute{\alpha}ρθή$ = 'zwei Drittel eines rechten Winkels' ;
- 4) 90° ist selbstverständlich eine $\acute{\alpha}ρθή$ = 'ein Rechter' ;
- 5) 120° (der Winkel eines regelmäßigen Sechsecks) wird als $μία \acute{\alpha}ρθή και τρίτον$ = 'ein rechter Winkel und ein Drittel' genannt ;
- 6) 180° , unser 'gestreckter Winkel' beträgt — wie oben schon erwähnt wurde — $\deltaύο \acute{\alpha}ρθαί$ = 'zwei Rechte' ;
- 7) und zum Schluß, der Name des Vollwinkels, 360° , heißt $τέσσαρες \acute{\alpha}ρθαί$ 'vier Rechte'.

Es scheint nun, daß man sich mit diesen speziellen Winkelmaßen in der Geometrie eine Zeitlang begnügen konnte. Man hat für kleinere Winkel als 30° (ein $\tauρίτον$) wohl keine besondere Namen geprägt.

Die Astronomie mußte sich jedoch bald eine feinere Methode des Winkelmessens ausbilden. Es ist interessant zu beobachten, wie diese Arbeit schon bei einem älteren Zeitgenossen des Euklid, Autolykos von Pitane, in den ältesten erhaltenen Werken der griechischen Astronomie¹² begann. Dieser Astronom bediente sich nämlich beim Winkel messen einer anderen Einheit, nicht des 'rechten Winkels', den die Pythagoreer halbiert und dreigeteilt hatten. Bemerkenswert ist dies u. a. auch darum, weil die Winkelmaß-Einheit des Autolykos eben 30° war, doch er bekam diese Einheit *nicht* durch das Dreiteilen des 'rechten Winkels', wie dies in der theoretischen Planimetrie üblich war. Er dachte sich nämlich anstatt dessen — *wohl nach uraltem Vorbild* — den vollen Kreis der Ekliptik, den $\zeta\omega\deltaίων \acute{\alpha}νκλος$ zwölfgeteilt. Und eben das *Zwölfstel*, $\deltaωδεκατημόριον$ wurde seine Winkelmaßeinheit. Begegnet man also im Text des Autolykos von Pitane Ausdrücken, wie $\deltaωδεκατημόριον$ oder $\deltaωδεκατημορίον περιφέρεια$ oder auch $\zeta\omega\deltaίον$ (*signum*), so heißt dies genau dasselbe, wie unser 30° . Ja, es werden bei ihm auch *alle* möglichen Mehrfachen des 'Zodion' (also 60° , 90° , 120° etc.) genannt. Natürlich haben auch die Babylonier den Tierkreis zwölfgeteilt, aber es ist mir nicht bekannt, ob das 'Zwölfstel' auch schon in Babylon ein Winkelmaß war. Dagegen ist bei Autolykos auch

¹¹ Man findet alle folgenden Winkelmaß-Bezeichnungen z. B. im Euklid-Kommentar des Proklos (FRIEDLEIN-Ausgabe) auf den Seiten 304—305 und 383.

¹² Autolyki, 'De sphaera quae movetur liber' et 'De ortibus et occasibus libri duo', ed. F. HULTSCH: Lipsiae 1885.

das ἡμισὸν ζῳδίου, das 'halbe Zodion', also unser 15° , ein exaktes Winkelmaß, das kleinste eben, dessen sich er bedient.

Man hat es also hier mit einem System des Winkelmessens zu tun, das man — meines Wissens — noch *nicht* versucht hatte, unmittelbar aus der Praxis der babylonischen Astronomie abzuleiten, und das auch nicht sexagesimal ist. Und doch kann man aus diesem einfacheren System das spätere, als 'sexagesimal', bezeichnete System des Winkelmessens sehr leicht ableiten. Nachdem nämlich die Sonne durchschnittlich in 30 Tagen ein 'Tierbild' hinter sich legt, hat man das 'Zodion' in 30 Teile aufgespaltet, und dadurch wurde der Kreis in $12 \times 30 = 360$ Grade geteilt. Wie man es bei *Vitruvius* liest:¹³ «*Sol enim signi spatium — das ist das griechische 'Zodion' — quod est duodecima pars mundi, mense vertente (also in 30 Tagen!) transit: ita duodecim mensibus XII signorum intervalla pervagando cum redit ad signum unde coeperit, perficit spatium vertentis anni.* Man muß dieses Zitat nur noch mit der Bemerkung ergänzen, daß der Monat auch zur Zeit des *Herodotos* noch in der Tat 30 Tage zählte.¹⁴ Dies war der Grund dafür, warum das 'Zodion' dreißig-geteilt werden konnte.

Man ersieht also aus dem Fall des Autolykos, daß die griechische Astronomie den Kreis der Ekliptik ursprünglich *nicht* in 360 Grade, sondern bloß zwölfgeteilt hatte. Darum ist das kleinste Winkelmaß bei Autolykos das 'halbe Zodion', das nach unserer Rechnung einem Winkel von 15° entspricht.

Meine Vermutung ist nun, daß die Einteilung des Kreises in 360 Grade bei Hypsikles und Hipparchos im 2. Jh. v. u. Z. (bzw. bei ihrem späten Nachfolger, Ptolemaios im 2. Jh. u. Z.) *nicht* nach babylonischem Muster erfolgt war. Diese Grad-Einteilung der griechischen Astronomen bildet vielmehr den weiteren Ausbau derselben Methode des Winkelmessens, die zum ersten Male bei Autolykos erschienen war. Erhärtet wird diese Vermutung nicht bloß durch die Tatsache, daß auch Neugebauer darauf hinweisen mußte: die Einteilung des Kreises in 360 Grade *ist in der babylonischen Astronomie erst in den letzten Jahrhunderten vor der Zeitwende aufgekommen.* Auch eine andere Beobachtung spricht dafür, daß die griechischen Astronomen die Grad-Einteilung wohl selbständig für sich entwickelt hatten.

Es wurde vorhin angedeutet, daß die sog. sexagesimale Einteilung des Kreises dadurch entstand, daß man je ein 'Zodion' — also jene Verschiebung der Sonnenbahn, die sich im Laufe je eines Monats vollzieht — in 30 kleinere Einheiten aufgespaltet hatte. — Aber das Dreißig-Teilen ist keineswegs das einzig mögliche Aufspalten des 'Zodions' in kleinere Einheiten. Autolykos begnügte sich noch mit dem bloßen *Halbieren* (15°). Andere nach ihm haben

¹³ Vitruvius, 'De architectura' IX 1, 6.

¹⁴ Herodotos I 32.

dasselbe Halbieren das 'Zodions' weiter fortgesetzt. Man beachte z. B., was über Poseidonios (zwischen 135—50 v. u. Z.) in dieser Hinsicht berichtet wird.

Er soll nämlich — als er die Länge eines Meridiankreises berechnen wollte — vom Gedanken ausgegangen sein, daß der Kreisbogen eines Meridians zwischen Rhodos und Alexandria *der 48. Teil eines vollen Kreises sei*. Wie unsere Quelle darüber, Kleomedes sagt:¹⁵ «er hat den ganzen Kreis des *Zodiakus* in 48 Teile geteilt, indem er jedes 'Dodekatomorion' von ihm *viergeteilt hatte*» τὸν ζῳδιακόν . . . εἰς ὀκτὼ καὶ τεσσαράκοντα μέρη διαιρεῖ, ἕκαστον τῶν δωδεκατημορίων εἰς τέσσαρα τέμνων). In diesem Fall ist also das kleinste Winkelmaß: 'ein Viertel *Zodion*' = 'der 48-ste Teil des Kreises', der in der sog. sexagesimalen Berechnung einem Winkel von $7^{\circ}30'$ entspricht.

Man konnte also den Kreis für das Winkelmessen nicht nur in 360 Grade einteilen, sondern es war auch eine andere Aufspaltung von ihm, bloß in 48 Teile möglich. Es ist außerdem interessant, daß man die 360 Grade schon für Hypsikles und Hipparchos nachweisen konnte. Und doch kommt bei dem späteren Poseidonios eine Kreiseinteilung vor, die wohl anfänglicher ist, nachdem sie sich mit gröberer Einheiten begnügt. Diese seltsame Aufeinanderfolge zeigt also, daß das Winkelmessen in Graden wohl auch später nicht obligatorisch war. Man konnte das Messen in 'Zodia' je nach Bedarf mehr oder weniger verfeinern.

Ja, auch das Zwölftteilen des Kreises zum Zweck der Winkelmessung war nicht unbedingt notwendig. Es scheint, daß die griechischen Astronomen und Geographen das Winkelmessen auch mit anderen regelmäßigen Polygonen ausführen konnten. Es seien dafür hier noch zwei interessante Beispiele namhaft gemacht.

Das eine Beispiel ist dasjenige des Eratosthenes, der ebenfalls — wie später auch Poseidonios — die Länge eines Meridiankreises bestimmen wollte. Er fand dabei,¹⁶ daß der Kreisbogen zwischen Alexandria und Syene — die seiner Ansicht nach auf demselben Meridian lägen — der *fünfundzwanzigste Teil* eines vollen Kreises wäre. Einerlei, wie *Eratosthenes* dieses Winkelmessen praktisch ausgeführt haben mag, es ist sicher, daß er *nicht* mit der Zwölftteilung ('Zodia'), und auch *nicht* mit einer sexagesimalen Grad-Einteilung (360) gearbeitet hatte. Wahrscheinlich hat er die Seite eines regelmäßigen Fünfecks zehngeteilt. *Der fünfundzwanzigste Teil des Kreises* — die 'Einheit' des *Eratosthenes* bei diesem Winkelmessen — entspricht einem Winkel von $7^{\circ}12'$.

Noch interessanter ist das andere Beispiel, das wahrscheinlich auch den ältesten Fall eines Winkelmessens in der griechischen Astronomie darstellt.

¹⁵ Cleomedes, 'De motu circulari corporum caelestium libri duo', ed. H. ZIEGLER, Lipsiae 1891. I 10.

¹⁶ Die Quelle ist ebenfalls Kleomedes. Siehe die vorige Anmerkung.

Wie bekannt, behauptet die Überlieferung,¹⁷ daß der Milesier Anaximandros der erste war, der die sog. 'Schiefe der Ekliptik' erkannt hatte. Die moderne Forschung schenkt auch volles Vertrauen diesem Bericht.¹⁸ Doch wurden in diesem Zusammenhang zuletzt auch Behauptungen formuliert, auf die ich nachdrücklich aufmerksam machen möchte. Man liest nämlich: «*Oinopides von Chios* bestimmte die Schiefe der Ekliptik wahrscheinlich als 24° . Ein Pythagoreer erfand kurz darauf eine Konstruktion des regulären 15-Ecks und damit des Winkels von 24° , wobei er nach Proklos die Anwendung auf die Ekliptik im Auge hatte.»

Ich möchte im Zusammenhang mit diesem Zitat dreierlei bemerken.

1. Es gibt für die Vermutung, daß eben Oinopides von Chios 'als erster' die Schiefe der Ekliptik gemessen hätte — soweit ich sehe — keinen Beleg in der antiken Überlieferung.

2. Selbst wenn die moderne Vermutung zutreffen sollte, und wenn in der Tat Oinopides von Chios der erste gewesen wäre, der das Winkelmaß für die Schiefe der Ekliptik zu bestimmen versuchte, auch dann müßte ich die obige Formulierung beanstanden. Denn was soll es heißen, daß dieser griechische Astronom und Mathematiker des 5. Jh. v. u. Z. den betreffenden Winkel als « 24° » bestimmt hätte? Welcher Astronom oder Mathematiker hat die Winkel schon im 5. Jh. *in Graden* gemessen? Auch noch um mehr als ein Jahrhundert später hat Autolykos von Pitane die Winkel am Himmel — wie man sah — *nicht* in Graden sondern in 'Zodia' und in 'halben Zodia' gemessen.

3. Verworren und irreführend finde ich auch die Darstellung, die behauptet, man hätte *früher* die Schiefe der Ekliptik als 24° gemessen, und erst 'kurz danach' hätte man entdeckt, daß der Winkel von 24° etwas mit dem 15-Eck zu tun haben könnte. Ebenso ungenau ist auch die Behauptung, daß der unbekannte Pythagoreer, der die Konstruktion des regulären 15-Ecks erfand, «nach Proklos die Anwendung auf die Ekliptik im Auge gehabt hätte». In Wirklichkeit besagt unsere Quelle etwas anderes.

Proklos erklärt nämlich:¹⁹ Euklid hätte die Konstruktion des regelmäßigen Fünfeckes deswegen in seine Elemente aufgenommen, weil dieses Polygon für die Astronomie so wichtig ist: man mißt mit der Seite des Fünfeckes, als mit Sehne, die Entfernung beider Pole voneinander, desjenigen des Äquators und des Zodiakus.

¹⁷ Plinius, N. H. II 31: «obliquitatem eius (scil. zodiaci) intellexisse, hoc est rerum foris aperuisse, Anaximander Milesius traditur primus olympiade quinquagesima octava (548—545 v. u. Z.) etc.»

¹⁸ B. L. v. D. WAERDEN, 'Anfänge der Astronomie', Groningen o. J. S. 258: «Die Aussage, daß Anaximandros die Schiefe der Ekliptik erkannt hat, ist richtig; denn wir wissen, daß die Bahnen der Sonne und des Mondes in seinem System schiefe Kreise waren. Es scheint also, daß die Mitteilung des Plinius aus einer guten Quelle stammt.» — Zum folgenden vgl. auch S. 134.

¹⁹ Proclus, In Euel. (F) 269

Es darf also nur als eine *Auslegung* verstanden werden, wenn es heißt: die Schiefe der Ekliptik beträgt — nach dieser alten Messung — 24° . Denn in Wirklichkeit hat man ja diesen Winkel *gar nicht in Graden gemessen*. Proklos sagt ausdrücklich: man maß die Entfernung beider Pole voneinander *mit der Seite des regelmäßigen Fünfecks als mit einer Sehne πεντεκαίδεκαγωνικήν γὰρ ἀλλήλων πλευρὰν ἀφεστήκασιν*). Zweifellos macht diese Sehne — umgerechnet auf unsere Art des Winkelmessens — genau 24° aus. Übrigens ist dieses Winkelmaß eine gute Approximation auch für den modernen Wert derselben Schiefe.

Es wurde nicht überliefert, wer zum ersten Male die Schiefe der Ekliptik mit der Seite des Fünfecks gemessen hat. Aber ich halte doch nicht gewagt zu vermuten: vielleicht war es Anaximandros selber. Man könnte für diese Vermutung die folgenden Argumente ins Feld führen.

1. Läßt man die Überlieferung gelten, daß er als erster die Schiefe der Ekliptik erkannt hat, so muß man sich unwillkürlich fragen: Und hätte er dabei gar nicht versucht, festzustellen, wie groß diese Schiefe ist? — Das ist recht unwahrscheinlich. Irgendwie muß er doch gezeigt oder angedeutet haben: wie weit voneinander entfernt beide Pole stünden.

2. Das Winkelmessen mit der Seite des Fünfecks scheint *sehr altertümlich* zu sein. Wohl war zu jener Zeit, in der man dieses Winkelmaß so bestimmt hatte, das astronomische Messen in 'Zodia' (= 'Dodekatemoria'), wie es später bei Autolykos in Erscheinung tritt, entweder gar nicht bekannt, oder mindestens noch nicht allgemein üblich. Denn man hätte ja dasselbe Winkelmaß (24°) auch als einen Bruchteil des 'Zodions' genau und leicht angeben können. Wie später Poseidonios das 'Zodion' viergeteilt hatte, so hätte man dieselbe Einheit in diesem Fall *fünfteilen* müssen, denn 24° macht gerade *'vier Fünftel des Zodions'* aus.

3. Es stimmt zwar, daß wir nicht viel über *Anaximandros* wissen; die Überlieferung, die ihn betrifft, ist sehr mangelhaft und dürftig. Aber wir wissen doch einiges über ihn, das die Vermutung nahelegt: vielleicht war gerade er derjenige, der die Schiefe der Ekliptik mit der Seite des Fünfecks gemessen hatte. Es sei hier über ihn folgendes aus einer unlängst veröffentlichten Geschichte der Astronomie angeführt:²⁰ «Anaximandros, der um 550 in Sparta einen Gnomon errichtete (Diogenes Laertios II 1), muß geometrische Konstruktionen ausgeführt haben. Der Gnomon 'zeigte' nämlich die Äquinoktien und Solstitien. Bei den Äquinoktien steht die Sonne in der Ebene des Äquators. Eine Ebene, durch die Gnomospitze parallel zur Ebene des Äquators gelegt, schneidet die Grundplatte in einer Geraden *g*. Wenn die Schattenspitze in *g* fällt, hat man den genauen Augenblick der Tag- und Nachtgleiche. Diese

²⁰ B. L. v. D. WAERDEN, 'Anfänge der Astronomie', S. 134.

Gerade g muß Anaximandros konstruiert und in die Platte eingeritzt haben, sonst könnte sein Gnomon unmöglich die Äquinoktien zeigen.»

Ich glaube, auch dies spricht dafür, daß Anaximandros in der Lage sein mußte, das Winkelmaß für die Schiefe der Ekliptik — wenn nicht genau, so doch annähernd, also mit der Seite eines regelmäßigen Fünfecks — angeben zu können. Denn es stimmt zwar, daß einerseits unsere Quelle (Plinius) *nichts* darüber besagt, welche Beobachtungen den Anaximandros geführt haben mögen, die Schiefe der Ekliptik anzunehmen. Und andererseits werden im Zusammenhang mit seinem Gnomon — nicht allein bei Diogenes Laertios, sondern auch noch in zwei anderen (allerdings späten) Quellen²¹ — *nur* die Solstitien, Äquinoktien und Jahreszeit-Beobachtungen erwähnt. Aber man muß sich unwillkürlich fragen — wenn man schon den Bericht über den Gnomon des Anaximandros akzeptiert —, ob er mit demselben Gnomon nicht auch die *Schiefe der Ekliptik* gemessen hat? Denn auch dazu war dieses Instrument — bei den Späteren allerdings — brauchbar.²²

Ja, der Gnomon des Anaximandros stellt — eben vom Gesichtspunkt des Winkelmessens aus — auch andere interessante Probleme, die ich im nächsten Abschnitt der vorliegenden Arbeit mindestens kurz noch skizzieren möchte.

II

Ich möchte nämlich hier, im Zusammenhang mit den historischen Problemen des Winkelmessens, zum Schluß noch die Ursprungsfrage der *Trigonometrie* berühren. Diese hochwichtige geometrische Disziplin entstand damals, als man dahinter gekommen war, daß mit den Winkeln des Dreiecks auch die Proportionalität seiner Seiten — und auch umgekehrt: mit der Proportionalität der Seiten auch das Maß der Winkel — gegeben ist. Nun ist man, wie bekannt, darüber wohl einig, daß die Trigonometrie ihren Ursprung den Bedürfnissen der Astronomie verdankt. Aber nicht so einstimmig sind die Historiker dann, wenn unmittelbar die Frage gestellt wird: Bei wem und in welchem Zeitalter die Anfänge der Trigonometrie zu suchen sind?

Es gibt eine ältere Ansicht, die besonders im vorigen Jahrhundert bedeutende Anhänger hatte, und nach dieser war Hipparchos, der große Astronom des 2. Jahrhunderts v. u. Z. der Erfinder der Trigonometrie.²³ Gegen diese Ansicht wandte sich zuletzt B. L. v. d. Waerden; er schrieb nämlich:²⁴

²¹ Im Suda-Lexikon (s. v. Anaximandros) und bei Eusebios, P. E. X 14, 11. Vgl. H. DIELS—W. KRANZ: Fragmente der Vorsokratiker (8. Aufl.) 12 Anaximandros A 2 und 4.

²² Vgl. A. ARDAILLON; Artikel 'Horologium' in: CH. DAREMBERG—EDM. SAGLIO: Dictionnaire des Antiquités Grecques et Romaines, Tome troisième pp. 256—264.

²³ Vgl. z. B. PH. E. B. JOURDAIN (in: James R. Newman, The World of Mathematics, vol. I. New York 1956. p. 18): «Hipparchus (born about 160 B. C.) seems to have invented this practical science of the complete measurement of triangles from certain data, or as it is called 'trigonometry', and the principles laid down by him were worked out by Ptolemy of Alexandria (died 168 B. C.) and also by the Hindoos and Arabians.»

²⁴ B. L. v. d. WAERDEN, 'Erwachende Wissenschaft', S. 448—449

«Wir wissen nicht ob Hipparchos Erfinder der Trigonometrie ist, und ob er nur mit ebenen Dreiecken, oder auch mit sphärischen Dreiecken arbeitete, denn seine Schriften sind größtenteils verlorengegangen. Wir müssen also die älteste Geschichte der ebenen und sphärischen Trigonometrie vor allem aus den Werken des Menelaos (Ende des 1. Jahrhunderts u. Z.) und des Ptolemaios holen.»

Nun möchte ich selber keiner dieser Ansichten beipflichten. Ich glaube nämlich, daß die Wurzeln der Trigonometrie älter sind, als Hipparchos, der große Astronom des 2. Jahrhunderts. Ich würde die Anfänge dieser Disziplin mit der *Anwendung des Gnomons in der Astronomie verbinden*. Dabei darf jene Rolle, die im Zusammenhang mit dem Gnomon in einem Teil der Überlieferung dem Anaximandros zugeschrieben wird, einstweilen unberücksichtigt bleiben.

Zweifellos diente der Gnomon ursprünglich ebenosehr oder in noch höherem Maße astronomisch-kalendarischen Zwecken, d. h. der Bestimmung der Sonnenwenden, sowie der Tag- und Nachtgleichen, wie der Messung der Tageszeit.²⁵ (Auch dem Anaximandros soll der Gnomon vor allem zur Bestimmung der Wenden und Gleichen gedient haben.²⁶)

Die Anwendungsmöglichkeiten des Gnomons für die Zwecke der antiken Astronomie sind zwar, wie mir scheint, noch keineswegs befriedigend erforscht, aber es wird sich lohnen, im vorliegenden Zusammenhang auf eine interessante Schilderung des Römers Vitruvius hinzuweisen.²⁷

Vitruvius hebt nämlich die Tatsache hervor, daß eben *bei Tag- und Nachtgleiche* der Gnomon zu seinem kürzesten Mittagsschatten sich an den verschiedenen geographischen Punkten der Erde völlig unterschiedlich verhält. Anders ist die Länge des Gnomon-Schattens bei Tag- und Nachtgleiche (und selbstverständlich: *zur Mittagszeit*)²⁸ in Athen und Alexandria, in Rom und Placentia, und ebenso auch an den anderen Orten der Erde. — An der einen Vitruvius-Stelle werden als Beispiele die eben genannten vier Städte ohne

²⁵ Siehe den Artikel 'Horologium' von REHM in Pauly-Wissowa RE VIII (1913) 2416 ff.

²⁶ Dies wird sowohl bei Diogenes Lartios (II 1) und im Suda-Lexikon (s. v. Anaximandros), wie auch bei Eusebios, P. E. X 14, II gleichermaßen hervorgehoben.

²⁷ Vitruvius, De architectura IX 1: «Ea autem sunt divina mente comparata habentque admirationem magnam considerantibus, quod umbra aequinoctialis alia magnitudine est Athenis, et alia Alexandriae, alia Romae, non eadem Placentiae ceterisque orbis terrarum locis. Itaque longe aliter distant descriptiones horologiorum locorum mutationibus, etc.

²⁸ Es ist ärgerlich, daß man diese wichtige Einschränkung weder an der eben angeführten Stelle des Vitruvius (IX 1), noch an jener anderen, die die genauen Angaben enthält (IX 7, 1; siehe die nächste Anmerkung) expressis verbis lesen kann. Aber selbstverständlich muß man den Schatten des Gnomons nicht nur im allgemeinen 'bei Tag- und Nachtgleiche' sondern außerdem noch gerade zu jenem Zeitpunkt messen, bei dem die Sonne auf ihrer täglichen Bahn am höchsten steht, also zur *Mittagszeit*. Ohne diese Einschränkung hat ja der Vergleich von Gnomon-Länge und Schatten-Länge gar keinen Sinn. Darum steht die Ergänzung des Textes über jeden Zweifel.

nähere Angaben aufgezählt. Nicht genau daselbst, wo dies gesagt wurde, doch unweit von der vorigen Stelle sagt noch Vitruvius :²⁹ Wenn in Rom ein 9 *Einheiten* langer Gnomon aufgestellt wird, so beträgt hier sein äquinoktialer Mittagsschatten 8 *Einheiten*. — Und so findet man daselbst die interessantesten Zahlenpaare der Gnomon-Längen und Schatten-Längen (bei äquinoktialer Mittagszeit) noch für vier weitere Ortschaften. Die erste Zahl gibt jedesmal die Länge des Gnomons, und die zweite diejenige des Schattens an. Die fünf Ortschaften mit ihren Zahlen-Paaren sind :

1. Rom	9 : 8	4. Tarent	11 : 9
2. Athen	4 : 3	5. Alexandria	5 : 3.
3. Rhodos	7 : 5		

Soviel ich weiß, es ist nicht bekannt, seit welcher Zeit es überhaupt solche Listen für Gnomon-Längen und Schatten-Längen bei äquinoktialer Mittagszeit in den verschiedenen Städten gab. Aber doch kann man einiges mit großer Wahrscheinlichkeit auch den Worten des Vitruvius selbst entnehmen. An der einen Stelle erwähnt er nämlich als ein Beispiel, neben Athen, Alexandria und Rom — wohl die drei *vornehmsten* Städte des Mittelmeergebietes zu seiner Zeit — auch *Placentia*. Man hat also ähnliche Angaben auch für *Placentia* schon registriert. Doch wird an der zweiten Stelle *Placentia* nicht mehr genannt. An ihrer Stelle bekommt man genaue Angaben für Rhodos und Tarent. — Es ist nicht wahrscheinlich, daß Vitruvius selber an allen diesen fünf — oder sogar an sechs Stellen eigene Beobachtungen der Gnomon-Längen und Schatten-Längen bei Äquinoktium durchgeführt und darüber Aufzeichnungen gemacht hätte. Er muß seine Angaben irgendeiner fertigen Zusammenstellung entnommen haben. Er sagt auch, daß die Tatsachen, wofür er nur einige Beispiele flüchtig aufzählt in Fachkreisen als beachtenswert, ja als bewundernswürdig gelten (*ea . . . sunt divina mente comparata habentque admirationem magnam considerantibus*).

Nun kann man über die vorige Liste des Vitruvius noch folgendes feststellen.

Der Gnomon und sein Schatten wurden offenbar mit einer gemeinsamen Einheit gemessen, auch wenn diese Einheit von Fall zu Fall anders gewählt wurde. Denn man hat ja die Worte des Vitruvius in diesem Sinne zu verstehen : hat man den Gnomon in Rom als einen 9 Einheiten langen Stock gemessen, so wurde sein Schatten daselbst 8 Einheiten lang. Aber : hat man densel-

²⁹ De architectura IX 7, 1 : «Nam sol (ariete libraque versando) quas e gnomone partes habet *novem* eas umbrae facit *VIII* in declinatione caeli, quae est Romae. Itemque Athenis quae magnae sunt gnomonis partes *quattuor*, umbrae sunt *tres*, ad *VII* Rhodo *V*, ad *XI* Tarentum *IX*, ad *quinque* Alexandriae *tres* etc.»

ben Gnomon etwa in Rhodos als 7 Einheiten lang bestimmt, so maß sein Schatten hier in diesen anderen Einheiten 5.

Aber wozu diese komplizierte Art des Messens? Denn man hätte ja schließlich auch sagen können: die Länge des Gnomons soll ein für alle Male aus so und so viel Einheiten bestehen, und zu dieser Länge messe man von Fall zu Fall die Länge des Schattens. Warum mußte man jedesmal eine andere Einheit auch für den Gnomon finden? — Ich glaube, dies kommt daher, daß man das Verhältnis der beiden Längen zueinander mit der alten, Euklidischen Methode der *Wechselwegnahme* (*ἀνθραίσεις*, Elem. VII 1 und X 2) festgestellt hatte. Es ist auch interessant, daß man die Zahlenverhältnisse, die auf diese Weise (mit Wechselwegnahme) gewonnen wurden, auch nachträglich *nicht* vereinheitlicht hatte. Man würde eine solche Vereinheitlichung eigentlich nur deswegen erwarten, weil man weiß, daß in der Musiktheorie der Pythagoreer die ebenfalls mit Wechselwegnahme gewonnenen und in verschiedenen Einheiten gemessenen Zahlenverhältnisse der Oktave (2 : 1), Quarte (4 : 3) und Quinte (3 : 2) nachträglich mit dem zwölfgeteilten Kanon vereinheitlicht wurden: 12 : 6, 12 : 9 und 12 : 8. — Mir scheint die eben hervorgehobene Eigentümlichkeit der Zahlenverhältnisse bei Vitruvius ein Zeichen der großen Altertümlichkeit zu sein. — Doch wir wollen den Sinn dieser Zahlen vor allem verstehen.

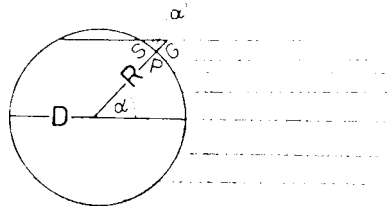
Vitruvius betont ausdrücklich, daß die Unterschiede der Zahlenverhältnisse von Gnomon-Länge und Schatten-Länge beim Äquinoktium je nach geographischen Orten (*ceteris orbis terrarum locis*) von der Krümmung des Himmels gewölbes (*declinatio caeli*) abhängig sind. Es ist eine Konsequenz der '*declinatio caeli*' in Rom, daß dort ein 9 Einheiten langer Gnomon beim Äquinoktium einen 8 Einheiten langen Mittagsschatten hat. Man mißt die '*Krümmung des Himmelsgewölbes*' natürlich als einen *Winkel*. Auch die obigen Zahlenverhältnisse vertreten also eine Art *Winkelmessung*.

Kein Zweifel, der Gnomon und sein Schatten sind die *beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks*. Hört man außerdem noch von dem jeweiligen *Verhältnis* der beiden Katheten, so wird ein jeder — der auch nur das mindeste von Trigonometrie weiß — an Tangens- oder Kotangens-Werte denken müssen. Es fragt sich nur: auf welchen Winkel kommt es hier wohl an?

Nach Analogie jener Meridian-Messung des Eratosthenes, über die Kleomedes berichtet,³⁰ glaube ich die angedeutete Vitruvius-Stelle folgendermaßen erklären zu dürfen.

Sei der Kreis hier nebenan das schematische Bild der Erdkugel. Die Sonnenstrahlen, die auf der Skizze die rechte Halbkugel beleuchten, erreichen

³⁰ Sieh oben die Anmerkungen 15 und 16. Man findet eine gute englische Übersetzung und Interpretation beider Kleomedes-Stellen (von T. L. HEATH) im Sammelwerk von MORRIS R. COHEN — L. E. DRABKIN: *A Source Book in Greek Science*, Cambridge, Mass. 1958 149 — 153.



die Erde als *parallele Geraden*. D ist Durchmesser des Äquators. Stellt man bei Tag- und Nachtgleiche — und genau zur Mittagszeit — einen Gnomon auf dem Äquator auf, so wirft dieser überhaupt keinen Schatten, nachdem die Sonne (wie es auch oben einmal schon gesagt wurde) «bei den Äquinoktien in der Ebene des Äquators steht». Man beachte auch, daß der hier aufgestellte Gnomon sozusagen die Fortsetzung des Erdendurchmessers bildet. Ebenso bildet auch der andere Gnomon, den wir in Punkt P auf der nördlichen Hemisphäre — und ebenfalls bei äquinoktialer Mittagszeit — senkrecht aufstellen, die Fortsetzung des Erden-Radius (R). Doch wirft dieser andere Gnomon (G) einen Schatten (S). Da sowohl der Gnomon, wie auch sein Schatten im Verhältnis zur Größe der Erde sehr klein sind, darf auch S als eine gerade Strecke gelten. G und S sind also jene beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, über die oben schon die Rede war, und die im Text des Vitruvius für fünf verschiedene Städte mit Zahlenverhältnissen charakterisiert werden.

Da nun die Sonnenstrahlen den Gnomon auf dem Äquator und den anderen in Punkt P in parallelen Geraden erreichen, entstehen hier zwei *untereinander gleiche Wechselwinkel*. Ich bezeichne diese Winkel auf der Skizze als α , und α' . Der eine von ihnen, α den der Durchmesser des Äquators (D) mit R bildet, gibt die Entfernung des Punktes P vom Äquator an. — Man kann dagegen den anderen, ihm gleichen Wechselwinkel α mit der Länge des Gnomons (G) und mit derjenigen seines Schattens (S) angeben.

Ich fasse also — wie man es aus der vorigen Interpretation wohl ersieht — die bei Vitruvius zusammengestellten Zahlenverhältnisse als *Kotangenswerte* auf. Rechnet man die den Verhältnissen entsprechenden Brüche in *Dezimalbrüche* um,³¹ so bekommt man Zahlen, denen in einer entsprechenden Tabelle der Kotangenswerte in Graden und Minuten ausgedrückte *Winkel* entsprechen. Und diese Winkel müssen — vorausgesetzt, daß die Zahlenverhältnisse zutref-

³¹ Man hat in der Antike natürlich *keine* Dezimalbrüche gebraucht. Aber man wird in einer Interpretation gegen die Unrechnung in Dezimalbrüche doch nichts einwenden können. Man kann ja den Sinn der Zahlenverhältnisse bei Vitruvius *nur* auf diesem Wege beleuchten, denn *wir* benutzen ja in der Tat Tabellen, in denen die Tangens- und Kotangens-Werte auf Dezimalbrüche umgerechnet sind.

fend sind — die *geographischen Breitengrade der betreffenden Ortschaften angeben*. Es seien nun die genannten Umrechnungen in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

1. Rom	9 : 8	$\text{ctg } \alpha = \frac{9}{8} = 1,125,$	$\alpha \approx 41^{\circ}39'$	(41°52')
2. Athen	4 : 3	$\text{ctg } \beta = \frac{4}{3} = 1,3\bar{3},$	$\beta \approx 36^{\circ}52'$	(38°)
3. Rhodos	7 : 5	$\text{ctg } \gamma = \frac{7}{5} = 1,4,$	$\gamma \approx 35^{\circ}33'$	(36°)
4. Tarent	11 : 9	$\text{ctg } \delta = \frac{11}{9} = 1,2\bar{2},$	$\delta \approx 39^{\circ}18'$	(40°25')
5. Alexandria	5 : 3	$\text{ctg } \varepsilon = \frac{5}{3} = 1,6\bar{6},$	$\varepsilon \approx 30^{\circ}59'$	(32°)

Bemerken muß ich zu dieser Tabelle vor allem, daß ich in der letzten Spalte rechts in Klammern auch jene Winkelmaße zusammengestellt habe, die man heute auf Grund eines Schulatlas für die Breitengrade der betreffenden Ortschaften *schätzungsweise* angeben könnte. Angesichts dieser letzteren sind jene Winkelmaße, die man auf Grund der Zahlenverhältnisse des Vitruvius ausrechnen kann, zweifellos gute Approximationen.

Aber ist diese Auslegung nicht erzwungen? Ist es in der Tat wahrscheinlich, daß die Zahlenverhältnisse des Gnomons und seines Schattens bei Vitruvius wirklich und auch *bewußt* geographische Breiten bezeichnen sollen? Die Auslegung ist zweifellos berechtigt. Auch Vitruvius spricht im Zusammenhang mit diesen Zahlen von der 'Krümmung des Himmelsgewölbes' (*declinatio caeli*). Und die 'Krümmung des Himmelsgewölbes' entspricht — im Sinne des geozentrischen Weltbildes der Antike — der Krümmung der Erdkugel. Der *antike* Sinn der behandelten Zahlenverhältnisse besteht also ohne jeden Zweifel eben darin, daß durch diese die Breitenkreise der Erdkugel charakterisiert werden.

Es ist auch kein Zufall, daß man in der Antike derartigen Angaben, wie die Gnomon- und -Schatten-Zahlen des Vitruvius, gewöhnlich bei *Geographen* begegnet. Man liest z. B. einmal bei Strabon,³² daß in der Gegend um Byzantion herum der längste Tag des Jahres *15 Stunden und eine Viertelstunde* lang ist, wobei — wie der Verfasser bemerkt — die Stunden mit der Stundenlänge an Tag- und Nachtgleichen gemessen wurden. Und daselbst ist das Zahlenverhältnis des Gnomons und seines Schattens *bei Sommersonnenwende* — heißt es noch bei Strabon — $120:41 \frac{4}{5}$. (Man darf dieses letztere Verhältnis — das für die Astronomie und mathematische Geographie ebenfalls wichtig ist — mit dem anderen, demjenigen *bei Äquinoktium* natürlich nicht verwechseln.)

Und was unmittelbar die *Breitenkreise* betrifft, es ist bekannt, daß auch Eratosthenes *a c h t* parallele (Breiten-) und *z w ö l f* 'größte' (Meridian-

³² Strabon II 134.

oder Längen-) Kreise unterschieden hat.³³ Diese beiden Arten von Kreisen schnitten sich — wie auch bei uns auf dem Globus — rechtwinklig, und so entstanden die 'Sphragides' des Eratosthenes, seine 'Abteilungen der Erdoberfläche', wofür ebenfalls Strabon unser Zeuge ist.³⁴ Denkt man also an derartige Angaben, so wird es nicht mehr überraschend, daß bei Vitruvius die behandelten Zahlenverhältnisse des Gnomons in der Tat verschiedene *Breitenkreise der Erdkugel* charakterisieren.

Doch fassen wir noch einmal die Frage ins Auge: wie kann man eigentlich mit Hilfe der Kotangenswerte die *Winkel* angeben? Versuchen wir die Antwort auf diese Frage bloß auf Grund jener fünf Angaben, die bei Vitruvius genannt werden.

Am südlichsten von den fünf Städten liegt *Alexandria*, und am nördlichsten *Rom*. Die Reihenfolge der Städte — den Entfernungen vom Äquator ab entsprechend — wäre also, wie in unserer nächsten Tabelle: 1. Alexandria, 2. Rhodos, 3. Athen, 4. Tarent, 5. Rom. Selbstverständlich muß man auch in der Antike das Größer-Werden der Winkel der Breitenkreise vom Äquator ab gerechnet haben, wie auch bei uns der Äquator dem 0° und der Nordpol dem 90° entspricht. Der Winkel des Breitenkreises einer Ortschaft wird also umso größer, je nördlicher sie liegt, wobei der Breitenkreis selber je nördlicher umso kleiner (d. h. seine Peripherie umso kürzer) ist. Aber diese letztere Tatsache spielt für uns gar keine Rolle. Man erkennt das Größer-Werden des Winkels, mit dem Fortschreiten nach Norden zu, sogleich an jener II. Spalte der nächsten Tabelle, die die Breitengrade der betreffenden Ortschaften — berechnet nach Vitruvius — zusammenstellt: je nördlicher die Stadt, umso größer das Maß des ihr zugehörigen Winkels.

Dagegen verändern sich die Kontangenswerte in entgegengesetzter Richtung: je größer der Winkel — zwischen 0° und 90° — umso kleiner wird der ihm zugehörige Kotangenswert. Darum werden also die Dezimalbrüche in der III. Spalte beim Übergang zu einer nördlicheren Ortschaft immer kleiner. — Aber Dezimalbrüche wurden in der Antike nicht benutzt. Und ob man denselben Prozeß des Kleiner-Werdens — den für uns die Dezimalbrüche wahrzunehmen erleichtern — ebenso leicht auch an jener IV. Spalte erkennt, in der ich jene Brüche zusammengestellt habe, die den Zahlenverhältnissen des Vitruvius entsprechen? — Selbstverständlich sieht man auch hier sogleich, daß z. B. Athen nördlicher als Alexandria liegen muß, denn der Bruch (oder das Verhältnis), womit der Winkel von Athen angegeben wird, ist $4/3$, während, in der Reihe von Alexandria $5/3$ steht. Und da der kleinere

³³ Man vergleiche dazu besonders die Artikel 'Horologium' und 'Zodiacus' im 'Dictionnaire' von CH. DAREMBERG — EDM. SAGLIO.

³⁴ Strabon II 5,34; II 1, 22. (Auch im Griechisch-Deutschen Handwörterbuch von W. PAPE, s. v. σφραγίς.)

Bruch ($\frac{4}{3}$) dem *größeren* Winkel, also der nördlicheren Stadt entspricht, trifft dies für Athen zu. Aber der Vergleich von Brüchen, die nicht nur untereinander verschiedene Zähler, sondern auch verschiedene Nenner haben, ist für uns Heutigen nicht immer so leicht, wie der Vergleich von Dezimalbrüchen.

Natürlich könnte man auch den Vergleich der Brüche in der IV. Spalte erleichtern. Bringt man nämlich diese auf einen *gemeinsamen Nenner* (360), so braucht man in der V. Spalte nur noch die Zähler anzugeben, und sofort sieht ein jeder: mit dem Zunehmen des Winkelmaßes (also mit dem Fortschreiten nach Norden zu) vermindern sich in der Tat die Kotangenswerte. Es ist nur, leider, nicht bekannt, ob man diese Vereinfachung in der Antike in der Tat versucht hatte.

Zusammenfassend sieht also die Tabelle so aus:

I.	II.	III.	IV.	V.
1. Alexandria	30°59'	1,66	$\frac{5}{3}$	600
2. Rhodos	35°33'	1,4	$\frac{7}{5}$	504
3. Athen	36°52'	1,33	$\frac{4}{3}$	480
4. Tarent	39°18'	1,22	$\frac{11}{9}$	440
5. Rom	41°39'	1,125	$\frac{9}{8}$	405

III

Ich hoffe im vorigen Abschnitt zweierlei Dinge gezeigt zu haben:

1. *Nicht* erst Hipparchos hat die Trigonometrie inauguriert. Diese Disziplin begann — nach unserem gegenwärtigen Wissen — mit den Messungen des Gnomons und seines Schattens.

2. Es gab neben den anfänglichen Winkelmessungen der griechischen Astronomie — in 'Zodia' und in ihren Bruchteilen, bzw. mit den Seiten von regelmäßigen Polygonen als mit Sehnen — daselbst auch eine andere, wie ich sie bezeichnen möchte: eine *indirekte Art des Winkelmessens*. Eine solche Art des Messens vertreten die 'Kotangenswerte' bei Vitruvius, die Verhältnisse von Gnomon-Längen und Schatten-Längen, also der beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks. Es ist einerlei, ob man diese *Verhältnisse* auf *Winkel* umrechnete, oder ob man sie nur unmittelbar benützte, man wußte auf alle Fälle, daß die betreffenden Werte für *Winkel* dastanden.

Es wäre eine andere Frage: Ob man nicht exakter auch das Zeitalter bestimmen könnte, in dem das Winkelmessen mit Hilfe von Gnomon- und Schatten-Länge in die Wissenschaft eingeführt wurde?

Einen Anlaß zu den obigen Betrachtungen über den Gnomon bot mir die Vermutung, daß vielleicht schon Anaximandros die Schiefe der Ekliptik mit Gnomon-Beobachtungen zu messen imstande war. Ich wollte diese Vermutung

damit unterstützen, daß ich an den Gnomon des Anaximandros in Sparta erinnerte, der nach Diogenes Laertios (II 1) die Solstituten und Äquinoktien zeigte.

Aber hat in der Tat schon *Anaximandros* die 'Gnomon-und-Schatten-Länge bei Tag- und Nachtgleiche' in demselben Sinne verstehen können, der für Vitruvius sich sozusagen über jeden Zweifel nachweisen ließ? — Es seien hier — um eine Antwort auf die zuletzt gestellte Frage vorzubereiten — noch einmal jene oben schon angeführten Worte zitiert, mit denen B. L. v. d. Waerden des Funktionieren des Gnomons von Anaximandros in Sparta zu erklären versuchte.³⁵

«. . . Bei Äquinoktien steht die Sonne in der Ebene des Äquators. Eine Ebene, durch die Gnomonspitze parallel zur Ebene des Äquators gelegt, schneidet die Grundplatte in einer Geraden *g*. Wenn die Schattenspitze in *g* fällt, hat man den genauen Augenblick der Tag- und Nachtgleiche. Diese Gerade *g* muß Anaximandros konstruiert und in die Platte eingeritzt haben, sonst könnte sein Gnomon unmöglich die Äquinoktien zeigen.»

Ich glaube, wirklich einleuchtend ist diese Erklärung nur dann, wenn man ihr die Vermutung zugrunde legt, daß einerseits das Weltbild des Anaximandros *geozentrisch* war, und andererseits, daß er auch von der *Kugelgestalt* der Erde wußte. — Übrigens hat auch schon *Rehm* betont,³⁶ daß die Voraussetzung für die Gnomon-Beobachtungen des Anaximandros jener Gedanke war, den für ihn. u. a. das Suda-Lexikon in den Worten bezeugt: *τὴν γῆν ἐν μεσαράτω κείσθαι*. In der Tat, man kann den *Geozentrismus* des Anaximandros auf Grund der Überlieferung gar nicht bezweifeln. — Aber leider, nicht so eindeutig bezeugt wird von der Überlieferung, ob Anaximandros auch die *Kugelgestalt* der Erde gelehrt hatte.

Die einzige Quelle, die wirklich auch die Lehre von der Kugelgestalt der Erde dem Anaximandros zuschreibt, ist der ziemlich späte Diogenes Laertios.³⁷ Und auch dieser alleinstehende Bericht wird dadurch gewissermaßen sogleich entkräftet, daß bei demselben Gewährsmann in einem anderen Zusammenhang über Parmenides beinahe wörtlich dasselbe wie über Anaximandros gesagt wird:³⁸ er (also Parmenides) wäre der 'erste' gewesen, der die Kugelgestalt der Erde und ihre zentrale Stellung gelehrt hätte. — Allerdings könnte man sich da noch fragen: ob Diogenes Laertios in den Fällen 'Anaximandros' und 'Parmenides' nicht zwei verschiedene, und voneinander unabhängige Quellen benutzt hatte? — Wo mag er überhaupt einen Bericht gefunden haben, der behauptete, daß Anaximandros von der *Kugelgestalt der Erde* gesprochen hatte?

Es gibt bei Diogenes Laertios auch noch eine andere völlig alleinstehende Nachricht über Anaximandros, daß nämlich dieser Milesier seinen Gnomon in

³⁵ 'Anfänge der Astronomie', 134.

³⁶ Im Artikel 'Horologium'; RE VIII (1913) 2416 ff.

³⁷ II 1: *μέσῃν τε τὴν γῆν κείσθαι, κέντρον τάξιν ἐπέχουσιν, ὄσων σφαιροειδῆ . . .*

³⁸ IX 3: *Πρῶτος δ' οὗτος [- Παρμενίδης] τὴν γῆν ἀπέφηνε σφαιροειδῆ καὶ ἐν μέσῳ κείσθαι*
Den Hinweis auf diese von mir eigentlich vergessene Angabe verdanke ich Herrn Professor H. CHERNISS.

Sparta aufgestellt hätte. Wohl erwähnen auch andere Quellen den Gnomon als eine Erfindung des Anaximandros, ein Instrument, mit dem er Solstitien und Äquinoktien 'zeigen' konnte; aber Sparta wird in diesem Zusammenhang nur bei Diogenes Laertios genannt. — Dies ist deswegen wichtig, weil hier auch die Quelle des Berichtes namhaft gemacht wird. Diogenes Laertios verdankt sein Wissen über den Gnomon des Anaximandros in Sparta jenem Favorinus, der ein Zeitgenosse des römischen Kaisers Hadrianus (117—138 u. Z.) war, und von dem wir wissen, daß er u. a. auch ein Werk über *γνομολογικά* zusammengestellt hatte. Man fragt sich: ob nicht derselbe Favorinus auch für den anderen ebenfalls alleinstehenden Bericht die Quelle war, wonach Anaximandros die Kugelgestalt der Erde gelehrt hatte. Die beiden alleinstehenden Berichte würden sich gewissermaßen gegenseitig ergänzen. Die Gnomon-Messungen des Anaximandros wären nämlich viel bedeutender gewesen, wenn sie von der Theorie der Kugelgestalt der Erde ausgegangen wären.

Aber selbst wenn der fragliche Bericht wirklich auf Favorinus zurückgehen sollte, auch damit ist nicht erwiesen, daß die Kugelgestalt der Erde die authentische Ansicht des Anaximandros war. — Es gibt nämlich auch eine andere Überlieferung, wonach das Weltbild des Anaximandros zwar geozentrisch, aber doch nicht mit der Ansicht von einer kugelförmigen Erde verbunden war. Er hätte nach diesem anderen Bericht gelehrt, daß die Erde zylinderförmig, oder wie eine Trommel wäre, die eine obere und auch eine untere Fläche hat.³⁹ Gewöhnlich schenkt man mehr Vertrauen *nicht* dem Bericht bei Diogenes Laertios, sondern dieser anderen Überlieferung, nachdem ihr Ursprung sich mindestens bis auf Theophrastos zurückverfolgen läßt. Weniger beachtet wird dagegen die bloß in n e r e Wahrscheinlichkeit des Berichtes bei Diogenes Laertios. Denn Anaximandros hat ja auch gelehrt, daß die Erde deswegen unbeweglich im Mittelpunkt des Weltalls beharrt, weil sie sich in gleicher Entfernung von allem befindet. Und daraus folgt eher, daß die Erde k u g e l f ö r m i g, und nicht daß sie zylinderförmig sein soll.⁴⁰

Natürlich sind Winkelmessungen mit Hilfe von 'Gnomon-und-Schattenlänge' auch dann möglich, wenn man von dem Gedanken ausgeht, daß wir auf der oberen Fläche einer zylinderförmigen Erde leben.⁴¹ Doch wird man in diesem Fall die bei Tag- und Nachtgleiche gemessenen Winkel kaum mit

³⁹ Vgl. H. DIELS—W. KRANZ: Fragmente der Vorsokratiker (8. Aufl.) 12 Anaximandros A 10 und 11.

⁴⁰ Der Italiener D. ANTISERI schrieb zuletzt (in einer Besprechung der Philosophie von K. R. POPPER): «se (Anassimandro) avesse tratto le conseguenze della sua teoria originaria, della sua intuizione, avrebbe dedotto che la terra era *rotonda*, perché se essa è equidistante da tutti gli altri astri, è normale che sia una *sfera*.» Studi Urbinati, Anno XLVIII N. S. B N. 1—2 1974 p. 278.

⁴¹ Und ebenso kann man auch die sog. 'Schiefe der Ekliptik' selbst von einer zylinderförmigen Erde aus gesehen erkennen.

'Breitenkreisen' verbinden können. Und was heißt in diesem Fall überhaupt 'Äquator'?

Erforscht man einmal in der Zukunft gründlicher die einstigen Anwendungen des Gnomons in der antiken Astronomie, so wird man selbstverständlich auch den Bericht des Herodotos über den Ursprung dieses Instrumentes berücksichtigen müssen,⁴² wie auch die 'babylonischen Gnomon-Tafeln' eine eingehendere Untersuchung verdienen.⁴³

Budapest.

⁴² Herodotos II 109: «Den *Polos* und den *Gnomon*, sowie die 12 Teile des Tages haben die Griechen von den Babyloniern gelernt.»

⁴³ Vgl. B. L. v. D. WAERDEN: 'Anfänge der Astronomie' 80–81.