MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Közlemények 24/1980.

PARABOLA ÉS ELLIPSZIS KÖZELÍTÉSE EGYENESSZAKASZOKKAL ÉS KÖRÍVEKKEL

Szepesvári István

A numerikus szerszámgépek automatikus irányitásánál fellép különböző görbéknek egyenesszakaszokkal, illetve körivekkel való közelitésének problémája. Ebben a dolgozatban parabola ($y=ax^2$ alaku) és ellipszis ($(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ alaku) közelitésével foglalkozunk. FORTRAN nyelven készültek különböző fajta közelitésekre programok (szubrutinok). A programok eredményül a közelitő alakzat (pl. törött vonal) bizonyos pontjait adják ki, és természetesen azt, hogy két szomszédos pont között egyenesszakaszt vagy körivet kell-e huzni (és a köriv középpontját is megkapjuk). Megfelelő transzformációval általános egyenletü parabola és ellipszis is approximálható. Igy az eredmények speciális alkatrészprogramozó nyelvet használó programokban alkalmazhatók.

Kezdve egyszerü közelitésektől egyre bonyolultabb szubrutinokkal egyre kevesebb szakasszal (ivvel) valósitunk meg ugyanolyan pontosságu közelitéseket.

1. PARABOLA KÖZELITÉSE EGYENESSZAKASZOKKAL

SUBROUTINE PAR1SYM (X1,X2,YUE,YUU,A,EPS,XV,IE,IU,M4,IER)

Az $y = ax^2$ parabolát (illetve annak egy $P_1(X1,Y1)$, $P_2(X2,Y2)$ zárt ivét) közeliti minimális számu egyenesszakasszal oly módon, hogy az egymáshoz kapcsolódó szakaszok az y-tengelyre nézve tükrösen helyezkednek el, és az $y = ax^2 + \varepsilon$ és $y = ax^2 - \varepsilon$ parabolák által meghatározott sávból nem lépnek ki, és a $(0, -\varepsilon)$ pontban töréspont van. (1. ábra)

Paraméterek:

X1 : az iv kezdőpontjának abszcisszája (X1 > X2 legyen mindig)

X2 : az iv végpontjának abszcisszája

YUE: a közelitő alakzat kezdőpontjának ordinátája

YUU: a közelitő alakzat végpontjának ordinátája

A : az $y = ax^2$ parabola esetén A = a

EPS: hibahatár

XV : tömb, amely legalább az X2-től a -X2 abszcisszájáig tartalmazza a parabolát közelitő alakzat töréspontjainak abszcisszáját és ordinátáját, felváltva az 1 és M4 közötti indexü rekeszekben ($M4 \leq 400$)

IE

IU az eredmény kiiratásához szükségesek (később következik)

M4

IER: hibaparaméter (0 esetén a futás helyes)

X1, X2, A, EPS bemenő, a többi kimenő paraméter.

A szubrutin hivása:

```
CALL PAR1SYM(X1,X2,YUE,YUU,A,EPS,XV,IE,IU,M4,IER)
```

Példa az eredmények kiiratására:

```
PRINT 17,X1,YUE
IUU=IU-2
IF(IE.EQ.IUU) GO TO19
DO 18 IJ=IE,IU,2
XKO=XV(IJ)
```

```
YKO=XV(IJ+1)
18 PRINT 17, XKO,YKO
19 PRINT 17,X2,YUU
17 FORMAT (1H,2E15.7)
```

A szubrutin használja a PAEGER1, PAEGME1 szubrutinokat.

Példa: X1 = 7.5
X2 =-3.9
A = 0.3
EPS = 0,05

Eredményként 11 egyenesszakasszal közelit.
Y1-et (ill. Y2-öt) a töröttvonal és az x=X1 (ill. x=X2 egyenes metszéspontjaként kapjuk.)

SUBROUTINE PAR1(X1,X2,A,EPS,XY,L,IER)

A PAR1SYM-től abban különbözik, hogy általában nem az y-tengelyre szimmetrikus módon közelit. (P_1 és P_2 most mindenképp az $y = ax^2 - \varepsilon$ parabolán van).
Az eredményt az XY tömbben kapjuk, 1-től M4-ig terjedő indexü rekeszekben, hasonlóan, mint a PAR1SYM-ben.
Rövidebb parabolaivek esetén gazdaságosabban használható - helyigény és gépidő tekintetében - mint a PAR1SYM. Egyébként a paraméterek értelmezése ugyanaz mint a PAR1SYM-nél.
Felhasználja a PAEGME1, PAEGER1 szubrutinokat.

Próba: X1 = 7.5
X2 = -3.9
A = 0.3
EPS = 0.05

Eredményként 10 egyenesszakasszal közelit.

Legyen $P_1(x_1,y_1)$ az $y = ax^2 - \varepsilon$ parabola (p_1) egyik futó pontja. Vegyünk a p_1 P_1-beli normálisának az $y = ax^2 + \varepsilon$ parabolával (p_2) való (P_1-hez közelebb eső) metszéspontját, P_2-öt. A P_1P_2 szakasz a p_1 és p_2 parabola P_1-beli merőleges távolsága, (2. ábra). Ismeretes, hogy a P_1 P_2 távolság Y_1 növekedésével monoton csökken. Célunk, hogy a közelitő töröttvonal az $y = ax^2$ parabolától merőlegesen mért $\pm\varepsilon$ távol-

ságra levő sávban legyen. Alkalmazhatnánk tehát a PAR1-beli egyszerü módszert. Ehhez a módszerhez képest azonban általában csökkentjük a közelitő szakaszok számát a következő módon. (2. ábra)

(A PARMESYM-ben és PARME-bem ezt használjuk). A P_1-ből p_2-höz huzott érintő (e) P_1-et a P_1'-ben metszi. A P_1'-beli normális metszéspontja p-vel ($y = ax^2$) a p_1 és p_2 közötti sávban legyen U. A p-től U-ban merőlegesen mért $\pm\varepsilon$ távolságra legyen a $p_1'(y = ax^2 - \varepsilon')$ és a $p_2'(y = ax^2 + \varepsilon')$ parabola ($\varepsilon' > \varepsilon > 0$). Most a P_1'-ből a p_2'-hoz nuzott erintő (e) a p_1'-öt a P_1''-ben metszi. A P_1'-ben alkalmazott eljárást P_1'' ben ismételjük, stb. Nyilvánvaló, hogy igy gazdaságosabb módszerhez jutunk.

SUBROUTINE PARMESYM (X1,X2,YUE,YUU,A,EPS,XV,IE,IU,M4,IER)
Az PAR1SYM-től abban különbözik, hogy figyelembe veszi az $y = ax^2$ parabolára merőlegesen mért $\pm\varepsilon$ távolságot, tehát az ottaninál szélesebb sávban, általában kevesebb elemmel közelit a módszer.

Felhasználja a PAEGME1, PAEGER1 szubrutinokat.
Paraméterek: mint PAR1SYM-nél.
Példa: X1 = 7.5
X2 = -3.9
A = 0.3
EPS = 0.05
Eredményként 8 egyenesszakasszal közelit.

SUBROUTINE PARME (X1,X2,A,EPS,XY,L,IER)
A PARMESYM-től abban különbözik, hogy általában nem az y-tengelyre szimmetrikusan közelit.
Az eredményt az XY tömbben kapjuk, az 1-től M4-ig terjedő indexü rekeszekben.
Paraméterek: mint PAR1SYM-nél.
Felhasználja a PAEGME1, PAEGER1 szubrutinokat.

Példa: X1 = 7.5

X2 = -3.9

A = 0.3

EPS = 0.05

Eredményként 8 egyenesszakasszal közelit.

2. PARABOLA KÖZELITÉSE EGYENESSZAKASZOKKAL ÉS KÖRIVEKKEL

SUBROUTINE PEKER (XV,XUR,M4,IER,IU,A)

Az egyenesszakaszokból álló közelitő törött vonalat (t) kikerekiti - két szomszédos egyenesszakaszt érintő köriv segitségével - a töréspontok közelében. Az, hogy a köriv hogyan illeszkedik a szakaszokhoz a 3. ábrából és a hozzá füzött magyarázatból kitünik. Igy a kapott közelitő görbeiv minden belső pontjában differenciálható lesz. Feltesszük, hogy egyik szakasz sem tul rövid, és a hibahatár is elegendően kicsi. Ez a bemenő paraméterek megfelelő megválasztásával elérhető.

Paraméterek:

XV: tömb, amely a t töröttvönal az $y = ax^2$ parabolát érinti egymásután következő pontjainak koordinátáit (abszcissza és ordinata felváltva) tartalmazza

XUR: tömb, az eredményt tartalmazza a következő elrendezésben:

XUR(1), XUR(2): (az első) egyenesszakasz (e_1) kezdőpontja

XUR(3), XUR(4): (az első) egyenesszakasz (e_1) végpontja, ami egyuttal a hozzá érintőlegesen csatlakozó k_1 köriv kezdőpontja is

XUR(5), XUR(6): k_1 középpontjának koordinátái

XUR(7), XUR(8): k_1 végpontja, ami egyuttal a hozzá csatlakozó egyenesszakasz kezdőpontja. A továbbiakban hasonló az elrendezés mint XUR(1)-től számitva, stb.

M4: az XUR tömbnek az az indexe, amelyben a közelitő görbe végpontjának ordinátája található. ($M4 \leq 400$)

IU: bemenő paraméter; IU=M4 PARISYM és PARMESYM után; IU=M4-2 PAR1 és PARME után használva, ahol M4 értéke az egyes szubrutinokban kapott M4.

A szubrutin azonnal alkalmazható a PAR1 és PARME szubrutinok után. A PAR1SYM és PARMESYM után is alkalmazható, ha a kapott töröttvonal koordinátáit (X1,YUE,XY(3),...,X2,YUU) megfelelően helyezzük el az XV tömbben.
A szubrutin használja a SZOGFEL, PAEGME2, EGEGME és EGEGM2 szubrutinokat.

Példa: X1 = 7.5
X2 = -3.9
A = 0.3
EPS = 0.05

Eredményként 11 egyenesszakasszal és 10 körívvel közelit a PAR1SYM után használva;
Eredményként 8 egyenesszakasszal és 7 körívvel közelit a PARMESYM után használva;
Eredményként 10 egyenesszakasszal és 9 körívvel közelit a PAR1 után használva;
Eredményként 8 egyenesszakasszal és 7 körívvel közelit a PARME után használva.

3. PARABOLA KÖZELITÉSE KÖRIVEKKEL

Kézenfekvő, hogy az 1.-ban kapott egyenesszakaszokat körivekkel helyettesitsük. (4. ábra, amelyből a módszer lényege leolvasható.) Gazdaságosabbá tehetjük azonban a körivekkel való közelitést a következő módon (5. ábra). Tegyük fel, hogy a P-ből kiinduló közelitő körivet akarjuk megszerkeszteni ugy, hogy az a p_o-tól merőlegesen $\pm\varepsilon$ távolságban levő sávban legyen. P és az $y = ax^2$ parabola (p_o) merőleges távolsága $\varepsilon = \overline{UP}$, a P-n átmenő parabola (p_1) $y = ax^2 - \varepsilon_1$. Vegyünk egy $y = ax^2+\varepsilon_2$ (p_2) parabolát ($\varepsilon_2 > \varepsilon_1$). Huzzunk P-ből p_2-höz érintőt (e), ez metssze p_1-et P_1-ben. Az O középpontu kört a 4. ábra szerint megszerkesztjük, ennek PP_1 ive. A PP_1 iv a p_1 és p_2 között levő sávnál keskenyebb sávba is nyilván belefér. E célból p_2-öt p_o-hoz közelitjük a következő módon. Egy olyan p_2' parabolát szerkesztünk, amely a PMP_1 törött vonalat ($\overline{PM}$ és $\overline{MP_1}$ szakaszból áll) érinti. A p_2' merőleges távolsága az U ponttól legyen ε'. Ezt az utóbbi, p_2'-öt meghatározó eljárást (p_2 szerepét p_2' tölti be) - a kétoldali közelitést alkalmazva - többször ismételve ε' értékét be tudjuk ugy állitani, hogy $|\varepsilon'| \leq \varepsilon_p$ legyen, ahol ε_p a hibahatár.

SUBROUTINE PAR2 (X1,X2,A,EPS,XYP,L,IER)

Az $y = ax^2$ parabolát (p), illetve annak egy ivét közeliti körivekkel oly módon, hogy az egymáshoz kapcsolodó ivek a p-től merőlegesen mért $\pm\varepsilon$ távolságon belül maradnak. Az eredményt az XYP tömbben kapjuk a következő elrendezésben:

XYP(1), XYP(2): az első köriv kezdőpontjának x és y koordinátája

- -

XYP(3), XYP(4): az első köriv végpontja, ami a második köriv kezdőpontja

XYP(5), XYP(8): a második köriv végpontja

XYP(9), XYP(10): a második köriv körének középpontja

XYP(11), XYP(12): a harmadik köriv végpontja, stb.

...

XYP(L)-ben található az utolsó köriv köre középpontjának ordinátája.

Ha X1 = 0 (egyébként X1 > X2 mindig), majd a kapott közelités X koordinátáit ellenkező előjellel is figyelembe vesszük, akkor y tengelyre szimmetrikus közelitést kapunk.
Ha valahonnan kezdve a körivek sugara tulságosan nagy, akkor a PARME illetve PEKER szubrutinokat alkalmazhatjuk ettől a ponttól kezdve.
A szubrutin felhasználja a PONTOS, PARR, ez utóbbi pedig a PAEGME1, PAEGME2, PAEGER1, KOEGME1 szubrutinokat.

Példa: X1 = 7.5
X2 = -3.9
A = 0.3
EPS = 0.05

Eredményként 6 körivvel közelit.

SUBROUTINE PKKER (XYP,L,XYV,IER,Z)
A körivekből álló közelitő töröttvonalat (t) kikerekiti - két szomszédos körivet megfelelően érintő köriv segitségével - a töréspontok közelében, (6. ábra) a 2. ponthoz hasonlóan. Igy a kapott közelitő görbeiv minden belső pontjában differenciálható lesz. Feltesszük, hogy egyik köriv sem tul rövid, és a hibahatár is elegendően kicsi. Ez a bemenő paraméterek megfelelő választásával elérhető.
Paraméterek:

XYP : tömb, amely a t töröttvonal adatait tartalmazza (mint PAR2-ben az XYP tömb)

XYV : tömb 1-től LK-ig (ahol LK=2*L+2), amely az eredményt tartalmazza az ábra szerinti elrendezésben. Az XYV (LK) rekesz tartalmazza az utolsó köriv köre középpontjának ordinátáját.

Z : az $y = ax^2$ parabola esetén Z=a

A szubrutin a PAR2 szubrutin után alkalmazható.
Felhasználja a SZOGFEL, PAEGME2, KOEGME1 szubrutinokat.

Példa: X1 = 7.5
X2 = -3.9
A = 0.3
EPS = 0.05

Eredményként 11 körívvel közelit.
Láthatjuk, hogy az elkészült szubrutinok közül a legutóbbi adja a legkevesebb körívvel való közelitését ugyanazon parabolaivnek adott megkivánt pontosság esetén, és a közelitő görbeiv minden pontjában differenciálható.

A közelités pontosságát fokozhatjuk, ha a parabola csucsához közel körrel közelitünk a 7. ábrán bemutatott módon, ezután pedig az eddig ismertetett módszereket alkalmazzuk. Ugyanis ha a kör középpontja az y tengelyen van ($y = ax^2 \pm \varepsilon$ alaku parabolák esetén) akkor a kör és a 2 parabola érintési pontjainak meghatározására 2-odfokura redukálható egyenletet kapunk.

4. ELLIPSZIS KÖZELITÉSE EGYENESSZAKASZOKKAL

Ellipszis közelitésére a parabolára bemutatott eljárásokat - kisebb változtatásokkal - mind alkalmazhatjuk.

SUBROUTINE ELI1 (X1,Y1,X2,Y2,A,B,EPS,XUR,M4,IER,I,JEL,XV)

Az $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ ellipszist (illetve annak egy $P_1(X1,Y1)$, P2(X2,Y2) zárt ivét) közeliti minimális számu egyenesszakaszszal oly módon, hogy az egymáshoz kapcsolódó egyenesszakaszok az y-tengelyre nézve tükrösen helyezkednek el, és azok az $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = (1 + \frac{\varepsilon}{b})^2$ és az $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{a})^2 = (1 - \frac{\varepsilon}{b})^2$ ellipszisek által meghatározott sávból (S) nem lépnek ki. (Ha a közelitő töröttvonal (t) az ellipszis (0,-b) pontjánál is közelit, akkor a $(0,-b-\varepsilon)$ pontban van töréspont; és ha a (-a, 0) illetve (a, 0) pontjánál is közelit, akkor az $x = a + \varepsilon$ illetve $x = a - \varepsilon$ egyenesek egy szakasza része t-nek).

Paraméterek:

X1, Y1 az iv kezdőpontjának (P_1) koordinátái ($|X1|<a-\varepsilon$)

X2, Y2 az iv végpontjának (P_2) koordinátái ($|X2|<a-\varepsilon$).

Fontos, hogy a P_1-től P_2 felé tartó irány az óramutató járásával ellenkező legyen.

A, B : az ellipszis tengelyei

EPS : hibahatár

XUR : tömb, amelyben az eredményt kapjuk, az 1-től I+1-ig terjedő indexü rekeszekben

M4 : a teljes ellipszist közelitő pontok kétszeres száma

IER : hibaparaméter, 0 esetén a futás helyes

I : XUR-nél volt

JEL : 1 ha a közelitendő iv tartalmazza a (0, -b) pontot, 0 egyébként

XV : tömb, amely az 1-től M4-ig terjedő indexü rekeszekben a teljes ellipszist közelitő töröttvonal töréspontjainak koordinátáit tartalmazza.
Ezt a tömböt - ellenőrzésképpen - ajánlatos kiiratni, mert igy hiba esetén a bemenő X1, Y1; X2, Y2 értékek ujbóli megadása nem okoz gondot.
Legyen az XV tömb által megadott töröttvonal két egymásutáni pontja (XS1, YS1) és (XS2, YS2). Az (X1,Y1)-et (illetve (X2, Y2)-öt) ugy kell megadni, hogy X1 (ill. X2) az XS1 és XS2; Y1(ill. Y2) az YS1 és XS2 közé essen.

Az X1, Y1, X2, Y2, A, B, EPS, JEL bemenő paraméterek.

A szubrutin használja az ELEGER1, ELEGME1 szubrutinokat.

Példa: X1 = -1., Y1 = -29.8
X2 = 1. Y2 = +29,8
JEL = 0; A = 20., B = 30., EPS = 0.03, ekkor 50 db szakasz közelit.

5. A FELHASZNÁLT SZUBRUTINOK RÖVID ISMERTETÉSE

SUBROUTINE PAEGER1 (X1,Y1,B,C,R,IER)
A P(X1,Y1) pontból az $y = Bx^2 + C$ parabolához huzott azon érintő R iránytangensét adja meg, amely esetén az (X2,Y2) érintési pontra: X2 < X1.

SUBROUTINE PAEGME1 (X1,Y1,R,A,E,X2,Y2,IER)
Legyen a P(X1,Y1) pont rajta az $y = Ax^2 + E$ parabolán. A P pont átmenő R iránytangensü egyenesnek a parabolával való másik (X2, Y2) metszéspontjának koordinátáit adja eredményül.

SUBROUTINE SZOGFEL (RM1, RM2, RM31, RM32)
Az RM1 és RM2 iránytangensü egyenesek két (egymásra merőleges) szögfelezőjének RM31, illetve RM32 iránytangensét adja meg.

SUBROUTINE PAEGME2 (X1,Y1,R,B,C,X2,Y2,X3,Y3,IER)
Az (X1,Y1) ponton átmenő, R iránytangensü egyenesnek az $y = Bx^2 + C$ parabolával való két metszéspontját (X2,Y2); (X3,Y3) adja meg (amennyiben azok valósak).

SUBROUTINE KOEGME1 (X1,Y1,R,XK,YK,RR,XM1,YM1,XM2,YM2,IER)
Az (X1,Y1) ponton átmenő, R iránytangensü egyenesnek az $y = Bx^2 + C$ középpontu, RR sugaru körrel való két metszéspontját (X2,Y2); (X2,Y3) adja meg (amennyiben azok valósak).

SUBROUTINE EGEGME (UX,UY,RQ,VX,VY,VQ,ZX,ZY)
Az (UX,UY) ponton átmenő, RQ iránytangensü és a (VX,VY) ponton átmenő, VQ iránytangensü egyenesek (ZX,ZY) metszéspontját adja meg.

SUBROUTINE EGEGME2 (B,RQ,VX,VY,VQ,ZX,ZY)
Az y = RQ*X+B és a (VX,VY) ponton átmenő, VQ iránytangensü egyenesek (ZX,ZY) metszéspontját adja meg.

SUBROUTINE PARR (XX1,YY1,XX2,XK,YK,EPX,IER,EPU,EPS,A,YY2)
Előállit egy (P1,P2) körivet (a kör középpontja XK,YK) oly módon, hogy P1(abszcisszája XX1) és P2(XX2,YY2) az $y=Ax^2-EPS$ parabolán (p_1) vannak, és k benne van a p_1 és az $y = Ax^2 + EPX$ (p_2) parabolák által meghatározott sávban. A p_1-től merőlegesen mért távolsága p_2-nek $\leq$ EPU.

SUBROUTINE PONTOS (XX1,YY1,XX2,XK,YK,IER,EPU,ELT,A,EP1,EP2,
EPS,YY2)
A PARR-ban szereplő k körivet ugy állitja be, hogy p_1-nek p_2-től való (merőleges) távolsága $\leq$ EPS legyen.

SUBROUTINE ELEGER1 (X1,Y1,A,B,G,R,IER)
A P(X1,Y1) pontból az $(\frac{X}{A})^2 + (\frac{Y}{B})^2 = G$ ellipszishez huzott azon érintő R iránytangensét adja meg, amely esetén a (X2,Y2) érintési pontra: $X2 < X1$ ha $X1 \leq 0$, $Y1 < 0$.

SUBROUTINE ELEGME1 (X1,Y1,R,A,B,X2,Y2,E,IER)
Legyen a P(X1,Y1) pont rajta az $(\frac{X}{A})^2 + (\frac{Y}{B})^2 = E$ ellipszisen. A P ponton átmenő R iránytangensü egyenesnek az ellipszissel való másik (X2,Y2) metszéspontjának koordinátáit adja eredményül.

6. AZ IER HIBAPARAMÉTER LEHETSÉGES ÉRTÉKEI

IER=0 : sikeres futás

a/ parabolát közelitő szubrutinok esetén:

IER=1 a PAEGER1 helytelen bemenő adatok miatt nem ad érintési pontot

IER=2 a PAEGME1 nem ad valós metszéspontot

IER=3 a PAEGME2 nem ad valós metszéspontot

IER=5 a KOEGME1 nem ad valós metszéspontot

b/ az ellipszist közelitő szubrutinok esetén:

IER=1 az ELEGER1 helytelen bemenő adatok miatt nem ad érintési pontot

IER=2 az ELEGME1 nem ad valós metszéspontot

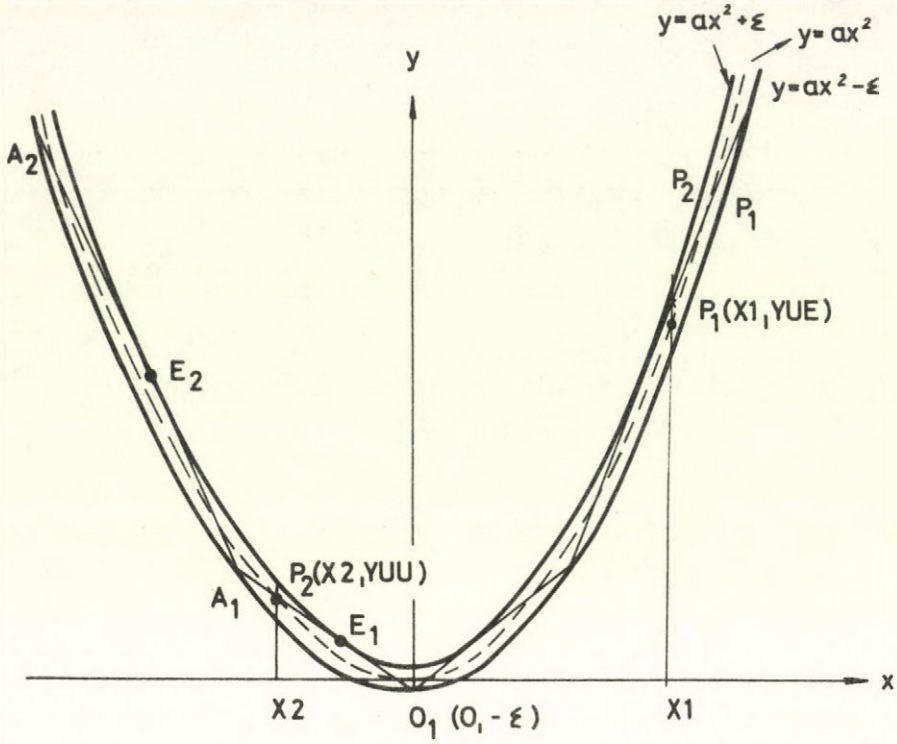
MEGJEGYZÉSEK:

1/ A szubrutinokat a könnyebb összehasonlithatóság kedvéért ugyanazokra a bemenő paraméterekre futtattuk le (a parabolák esetén).

2/ A közelitések során legfeljebb másodfoku, vagy másodfokura redukálható egyenletek megoldására kerül sor (a PAR2-öt kivéve).

3/ A dimenzionált változók (tömbök) indexhatárai a feladat nagyságának megfelelően változtathatók.

4/ Nem nehéz belátni, hogy a bemutatott módszerek az ábrán látható módon meg is valósithatók, megfelelő bemenő adatok esetén. Pl. a 3. ábrán a $\overline{P_2O}$ szögfelezőre merőleges és a parabolát E-ben érintő egyenes (m) $\overline{P_2P_1}$-el ill. $\overline{P_2P_3}$-al való M_1 vagy M_2 metszéspontja P_1 és P_2 ill. P_2 és P_3 között van. U.i. a $\overline{P_3P_2}$ és $\overline{P_2P_1}$ szakasz közül vegyük a rövidebbet $(\overline{P_1P_2})$, és tekintsük a $P_2P_1P_1'$ Δ-et. A parabola nyilván metszi $\overline{P_1P_1'}$-öt P_1-ben és M-ben és a P_1M parabola iven van az E érintési pont; M_1 ill. M_2 igy csak P_1 és P_2 ill. P_2 és P_3 között lehet.

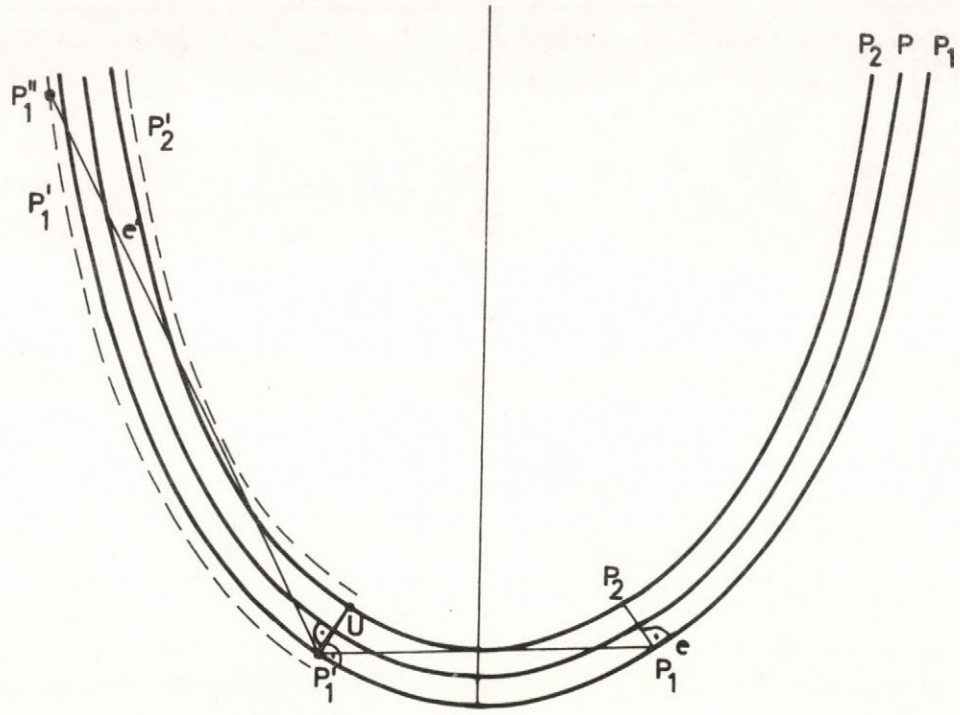


1.ábra

1/ Csak egyenesszakaszokkal való közelités.

0_1, A_1, A_2 az $y = ax^2 - \varepsilon$ parabolán (p_1) vannak, az $0A_1$ ill. A_1A_2 szakasz az $y = ax^2 + \varepsilon$ parabolát (p_2) az E_1 ill. E_2 pontokban érinti.

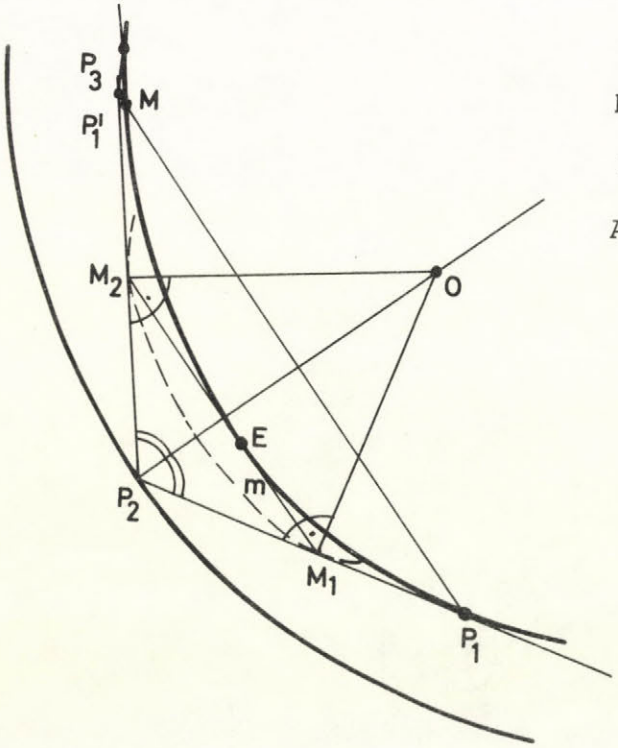
(egy adott pontból a P_2 parabolához huzott érintő meghatározása, majd ennek az érintőegyenesnek a P_1 parabolával való (megfelelő) metszéspontjának meghatározása másodfoku egyenletek megoldása, feltételek a diszkrimináns nullává válására)).



2. ábra

2/ a/ Egyenesszakaszok és körívek felváltva közelitenek.

Az 1/ esetnél a sarkok megfelelő lekerekitésével:



3. ábra

$OP_2P_3 = OP_2P_1$

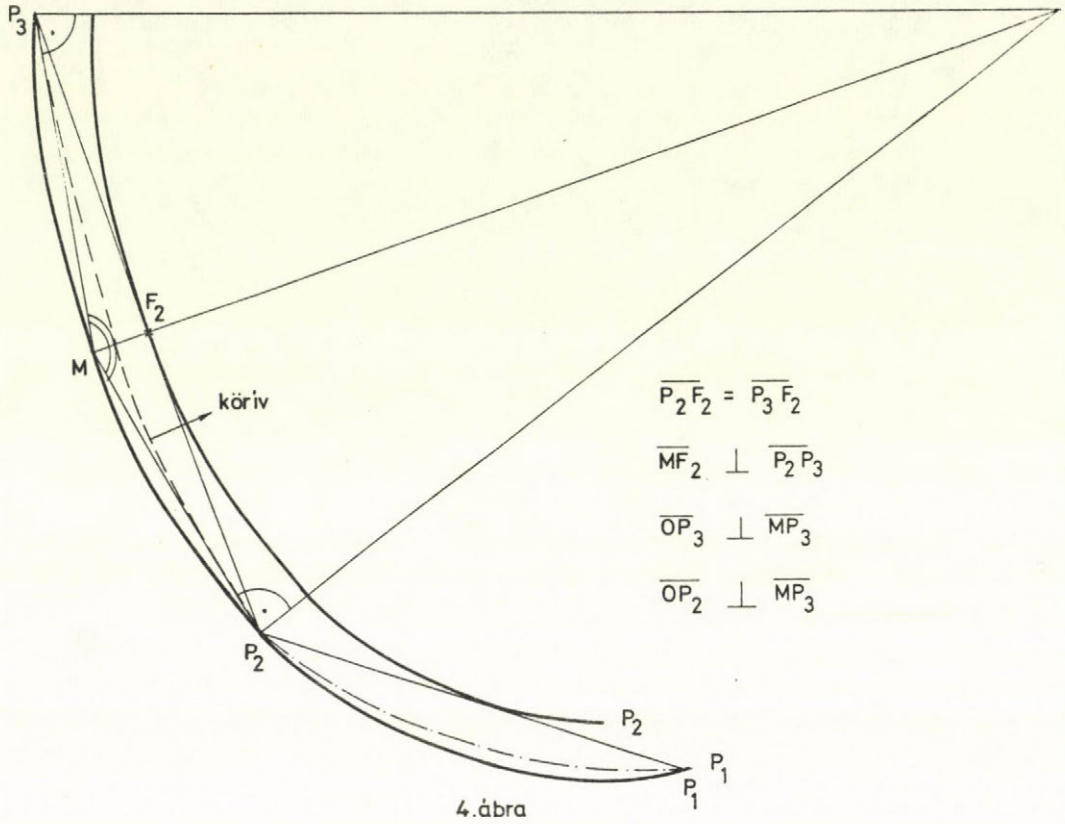
$M_1M_2 \perp OP_2$, M_1M_2 p-t E-ben érinti

$P_2M_2 \perp OM_2$, $P_1M_1 \perp OM_1$, $\overline{P_1P_2} = \overline{P_2P_1'}$

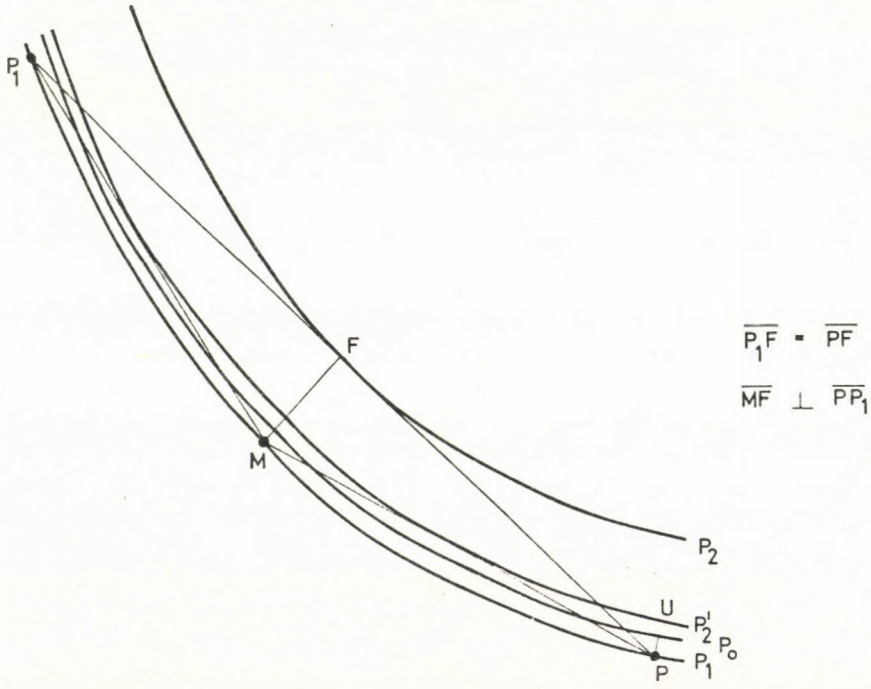
A kör középpontja O, sugara OM_1.

3/ Csak körivekkel közelitünk.

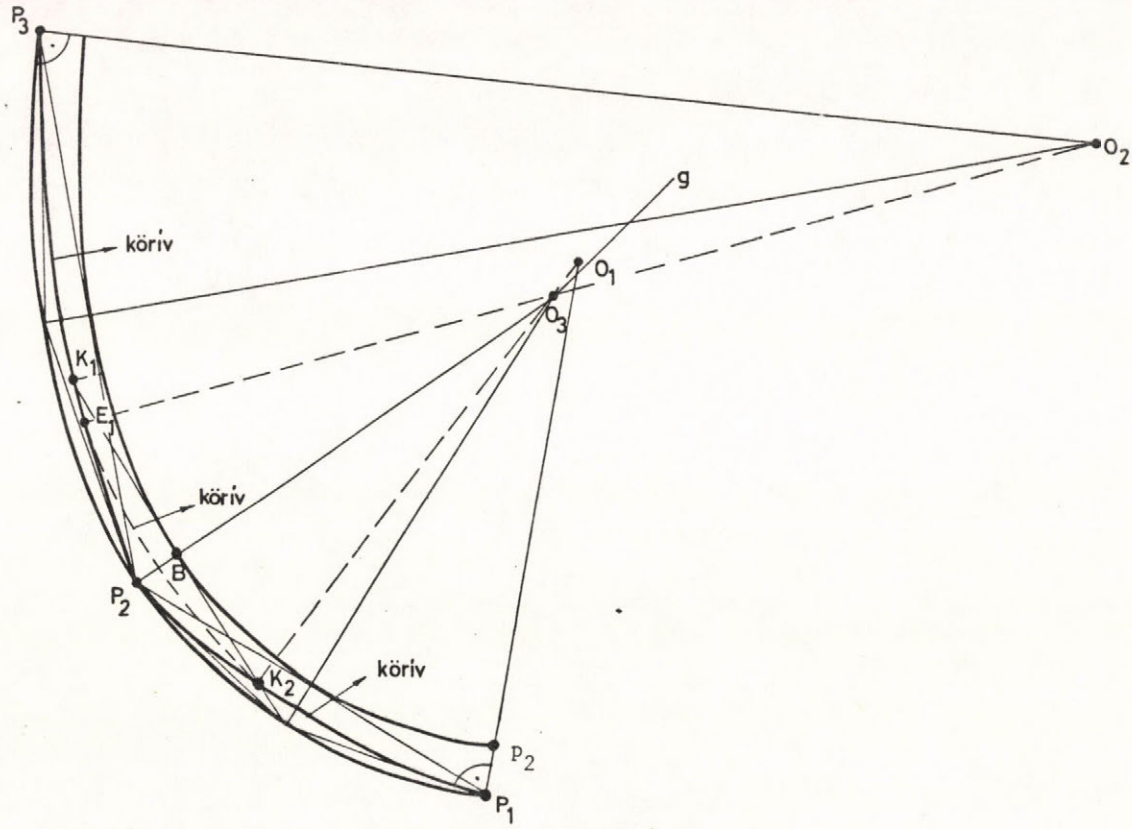
a/ az 1/ eset egyenesszakaszainak megfelelő helyettesitése körivekkel



4.ábra



5. ábra



6. ábra

3/b Mint 2/a, de megfelelően kereitve a "csucsokat"

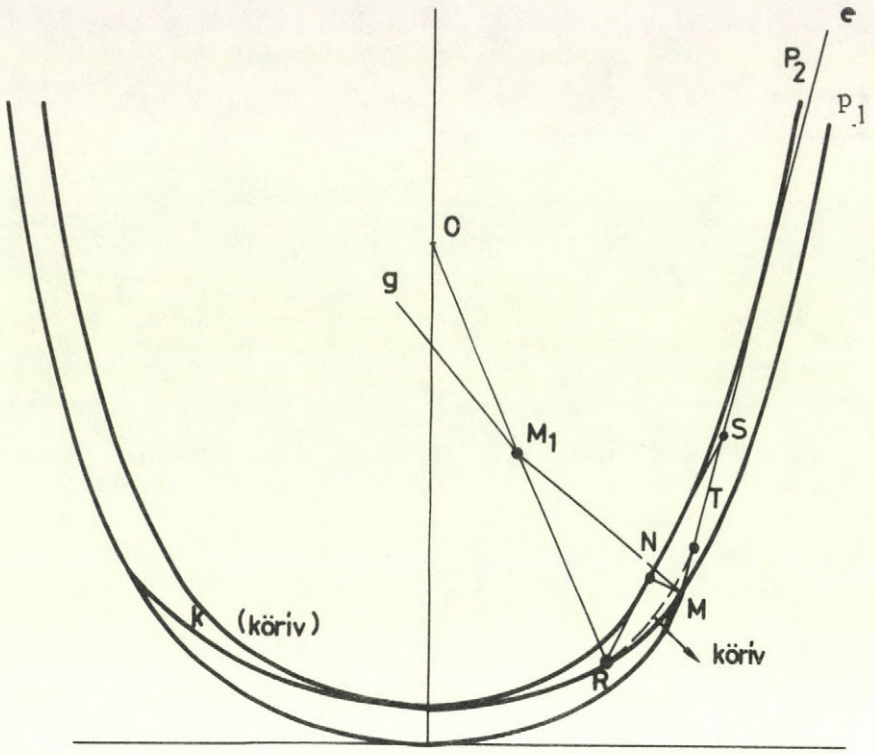
$P_3P_2B = P_1P_2B$

$\overline{BK_1} \perp \overline{BP_2}$

$\overline{BK_1}(\overline{BK_2})$ érinti p_2-t, $\overline{P_2K_2} < \overline{P_2K_1}$

A P_1P_2 és P_2P_3 körivtől egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a g (legfeljebb) másodfoku görbe.

$\overline{K_2O_1}$ és g O_3 metszéspontja a kerekitő köriv (K_2E_1) középpontja.



7. ábra

2/b Kezdetben (a parabola csucsához közel)
kör (k) közelités, utána egyenesszakaszok és körívek, mint 1/-ben, vagy 2/a/-ban.
k középpontja 0
k és p_1 érintési pontja M
p_1 normálisa $\overline{MN}$
$\overline{MN} \perp \overline{NR}$, és $\overline{NR}$ érinti p_2-t
$\overline{NR}$ és k metszéspontja R
$\overline{NR}$ és e metszéspontja S
A k körivtől és az e egyenesszakasztól egyenlő távolságra levő pontok mértani helye a g görbe, $\overline{MR} < \overline{MS}$, OR és g metszéspontja (M_1) a kerekitő köriv ($\overline{RT}$) középpontja.

S u m m a r y

Approximation of parabola and ellipse by straight lines and arches

István Szepesvári

The task of the approximation of different curves by straight lines and arches appears in the computer - aided part programming for numerically controlled machine tools. In this paper we deal with this problem for parabola and ellipse. Starting from simple approximations we realize the approximation of given accuracy by more and more complicated FORTRAN-subroutines and less and less number of straight lines (arches).

Р Е З Ю М Е

Приближение параболы и эллипса с прямыми отрезками и дугами круга

И . Сепешвари

У станков с программным управлением возникает задача приближения различных кривых с прямыми отрезками и дугами круга. В этой статье занимаемся приближением параболы и эллипса. Начиная с простых приближений, приближение заданной точности дается при помощи все более сложных подпрограмм /составленных на языке FORTRAN/ и все меньше и меньше отрезков /дуг/.