

Szepesvári István:

KONVERGENS VÉGES DIFFERENCIA MÓDSZER BIZONYOS DEGENERÁLT
NEMLINEÁRIS TÖBBVÁLTOZÓS PARABOLIKUS EGYENLETRE

1. BEVEZETÉS

J.L. Gravelleau és P. Jamet az [1] dolgozatban a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

egyenlet numerikus megoldásával foglalkozik az $u(x, 0) = u^0(x)$ kezdeti feltétel mellett, ha $f(x, t, u) \geq 0$, $a \geq 0$ konstans, x egydimenziós. Ebben a cikkben – továbbfejlesztve az [1]-ben alkalmazott módszereket – az előbbinél általánosabb (1.1) – (1.2) egyenletre adunk stabilis és konvergens véges differencia közelítést.

Tekintsük a következő differenciálegyenletet:

$$(1.1) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{m=1}^s f_m(x, t, u(x, t), u_{x_m}(x, t)) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_m^2} + \sum_{p=1}^r \sum_{m=1}^s c_{m,p}(t) \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_m} \right)^p \equiv Au$$

az

$$(1.2) \quad u(x, 0) = u^0(x)$$

kezdeti feltétellel, ahol $x = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{R}^s$, $p \geq 1$ egész.

Feltesszük, hogy $f_m(x, t, u, u_{x_m})$ folytonos, nemnegatív, valós változós függvény;

$\frac{\partial f}{\partial x_m}$, $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial^n f}{\partial u_{x_m}^n} \right)$, $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^n f}{\partial u_{x_m}^n} \right)$ folytonos $m = 1, \dots, s$ -re és $1 \leq n \leq N$;

$\frac{\partial^n}{\partial u_{x_m}^n} f \equiv 0$ $n > N$ -re; $c_{m,p}(t)$ nemnegatív, $\sup_t |c_{m,p}(t)|$, $\sup_x |u^0(x)|$ és $\sup_x \left| \frac{\partial u^0}{\partial x_m} \right|$

korlátos, $\frac{\partial u^0}{\partial x_m} \in \mathcal{L}^t(\mathbb{R}^s)$, $\text{Var}_{x_m} \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_m} \right) \in \mathcal{L}^1(\bar{\mathcal{R}}_m)$, ahol Var_{x_m} az x_m szerinti variáció,

$\bar{\mathcal{R}}_m = (x_1, \dots, x_{m-1}, x_{m+1}, \dots, x_s)$; $m = 1, \dots, s$, $t = \max(r, N + 2)$.

Definíció. Legyen $\mathcal{H} \{x \in \mathbb{R}^s, t > 0\}$ feltér. Egy \mathcal{H} -n definiált $u(x, t)$ függvény az (1.1) – (1.2) probléma megoldása, ha

$$u \in C^0(\bar{\mathcal{H}}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathcal{H}), \quad u_{x_m} \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{H}), \quad m = 1, \dots, s; \quad u(x, 0) = u^0(x)$$

és

$$(1.3) \quad - \int_{\mathcal{H}} \left[u \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \sum_{m=1}^s \left\{ f_m u_{x_m} \Phi_{x_m} + \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_m} u_{x_m} + \frac{\partial f_m}{\partial u} (u_{x_m})^2 \right) \Phi + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=1}^N \left(\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \left[\frac{\partial^k f_m}{\partial u_{x_m}^k} (u_{x_m})^{k+1} \Phi_{x_m} + \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial^k f_m}{\partial u_{x_m}^k} \right) \right) (u_{x_m})^{k+1} \Phi + \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^k f_m}{\partial u_{x_m}^k} \right) \right) (u_{x_m})^{k+2} \Phi \right] \right) - \left(\sum_{p=1}^r \sum_{m=1}^s c_{m,p}(t) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_m} \right)^p \right) \Phi \right] = 0$$

minden $\Phi \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ esetén, ahol $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ a \mathcal{H} -ban kompakt tartójú végtelenszer differenciálható függvények terét jelenti, $\overline{\mathcal{H}}$ pedig a \mathcal{H} lezártja.

Az (1.3) összeget a következőképpen kapjuk:

$$f(x,t,u,u_x)u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (f u_x) - f_x u_x - f_u u_x^2 - f_{u_x} u_{xx} u_x.$$

Továbbá:

$$(1.4) \quad f_{u_x} u_{xx} u_x = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (f_{u_x} u_x^2) - \frac{1}{2} (f_{u_x x} u_x^2 + f_{u_x u} u_x^3 + f_{u_x u_x} u_x^2 u_{xx}).$$

(1.4) utolsó tagjára ismét alkalmazva egy (1.4)-hez hasonló képletet, figyelembe véve, hogy

$j(u_x)^{j-1} u_{xx} = \frac{\partial}{\partial u} (u_x)^j$ ($j > 1$, egész), majd hasonló módon folytatva, amíg $\frac{\partial^n}{\partial u_x^n} f \equiv 0$ lesz, parciális integrálás után kapjuk (1.3)-at.

Az (1.1) egyenlet speciális esetei:

$$(1.41) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{m}{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2, \quad m > 1$$

és $m = 2$ -re

$$(1.42) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u^2) \quad (\text{Boussinesq egyenlet})$$

Bevezetve az $u = v^{m-1}$ transzformációt, (1.41) a következőképpen alakul:

$$(1.43) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v^m)$$

amely egyrészt a lukacsos közegen való átfolyást, másrészt a sugárzásos hőátadás jelenségét írja le.

Cikkünkben egy explicit véges differencia sémát állítunk fel az (1.1)-(1.2) feladat megoldására, majd lokális egyenletes konvergenciát bizonyítunk. Differencia sémánk az A operátor feldarabolásán alapul: $Au = Bu + Cu$,

$$(1.5) \quad Bu \equiv \sum_{m=1}^s f_m \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}$$

$$(1.6) \quad Cu \equiv \sum_{p=1}^r C_p u,$$

ahol

$$(1.7) \quad C_p u = \sum_{m=1}^s c_{m,p}(t) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_m} \right)^p \quad p = 1, \dots, r.$$

2. NUMERIKUS SÉMA (1.5)-RE. STABILITÁSI BECSLÉSEK

Legyenek h_1, \dots, h_s, k pozitív számok. Tekintsük a következő $s+1$ dimenziós rács-ponttartományt: $H \equiv \mathcal{H}_{h_1, \dots, h_s, k} = \{(x,t) = (i_1 h_1, \dots, i_s h_s, nk); i_j, j = 1, \dots, s \text{ és } n \text{ egész, } n \geq 0\}$.

Legyen Ψ^n tetszőleges H -n definiált függvény, $\Psi^n \equiv \Psi_{i_1, \dots, i_s}^n(i_1 h_1, \dots, i_s h_s, nk)$, valamint:

$$(2.1) \quad B_{h_m} \Psi^n \equiv \sum_{m=1}^s B_{m, h_m} \Psi^n,$$

ahol

$$B_{m, h_m} \Psi^n = f_{m, i_m} \left(i_1 h_1, \dots, i_s h_s, nk, \Psi^n, \frac{\Psi_{i_1, \dots, i_m+1, \dots, i_s}^n - \Psi_{i_1, \dots, i_m, \dots, i_s}^n}{h_m} \right) * \\ * \frac{\Psi_{i_1, \dots, i_m+1, \dots, i_s}^n - 2\Psi^n + \Psi_{i_1, \dots, i_m-1, \dots, i_s}^n}{h_m^2}$$

Tekintsük a következő véges differencia sémát:

$$(2.2) \quad (u_{i_1, \dots, i_s}^{n+1} - u_{i_1, \dots, i_s}^n) / k = \sum_{m=1}^s B_{m, h_m} u_{i_1, \dots, i_s}^n$$

$$u_{i_1, \dots, i_s}^0 = u^0(i_1 h_1, \dots, i_s h_s)$$

amely megfelel az (1.5)-(1.2) feladatnak.

2.1. Tétel. *Legyen*

$$\lambda_m = \frac{k}{h_m^2}, \quad C_0 = \sup_x |u^0(x)|,$$

$$C_{1,m} = \sup_x \left| \frac{\partial u^0(x,t)}{\partial x_m} \right|, \quad M_m = \sup_{\substack{|p| \leq C_0 \\ |q| \leq C_{1,m} \\ (x,t) \in \mathcal{X}'} } |f_m(x,t,p,q)|.$$

Tegyük fel, hogy

$$(2.3) \quad 2M_m \lambda_m \bar{s} \leq 1, \quad m = 1, \dots, s,$$

ahol \bar{s} a nem azonosan 0 f_m -ek száma.

Ekkor a következő becslések állnak:

$$(2.4) \quad |u_{i_1, \dots, i_s}^n| \leq C_0 \quad \text{minden } i_1, \dots, i_s, n\text{-re,}$$

$$(2.5) \quad |(u_{i_1, \dots, i_m+1, \dots, i_s}^n - u_{i_1, \dots, i_m, \dots, i_s}^n) / h_m| \leq C_{1,m} \quad \text{minden } i_1, \dots, i_s, n\text{-re,}$$

$$(2.6) \quad h_1 \dots h_s \sum_{i_1, \dots, i_s} |(u_{i_1, \dots, i_m+1, \dots, i_s}^n - u_{i_1, \dots, i_m, \dots, i_s}^n) / h_m|^p \leq C_{2,m,p} \\ \text{minden } n\text{-re,}$$

$$(2.7) \quad h_1 h_2 \dots h_s \sum_{i_1, \dots, i_s} |(u_{i_1, \dots, i_m+1, \dots, i_s}^n - 2u_{i_1, \dots, i_s}^n + u_{i_1, \dots, i_m-1, \dots, i_s}^n) / h_m^2| \leq \\ \leq C_{3,m} \quad \text{minden } n\text{-re,}$$

$$(2.8) \quad h_1 h_2 \dots h_s \sum_{i_1, \dots, i_s} |(u_{i_1, \dots, i_s}^{n+1} - u_{i_1, \dots, i_s}^n) / k| \leq C_4 \quad \text{minden } n\text{-re,}$$

ahol $C_0; C_{1,m}; C_{2,m,p}; C_{3,m}; C_4$ h_1, \dots, h_s és k -től független konstans,

$$M = \max_m M_m; \quad C_3 = \max_m C_{3,m}; \quad C_4 = \bar{s} M C_3;$$

$$C_{2,m,p} = \int_{\mathcal{X}^s} \left| \frac{\partial u^0}{\partial x_m} \right|^p; \quad C_{3,m} = \int_{\mathcal{X}_m} \left| \text{Var} \left(\frac{\partial u^0}{\partial x_m} \right) \right|.$$

Bizonyítás. (2.2)-ből következik:

$$u_{i_1, \dots, i_s}^{n+1} = \sum_{m=1}^{\bar{s}} \left\{ \left(\frac{1}{s} - 2\lambda_m f_{m,i_m}^n \right) u_{i_1, \dots, i_s}^n + \lambda_m f_{m,i_m}^n u_{i_1, \dots, i_m+1, \dots, i_s}^n + \right. \\ \left. + \lambda_m f_{m,i_m}^n u_{i_1, \dots, i_m-1, \dots, i_s}^n \right\}.$$

Mivel $0 \leq f_{m,i_m}^n \leq M_m$, így (2.3) miatt $0 \leq \lambda_m f_{m,i_m}^n \leq \frac{1}{2s}$.

Ezért, minthogy $u_{i_1, \dots, i_m-1, \dots, i_s}^n$; u_{i_1, \dots, i_s}^n ; $u_{i_1, \dots, i_m+1, \dots, i_s}^n$ együtthatói nemnegatívak és összegük 1, tehát

$$|u_{i_1, \dots, i_s}^{n+1}| \leq \max_{i_1, \dots, i_s} \{|u_{i_1, \dots, i_s}^n|, |u_{i_1, \dots, i_m+1, \dots, i_s}^n|, |u_{i_1, \dots, i_m-1, \dots, i_s}^n|\}.$$

Innen $\sup_{i_1, \dots, i_s} |u_{i_1, \dots, i_s}^{n+1}| \leq \sup_{i_1, \dots, i_s} |u_{i_1, \dots, i_s}^n|$, és (2.4) indukcióval következik.

Legyen $u_{i_1, \dots, i_m+j, \dots, i_s}^n \equiv u_{i_m+j}^n$ valamint $v_{i_m}^n = (u_{i_m+1}^n - u_{i_m}^n)/h_m$. (2.2)-ből:

$$(v_{i_m}^{n+1} - v_{i_m}^n)/k = \sum_{m=1}^{\bar{s}} (B_{m, h_m} u_{i_m+1}^n - B_{m, h_m} u_{i_m}^n)/h_m,$$

azaz

$$\begin{aligned} v_{i_m}^{n+1} &= v_{i_m}^n + \sum_{m=1}^{\bar{s}} \lambda_m [f_{m, i_m+1}^n (v_{i_m+1}^n - v_{i_m}^n) - f_{m, i_m}^n (v_{i_m}^n - v_{i_m-1}^n)] = \\ &= \sum_{m=1}^{\bar{s}} \left[\frac{1}{s} - \lambda_m (f_{m, i_m+1}^n - f_{m, i_m}^n) \right] v_{i_m}^n + \lambda_m f_{m, i_m}^n v_{i_m+1}^n + \lambda_m f_{m, i_m}^n v_{i_m-1}^n, \end{aligned}$$

amiből az előzőhöz hasonlóan következik (2.5).

Másrészt

$$(2.81) \quad |v_{i_m}^{n+1}| \leq \sum_{m=1}^{\bar{s}} \left[\frac{1}{s} - \lambda_m (f_{m, i_m+1}^n + f_{m, i_m}^n) \right] |v_{i_m}^n| + \lambda_m f_{m, i_m+1}^n |v_{i_m+1}^n| + \lambda_m f_{m, i_m}^n |v_{i_m-1}^n|,$$

és $|u_{i_m+1}^{n+1} - u_{i_m}^{n+1}| \leq |u_{i_m+1}^0 - u_{i_m}^0|$ miatt a kezdeti feltétel szerinti egyenletes stabilitás következik.

Minden i_1, \dots, i_m -re szummázva kapjuk (2.81)-ből:

$$\sum_{i_1, \dots, i_s} |v_{i_m}^{n+1}|^p \leq \sum_{i_1, \dots, i_s} |v_{i_m}^n|^p$$

és indukcióval következik:

$$h_1 h_2 \dots h_s \sum_{i_1, \dots, i_s} |v_{i_m}^n|^p \leq h_1 h_2 \dots h_s \sum_{i_1, \dots, i_s} |v_{i_m}^0|^p \leq \bar{C}_{2, m, p};$$

ami korlátos.

Legyen most

$$w_{i_m}^n = (v_{i_m}^n - v_{i_m-1}^n)/h_m = (u_{i_m+1}^n - 2u_{i_m}^n + u_{i_m-1}^n)/h_m^2.$$

(2.2)-ből következnek:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} (w_{i_m}^{n+1} - w_{i_m}^n) / k &= \sum_{m=1}^{\bar{s}} (B_{m,h_m} u_{i_m}^{n+1} - 2B_{m,h_m} u_{i_m}^n + B_{m,h_m} u_{i_m}^{n-1}) / h_m^2 \\ w_{i_m}^{n+1} &= w_{i_m}^n + \sum_{m=1}^{\bar{s}} \lambda_m (f_{m,i_m}^{n+1} w_{i_m}^{n+1} - 2f_{m,i_m}^n w_{i_m}^n + f_{m,i_m}^{n-1} w_{i_m}^{n-1}) = \\ &= \sum_{m=1}^{\bar{s}} \left(\frac{1}{s} - 2\lambda_m f_{m,i_m}^n \right) w_{i_m}^n + \lambda_m f_{m,i_m}^{n+1} w_{i_m}^{n+1} + \lambda_m f_{m,i_m}^{n-1} w_{i_m}^{n-1}, \end{aligned}$$

és összegzéssel kapjuk:

$$h_1 h_2 \dots h_s \sum_{i_1, \dots, i_s} |w_{i_m}^n| \leq h_1 h_2 \dots h_s \sum_{i_1, \dots, i_s} |w_{i_m}^0| \leq C_{3,m}.$$

A (2.8) becslés az előző becslésekből rögtön következnek:

$$(u_{i_m}^{n+1} - u_{i_m}^n) / k = \sum_{m=1}^{\bar{s}} f_{m,i_m}^n w_{i_m}^n,$$

ahonnan:

$$\begin{aligned} h_1 h_2 \dots h_s \sum_{m=1}^{\bar{s}} \sum_{i_1, \dots, i_s} |(u_{i_m}^{n+1} - u_{i_m}^n) / k| &\leq \sum_{m=1}^{\bar{s}} h_1 h_2 \dots h_s \sum_{i_1, \dots, i_s} f_{m,i_m}^n |w_{i_m}^n| \leq \\ &\leq M \bar{s} C_3. \end{aligned}$$

3. AZ (1.6) VÉGES DIFFERENCIA ALAKBAN VALÓ ELŐÁLLÍTÁSA STABILITÁSI BECSLÉSEK

Tetszőleges H -n definiált Ψ függvényre legyen:

$$C\Psi^n \equiv \sum_{p=0}^{r-1} C_{p+1} \Psi^n,$$

ahol

$$C_{p+1} \Psi^n = \sum_{m=1}^{\bar{s}} D_{m,p+1} \Psi_{i_m}^n,$$

ahol

$$(3.1) \quad \begin{aligned} D_{m,p+1} \Psi_{i_m}^n &= c_{m,p+1} (nk) (\delta \Psi_{i_m}^n)^{p+1}, \quad \text{ha } p \geq 0 \text{ páros} \\ D_{m,p+1} \Psi_{i_m}^n &= \frac{c_{m,p+1} (nk)}{2} [\delta \Psi_{i_m}^n (|\delta \Psi_{i_m}^n|^p + (\delta \Psi_{i_m}^n)^p) - \\ &\quad - \delta \Psi_{i_m-1}^n (|\delta \Psi_{i_m-1}^n|^p - (\delta \Psi_{i_m-1}^n)^p)] \end{aligned}$$

ha $p \geq 1$ páratlan, ahol $\delta \Psi_{i_m}^n = (\Psi_{i_1, \dots, i_m+1, \dots, i_s}^n - \Psi_{i_1, \dots, i_m, \dots, i_s}^n) / h_m$.

Tekintsük a következő véges differencia sémát:

$$(3.2) \quad (u_{i_m}^{n+1} - u_{i_m}^n) / k = \sum_{m=1}^s D_{m,p+1} u_{i_m}^n, \quad u_{i_1, \dots, i_s}^0 = u^0(i_1 h_1, \dots, i_s h_s)$$

(ahol $u_{i_m}^n \equiv u_{i_1, \dots, i_s}^n$) amely analóg az (1.7)-(1.2) problémával.

3.1 Tétel. Legyenek $\Theta_m = \frac{k}{h_m}$; C_0 ; $C_{1,m}$; $C_{2,m,p}$; $C_{3,m}$ a 2.1 tételben definiált konstansok.

Legyen u a (3.2) véges differencia séma megoldása.

Tegyük fel, hogy

$$(p+1)\Theta_m \cdot C_{m,p+1} (C_{1,m})^p \leq \frac{1}{s_{p+1}}, \quad m = 1, \dots, s; \quad p = 0, \dots, r-1;$$

és s_{p+1} a nem azonosan 0 $c_{m,p+1}(t)$ -k száma, valamint $C_{m,p+1} = \sup_t |c_{m,p+1}(t)|$.

Ekkor u kielégíti a (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) becsléseket, és

$$h_1 h_2 \dots h_s \sum_{i_1, \dots, i_s} (u_{i_m}^{n+1} - u_{i_m}^n) / k \leq C_{6,p};$$

ahol

$$C_{6,p} = 2s_{p+1} C C_1 C_{2,p};$$

és

$$C = \max_{m,p} |C_{m,p+1}|; \quad C_1 = \max_m |C_{1,m}|; \quad C_{2,p} = \max_m |C_{2,m,p}|.$$

Bizonyítás. Legyen $p \geq 1$ páratlan, $v_{i_m}^n = \delta u_{i_m}^n$ és $v_{i_m}^{n+1} = \delta u_{i_m}^{n+1}$. Ekkor (3.2)-ből következik:

$$(v_{i_m}^{n+1} - v_{i_m}^n) / k - \sum_{m=1}^s (D_{m,p+1} u_{i_m}^{n+1} - D_{m,p+1} u_{i_m}^n) / h_m = 0,$$

azaz

$$(3.3) \quad v_{i_m}^{n+1} = \sum_{m=1}^s \left(\frac{1}{s_p} - 2\Theta_m \frac{c_{m,p+1}(nk)}{2} |v_{i_m}^n|^p \right) v_{i_m}^n + \Theta_m \frac{c_{m,p+1}(nk)}{2} * \\ * (|v_{i_m}^n|^p + (v_{i_m}^n)^p) v_{i_m}^n + \Theta_m \frac{c_{m,p+1}(nk)}{2} (|v_{i_m-1}^n|^p - (v_{i_m-1}^n)^p) v_{i_m-1}^n.$$

Legyen $\lambda_{p,m} = \frac{\Theta_m c_{m,p+1}(nk)}{2}$,

$$f_{1,m,p}(y) = \left(\frac{1}{s_p} - 2\lambda_{p,m} |y|^p \right) y,$$

$$f_{2,m,p}(y) = \lambda_{p,m} (|y|^p + y^p) y,$$

$$f_{3,m,p}(y) = \lambda_{p,m} (|y|^p - y^p) y.$$

Igy (3.3)-at írjuk ilyen formában:

$$v_{i_m}^{n+1} = \sum_{m=1}^s f_{1,m,p}(v_{i_m}^n) + f_{2,m,p}(v_{i_m}^{n+1}) + f_{3,m,p}(v_{i_m}^{n-1}).$$

$f_{1,m,p}$; $f_{2,m,p}$; $f_{3,m,p}$ monoton nemcsökkenő függvénye y -nak $2(p+1)\lambda_{p,m} y^p \leq \frac{1}{s_p}$ esetén.

Ugyanis mivel $y_{i+1} > y_i$, és ha $y_{i+1} \geq 0$, $y_i \geq 0$ vagy $y_{i+1} \leq 0$, $y_i \leq 0$, akkor $f_{1,m,p}$ deriválásából adódik a feltétel. Ha $y_{i+1} \geq 0$, $y_i \leq 0$, akkor

$$f_{1,m,p}(y_{i+1}) - f_{1,m,p}(y_i) = y_{i+1} \left(\frac{1}{s_p} - 2\lambda_{p,m} y_{i+1}^p \right) - y_i \left(\frac{1}{s_p} - 2\lambda_{p,m} |y_i|^p \right) \geq 0$$

nyilvánvalóan. $f_{2,m,p}$ és $f_{3,m,p}$ a 0-ban is differenciálható, így ezekre is könnyen adódik a feltétel. Legyen $V = \sup_{i_m} v_{i_m}^n$, ekkor $f(-V) \leq v_{i_m}^{n+1} \leq f(V)$ minden i_m -re, ahol

$$f(y) \equiv \sum_{m=1}^s f_{1,m,p} + f_{2,m,p} + f_{3,m,p} \equiv y$$

Innen $|v_{i_m}^{n+1}| \leq V$, és (2.5) következik. i_1, \dots, i_s -re való szummázással:

$$\sum_{i_1, \dots, i_s} |v_{i_m}^{n+1}|^p \leq \sum_{i_1, \dots, i_s} |v_{i_m}^n|^p, \text{ és (2.6) igazolt.}$$

(3.2)-ből következik, hogy

$$u_{i_m}^{n+1} = \sum_{m=1}^s \left[\frac{1}{s_p} - \lambda_{p,m} (|\delta u_{i_m}^n|^p + (\delta u_{i_m}^n)^p) - \lambda_{p,m} (|\delta u_{i_m-1}^n|^p - (\delta u_{i_m-1}^n)^p) \right] u_{i_m}^n + \\ + \lambda_{p,m} (|\delta u_{i_m}^n|^p + (\delta u_{i_m}^n)^p) u_{i_m+1}^n + \lambda_{p,m} (|\delta u_{i_m-1}^n|^p - (\delta u_{i_m-1}^n)^p) u_{i_m-1}^n$$

$u_{i_m}^n$, $u_{i_m+1}^n$, $u_{i_m-1}^n$ együtthatói nemnegatívak, és összegük 1, így (2.4)-et kapjuk.

(3.3)-at írjuk ilyen alakban:

$$(3.4) \quad v_{i_m}^{n+1} = v_{i_m}^n + \sum_{m=1}^s (f_{2,m,p}(v_{i_m}^{n+1}) - f_{2,m,p}(v_{i_m}^n)) - (f_{3,m,p}(v_{i_m}^n) - f_{3,m,p}(v_{i_m-1}^n)) = \\ = v_{i_m}^n + \sum_{m=1}^s \alpha_{p,i_m+1} (v_{i_m}^{n+1} - v_{i_m}^n) - \beta_{p,i_m} (v_{i_m}^n - v_{i_m-1}^n),$$

ahol

$$\alpha_{m,i_m+1} = \frac{f_{2,m,p}(v_{i_m}^{n+1}) - f_{2,m,p}(v_{i_m}^n)}{v_{i_m}^{n+1} - v_{i_m}^n} \quad \text{és} \quad \beta_{p,i_m} = \frac{f_{3,m,p}(v_{i_m}^n) - f_{3,m,p}(v_{i_m-1}^n)}{v_{i_m}^n - v_{i_m-1}^n}.$$

Legyen $w_{i_m}^n = (v_{i_m}^n - v_{i_m-1}^n)/h_m$. (3.4)-ből következik, hogy:

$$w_{i_m}^{n+1} = w_{i_m}^n + \sum_{m=1}^s (\alpha_{p,i_m+1} w_{i_m}^{n+1} - \alpha_{p,i_m} w_{i_m}^n) - (\beta_{p,i_m} w_{i_m}^n - \beta_{p,i_m-1} w_{i_m-1}^n) = \\ = \sum_{m=1}^s \left(\frac{1}{s_p} - \alpha_{p,i_m} - \beta_{p,i_m} \right) w_{i_m}^n + \alpha_{p,i_m+1} w_{i_m}^{n+1} + \beta_{p,i_m-1} w_{i_m-1}^n.$$

Mivel $w_{i_m}^n$, $w_{i_m}^{n+1}$, $w_{i_m-1}^n$ együtthatói nemnegatívak:

$$|w_{i_m}^{n+1}| \leq \sum_{m=1}^s \left(\frac{1}{s_p} - \alpha_{p,i_m} - \beta_{p,i_m} \right) |w_{i_m}^n| + \alpha_{p,i_m+1} |w_{i_m}^{n+1}| + \beta_{p,i_m-1} |w_{i_m-1}^n|.$$

Majd összegezve:

$$\sum_{i_1, \dots, i_s} |w_{i_m}^{n+1}| \leq \sum_{i_1, \dots, i_s} |w_{i_m}^n|,$$

amiből (2.7) következik. Végül

$$h_1 h_2 \dots h_s \sum_{i_1, \dots, i_s} (u_{i_m}^{n+1} - u_{i_m}^n) / k = h_1 h_2 \dots h_s \sum_{i_1, \dots, i_s} \sum_{m=1}^{s_p} |D_{m,p+1} u_{i_m}^n| \leq \\ \leq h_1 h_2 \dots h_s \sum_{i_1, \dots, i_s} \sum_{m=1}^{s_p} c_{m,p+1} (nk) C_{1,m} (|\delta u_{i_m}^n|^p + (\delta u_{i_m-1}^n)^p) \leq 2s_p C C_1 C_2.$$

Páros p -re is hasonlóan megy a bizonyítás, hiszen ekkor $f_{3,m,p} \equiv 0$.

4. NUMERIKUS SÉMA AZ ÁLTALÁNOS (1.1) EGYENLETRE STABILITÁSI BECSLÉSEK

Legyen B_{h_m} ; $D_{m,p}$ az előzőekben definiált operátor, μ_p pozitív szám, és $k_p = \frac{k}{\mu_p}$. Ekkor adott u_{i_1, \dots, i_s}^n -ből minden i_1, \dots, i_s -re kiszámolható $u_{i_1, \dots, i_s}^{n+1}$ a közbeeső $u_{i_1, \dots, i_s}^{n,q_j}$ függvények segítségével:

$$\begin{aligned}
 & u_{i_1, \dots, i_s}^{n,0} \equiv u_{i_1, \dots, i_s}^n, \\
 & (u_{i_1, \dots, i_s}^{n,q_1+1} - u_{i_1, \dots, i_s}^{n,q_1})/k_1 - \sum_{m=1}^{\bar{s}} B_{h_m} u_{i_1, \dots, i_s}^{n,q_1} = 0, \quad 0 \leq q_1 \leq \mu_1 - 1, \\
 & (u_{i_1, \dots, i_s}^{n,q_2+1} - u_{i_1, \dots, i_s}^{n,q_2})/k_2 - \sum_{m=1}^{s_1} D_{m,1} u_{i_1, \dots, i_s}^{n,q_2} = 0, \quad \mu_1 \leq q_2 \leq \mu_1 + \mu_2 - 1, \\
 & \vdots \\
 & (u_{i_1, \dots, i_s}^{n,q_r+1} - u_{i_1, \dots, i_s}^{n,q_r})/k_r - \sum_{m=1}^{s_r-1} D_{m,r-1} u_{i_1, \dots, i_s}^{n,q_r} = 0, \quad \sum_{j=1}^{r-1} u_j \leq q_r \leq \sum_{j=1}^r u_j - 1, \\
 & (u_{i_1, \dots, i_s}^{n+1} - u_{i_1, \dots, i_s}^{n,q_r+1})/k - \sum_{m=1}^{s_r} D_{m,r} u_{i_1, \dots, i_s}^{n,q_r+1} = 0, \quad q_{r+1} = \sum_{j=1}^r u_j.
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

A sémát $u_{i_1, \dots, i_s}^0 = u^0(i_1 h_1, \dots, i_s h_s)$ -el kezdjük.

4.1 Tétel. Legyen u a (4.1) differencia rendszer megoldása. Tegyük fel:

$$(4.2) \quad 2M_m (k_1 / h_m^2) \bar{s} \leq 1 \quad m = 1, \dots, \bar{s};$$

$$(4.3) \quad \left(\frac{k_p}{h_m} \right) (p+1) C_{m,p+1} (C_{1,m})^p s_{p+1} \leq 1 \quad m = 1, \dots, s_{p+1}; \quad p = 0, \dots, r-2;$$

$$(4.4) \quad \left(\frac{k}{h_m} \right) r C_{m,r} (C_{1,m})^{r-1} s_r \leq 1 \quad m = 1, \dots, s_r.$$

Ekkor u kielégíti a (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) becsléseket, és

$$h_1 h_2 \dots h_s \sum_{i_1, \dots, i_s} |u_{i_1, \dots, i_s}^{n+1} - u_{i_1, \dots, i_s}^n| / k \leq C_7 \quad \text{minden } n\text{-re,}$$

ahol $C_7 = r C_6 + M \bar{s} C_3$, és $C_6 = \max_p C_{6,p}$.

Bizonyítás. A becslések (2.4)-től (2.7)-ig rögtön következnek a 2.1 és 3.1 tételből. Másrészt (jelölés: $u_{i_1, \dots, i_s}^n \equiv u_i^n$):

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} \right| &\leq \left| \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n, q_{r+1}}}{k} \right| + \frac{k_r}{k} \sum_{q_{p_m}} \left| \frac{u_i^{n, q_{r+1}} - u_i^{n, q_r}}{k_{p_m}} \right| + \dots + \frac{k_1}{k} \sum_{q_1} \left| \frac{u_i^{n, q_1+1} - u_i^{n, q_1}}{k_1} \right| = \\ &= \sum_{m=1}^{s_r} |D_{m,r} u_i^{n, q_{r+1}}| + \frac{1}{\mu_r} \sum_{q_r} \sum_{m=1}^{s_r-1} |D_{m,r-1} u_i^{n, q_r}| + \dots + \frac{1}{\mu_1} \sum_{q_1} \sum_{m=1}^{\bar{s}} |B_{h_m} u_i^{n, q_1}|. \end{aligned}$$

Innen

$$\begin{aligned} h_1, \dots, h_s \sum_{i_1, \dots, i_s} |(u_{i_1, \dots, i_s}^{n+1} - u_{i_1, \dots, i_s}^n)/k| &\leq C_{6,r} + \frac{1}{\mu_r} \sum_{q_r} C_{6,r-1} + \dots \\ &+ \frac{1}{\mu_1} \sum_{q_1} M \bar{s} C_3 \leq r C_6 + M \bar{s} C_3 = C_7. \end{aligned}$$

5. KOMPAKTSÁGI TÉTELEK

Differencia sémánk konvergenciájának bizonyításához szükségünk van két kompaktsági tételre.

5.1 Tétel. Legyen V a következő függvények tere:

$$V = \left\{ z(x,t) : z \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{H}); \frac{\partial z}{\partial x_i} \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{H}), i = 1, \dots, s; \frac{\partial z}{\partial t} \in \mathcal{L}^\infty(0, \infty; \mathcal{L}^1(\mathcal{H}^s)) \right\},$$

ahol általánosított deriváltokról van szó, ld. pl. [2]-ben.

A norma legyen:

$$\|z(x,t)\|_V = \|z\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathcal{H})} + \sum_{i=1}^s \left\| \frac{\partial z}{\partial x_i} \right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathcal{H})} + \left\| \frac{\partial z}{\partial t} \right\|_{\mathcal{L}^\infty(0, \infty; \mathcal{L}^1(\mathcal{H}^s))}.$$

Ekkor $V \subset C^0(\bar{\mathcal{H}})$, és V bármely végtelen korlátos részhalmazából kiválasztható egyenletesen konvergens részsorozat $\bar{\mathcal{H}}$ bármely korlátos résztartományán.

Bizonyítás. Legyen $\rho(x_1, \dots, x_s) \in C^\infty(\mathcal{H}^s)$, melyre $\rho(x) \geq 0$; $\rho(x) \equiv 0$, ha $|x_i| \geq 1$ ($i = 1, \dots, s$); $\int_{\mathcal{H}^s} \rho(x) dx_1, \dots, dx_s = 1$.

Legyen $\rho_n(x) = n\rho(nx_1, \dots, nx_s)$, és minden $z \in V$ -re

$$(z * \rho_n)(x,t) = \int_{\mathcal{H}^s} z(x_1 - \sigma_1, \dots, x_s - \sigma_s, t) \rho_n(\sigma_1, \dots, \sigma_s) d\sigma_1, \dots, d\sigma_s.$$

Ekkor $z * \rho_n \in C^0(\bar{\mathcal{H}})$ (felhasználva a Szoboljev-lemmát: [2], §.8.), ugyanis

$$(5.1) \quad \|\partial(z * \rho_n) / \partial x_i\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathcal{H})} \leq \|\partial z / \partial x_i\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathcal{H})} \quad i = 1, \dots, s;$$

és

$$(5.2) \quad \left\| \frac{\partial}{\partial t} (z * \rho_n) \right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathcal{H})} = \left\| \frac{\partial z}{\partial t} * \rho_n \right\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathcal{H})} \leq \|\rho_n\|_{\mathcal{L}^\infty} \left\| \frac{\partial z}{\partial t} \right\|_{\mathcal{L}^\infty(0, \infty; \mathcal{L}^1(\mathcal{H}^s))}$$

De $z * \rho_n$ \mathcal{H} -ban egyenletesen konvergál z -hez, mert z egyenletesen folytonos x_i -re nézve, így z folytonos. Legyen most \mathcal{F} a V -ben egyenletesen korlátos $z \in V$ függvényeknek egy végtelen családja. Ekkor z és $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, s$) egyenletesen korlátos $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{H})$ -ban, és így

kiválaszthatunk olyan z_r sorozatot, hogy $z_r \rightarrow Z$ és $\frac{\partial z_r}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial Z}{\partial x_i}$ az $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{H})$ gyenge* topológiájában, ahol Z egy bizonyos függvény.

Legyen G a \mathcal{H} tetszőleges résztartománya.

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \|z_r - Z\|_{\mathcal{L}^\infty(G)} &\leq \|z_r - z_r * \rho_n\|_{\mathcal{L}^\infty(G)} + \|z_r * \rho_n - Z * \rho_n\|_{\mathcal{L}^\infty(G)} + \\ &+ \|Z * \rho_n - Z\|_{\mathcal{L}^\infty(G)}. \end{aligned}$$

Legyen $\epsilon > 0$ adott. A z_r és Z függvények ekvifolytonosak x_i -re nézve, így választhatunk olyan n -et, hogy

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \|z_r - z_r * \rho_n\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathcal{H})} &< \epsilon/3 \quad \text{minden } r\text{-re,} \\ \|Z - Z * \rho_n\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathcal{H})} &< \epsilon/3. \end{aligned}$$

Legyen n fix, ekkor (5.1) és (5.2) miatt a $z_r * \rho_n$ függvények ekvifolytonosak \mathcal{H} -ban (x_i -re és t -re nézve). Így kiválaszthatunk egy részsorozatot, még mindig $z * \rho_n$ -val jelölve, amely egyenletesen konvergál G -ben, amint $r \rightarrow \infty$. A határérték szükségképpen $Z * \rho_n$, ezért

$$(5.5) \quad \|z_r * \rho_n - Z * \rho_n\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathcal{H})} < \epsilon/3 \quad \text{elég nagy } r\text{-re.}$$

A tétel most már azonnal következik (5.3), (5.4) és (5.5)-ből. A következő tétel Aubin [3] egyik tételének speciális esete.

5.2 Tétel. Legyen $\Omega^s \subset \mathcal{H}^s$ s dimenziós korlátos tartomány, $T > 0$ véges szám, $A \equiv \Omega^s \times (0, T)$. Legyen W a következő függvények tere:

$$W = \left\{ z(x, t) : z \in \mathcal{L}^\infty(A), \forall x_k \in \mathcal{L}^\infty(0, T; \mathcal{L}^1(\bar{\mathcal{H}}_k)); \frac{\partial z}{\partial t} \in \mathcal{L}^\infty(0, T; H^{-2}(\Omega^s)); k = 1, \dots, s \right\},$$

ahol $H^{-2}(\Omega^s)$ az a Szoboljev-tér, amely a $H_0^2(\Omega^s)$ duálisa. Definiáljuk a következő normát:

$$\|z(x,t)\|_W = \|z\|_{\mathcal{L}^\infty(A)} + \sum_{k=1}^s \|\text{Var}_x z\|_{\mathcal{L}^\infty(0,T; \mathcal{L}^1(\bar{\mathcal{H}}_k))} + \left\| \frac{\partial z}{\partial t} \right\|_{\mathcal{L}^\infty(0,T; H^{-2}(\Omega^s))}.$$

Ekkor W bármely végtelen korlátos részhalmazából kiválasztható $\mathcal{L}^p(A)$ -ban erősen konvergens részsorozat, ahol $1 \leq p < \infty$ tetszőleges.

6. KONVERGENCIA

Tegyük fel, hogy k_1, \dots, k_p, k a h_1, \dots, h_s -nek függvénye. Jelöljük $u_h \equiv u_{i_1, \dots, i_s}^n$ -el a (4.1) véges differenciarendszer megoldását, és terjesszük ki azt az egész \mathcal{H} féltérre a következőképpen. Tekintsük az s dimenziós $I((i_1 + \Theta_1)h_1, \dots, (i_s + \Theta_s)h_s)$ (ahol $\Theta_1, \dots, \Theta_s \in [0,1]$) kockát. Válasszuk ki a kocka $C(i_1 h_1, \dots, i_s h_s)$ csúcsát. Vegyük a kocka összes lapját, melynek nem csúcsa C . Ekkor C és ezek a lapok sorra s -dimenziós zárt szimplexeket alkotnak, melyeknek nincs közös belső pontjuk, és egyesítésük az egész kocka. Ismeretes az is, hogy egy szimplex bármely belső (vagy határ-) pontja súlyponti koordináták segítségével egyértelműen kifejezhető a szimplex csúcsaival. Ily módon ha I egy pontja az S_j szimplexbe (vagy határára) esik, akkor legyen

$$u_h((i_1 + \Theta_1)h_1, \dots, (i_s + \Theta_s)h_s, (n + \Theta')k) = \sum_{j=1}^{s+1} \alpha_j u_j(C_j, nk),$$

ahol $\sum_{j=1}^{s+1} \alpha_j = 1$, $0 \leq \alpha_j \leq 1$, α_j lineáris a Θ_j -ekben, valamint C_j -k az S_j szimplex csúcsai; $\Theta' \in [0,1]$; azaz u_h darabonként lineáris x -ben, konstans t -ben.

6.1 Tétel. Legyenek $\{h_1\}, \dots, \{h_s\}$ 0-hoz tartó sorozatok. Tegyük fel, hogy a (4.2), (4.3), (4.4) feltételek kielégülnek minden h_m -re ($m = 1, \dots, s$). Ekkor létezik $\{h_1\}$ -nek, \dots , $\{h_s\}$ -nek olyan részsorozata, hogy u_h egyenletesen konvergál bármely $G \subset \mathcal{H}$ korlátos rész-

tartományon az (1.1)-(1.2) probléma egy U megoldásához, és $\frac{\partial u_h}{\partial x_m}$ konvergál $\frac{\partial U}{\partial x_m}$ -hez

$\mathcal{L}^p(G)$ -ben erősen ($m = 1, \dots, s$) minden $1 \leq p < \infty$ -re.

A tételt lépésenként bizonyítjuk. Először néhány lemmát igazolunk.

6.1 Lemma. Definiáljuk \tilde{u}_h -t a következőképpen:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_h(x, (n + \Theta/2)k) &= u_h(x, (n + \Theta/2)k) = u_h(x, nk), \\ \tilde{u}_h\left(x, \left(n + \frac{1}{2} + \frac{\Theta}{2}\right)k\right) &= (1 - \Theta)u_h(x, nk) + \Theta u_h(x, (n+1)k). \end{aligned}$$

$0 \leq \Theta < 1$ -re. Ekkor létezik $\{h_1\}$ -nek, \dots , $\{h_s\}$ -nek olyan részsorozata, és olyan U függvény, hogy $U \in C^0(\bar{\mathcal{H}}) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathcal{H})$, $U(x,0) = u^0(x)$ minden $x \in \mathcal{H}^s$ -re, $\frac{\partial U}{\partial x_m} \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{H})$, $\tilde{u}_h \rightarrow U$

G -ben egyenletesen, és $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_m} \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial x_m}$ $\mathcal{L}^p(G)$ -ben minden korlátos $G \subset \mathcal{H}$ -re.

Bizonyítás. A 4.1 tétel becsléseit írhatjuk ilyen formában:

$$(6.1) \quad \|\tilde{u}_h\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathcal{H})} \leq C_0,$$

$$(6.2) \quad \|\partial \tilde{u}_h / \partial x_m\|_{\mathcal{L}^\infty(\mathcal{H})} \leq C_{1,m},$$

$$(6.3) \quad \|\partial \tilde{u}_h / \partial x_m\|_{\mathcal{L}^\infty(0,\infty; \mathcal{L}^p(\mathcal{H}^s))} \leq C_{2,m,p},$$

$$(6.4) \quad \left\| \text{Var}_{x_m} \left(\frac{\partial u_h}{\partial x_m} \right) \right\|_{\mathcal{L}^\infty(0,\infty; \mathcal{L}^1(\bar{\mathcal{H}}_m))} \leq C_{3,m},$$

$$(6.5) \quad \|\partial \tilde{u}_h / \partial t\|_{\mathcal{L}^\infty(0,\infty; \mathcal{L}^1(\mathcal{H}^s))} \leq 2C_7.$$

(6.5)-ből következik, hogy

$$(6.6) \quad \left\| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{u}_h \right) \right\|_{\mathcal{L}^\infty(0,\infty; H^{-2}(\Omega^s))} \leq C'_7(\Omega^s),$$

ahol $\Omega^s \subset \mathcal{H}^s$ tetszőleges véges tartomány, és $C'_7(\Omega^s)$ egy Ω^s -től függő konstans (mert

$$\left\| \frac{\partial z}{\partial x_m} \right\|_{H^{-2}(\Omega)} \leq C'(\Omega) \|z\|_{\mathcal{L}^1(\mathcal{H}^s)}, \text{ minden } z \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H}^s) \text{ esetén.})$$

(6.1), (6.2) és (6.5) alapján az 5.1 tételből következik, hogy létezik a $\{h_1\}$ -nek, ..., $\{h_s\}$ -nek olyan részsorozata és egy olyan $U \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{H}) \cap C^0(\bar{\mathcal{H}})$, hogy \tilde{u}_h konvergál U -hoz egyenletesen a G -ben.

(6.2), (6.4) és (6.6)-ból az 5.2 tétel miatt következik, hogy létezik az előbbi részsorozatnak

egy-egy olyan részsorozata, hogy $\frac{\partial \tilde{u}_h}{\partial x_m}$ konvergál $\frac{\partial U}{\partial x_m} \in \mathcal{L}^\infty(\mathcal{H})$ -hez erősen az $\mathcal{L}^p(G)$ -ben.

(A második határérték szükségképpen $\frac{\partial U}{\partial x_m}$, mivel \tilde{u}_h -nak U -hoz való konvergenciájából kö-

vetkezik $\frac{\partial \tilde{u}_h}{\partial x_m}$ -nek $\frac{\partial U}{\partial x_m}$ -hez való konvergenciája a disztribúciók terében.) Az a tény, hogy U

kielégíti az (1.2) kezdeti feltételt, következik az egyenletes konvergenciából.

Az alábbiakban mindig a kiválasztott részsorozatokhoz tartozó h_m értékeket fogjuk tekinteni.

6.2 Lemma. $u_h \longrightarrow U$ egyenletesen G -ben, és $\frac{\partial u}{\partial x_m} \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial x_m}$ ($m = 1, \dots, s$) $\mathcal{L}^p(G)$ -ben.

Bizonyítás. Legyen $\tau_{k/2}$ az eltolási operátor: $\tau_{k/2} \Psi(x, t) = \Psi\left(x, t + \frac{k}{2}\right)$,

$$\|u_h - U\|_B \leq \|\tilde{u}_h - U\|_B + \|\tilde{u}_h - \tau_{k/2} U\|_B \leq 2\|\tilde{u}_h - U\|_B + \|U - \tau_{k/2} U\|_B,$$

ahol

$$\|\Psi\|_B = \max_G |\Psi(x,t)| + \sum_{m=1}^s \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial x_m} \right\|_{\mathcal{L}^p(G)}.$$

De $\|\tilde{u}_h - U\|_B \rightarrow 0$ a 6.1 lemma szerint, és $\|U - \tau_{k/2} U\|_B \rightarrow 0$, mert U és $\frac{\partial U}{\partial x_m}$ is folytonos $\mathcal{L}^p(G)$ -ben (ld. Szoboljev [2]).

6.3 Lemma. *Terjesszük ki az $u_{i_1, \dots, i_s}^{n, q_k}$ függvényeket az egész \mathcal{H} feltérre a 6. pont elején látott módon:*

$$u_h^{(q_i)}((i_1 + \Theta_1)h_1, \dots, (i_s + \Theta_s)h_s, (n + \Theta')k) = \sum_{j=1}^{s+1} \alpha_j u_j^{n, q_i},$$

ahol $\Theta_1, \dots, \Theta_s, \Theta' \in [0, 1]$, $\sum_{j=1}^{s+1} \alpha_j = 1$, $0 \leq \alpha_j \leq 1$.

Ekkor $\max_{0 \leq q_k \leq q_{r+1}} \|u_h^{(q_k)} - U\|_B \rightarrow 0$, ha $h_m \rightarrow 0$; $m = 1, \dots, s$.

Bizonyítás. Legyen az $\tilde{u}_h^{(q_k)}$ függvény a következő:

$$\tilde{u}_h^{(q_k)}(x, t) = u_h^{(q_k)}(x, t) = u_h^{(q_k)}(x, nk), \text{ ha } \left(n + \frac{1}{3}\right)k \leq t \leq \left(n + \frac{2}{3}\right)k,$$

$$\tilde{u}_h^{(q_k)}(x, (n + \Theta/3)k) = (1 - \Theta)u_h^{(q_k)}(x, nk) + \Theta u_h^{(q_k)}(x, (n+1)k),$$

$$\tilde{u}_h^{(q_k)}\left(x, \left(n + \frac{2}{3} + \frac{\Theta}{3}\right)k\right) = (1 - \Theta)u_h^{(q_k)}(x, nk) + \Theta u_h^{(q_k)}(x, (n+1)k),$$

ahol $0 \leq \Theta < 1$.

Az $\tilde{u}_h^{(q_i)}$ függvények kielégítik ugyanazokat a becsléseket mint \tilde{u}_h , azaz a (6.1)-(6.5) becsléseket ($2C_7$ helyett $3C_7$ -el).

Legyen d olyan egész, hogy $1 \leq d \leq q_{r+1}$, és

$$\|\tilde{u}_h^{(d)} - U\|_B = \sup_{1 \leq q_i \leq q_{r+1}} \|\tilde{u}_h^{(q_i)} - U\|_B.$$

Az 5.1 és 5.2 tételből következik, hogy létezik olyan U^* függvény, amely ugyanolyan tulajdonságú, mint U , és amelyre $\|\tilde{u}_h^{(d)} - U^*\|_B \rightarrow 0$ a $\{h_1\}, \dots, \{h_s\}$ bizonyos részsorozatára. De $u_h(x, nk) = \tilde{u}_h^{(d)}(x, nk)$ minden $x \in \mathcal{H}^s$ és minden n esetén, amiből a 6.2 lemma szerint $U = U^*$. Hasonlóan, mint a 6.2 lemma bizonyításánál, kapjuk

$$\|u_h^{(d)} - U\| \leq 3\|\tilde{u}_h^{(d)} - U\| + \|U - \tau_{k/3} U\| + \|U - \tau_{-k/3} U\| \rightarrow 0.$$

A 6.1 tétel bizonyítása. Most már csak azt kell igazolni, hogy a 6.1, 6.2 és 6.3 lemmákban előállított U függvény kielégíti az (1.3) integrál összefüggést. Összeadva a (4.1) egyenleteket, kapjuk $(u_i^{n, q_i} \equiv u_{i_1, \dots, i_s}^{n, q_i}, \Phi_i^n \equiv \Phi_{i_1, \dots, i_s}^n)$.

$$(6.7) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{1}{\mu_1} \sum_{q_1=0}^{\mu_1-1} \sum_{m=1}^s B_{h_m} u_i^{n,q_1} - \frac{1}{\mu_2} \sum_{q_2=0}^{\mu_2-1} \sum_{m=1}^s D_{m,1} u_i^{n,q_2} - \dots - \sum_{q_r=0}^{\mu_r-1} \sum_{m=1}^s D_{m,r} u_i^{n,q_r+1}.$$

Legyen $\Phi \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$. Szorozzuk meg (6.7)-et $h_1, \dots, h_s k \Phi_{i_1, \dots, i_s}^n$ -el és összegezzünk minden i_j -re és n -re, parciális összegzést is alkalmazva kapjuk:

$$\begin{aligned} & - h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} u_{i_1, \dots, i_s}^n \frac{\Phi_{i_1, \dots, i_s}^n - \Phi_{i_1, \dots, i_s}^{n-1}}{k} + \\ & + \frac{1}{\mu_1} \sum_{q_1=0}^{\mu_1-1} h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} \sum_{m=1}^s f_{m, i_m}^{n, q_1} \delta u_{i_m}^{n, q_1} \delta \Phi_{i_m}^n + \\ & + \frac{1}{\mu_1} \sum_{q=0}^{\mu_1-1} h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} \sum_{m=1}^s \Phi_{i_m}^{n+1} \delta f_{m, i_m}^{n, q_1} \delta u_{i_m}^{n, q_1} + \\ & + \sum_{p=0}^{r-2} \frac{1}{\mu_{p+2}} \sum_{q_{p+2}}^{\mu_{p+2}-1} \sum_{m=1}^s h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} \left\{ \frac{c_{m, p+1}(nk)}{2} [(\Phi_{i_m}^n + \Phi_{i_m}^{n+1}) \cdot (\delta u_{i_m}^{n, q_{p+1}})^{p+1} + \right. \\ & \left. + h_m \delta u_{i_m}^{n, q_{p+1}} |\delta u_{i_m}^{n, q_{p+1}}|^p \delta \Phi_{i_m}^n] \right\} + \sum_{m=1}^s h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} \left\{ \frac{c_{m, q_r+1}(nk)}{2} [(\Phi_{i_m}^n + \Phi_{i_m}^{n+1}) \cdot \right. \\ & \left. \cdot (\delta u_{i_m}^{n, q_r+1})^r + h_m \delta u_{i_m}^{n, q_r+1} |\delta u_{i_m}^{n, q_r+1}|^{r-1} \delta \Phi_{i_m}^n] \right\}. \end{aligned}$$

Ekkor a tétel következik a következő lemmából:

6.4 Lemma. Ha $h_1 \rightarrow 0, \dots, h_s \rightarrow 0$, akkor

$$(6.8) \quad h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} u_{i_1, \dots, i_s}^n \frac{\Phi_{i_1, \dots, i_s}^n - \Phi_{i_1, \dots, i_s}^{n-1}}{k} \rightarrow \int_{\mathcal{H}} U \frac{\partial \Phi}{\partial t},$$

$$(6.9) \quad h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} (\Phi_{i_m}^n + \Phi_{i_m}^{n+1}) (\delta u_{i_m}^{n, q_j})^{p+1} \rightarrow 2 \int_{\mathcal{H}} \Phi \left(\frac{\partial U}{\partial x_m} \right)^{p+1},$$

$$(6.10) \quad h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} h_m \delta u_{i_m}^{n, q_j} |\delta u_{i_m}^{n, q_j}|^p \delta \Phi_{i_m}^n \rightarrow 0,$$

$$(6.11) \quad h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} f_{m, i_m}^{n, q_1} \delta u_{i_m}^{n, q_1} \delta \Phi_{i_m}^n \rightarrow \int_{\mathcal{H}} f_m \frac{\partial U}{\partial x_m} \frac{\partial \Phi}{\partial x_m},$$

$$(6.12) \quad h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} \Phi_{i_m+1}^n \delta f_{m, i_m}^{n, q_1} \delta u_{i_m}^n \longrightarrow \int_{\mathcal{X}} \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_m} u_{x_m} + \frac{\partial f_m}{\partial u} (u_{x_m})^2 \right) \Phi +$$

$$+ \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \left[\frac{\partial^k f_m}{\partial u_{x_m}^k} (u_{x_m})^{k+1} + \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial^k f_m}{\partial u_{x_m}^k} \right) \right) (u_{x_m})^{k+1} \Phi + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^k f_m}{\partial u_{x_m}^k} \right) \right) (u_{x_m})^{k+2} \Phi \right] \right\}.$$

Bizonyítás. Ezeknek az állításoknak igazolása hasonlóan történik, így közülük csak a legnehezebbet, a (6.12)-t mutatjuk meg.

A 6.3 lemma szerint minden $u_h^{(q_i)}$ függvény konvergál U -hoz, q_i -ben egyenletesen, ugyanolyan módon, mint u_h , ezért (6.12)-t elég bizonyítani $u_h^{(q_i)}$ helyett u_h -ra. Legyen

$$X \equiv h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} \Phi_{i_1+1, \dots, i_s+1}^n \delta f_{m, i_m}^n \delta u_{i_1, \dots, i_s}^n \equiv X_1 + X_2 + X_3,$$

ahol

$$X_1 \equiv h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} \Phi_{i+1}^n \left(\frac{f_m(x_{i_1}, \dots, x_{i_m+1}, \dots, x_{i_s}, t^n, u_{i_m+1}^n, \delta u_{i_m+1}^n)}{h_m} - \right.$$

$$\left. - \frac{f_m(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}, \dots, x_{i_s}, t^n, u_{i_m}^n, \delta u_{i_m}^n)}{h_m} \right) \frac{u_{i_m+1}^n - u_{i_m}^n}{h_m},$$

$$X_2 \equiv h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} \Phi_{i+1}^n \left(\frac{f_m(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}, \dots, x_{i_s}, t^n, u_{i_m+1}^n, \delta u_{i_m+1}^n)}{h_m} - \right.$$

$$\left. - \frac{f_m(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}, \dots, x_{i_s}, t^n, u_{i_m}^n, \delta u_{i_m}^n)}{h_m} \right) \frac{u_{i_m+1}^n - u_{i_m}^n}{h_m},$$

$$X_3 \equiv h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} \Phi_{i+1}^n \left(\frac{f_m(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}, \dots, x_{i_s}, t^n, u_{i_m}^n, \delta u_{i_m}^n)}{h_m} - \right.$$

$$\left. - \frac{f_m(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}, \dots, x_{i_s}, t^n, u_{i_m}^n, \delta u_{i_m}^n)}{h_m} \right) \frac{u_{i_m+1}^n - u_{i_m}^n}{h_m},$$

ahol $x_{i_j} = i_j h_j$, $x_{i_j+1} = (i_j + 1) h_j$, $t^n = nk$, $\Phi_i^n \equiv \Phi_{i_1, \dots, i_s}^n$.

De $\Phi_{i_1, \dots, i_m+1, \dots, i_s}^n \equiv \Phi_{i_1, \dots, i_m, \dots, i_s}^n + O(h_m)$,

$$\frac{f_m(x_{i_1}, \dots, x_{i_m+1}, \dots, x_{i_s}, t^n, u_{i_m+1}^n, \delta u_{i_m+1}^n) - f_m(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}, \dots, x_{i_s}, t^n, u_{i_m}^n, \delta u_{i_m}^n)}{h_m} =$$

$$= \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}, \dots, x_{i_s}, t^n, u_{i_m}^n, \delta u_{i_m}^n) + \epsilon(h_m),$$

$$\frac{f_m(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}, \dots, x_{i_s}, t^n, u_{i_m+1}^n, \delta u_{i_m+1}^n) - f_m(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}, \dots, x_{i_s}, t^n, u_{i_m}^n, \delta u_{i_m}^n)}{h_m} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}, \dots, x_{i_s}, t^n, u_{i_m}^n, \delta u_{i_m}^n) \frac{u_{i_m+1}^n - u_{i_m}^n}{h_m} + \underline{\epsilon}(h_m),$$

ahol $\epsilon(h_m)$ és $\underline{\epsilon}(h_m) \rightarrow 0$ egyenletesen a Φ tartóján, amint $h_m \rightarrow 0$ (mert $\frac{\partial}{\partial x_m} f_m$, $\frac{\partial}{\partial u} f_m$ folytonos, és $(u_{i_m+1}^n - u_{i_m}^n)/h_m$ egyenletesen korlátos). Ilymódon

$$(6.14) \quad X_1 = h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} (F_{h_m})_{i_m}^n \frac{u_{i_m+1}^n - u_{i_m}^n}{h_m} + \bar{\epsilon}(h_m),$$

$$(6.15) \quad X_2 = h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} (G_{h_m})_{i_m}^n \left(\frac{u_{i_m+1}^n - u_{i_m}^n}{h_m} \right)^2 + \epsilon'(h_m),$$

ahol $F_{h_m}(x, t) = \Phi(x, t) \frac{\partial}{\partial x_m} f_m(x, t, u_h(x, t), \delta u_h(x, t))$,

$$G_{h_m}(x, t) = \Phi(x, t) \frac{\partial}{\partial u} f_m(x, t, u_h(x, t), \delta u_h(x, t)).$$

Legyen $Q_{i_m}^n$ a következő kocka: $i_m h_m \leq x_{i_m} \leq (i_m + 1)h_m$, $m = 1, \dots, s$;
 $nk \leq t \leq (n+1)k$. A közéérték szerint

$$\int_{Q_i^n} F_{h_m} \frac{\partial u_h}{\partial x_m} = F_{h_m}(\xi_{i_m}^n) \int_{Q_i^n} \frac{\partial u_h}{\partial x_m} = h_1 h_2 \dots h_s k F_{h_m}(\xi_{i_m}^n) \frac{u_{i_m+1}^n - u_{i_m}^n}{h_m},$$

ahol $\xi_i^n \equiv \xi_{i_1, \dots, i_s}^n \in Q_{i_m}^n$. Így

$$(6.16) \quad \int_x F_{h_m} \frac{\partial u_h}{\partial x_m} = h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} F_{h_m}(\xi_{i_m}^n) \frac{u_{i_m+1}^n - u_{i_m}^n}{h_m}.$$

A 6.2 lemma szerint F_{h_m} , illetve G_{h_m} $\mathcal{L}^p(G)$ -ben konvergál a következő folytonos függvényhez:

$$F_m(x, t) = \Phi(x, t) \frac{\partial}{\partial x_m} f_m \left(x, t, U(x, t), \frac{\partial U(x, t)}{\partial x_m} \right) \text{-hez, illetve}$$

$$G_m(x, t) = \Phi(x, t) \frac{\partial}{\partial U} f_m \left(x, t, U(x, t), \frac{\partial U(x, t)}{\partial x_m} \right) \text{-hez.}$$

Ha $h_m \rightarrow 0$; $m = 1, \dots, s$, akkor $|F_{h_m}(\xi_{i_m}^n) - (F_{h_m})_{i_m}^n| \rightarrow 0$ $\mathcal{L}^p(G)$ -ben.

Összehasonlítva (6.14)-et és (6.16)-ot kapjuk:

$$X_1 = \int_{\mathcal{X}} F_{h_m} \frac{\partial u_h}{\partial x_m} + \bar{\epsilon}(h_m).$$

Hasonló módon:

$$X_2 = \int_{\mathcal{X}} G_{h_m} \left(\frac{\partial u_h}{\partial x_m} \right)^2 + \epsilon'(h_m).$$

Mármost $F_{h_m} \rightarrow F_m$, és $\frac{\partial u_h}{\partial x_m} \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_m}$ erősen $\mathcal{L}^p(S)$ -ben, ahol S a Φ tartója. Így

$X_1 \rightarrow \int_{\mathcal{X}} F_m \frac{\partial U}{\partial x_m}$. Másrészt $\frac{\partial u_h}{\partial x_m}$ $\mathcal{L}^p(S)$ -beli erős konvergenciájából – minden p -re, ha

$1 \leq p < \infty$ – következik $\left(\frac{\partial u_h}{\partial x_m} \right)^j$ erős konvergenciája $\left(\frac{\partial U}{\partial x_m} \right)^j$ -hez $\mathcal{L}^p(S)$ -ben, ahol

$j \geq 2$. Így $X_2 \rightarrow \int_{\mathcal{X}} G_m \left(\frac{\partial U}{\partial x_m} \right)^2$.

A továbbiakban felhasználjuk a következő összefüggést:

$$(6.17) \quad \delta((\delta u_i)^r) = r(\delta u_i)^{r-1} \delta^2 u_i + \sum_{k=1}^r c_k (h \delta^2 u_i)^{\underline{k}},$$

ahol a $|c_k| - k$ korlátosak, mivel $|\delta u_i|$ korlátos. Ugyanis

$$\delta((\delta u_i)^r) = \frac{\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right)^r - \left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right)^r}{h} = \delta^2 u_i (a^{r-1} + a^{r-2} b + \dots + ab^{r-2} + b^{r-1}),$$

ahol

$$a = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad b = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} = a - h \delta^2 u_i.$$

Esetünkben

$$\frac{\partial}{\partial x_m} u_h((i_1 + \Theta_1)h_1, \dots, (i_m + \Theta_m)h_m, \dots, (i_s + \Theta_s)h_s) = \frac{u_{i_m+1}^n - u_{i_m}^n}{h_m},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_m} u_h((i_1 + \Theta_1)h_1, \dots, (i_m + \Theta_m - 1)h_m, \dots, (i_s + \Theta_s)h_s) = \frac{u_{i_m+1}^n - u_{i_m}^n}{h_m}.$$

Mivel $\frac{\partial u_h}{\partial x_m} \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_m}$ $\mathcal{L}^p(G)$ -ben, így $h_m \delta^2 u_{i_m} \rightarrow 0$ $\mathcal{L}^p(G)$ -ben.

$$\frac{f_m(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}, t^n, u_{i_m}^n, \delta u_{i_m+1}^n) - f_m(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}, t^n, u_{i_m}^n, \delta u_{i_m}^n)}{h_m} = \frac{\partial}{\partial u_{x_m}} f_m(\dots, \delta u_{i_m}^n) \delta^2 u_{i_m}^n +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial u_{x_m}^2} f_m(\dots, \xi_{i_m}^n) h_m \delta^2 u_{i_m}^n.$$

Vegyük figyelembe, hogy

$$\delta \left(\frac{\partial f_m}{\partial u_{x_m}} \cdot (\delta u_{i_m}^n)^2 \right) = \delta \frac{\partial f_m}{\partial u_{x_m}} \cdot (\delta u_{i_m}^n)^2 + \frac{\partial f_m}{\partial u_{x_m}} (2(\delta u_{i_m}^n) \delta^2 u_{i_m}^n + \epsilon_1(h_m)),$$

ahol

$$\epsilon_1(h_m) \rightarrow 0 \quad \mathcal{L}^p(G)\text{-ben.}$$

Ekkor parciális összegzés után így alakul X_3 :

$$\frac{1}{2} h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} \frac{\partial f_m}{\partial x_m} (\delta u_{i_m}^n)^2 \delta \Phi_{i_m}^n - \frac{1}{2} h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} \left(\frac{\partial^2 f_m}{\partial u_{x_m} \partial x_m} (\delta u_{i_m}^n)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f_m}{\partial u_{x_m} \partial u} (\delta u_{i_m}^n)^3 \right) \Phi_i^n - \frac{1}{2} h_1 h_2 \dots h_s k \sum_{i_1, \dots, i_s, n} \frac{\partial^2 f_m}{\partial u_{x_m}^2} (\delta u_{i_m}^n)^2 (\delta^2 u_{i_m}^n) \Phi_i^n + \epsilon_2(h_m),$$

ahol $\epsilon_2(h_m)$ -mel a fellépő maradéktag-összegeket jelöltük, melyre $\epsilon_2(h_m) \rightarrow 0$ $\mathcal{L}^p(G)$ -ben.

A fenti kifejezés első két tagja esetén a konvergencia bizonyítása az előzőekhez hasonlóan történik. Az utolsó tag esetében a (6.17) összefüggést alkalmazva a már ismert eljárást hajtjuk vég-

re; és mindezt addig ismételjük, amíg $\frac{\partial^n f_m}{\partial u_{x_m}^n} \equiv 0$ lesz. Ilymódon (6.12) bizonyítását befejeztük.

Az (1.1)-(1.2) feladat általánosításáról, a konvergencia rendjéről, hibabecslésről egy későbbi cikkben lesz szó.

Irodalom

- [1] Gravelleau, J.L. and Jamet, P., "A finite difference approach to some degenerate nonlinear parabolic equations" SIAM J. Appl. Math. 20 (March 1971.) 199-223.
- [2] Соболев, С.Л., Некоторые приложения функционального анализа в математической физике (Москва, 1962)
- [3] Aubin, J.P., "Un théorème de compacité" C. R. Acad. Sci. Paris. 256 (1963) 5042-5044.

Summary

A convergent finite difference scheme is described for some degenerate nonlinear parabolic equation in several variables.

In the paper [1] J.L. Gravelleau and P. Jamet give the numerical solution of the equation

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t,u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

with the initial condition

$$(2) \quad u(x,0) = u^0(x)$$

if $f(x,t,u) \geq 0$, $a \geq 0$ is a constant, x is one-dimensional.

In this article – developing the methods adopted in [1] we give an explicit finite difference approximation for the equation (1.1)-(1.2) which is more general than (1)-(2).

At first we get stability estimates for the difference scheme based on the splitting of the operator A . Then we prove the convergence of the method by means of two compactness theorems.

Р е з ю м е

Сходящийся метод конечных разностей для некоторого многомерного нелинейного вырожденного уравнения параболического типа

В работе [1] Гравело и Жаме рассматривают численное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x, t, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$

при начальном условии $u(x, 0) = u^0(x)$, где $f(x, t, u) \geq 0$, $a \geq 0$ константа, x одномерно. Продолжая применённые в [1] методы, в этой статье даётся явное конечно-разностное приближение для более общего уравнения (1.1) – (1.2).

Получены оценки устойчивости разностной схемы, они основываются на расщеплении оператора Au . Далее, с помощью двух теорем компактности доказывается сходимость метода.