MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, **Közlemények** 11. (1973)

ELSŐRENDŰ AUTÓREGRESSZIÓS FOLYAMAT PARAMÉTERBECSLÉSÉRŐL

Ruda Mihály

J.E. REEVES [6] dolgozatában a

$$(1) \qquad \lambda = \sum_{i=2}^{N} Y_i Y_{i-1} / \sum_{i=2}^{N} Y_{i-1}^2$$

becslés eloszlását vizsgálja az

$$(2) \qquad Y_i = \lambda Y_{i-1} + E_i , \qquad i = 2, 3, \ldots, N ,$$

folyamat Y_i, $i = 1, 2, \ldots, N$ értékeinek ismeretében, ahol Y_1 Gauss eloszlású változó, λ tetszőleges valós szám, E_i független normális sorozat.

Speciális eredmények régebbről ismertek: $\lambda = 0$ értékre ANDERSON [1] adta meg $\hat{\lambda}$ eloszlását. Az N-nel asszimptotikusan végtelenhez tartva $|\lambda| < 1$ értékekre MANN és WALD [5] szerint $\hat{\lambda}$ eloszlása $N(\lambda, (1 - \lambda^2)/N)$, a $|\lambda| > 1$ értékekre viszont WHITE [8] szerint $\hat{\lambda}$ eloszlása olyan, hogy $|\lambda|^N (\hat{\lambda} - \lambda)/(\lambda^2 - 1)$ Cauchy eloszlású.

J.E. REEVES dolgozatában kis elemszámú megfigyelés mellett kívánja a $\hat{\lambda}$ becslés eloszlását meghatározni tetszőleges valós λ érték mellett. Igy többek között a (2) folyamat stacionaritásának vizsgálata is lehetővé válik.

Az eloszlásfüggvény értékét az $x = (1 + \lambda^2)/2\lambda$ pontban pontosan meghatározza, más helyeken azonban csak közelítő megoldást ad χ^2 változók lineáris kombinációinak becslésével, felhasználva SATTERTHWAITE [7] és IMHOF [4] eredményeit.

Ezekre a bonyolult számításokra a $|\lambda| < 1$ (stacionárius) esetben azonban nincs szükség, mivel a λ egy más becslésének eloszlása már táblázatos formában rendelkezésre áll; ld. ARATÓ és BENCZÚR [2], [3]. Ezekben a dolgozatokban ([2], [3]) a paraméterbecslés eloszlásának meghatározása nem a diszkrét folyamat vizsgálatával, hanem a

$$d\xi(t) = -\rho\xi(t)dt + dw(t)$$

sztochasztikus differenciálegyenletnek eleget tevő stacionárius $(\rho > 0)$, Gauss-Markov folyamat ρ paraméterbecslés eloszlásának meghatározásával történik, ahol $0 \leqslant t \leqslant T$, $W(t)$ standard Wiener folyamat: $Mdw = 0$, $M(dw)^2 = \sigma_w^2 dt$, tehát $M\xi(t) = 0$, $M\xi(S)\xi(S + t) = \sigma_\xi^2 e^{-\rho|t|}$ $\sigma_\xi^2 = \sigma_w^2/2\rho$).

A ρ paraméter maximum likelihood becslésének pontos eloszlását (a ρ függvényben) ARATÓ és BENCZÚR [2] adja meg (a függvényértékek táblázatával együtt). A diszkrét folyamatot a $0 \leqslant t \leqslant T$ intervallumon megfigyelt folytonos folyamat $i \cdot \delta$ $(i = 0, 1, \ldots, N - 1$, $(N - 1) \cdot \delta = T)$ pontokban felvett értékeinek tekintve, a λ paramétert a

$$(3) \qquad \lambda = e^{-\rho \cdot \delta} \qquad (\text{ha } T = 1, \ \lambda = e^{-\rho/N})$$

összefüggésből nyerhetjük.

Mivel diszkrét esetben csak véges sok megfigyelésünk van, és nem egy folytonos realizációból becsüljük a λ paramétert, ezért a folytonos folyamat esetének megfelelő pontos eloszlás diszkrét sorozatra nem adható meg. A folytonos folyamatra kapott becslés alapján azonban a diszkrét folyamat paraméterbecslésének eloszlását is elég jó közelítéssel megkaphatjuk, már 10-es nagyságrendű megfigyelésszám mellett is; ld. [3].

A [2] dolgozatban szereplő táblázat $T = 1$-re adja meg a ρ maximum likelihood becslésének eloszlását. Ebből a táblázatból éppen a (3) összefüggés alapján kapunk a λ megfelelő becslésének eloszlására egy jó közelítést. Mivel mind a folytonos, mind a diszkrét esetben eddig ez az egyetlen analitikus úton meghatározott és táblázatba foglalt eloszlás, ezért a gyakorlatban használt becsléseknek a maximum likelihood becsléssel való összehasonlítása és az időben folytonos illetve időben diszkrét modell alapján nyert eredmények összevetése igen fontos feladat. Ezzel foglalkozik a [3] dolgozat, amikor CDC 3300-as gépen futó programok szimulációs eredményeit vizsgálja.

Hasonlítsuk össze a [6]-ban a $|\lambda| < 1$ esetben az (1) becslés eloszlására adott táblázatos értékeket, a folytonos közelítésből (a [2] dolgozat táblázatából) adódó becslésekkel – illetve a normális eloszlással való közelítésből nyert becslésekkel!

A $\lambda = 0.5$ és $\lambda = 0.9$ értékekre az $x = (1 + \lambda^2)/2\lambda$ helyen a pontos függvényérték szerepel REEVES [6] 2. táblázatában. Ezek az értékek azonos x értékekre nagyobbak, mint a normális közelítésből adódó valószínűségek, de a maximum likelihood becslésből kapott határok (azonos valószínűségek mellett) lényegesen szűkebbek (ld. a mellékelt táblázatot). Összehasonlításul megadjuk még a [3] 1. táblázatból vett szimulációs eredményeket az (1) becslésre és a maximum likelihood becslésre is.

Táblázat: $p = p_\lambda(\hat{\lambda} < x)$

λ	normális közelítés megfigyelésszám		az (1) becslés megfigyelésszám		a folytonos közelítésből adódó becslés megfigyelésszám		szimulációs eredmények (1) becslés megfigyelésszám	szimulációs eredmények max.lik. becslés megfigyelésszám
	10	20	11	21	10	20	20	20
0.5	$p = 0.995$ $x = 1.25$	$p = 0.999$ $x = 1.25$	$p = 0.9997$ $x = 1.25$	$p = 1$ $x = 1.25$	$p = 0.999$ $x = 0.86$	$p = 0.999$ $x = 0.779$	$p = 0.99$ $x = 0.89$ (ha $\lambda = 0.6$)	$p = 0.99$ $x = 0.83$ (ha $\lambda = 0.6$)
0.9	$p = 0.755$ $x = 1.006$	$p = 0.841$ $x = 1.006$	$p = 0.867$ $x = 1.006$	$p = 0.9636$ $x = 1.006$	$p = 0.9$ $x = 0.955$	$p = 0.95$	$p = 0.95$	$p = 0.95$
					$p = 0.999$ $x < 1$	$x = 0.961$	$x = 1.01$ ($\lambda = 0.905$-re)	$x = 0.97$ (ha $\lambda = 0.905$)
			Reeves adatai					

Jól látható, hogy amíg a normális közelítésből illetve az (1) becslésből adódó felső határok még stacionárius esetben is ($\lambda = 0.5$, $\lambda = 0.9$) lehetnek 1-nél lényegesen nagyobbak, addig a folytonos közelítés eloszlásában a megfelelő felső határok mindig 1 alatt maradnak. Meg kell jegyezni, hogy a maximum likelihood becslés jósága a stacionárius esetben, és eloszlásának jó egyezése a folytonos eloszlásból számított közelítéssel szimulációs eredmények vizsgálata alapján, 20-40 megfigyelés mellett, már megalapozottnak tekinthető (ld. [3]!).

Álatalában az (1) becslés a stacionárius esetben az 1-hez közeli λ értékekre igen rossz. Ezt láthatjuk a [6] dolgozat 3. táblázatát tekintve, ahol az (1) becslésből 11 megfigyelés esetén:

ha $\lambda = 0.9$ akkor $p(\hat{\lambda} < 1) = 0.945$,
ha $\lambda = 0.95$ akkor $p(\hat{\lambda} < 1) = 0.773$,

míg a [2] táblázatából (a folytonos folyamat paraméterbecsléséből):

$$p_{\lambda=0.9}(\hat{\lambda} < 0.99) > 0.999 \qquad p_{\lambda=0.95}(\hat{\lambda} < 0.995) > 0.999.$$

Irodalom

[1] R.L. Anderson, (1942) Distribution of the serial correlation coefficient. Ann. Math. Statist., 13., 1-13.

[2] М. Арато – А. Бенцур: Функция распределения оценки параметра затухания стационарного гауссовского-марковского процесса, (1970)
Studia Sci.Math. Hung., 5., 445-456.

[3] – (1972) Szimulációs eredmények az elemi Gauss folyamat paraméterei becsléseinek eloszlására, SzK Közlemények, 8., 3-35.

[4] J.P. Imhof, (1961) Computing the distribution of quadratic forms in normal variables, Biometrika, 48., 419-426.

[5] H.B. Mann, A. Wald, (1943) On the statistical treatment of linear stochastic difference equations. Econometrica, 11., 173-220.

[6] J.E. Reeves, (1972) The distribution of the maximum likelihood estimator of the parameter in the first-order autoregressive series, Biometrika, 59., 387-394.

[7] F.E. Satterthwaite, (1941) Synthesis of variance. Psychometrika, 6., 309-316.

[8] J.S. White (1958) The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case, Ann. Math. Statist. 29., 1188-1197.

Beérkezett: 1973. szeptember 19.

Summary

In Reeves' paper [6] the exact distribution of estimator (1) is investigated. In the discrete time case the exact distribution may not be get for all values of λ, we may get only good approximation. The distribution is known for the maximum likelihood estimation of dumping parameter ρ (where $\lambda = e^{-\rho\Delta}$) of first order autoregressive gaussian stationary process with continuous time (see [2], [3]). The author shows on the basis of [3], that in the discrete time case estimate (1) may not be used when $\lambda \sim 1$ and the process is stationary. Further, from results [2] and [3] it follows that the approximation by continuous time to the discrete case is good with 20 obseratious. The author compares the results of Reeves with those which we may get from [2].

Р е з ю м е

В статье Reeves [6] рассматривается точное распределение оценки (1). В дискретном случае распределение не определяется при любом значении λ, но можно получить хорошое приближение. Известно распределение оценки наибольшего правдоподобия параметра затухания ρ (где $\lambda = e^{-\rho\Delta}$) стационарного гауссовского процесса авторегрессионного типа первого порядка с непрерывным временем (см. [2], [3]). Автор на основе [3], показывает, что в дискретном случае оценку (1) нельзя использовать при $\lambda \sim 1$ в стационарном случае. Далее, из результатов [2] и [3] следует, что приближение с непрерывным временем, для дискретного случая, хорошое уже при 20 наблюдений. Автор сравнивает результаты Reeves с результатами [2].