MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, Közlemények 10.

STACIONÁRIUS FOLYAMATOK PARAMÉTERÉNEK BECSLÉSÉRŐL

Pham Ngoc Phuc

Legyen $\xi(t)$ valós $(0 \leq t \leq T)$ stacionárius folyamat, $E\xi(t) = 0$; $D^2\xi(t) = E\xi^2(t) = \sigma^2 = S$ ismeretlen. Adott S esetén a folyamathoz tartozó valószínűségi mértéket, ill. várható értéket jelölje P_S, ill. E_S.

Sztochasztikus folyamatok esetén az $E\xi(n) = \Theta$ paraméter korrekt becslésével foglalkozik Arató [1] dolgozata. Független megfigyeléssorozat esetén a skála paraméter szabályos becslésének definícióját Kagan és Ruhin adta meg [3]. A dolgozatban megvizsgáljuk e fogalom hasznosságát sztochasztikus folyamatokra.

1. SZABÁLYOS BECSLÉSEK

Definíció. Az $\hat{S}(\xi(t))$ funkcionált szabályos becslésnek nevezzük, ha tetszőleges $-\infty < \lambda < +\infty$ esetén

(1) $\hat{S}(\lambda\xi(t)) = \lambda^2 \hat{S}(\xi(t))$

Könnyen belátható, hogy pl. az $\hat{S} = \frac{1}{T}\int_0^T \xi^2(t)dt$; $\hat{S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi^2(t_i)$, $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq T$; $\hat{S} = \xi^2(0)$ funkcionálok szabályos becslések.

Jelölje $\mathcal{S}$ a szabályos becslések osztályát. Ha $\hat{S} \in \mathcal{S}$, akkor

(2) $E_S(\hat{S} - S)^2 = S^2 E_1(\hat{S} - 1)^2$

Nyilvánvaló ugyanis, hogy

$$E_S(\hat{S} - S)^2 = E_S(\hat{S}(\xi(t)) - S)^2 = S^2 E_S\left[\hat{S}\left(\frac{\xi(t)}{\sqrt{S}}\right) - 1\right]^2 = S^2 E_1\left[\hat{S}(\xi(t)) - 1\right]^2$$

Jelöljük B_0^T-vel a $\frac{\xi(t)}{\xi(0)}$ $(0 \leq t \leq T)$ változók által generált σ-algebrát.

(Tegyük fel, hogy $\xi(0) \neq 0 \pmod{P_1}$).

Legyen $\hat{S} \in \mathcal{S}$ és

(3) $$\hat{U}(\xi(t)) = \hat{S}(\xi(t)) \cdot \frac{E_1(\hat{S}(\xi(t)) \mid B_0^T)}{E_1(\hat{S}^2(\xi(t)) \mid B_0^T)}$$

Nyilván $\hat{U} \in \mathcal{S}$ és megmutatjuk, hogy igaz a következő

1. Lemma. *Tetszőleges* $\hat{S}_1, \hat{S}_2 \epsilon \mathcal{S}$*-re*

$$\hat{S}_1 \cdot \frac{E_1(\hat{S}_1 \mid B_0^T)}{E_1(\hat{S}_1^2 \mid B_0^T)} = \hat{S}_2 \cdot \frac{E_1(\hat{S}_2 \mid B_0^T)}{E_1(\hat{S}_2^2 \mid B_0^T)} \qquad (\mathrm{mod}\, P_1) \tag{4}$$

azaz tetszőleges $\hat{S} \epsilon \mathcal{S}$*-re az* $\hat{U} = \hat{S} \cdot \dfrac{E_1(\hat{S} \mid B_0^T)}{E_1(\hat{S}^2 \mid B_0^T)}$ *becslés ugyanaz.*

Bizonyítás. Valóban,

$$\frac{\hat{S}_1(\xi(t))}{\hat{S}_2(\xi(t))} = \frac{\hat{S}_1\left(\frac{\xi(t)}{\xi(0)}\right)}{\hat{S}_2\left(\frac{\xi(t)}{\xi(0)}\right)} = f\left(\frac{\xi(t)}{\xi(0)}\right)$$

és így, $\dfrac{\hat{S}_1}{\hat{S}_2}$ a $\dfrac{\xi(t)}{\xi(0)}$ funkcionálja, melyet f-fel jelölünk.

Másrészt $\dfrac{\hat{S}_1}{\hat{S}_2}$ B_0^T-mérhetősége miatt a feltételes várható érték jól ismert tulajdonsága alapján

$$E_1(\hat{S}_1 / B_0^T) = E_1(\hat{S}_1 \cdot \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_2} \mid B_0^T) = \frac{\hat{S}_1}{\hat{S}_2} E_1(\hat{S}_2 \mid B_0^T)$$

$$E_1(\hat{S}_1^2 \mid B_0^T) = E_1(\hat{S}_1^2 \cdot \frac{\hat{S}_2^2}{\hat{S}_2^2} \mid B_0^T) = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} E_1(\hat{S}_2^2 \mid B_0^T)$$

ahonnan következik, hogy

$$\hat{S}_1 \cdot \frac{E_1(\hat{S}_1 \mid B_0^T)}{E_1(\hat{S}_1^2 \mid B_0^T)} = \hat{S}_1 \cdot \frac{\frac{\hat{S}_1}{\hat{S}_2} E_1(\hat{S}_2 \mid B_0^T)}{\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} E_1(\hat{S}_2^2 \mid B_0^T)} = \hat{S}_2 \cdot \frac{E_1(\hat{S}_2 \mid B_0^T)}{E_1(\hat{S}_2^2 \mid B_0^T)} \qquad (\mathrm{mod}\, P_1)$$

és ezzel az 1. lemmát bebizonyitottuk.

2. Lemma. *A szabályos becslések osztályában*

$$\hat{U} = \hat{S} \cdot \frac{E_1(\hat{S} \mid B_0^T)}{E_1(\hat{S}^2 \mid B_0^T)}$$

ahol $\hat{S} \epsilon \mathcal{S}$, *minimális szórású becslése* σ^2*-nek.*

Bizonyítás. Legyen $\alpha\left(\frac{\xi(t)}{\xi(0)}\right) = \frac{E_1(\hat{S} | B_0^T)}{E_1(\hat{S}^2 | B_0^T)}$, akkor $\hat{U} = \alpha\hat{S}$ továbbá

$$E_S(\hat{S} - S)^2 = E_S(\hat{S} - \hat{U} + \hat{U} - S)^2 = E_S(\hat{S} - \hat{U})^2 + E_S(\hat{U} - S)^2 + 2E_S(\hat{S} - \hat{U})(\hat{U} - S)$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}
E_S(S - \hat{U})(\hat{U} - S) &= E_S\left(\hat{S}(\xi(t)) - \alpha \cdot \hat{S}(\xi(t))\right)\left(\hat{U}(\xi(t)) - S\right) \\
&= S^2 E_S\left[\hat{S}\left(\frac{\xi(t)}{\sqrt{S}}\right) - \alpha \cdot \hat{S}\left(\frac{\xi(t)}{\sqrt{S}}\right)\right]\left[\hat{U}\left(\frac{\xi(t)}{\sqrt{S}}\right) - 1\right] \\
&= S^2 E_1(\hat{S} - \alpha \cdot \hat{S})(\hat{U} - 1) \\
&= S^2 E_1\left[\hat{S}(1 - \alpha)(\hat{U} - 1)\right] \\
&= S^2 E_1\left\{(1 - \alpha)E_1\left[\hat{S}(\hat{U} - 1) | B_0^T\right]\right\} \\
&= S^2 E_1\left[(1 - \alpha)E_1(\hat{S} \cdot \hat{U} - \hat{S} | B_0^T)\right] \\
&= S^2 E_1\left[(1 - \alpha)E_1(\hat{S}^2\alpha - \hat{S} | B_0^T)\right] \\
&= S^2 E_1\left\{(1 - \alpha)\left[\alpha \cdot E_1(\hat{S}^2 | B_0^T) - E_1(\hat{S} | B_0^T)\right]\right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

amiből

$$E_S(\hat{S} - S)^2 = E_S(\hat{S} - \hat{U})^2 + E_S(\hat{U} - S)^2 \geqslant E_S(\hat{U} - S)^2 \tag{5}$$

adódik. Az 1. lemma alapján (5)-ből következik a 2. lemma helyessége.

3. Lemma. *Legyen $\hat{S} \in \mathcal{S}$ és $\hat{S}$ torzitatlan becslése S-nek. Legyen továbbá*

$$\hat{U}^* = C\hat{S}\,\frac{E_1^2(\hat{S} | B_0^T)}{E_1(\hat{S}^2 | B_0^T)} = C \cdot \hat{U} = C\alpha S \tag{6}$$

ahol a C állandó úgy határozható meg, hogy

$$C \cdot E_1\left\{\frac{E_1(\hat{S} | B_0^T)}{E_1(\hat{S}^2 | B_0^T)}\right\} = 1.$$

Akkor $\hat{U}^* \in \mathcal{S}$ és $\hat{U}^*$ torzitatlan becslés S-re.

Bizonyítás. Definíció szerint $\hat{U}^* \in \mathscr{S}$, továbbá

$$E_S(\hat{U}^*) = C \cdot E_S(\alpha \cdot \hat{S}) = C \cdot S \cdot E_1(\alpha\hat{S})$$

$$= C \cdot S \cdot E_1\left[\alpha \cdot E_1(\hat{S}|B_0^T)\right] = C \cdot S \cdot E_1\left[\frac{E_1^2(\hat{S}|B_0^T)}{E_1(\hat{S}^2|B_0^T)}\right] = S$$

Megjegyzés. A 3. lemma bizonyításából azt is kapjuk, hogy

(7) $$C \cdot E_1(\hat{U}) = 1$$

2. PITMAN-FÉLE BECSLÉS.

Legyen $\hat{S}_1, \hat{S}_2 \in \mathscr{S}$ és $\hat{U}_1^* = C_1\hat{S}_1\alpha_1 = C_1\hat{U}_1$; $\hat{U}_2^* = C_2\hat{S}_2\alpha_2 = C_2\hat{U}_2$.

Az 1. lemma szerint

$$\hat{U}_1 = \hat{S}_1 \cdot \frac{E_1(\hat{S}_1|B_0^T)}{E_1(\hat{S}_1^2|B_0^T)} = \hat{S}_2 \cdot \frac{E_1(\hat{S}_2|B_0^T)}{E_1(\hat{S}_2^2|B_0^T)} = \hat{U}_2 \qquad (\mathrm{mod}\, P_1)$$

Másrészt (7)-ből $C_1E_1(\hat{U}_1) = 1$, $C_2E_1(\hat{U}_2) = 1$, amikből következik, hogy $C_1 = C_2$ és

(8) $$\hat{U}_1^* = \hat{U}_2^*$$

tehát minden $\hat{S} \in \mathscr{S}$-ra $\hat{U}^*$ ugyanaz.

A 2. lemma bizonyításához hasonló módon belátható, hogy minden $\hat{S} \in \mathscr{S}$-ra

(9) $$E_S(\hat{S} - S)^2 \geqslant E_S(\hat{U}^* - S)^2$$

A 3. lemmából, (8)-ból és (9)-ből adódik a következő állítás:

1. Tétel. *Ha $\hat{S} \in \mathscr{S}$ és $\hat{S}$ torzítatlan becslése S-nek, akkor $\hat{U}^*$ legjobb torzítatlan becslése S-nek a szabályos becslések osztályában.*

Definíció. Pitman-féle becslésnek nevezzük azt az $\hat{U}^*$ becslést, amely legkisebb szórású, torzítatlan becslése $S = \sigma^2$-nek a szabályos becslések $\mathscr{S}$-osztályában.

Tekintsük az $\hat{S} = \xi^2(0)$ becslést. Nyilvánvaló, hogy $\hat{S} \in \mathscr{S}$ és $E_S(\xi^2(0)) = \sigma^2 = S$, azaz $\xi^2(0)$ torzítatlan becslése S-nek.

Az 1. tétel szerint az $\hat{U}^* = C \cdot \xi^2(0)\dfrac{E_1(\xi^2(0)|B_0^T)}{E_1(\xi^4(0)|B_0^T)}$ becslés, ahol C meghatározható a

$$C \cdot E_1\left\{\frac{E_1^2(\xi^2(0)|B_0^T)}{E_1(\xi^4(0)|B_0^T)}\right\} = 1$$

összefüggésből, legjobb torzítatlan becslése S-nek az $\mathscr{S}$ osztályban.

Tehát

$$\hat{U}^* = C \cdot \xi^2(0) \frac{E_1(\xi^2(0) | B_0^T)}{E_1(\xi^4(0) | B_0^T)}$$

Pitman-féle becslés.

Tegyük most fel, hogy $\xi_1, \ldots, \xi_n$ azonos eloszlásúak, de nem szükségképpen függetlenek, és $\xi_1 = \xi(0) \neq 0 \pmod{P_1}$.

Legyen $p_0(x_1, \ldots, x_n)$ a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ változók együttes sűrűségfüggvénye, legyen továbbá $\eta = \xi_1$, $\eta_2 = \frac{\xi_2}{\xi_1}, \ldots, \eta_n = \frac{\xi_n}{\xi_1}$ akkor az $\eta, \eta_2, \ldots, \eta_n$ együttes sűrűségfüggvénye a következő:

$$p(z, y_2, \ldots, y_n) = p_0(z, zy_2, \ldots, zy_n) \cdot z^{n-1}$$

Innen belátható, hogy

$$E_1\left(\xi_1^2 \,\Big|\, \frac{\xi_2}{\xi_1}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_1}\right) = E_1(\eta^2 \,|\, \eta_2, \ldots, \eta_n) = \frac{\int z^{n+1} p_0(z, z\eta_2, \ldots, z\eta_n) dz}{\int z^{n-1} p_0(z, z\eta_2, \ldots, z\eta_n) dz} \tag{10}$$

és

$$E_1\left(\xi_1^4 \,\Big|\, \frac{\xi_2}{\xi_1}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_1}\right) = E_1(\eta^4 \,|\, \eta_2, \ldots, \eta_n) = \frac{\int z^{n+3} p_0(z, z\eta_2, \ldots, z\eta_n) dz}{\int z^{n-1} p_0(z, z\eta_2, \ldots, z\eta_n) dz} \tag{11}$$

Jelölje B_2^n a $\frac{\xi_k}{\xi_1}$, $(2 \leq k \leq n)$ változók által generált σ-algebrát.

Mivel az $\hat{S} = \xi^2(0) = \xi_1^2$ statisztika szabályos, torzítatlan becslése S-nek, a Pitman-féle becslés a következő:

$$\hat{U}^* = C \cdot \xi^2(0) \cdot \frac{E_1(\xi^2(0) \,|\, B_2^n)}{E_1(\xi^4(0) \,|\, B_2^n)} \tag{12}$$

(10), (11), (12) alapján $z = t\xi_1$ helyettesítéssel adódik, hogy

$$\hat{U}^* = C \cdot \xi_1^2 \frac{\int t^{n+1} \xi_1^{n+1} p_0(t\xi_1, t\xi_2, \ldots, t\xi_n) dt}{\int t^{n+3} \xi_1^{n+3} p_0(t\xi_1, t\xi_2, \ldots, t\xi_n) dt}$$

$$= C \cdot \frac{\int t^{n+1} p_0(t\xi_1, t\xi_2, \ldots, t\xi_n) dt}{\int t^{n+3} p_0(t\xi_1, t\xi_2, \ldots, t\xi_n) dt} \tag{13}$$

$$\text{ahol} \quad C \cdot E_1 \frac{E_1^2(\xi^2(0) \mid B_2^n)}{E_1(\xi^4(0) \mid B_2^n)} = 1 .$$

3. PÉLDA Vegyük észre, hogy a fenti eredmények érvényesek maradnak abban az esetben is, amikor $\xi(t)$ stacionárius, $E\xi(t) = 0$, $E\xi^2(t) = q\sigma^2 = qS$ ahol q egy ismert állandó, és $S = \sigma^2$ ismeretlen paraméter (jelentését alább megadjuk).

Tekintsük most a

$$(15) \qquad \xi(t) + a_1 \xi(t-1) + \ldots + a_p \xi(t-p) = \epsilon(t)$$

sztochasztikus egyenletnek eleget tevő $\xi(t)$ p-edrendű autoregressziós folyamatot, ahol $\epsilon(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ független Gauss sorozat, $E\epsilon(t) = 0$, $E\epsilon^2(t) = \sigma^2$.
Ismeretes (lásd [4]), hogy $\xi(t)$ felírható $\epsilon(t)$ segítségével a

$$(16) \qquad \xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \, \epsilon(t-k)$$

alakban, ahol a b_k-együtthatók meghatározhatók $a_1, \ldots, a_p$ segítségével a következőképpen. Legyen

$$A(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k$$

és tegyük fel, hogy $z_1, \ldots, z_p$ az $A(z)$ polinom p különböző gyöke, továbbá

$$\frac{a_0 b_0}{A(z)} = \frac{\rho_1}{z_1 - z} + \ldots + \frac{\rho_p}{z_p - z} \qquad (a_0 = b_0 = 1)$$

akkor

$$(17) \qquad b_K = \rho_1 \cdot z_1^{-k-1} + \ldots + \rho_p z_p^{-k-1}$$

Tegyük fel, hogy $|z_j| > 1$, $j = 1, \ldots, p$, amiből következik, hogy $\sum_k b_k^2 < \infty$ és a $\xi(t)$ folyamat stacionárius, $E\xi(t) = 0$, $E\xi^2(t) = \sigma^2 \sum_{k=0}^{\infty} b_k^2$. A következőkben a $\sigma^2 = S$ paraméter becslésével kapcsolatos problémát vizsgáljuk.

σ^2 **maximum likelihood becslése.** Ismeretes (lásd [2]), hogy $\xi(1), \ldots, \xi(n)$ együttes sűrűségfüggvénye a következő

$$(18) \qquad p_{\xi(1),\ldots,\xi(n)}(x_1, \ldots, x_n, \sigma) = p(\underline{X}, \sigma) = (2\pi)^{-n/2} |Q_p|^{-1/2} \sigma^{-n} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\underline{X}_p Q_p^{-1} \underline{X}_p^* + \sum_{i=p+1}^{n} (x_i + a_1 x_{i-1} + \ldots + a_p x_{i-p})^2 \right] \right\}$$

ahol

$$(19)\qquad Q_p^{-1} = \begin{pmatrix} a_0^2 & a_0a_1 & a_0a_2 \dots a_0a_{p-1} \\ a_0a_1 & a_0^2 + a_1^2 & a_0a_1 + a_1a_2 \\ a_0a_2 & a_0a_1 + a_1a_2 & a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_0a_{p-1} & & a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_{p-1}^2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X} = (x_1, \dots, x_n), \qquad \underline{X}_p = (x_1, \dots, x_p), \qquad \underline{X}_p^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Jelölje $R_p^{-1}\,\xi(1), \dots, \xi(p)$ kovarianciamátrixának inverzét, akkor $R_p^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} Q_p^{-1}$.

Legyen

$$L(\underline{X},\sigma) = \log p(\underline{X},\sigma) = C_n - n \log \sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\Big[\underline{X}_p Q_p^{-1} \underline{X}_p^* + \sum_{i=p+1}^{n} (x_i + a_1 x_{i-1} + \\ + \dots + a_p x_{i-p})^2\Big]$$

ahol

$$C_n = \log\left[(2\Pi)^{-n/2} |Q_p|^{-1/2}\right]$$

A maximum likelihood egyenlet a következő

$$\frac{\partial L(\underline{X},\sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\left[\underline{X}_p Q_p^{-1} \underline{X}_p^* + \sum_{i=p+1}^{n} (x_i + a_1 x_{i-1} + \dots + a_p x_{i-p})^2\right] = 0$$

innen adódik $\sigma^2 = S$ maximum likelihood becslése

$$(20)\qquad \hat{S} = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\left[\underline{X}_p Q_p^{-1} X_p^* + \sum_{i=p+1}^{n} (x_i + a_1 x_{i-1} + \dots + a_p x_{i-p})^2\right]$$

Megmutatjuk, hogy a (20) maximum likelihood becslés szabályos, egyben torzítatlan. Valóban, (20)-ból következik, hogy

$$\hat{S}(\lambda\xi(t)) = \lambda^2 \hat{S}(\xi(t)),$$

továbbá

$$E(\hat{S}) = \frac{1}{n}\left[E(\underline{X}_p Q_p^{-1}\underline{X}_p^*) + \sum_{i=p+1}^{n} E(\epsilon_i^2)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[TrQ_p^{-1}R_p + E(\underline{X}_p)\cdot Q_p^{-1}E(\underline{X}_p^*) + (n-p)\sigma^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[Tr\sigma^2 I_p + (n-p)\sigma^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[p\sigma^2 + (n-p)\sigma^2\right]$$

$$= \sigma^2$$

ahol TrA az A mátrix nyomát jelöli.

A (18) összefüggésből belátható, hogy az

$$\hat{S} = \frac{1}{n}\left[\underline{X}_p Q_p^{-1}\underline{X}_p^* + \sum_{i=p+1}^{n}(x_i + a_1 x_{i-1} + \ldots + a_p x_{i-p})^2\right]$$

statisztika elégséges a $p(\underline{X},\sigma)$ sűrűségfüggvények összegére nézve. Tekintsük most az

$$\hat{S} = \frac{1}{n}\left[\underline{X}_p Q_p^{-1}\underline{X}_p^* + \sum_{i=p+1}^{n}(x_i + a_1 x_{i-1} + \ldots + a_p x_{i-p})^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}(\sigma^2\underline{X}_p R_p^{-1}\underline{X}_p^* + \sum_{i=p+1}^{n}\epsilon_i^2)$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}(\underline{X}_p R_p^{-1}\underline{X}_p^* + \sum_{i=p+1}^{n}\zeta_i^2)$$

statisztikát, ahol $\zeta_i = \frac{\epsilon_i}{\sigma}$ független, $N(0,1)$ normális eloszlású sorozat.

Figyelembe véve, hogy $\underline{X}_p R_p^{-1}\underline{X}_p^*$ illetve $\sum_{i=p+1}^{n}\zeta_i^2$ $\chi^2(p,0)$ illetve $\chi^2(n-p,0)$ eloszlású, és $\underline{X}_p R_p^{-1}\underline{X}_p^*$ független $\sum_{i=p+1}^{n}\zeta_i^2$-től, $\hat{S}$ sűrűségfüggvényét a következő alakban kapjuk:

$$\Pi(\hat{S},\sigma) = \frac{n}{\sigma^2}\cdot\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\frac{1}{2^{n/2}}\cdot\left(\frac{n}{\sigma^2}\hat{S}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}\hat{S}} \tag{21}$$

Innen a Lehmann-tétel (lásd [5]) alapján következik, hogy $\hat{S}$ teljes elégséges statisztika. Ily módon a (20) maximum likelihood becslés az egyetlen minimális szórású torzítatlan becslés.

PITMAN-FÉLE BECSLÉS.

Az

$$\hat{S} = \frac{1}{n}\left[\underline{X}_p Q_p^{-1} \underline{X}_p^* + \sum_{i=p+1}^{n} (x_i + a_1 x_{i-1} + \ldots + a_p x_{i-p})^2\right]$$

becslés szabályos, torzítatlan. Egyrészt az 1. tétel szerint az

$$\hat{U}^* = C\hat{S} \cdot \frac{E_1(\hat{S} \mid B_0^T)}{E_1(\hat{S}^2 \mid B_0^T)}$$

Pitman-féle becslés legkisebb szórású torzítatlan becslés az $\mathcal{S}$ osztályban, másrészt $\hat{S}$ az e-gyetlen legkisebb szórású torzıtatlan becslés, ebből adódik, hogy

$$\hat{U}^* = \hat{S}$$

tehát igaz a következő állıtás:

2. Tétel. *σ^2-nek maximum likelihood becslése és Pitmann-féle becslése megegyezik egymással, és az egyetlen legjobb torzitatlan becslés σ^2-re.*

Köszönetemet fejezem ki Arató Mátyásnak segítségéért és értékes tanácsaiért.

Irodalom

[1] Arató Mátyás, Racionális spektrál sűrűségfüggvényű stacionárius folyamatok várható értékének megengedhető becsléséről. A Magy. Tud. Akad. III. Osztály Közleményei 19 (1969). 89-99.

[2] Arató Mátyás, Folytonos állapotú Markov folyamatok statisztikai vizsgálatáról IV. A Magy. Tud. Akad. III. Osztály Közleményei 15 (1965) 107-124.

[3] А.М.Каган, А.Л.Рухин: К теории оценивания параметра масштаба
Теория вероятн. и ее примен. XII, 4 /1967/ 735-741.

[4] W. Feller, An introduction to Probability theory and its applications. Volume II. John Wiley-New York. 1966.

[5] E.L. Lehmann, Testing Statistical Hypotheses. John Wiley-New York. 1960.

Summary

ON THE ESTIMATION OF PARAMETER OF STATIONARY PROCESS

The problem of estimating of the variance of a stationary process is considered. There is given the definition of the Pitman estimation. It is shown that in the case of a p-order autoregressive process the maximum likelihood and Pitman estimates are equivalent.

Резюме

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ПАРАМЕТРОВ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассматривается проблема оценивании стационарных процессов. Дается определение оценки Питмена.

В работе показано, что в случае авторегрессионных процессов порядка p оценка максимального правдоподобия и оценка Питмена эквивалентны.

Beérkezett: 1973. március 14.