

Polinomfelbontás Hurwitz- és antihurwitz komponensre

Frey Tamás

Szűrők tervezése során merül fel a következő feladat: az

$$R(p) = p^{4n} + r_{4n-2} p^{4n-2} + r_{4n-4} p^{4n-4} + \dots + r_4 p^4 + r_2 p^2 + r_0 \quad (1)$$

valós együtthatós polinomot (az $r_0 \geq 0$ feltétel mellett) fel kell bontani egy un. Hurwitz-polinom és egy un. anti hurwitz-polinom szorzatára. Az /1/ alatti egyenletnek ugyanis a $p_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ zérushellyel együtt a $\bar{p}_0 = \alpha_0 - i\beta_0$ is zérushelye, hiszen R valós együtt-hatós, továbbá $-p_0 = -\alpha_0 - i\beta_0$ és $-\bar{p}_0 = -\alpha_0 + i\beta_0$ is zérushelye, hiszen R páros függvény. /1/ gyökei tehát négyes csoportokat alkotnak. A negatív valós részű gyökpárokhoz tartozó gyöktényezők szorzatát nevezzük mármost az /1/-hez tartozó Hurwitz-polinomnak, a pozitív valós részűekhez tartozó gyöktényezők szorzatát viszont anti hurwitz-polinomnak. Amennyiben /1/-nek "tisztá" imaginárius zérushelyei is vannak, úgy ezek - a fentiek alapján - páros multiplicitású zérushelyek. Ilyenkor "megfelelően" csatoljuk a gyöktényezőket a * A(p) antihurwitz-polinomtényezőhöz. H(p) konjugált gyökpárjaihoz tartozó gyöktényezők szorzatai nemnegatív együtthatós másodfokú polinomok; így H(p) is nemnegatív együtt-
* H(p) Hurwitz ill.

hatós. $A(p)$ zérushelyei viszont -1 -szeresei $H(p)$ megfelelő zérushelyeinek, és így H és A páros fokszámu tagjainak együtthatói megegyeznek $A(p)$ megfelelő együtthatóival, a páratlan fokszámu tagok koefficiensei viszont egymás (-1) -szeresei. Így

$$H(p) = p^{2n} + a_{2n-1}p^{2n-1} + a_{2n-2}p^{2n-2} + \dots + a_2p^2 + a_1p + a_0 \quad (2)$$

($a_i \geq 0$) és

$$A(p) = p^{2n} - a_{2n-1}p^{2n-1} + a_{2n-2}p^{2n-2} - \dots + a_2p^2 - a_1p + a_0 \quad (3)$$

Mint hogy pedig $H(p) A(p) = R(p)$ érvényes, azért $r_0 = a_0^2$ ami indokolja az $r_0 \geq 0$ feltételt.

$H(p)$ ill. $A(p)$ meghatározható - numerikusan - természetesen R zérushelyeinek ismeretében is, de az n nagyobb értékeinél óriási numerikus munkát igényel, különösen, ha H -ra nagy pontossággal van szükségünk. Ezért érthető az a törekvés, hogy R zérushelyeinek konkrét megállapítása nélkül adjuk meg A ill. H alakját. Uzsoky M. [1] dolgozott ki először egy ilyen iterációs módszert H közvetlen megállapítására, amely azon a megfigyelésen alapul, hogy H és A összeszorításakor a Graeffe-algoritmust hajtjuk végre. H meghatározásakor tehát ennek inverzét kellene végrehajtani; ennek közelítése történik Uzsoky algoritmusá szerint.

A módszer azonban viszonylag lassan konvergál, különösen, ha a gyöknégyesek közel azonos abszolút értékűek és arcusuk is közel fekszik, továbbá nagy pontosságra van szükség. A Newton-Raphson-féle módszer elég jó kezdő közelítés ismeretében kitűnően használható, ilyenekkel azonban ritkán rendelkezünk. A [2]-ben ismertetett módszer azonban itt is jól beválik a kezdő intervallumon.

Jelöljün tehát $P(p)$ egy olyan $4n$ -edfoku polinomot, amelynek felbontását ismerjük. R gyakran úgy van megadva, mint egy $H_1(p)$ Hurwitz- és hozzátartozó $A_1(p)$ antihurwitz-polinom szorzata és egy $P_1(p)$ perturbáló polinom összege; ilyenkor P választható a $H_1 \cdot A_1$ szorzattal egyenlőnek. Egyébként pedig $P(p)$ -t választhatjuk pl. a $H_1(p) = p^{2n} + p^{2n-1} + \dots + p + \sqrt{r}$ és az $A_1(p) = p^{2n} - p^{2n-1} \pm \dots - p + \sqrt{r}$ polinom szorzataként. Mármost a

$$H(t,p) = p^{2n} + a_{2n-1}(t)p^{2n-1} + a_{2n-2}(t)p^{2n-2} \pm \dots + a_2(t)p^2 + a_1(t)p + a_0(t) \quad (4)$$

ill.

$$A(t,p) = p^{2n} - a_{2n-1}(t)p^{2n-1} \pm \dots + a_2(t)p^2 - a_1(t)p + a_0(t) \quad (5)$$

jelöléssel legyen

$$H(t,p) \cdot A(t,p) \equiv P(p) + 2t(R(p) - P(p)) \quad (6)$$

azaz

$$\frac{\partial H}{\partial t} A + H \frac{\partial A}{\partial t} \equiv 2(R(p) - P(p)) \quad (7)$$

ahol a /7/ differenciálegyenletet a $H(0,p) = H_1(p)$
 $A(0,p) = A_1(p)$ választás mellett a $0 \leq t \leq 1/2$ szakaszon kell numerikusan integrálni. Így $H(1/2,p)$ ill. $A(1/2,p)$ megadja $R(p)$ nevezett felbontását. Jelöljük $\underline{a}^*(t)$ -vel a /4/ koefficienseiből alkotott sorvektort, azaz

$$\underline{a}^*(t) = (a_{2n-1}(t), a_{2n-2}(t), \dots, a_2(t), a_1(t), a_0(t)) \quad (8)$$

Ekkor /7/ részletes alakja

$$\underline{A}(\underline{a}) \frac{d\underline{a}}{dt} = \underline{\Delta}(p), \text{ azaz } \frac{d\underline{a}}{dt} = \underline{A}^{-1}(\underline{a}) \cdot \underline{\Delta}(p) \quad (9)$$

ahol $\underline{\Delta}^*(p)$ az $(R(p) - P(p))$ koefficienseiből /8/ mintájára alkotott sorvektor, $\underline{A}(\underline{a})$ pedig a következő mátrix:

$$\underline{\underline{A}}(\underline{a}) = \begin{bmatrix} -a_{2n-1} & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -a_{2n-3} & a_{2n-2} & -a_{2n-1} & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -a_{2n-5} & a_{2n-4} & -a_{2n-3} & a_{2n-2} & -a_{2n-1} & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -a_1 & a_2 & -a_3 & a_4 & -a_5 & \dots & \dots & \dots & -a_{2n-1} & 1 \\ 0 & a_0 & -a_1 & a_2 & -a_3 & \dots & \dots & \dots & -a_{2n-3} & a_{2n-2} \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_{2n-5} & a_{2n-4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 \end{bmatrix}$$

Mint hogy azonban $\underline{\underline{A}}^{-1}(\underline{a})$ kiszámítása, resp. az

$$\underline{\underline{A}}(\underline{a}) \cdot \underline{\underline{\Delta}}\underline{a} = \underline{\underline{\Delta}}(p) \cdot \Delta t$$

egyenlet megoldása változó \underline{a} mellett elég sok numerikus munkát igényel, célszerűen az alábbi módon járunk el: /9/ numerikus integrálását változó lépésközű Runge-Kutta formulával végezzük (különösen ajánlható itt a [3]-ban szereplő harmadfokú, egy pontos eljárás), első lépésben olyan hibakorláttal, hogy $a_0(1/2)$ relatív hibája 1 % körül legyen ($a_0(1/2)$ pontos értéke ismert: $\sqrt{r_0}$). Az így kapott $\hat{H}^{(n)}(1/2, p)$ -ből és $\hat{A}^{(n)}(1/2, p)$ -ből egy új $\hat{P}^{(n)}(p)$ könnyen konstruálható. Ezután újra

és újra elvégzünk egy numerikus integrálást, mindig a megelőző hibakorlát 1 %-ával. Így kapjuk rendre a $\hat{H}^{(2)}(\frac{1}{2}, p)$, $\hat{H}^{(3)}(\frac{1}{2}, p)$, ... stb. közelítéseket. Ezt mindaddig folytatjuk, amíg az

$$\frac{\|\hat{A}^{(k)-1}(\underline{a}(\frac{1}{2})) - \hat{A}^{(k)-1}(\underline{a}(0))\|}{\|\hat{A}^{(k)-1}(\underline{a}(\frac{1}{2}))\| + \|\hat{A}^{(k)-1}(\underline{a}(0))\|} \leq \mathcal{J} \quad (\mathcal{J} \sim \frac{1}{2000}) \quad (12)$$

egyenlőtlenség nem teljesül. A továbbiakban célszerű az un. módosított Newton-iterációval folytatni az eljárást, minthogy \underline{A}^{-1} nehezen, P azonban könnyen számítható, és egy-egy lépés kb. 4 új decimális jegyet pontosít \underline{a} mindegyik komponensében. A továbbiakban tehát az

$$\Delta \underline{a}^{(r)} = \underline{A}^{(k)-1}(\underline{a}(\frac{1}{2})) \cdot \Delta^{(r)}(p) \cdot \frac{1}{2}, \quad (r = k+1, k+2, \dots) \quad (13)$$

képlet alapján folytatjuk az iterációt, mindaddig, amíg a kívánt pontosságot el nem érjük.

Megemlítjük, hogy /13/ különösen akkor használható előnyösen, ha R gyökényesei közel fekszenek, mert ekkor R megközelítése során $\underline{A}^{(s)}$ egyre rosszabbul kondicionált mátrixszá válik, és így $\underline{A}^{(s)-1}$ számítása egyre nehezebb lesz.

Irodalom:

- [1] Uzsoy M.: Kandidátusi értekezés /megírás alatt/.
- [2] Frey T.: Egyenletek megoldása szakaszonkénti perturbációval. MTA SzK Közlemények 1. 1966.
- [3] Frey T.: Egyenletek megoldása szakaszonkénti perturbációval II. MTA SzK Közlemények 2. 1967.

S u m m a r y

Decomposition of polynomials into Hurwitz and anti-Hurwitz components.

The paper describes such an algorithm of the Newton-Raphson method transformed into a differential equation system with the help of a continuous parameter which yields directly the decomposition of a suitable polynomial into Hurwitz and anti-Hurwitz components.