

Speciális optimalizálási feladatok megoldása

Szelezsán János

Az alábbiakban felírjuk három speciális optimalizálási feladat megoldását. Ezek közül kettő "rávezérlési" feladatnak tekinthető, abban az értelemben, hogy a "vezérlőfüggvényt" úgy kell megválasztani, hogy a folyamat leíró differenciálegyenlet megoldása bizonyos pontokban adott értéket vegyen fel és emellett a vezérlőfüggvényre vonatkozó kvadratikus funkcionál értéke minimális legyen. A harmadiknál egy kvadratikus célfüggvényt optimalizálunk, adott feltétel mellett.

A/ A "rávezérlési" feladatokat az alábbi tétel segítségével oldjuk meg.

Legyen  $f \in L_2$  és tekintsük a következő feladatot:

$$\min (f, f)$$

$$\text{ha } (f, q_n) = C_n \quad n=1, 2, \dots, N$$

ahol  $q_n \in L_2$  adott függvények,  $C_n$  pedig adott konstans. /A ( ) zárójel a skalárszorzat jele./

Tétel:

Ha a  $q_1, q_2, \dots, q_n$  függvények lineárisan függetlenek, akkor  $(f, f)$  funkcionál minimumát az

$$f^* = \sum_{n=1}^N \alpha_n q_n$$

függvény adja, ahol az  $\alpha_n$  együtthatók az

$$a_{11} \alpha_1 + \dots + a_{1n} \alpha_n = C_1$$

⋮

$$a_{n1} \alpha_1 + \dots + a_{nn} \alpha_n = C_n$$

egyenletrendszer megoldásai, ahol

$$a_{ij} = (q_i, q_j)$$

Bizonyítás:

Jelöljük  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ -el a  $q_1, \dots, q_n$  elemek által generált lineáris alteret. Megmutatjuk, hogy a megoldás ezen altér eleme.

Jelöljük a minimumot adó függvényt  $f^{\#}$ -al. Ismeretes, hogy az  $f^{\#}$  elem

$$f^{\#} = f' + f''$$

alakban állítható elő, ahol  $f' \in \mathcal{L}, f'' \in \bar{\mathcal{L}}$ ; ( $\bar{\mathcal{L}}$  az  $\mathcal{L}$  altér ortogonális komplementere).

De

$$(f^{\#}, f^{\#}) = (f', f') + (f'', f'')$$

Viszont  $f^{\#}$  megengedett megoldás, tehát

$$C_n = (f^*, q_n) = (f' + f'', q_n) = (f', q_n) + (f'', q_n) = (f', q_n)$$

(mivel  $(f'', q_n) = 0$ )

Azt kaptuk tehát, hogy az  $f'$  függvényen az  $(f, f)$  funkcionál kisebb értéket vesz fel, mint  $f^{\#}$ -on. A feltevés szerint azonban  $f^{\#}$  optimális megoldás, tehát

$$(f^*, f^*) = (f', f') + (f'', f'')$$

csak úgy teljesülhet, ha  $(f'', f'') = 0$  azaz  $f'' \equiv 0$ . De ez éppen azt jelenti, hogy

$$f^{\#} \in \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n)$$

azaz

$$f^* = \sum_{n=1}^N \alpha_n q_n$$

Az  $\alpha_n$  számokat abból a feltételből kapjuk, hogy

$$(f^{\#}, q_i) = C_i \quad i=1, 2, \dots, N$$

azaz

$$\left( \sum_{n=1}^N \alpha_n q_n, q_i \right) = C_i$$

vagyis

$$(q_1, q_1)\alpha_1 + \dots + (q_1, q_n)\alpha_n = C_1$$

$$(q_n, q_1)\alpha_1 + \dots + (q_n, q_n)\alpha_n = C_n$$

A feltétel szerint azonban a  $q_1, q_2, \dots, q_n$  függvények lineárisan függetlenek, ezért a fenti egyenletrendszernek létezik megoldása.

A.1/ Optimális "rávezérlés" egy pontra

Tekintsük a következő vezérlési feladatot.

Egy folyamatot a

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a_i^2 \frac{\partial u_i}{\partial x^2} \quad i=1, 2, \dots, n \quad 1/$$

parabolikus differenciálegyenlet-rendszer ír le az

$$\begin{aligned} u_i(x, 0) &= 0 & x &\geq 0 \\ u_i(0, t) &= f(t) & 0 &\leq t \leq t_0 \end{aligned} \quad 2/$$

feltételek mellett.

Jelöljük  $u_i(x, t)$ -vel az 1/ rendszer  $i$ -edik egyenletének megoldását a 2/-es feltétel mellett.

Legyen  $c$  egy adott konstans és  $(x_0, t_0)$  egy adott pont.

Feladat: Keressünk olyan  $f(t)$  peremfeltételt, amelyre

$$u_i(x_0, t_0) = C \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad 3/$$

és amelyen a

$$J(f(t)) = \int_0^{t_0} f^2(t) dt \quad 4/$$

funkcionál minimumot vesz fel.

A feladatot az előbbi tétel felhasználásával oldjuk meg.

Ismeretes, hogy az  $i$ -edik differenciálegyenlet megoldása a 2/ peremfeltétel mellett

$$u_i(x, t) = \int_0^t K_i(x, t-s) f(s) ds$$

ahol

$$K_i(x, t-s) = \frac{x}{2a_i \pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a_i^2(t-s)}} \cdot (t-s)^{-\frac{3}{2}}$$

Emiatt a 3/-as feltételek fennállása azt jelenti, hogy teljesülniök kell az alábbi egyenlőségeknek:

$$\int_0^{t_0} K_i(x_0, t_0-s) f(s) ds = C$$

Eszerint olyan  $f(s)$  függvényt kell keresnünk, amely kielégíti a 4/-es integrál-egyenletrendszert, és minimalizálja a

$$J(f) = \int_0^{t_0} f^2(s) ds$$

funkcionált.

A korábbi jelölésekkel a feladat így írható fel:

$$\min (f, f)$$

$$\text{ha} \quad (K_1, f) = c \quad i=1, 2, \dots, n$$

A feladat megoldása, ha a  $K_i(x_0, t_0 - s)$  függvények lineárisan függetlenek a 2/ tétel alapján

$$f^{\text{H}} = \sum_{i=1}^n \alpha_i K_i(x_0, t_0 - s)$$

ahol az  $\alpha_i$  számok az

$$a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1n}\alpha_n = C$$

$$a_{m1}\alpha_1 + \dots + a_{mn}\alpha_n = C$$

egyenletrendszer megoldásai, és

$$a_{ij} = \int_0^{t_0} K_i(x_0, t_0 - s) K_j(x_0, t_0 - s) ds.$$

A.2/ Adott pontokon átmenő optimális megoldás parabolikus differenciálegyenlet esetén

Tekintsük az

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad 5/$$

parabolikus differenciálegyenletet az

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 & x &\geq 0 \\ u(0, t) &= f(t) & 0 \leq t &\leq t_0 \end{aligned}$$

feltételek mellett. Legyenek adottak az  $(x_1, t_0), \dots, (x_n, t_0)$  pontok és a  $c_1, c_2, \dots, c_n$  számok.

Feladat: Keressünk olyan  $f(t)$  peremfeltételt, amelyre az 5/ differenciálegyenlet  $u(x, t)$  megoldása az  $(x_1, t_0), \dots, (x_n, t_0)$  pontokban  $c_1, \dots, c_n$  értéket vesz fel és amelyre  $\int_0^{t_0} f^2(t) dt$  minimális.

Az előbbi feladathoz hasonlóan, felhasználva, hogy

$$u(x_i, t_0) = \int_0^{t_0} K(x_i, t_0 - s) f(s) ds$$

ahol

$$K(x_i, t_0 - s) = \frac{x_i}{2a\pi} \cdot e^{-\frac{x_i^2}{4a^2(t_0 - s)}} \cdot (t_0 - s)^{-\frac{3}{2}} ds$$

a megoldás

$$f^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i K(x_i, t_0 - s)$$

alakban állítható elő, ahol az  $\alpha_i$  együtthatókat, feltéve, hogy a  $K(x_i, t_0 - s)$  függvények lineárisan függetlenek az

$$a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1n}\alpha_n = C_1$$

$$a_{n1}\alpha_1 + \dots + a_{nn}\alpha_n = C_n$$

egyenletrendszerből kapjuk, ahol

$$a_{ij} = \int_0^{t_0} K(x_i, t_0 - s) K(x_j, t_0 - s) ds$$

B/ A következő feladatban tekintsünk olyan rendszert, amelyet a

$$Q(x, t) = \int_0^t K(x, t, s) u(s) ds$$

összefüggés ír le, ahol  $K(x, t, s)$  adott magfüggvény. Legyenek  $(x_0, T), (x_1, T), \dots, (x_n, T)$  adott pontok. Legyen

$$U = \left\{ u(t) : \int_0^T u^2(t) dt = 1, \quad 0 \leq t \leq T \right\}$$

Legyenek  $c_1, c_2, \dots, c_n$  adott konstansok.

Feladat:

$$\min_{u \in U} \sum_{i=1}^n [c_i - Q(x_i, T)]^2$$

Tétel:

Vegyük az

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrixot, ahol

$$a_{ij} = \int_0^T K(x_i, T, s) K(x_j, T, s) ds$$

Allítás:

Ha a  $(c_1, \dots, c_n)$  pont a

$$\begin{vmatrix} 1 & X_1 & X_2 & \dots & \dots & \dots & X_n \\ X_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ X_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ X_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

másodrendű felületen van, akkor a feladatnak létezik megoldása, mégpedig

$$\min_{u \in U} \sum_{i=1}^n (c_i - Q(x_i, T))^2 = 0$$

és a megoldás:

$$u^*(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i K(x_i, T, t)$$

ahol az  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  együtthatók az

$$a_{11}\alpha_1 + \dots + a_{1n}\alpha_n = c_1$$

$$a_{n1}\alpha_1 + \dots + a_{nn}\alpha_n = c_n$$

egyenletrendszer megoldásai.

Bizonyítás:

Megmutatjuk, hogy ha  $u^*(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j K(x_j, T, t)$  és az  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  számok kielégítik a 6/ egyenlet-rendszert, akkor

$$\begin{aligned} Q^*(x_i, T) &= \int_0^T K(x_i, T, s) u^*(s) ds = \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \int_0^T K(x_i, T, s) K(x_j, T, s) ds = \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j a_{ij} = C_i \end{aligned}$$

vagyis

$$\sum_{i=1}^n (C_i - Q(x_i, T))^2 = 0$$

Az  $u^*(t)$  helyen tehát a funkcionál eléri a 0 minimumértéket. Be kell látni még, hogy  $u^*(t) \in U$ .

Először is világos, hogy

$$\int_0^T u^*(t) dt = \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i$$

Szorozzuk ugyanis meg a 6/ egyenletrendszer  $i$ -edik egyenletét  $\alpha_i$ -vel és adjuk ezeket az egyenleteket össze.

Azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j A_{ij}$$

Ugyanakkor

$$\begin{aligned} \int_0^T u^{*2}(t) dt &= \int_0^T \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i K(x_i, T, t) \right]^2 dt = \\ &= \int_0^T \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j K(x_i, T, t) K(x_j, T, t) dt = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j A_{ij} \end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy a tett feltevés mellett

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i = 1$$

Ugyanis

$$\alpha_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \overset{i}{\underset{\cdot}{C_1}} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & C_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & C_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

Igy a feltétel szerint

$$\begin{vmatrix} 1 & C_1 & \dots & C_n \\ C_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\left(\sum_{i=1}^n |A| \alpha_i C_i - |A|\right) = 0$$

azaz

$$\sum_{i=1}^n |A| \alpha_i C_i = |A|$$

vagyis

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i C_i = 1$$

tehát

$$\int_0^T u^{*2}(t) dt = \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i = 1$$

S u m m a r y

Solution of special optimization problems

János Szelezsán

A solution to three special optimization problems is given. Two of them can be considered to be a problem of control in the sense that the control function must be chosen in a way that the differential equation that describes the process should take given values in certain places and besides the value of the quadratic functional with respect to the control function should be minimal. The third solution concerns the optimization, under given conditions, of a quadratic object function.