

A FÜTÖTT HATÁRRÉTEGET LEÍRÓ EGYENLETRENDSZER ÖNHASONLÓ MEGOLDÁSAI

BARNA IMRE FERENC, MÁTYÁS LÁSZLÓ, HRICZÓ KRISZTIÁN

Dolgozatunkban a hővezetési határréteget leíró parciális differenciálegyenlet-rendszer (PDE) időfüggő önhasonlós megoldásait elemezzük. A tanulmányozás során kétféle hővezetési modellt vizsgálunk és hasonlítunk össze. A reguláris hővezetési modell esetén a sebesség, nyomás és hőmérséklet dinamikai változóinak tér és időfüggését kifejezzük speciális függvények alkalmazásával. Abban az esetben, ha a hővezetési egyenletben egy további, úgynevezett viszkózus melegedési tagot is figyelembe veszünk (amely nagyobb, realisabb folyadék sebességek esetén érvényes), akkor a hőmérséklet eloszlás nem adható meg analitikus alakban. A viszkózus növekedési tag alkalmazásakor a hőmérséklet eloszlás korábbi oszcillációi kisimulnak.

1. Bevezető

Evidenciának tekinthetjük, hogy a térben és időben lejátszódó folytonos természeti és társadalmi jelenségeket PDE-vel tudjuk adekvát módon leírni. Az áramlástan köztudottan egy ilyen tudományterület. Ennek a diszciplínának egyik igen fontos ága a határrétegekben lejátszódó fizikai folyamatokkal foglalkozik.

Ludwig Prandtl volt ezen tudományterület úttörője, aki a huszadik század elején skálázási érveléssel bebizonyította, hogy a kétdimenziós Navier-Stokes egyenletek tagjainak hozzávetőleg fele elhagyható a határrétegekben lejátszódó áramlási jelenségek vizsgálata esetén [1]. Blasius 1908-as dolgozatában [2] megadta az összenyomhatatlan stacioner két dimenziós határrétegben való áramlás profilját. A határrétegekben lejátszódó fizikai folyamatokat Schlichting mára már klasszikussá vált tankönyvéből bárki részletekbe menően elsajátíthatja [3].

A fenti folyamatok jelenkori, aktuális tudományos és mérnöki alkalmazásait pedig Hori [4] monográfiájából ismerhetjük meg. Az elmúlt évtizedek során számos kutató foglalkozott a határrétegeket leíró PDE-vel, a továbbiakban a teljesség igénye nélkül megemlítünk néhány számunkra releváns dolgot. Libby és Fox [5] perturbációs módszerekkel adott néhány megoldást. Ma és Hui [6] önhasonlós megoldásokat mutatott be a határrétegekre vonatkozóan. A kilencvenes években Burde

[7, 8, 9] publikált különböző analitikus megoldásokat a témában. Weidman [10] további megoldásokat publikált határrétegekre keresztirányú áramlásban. Ludlow és munkatársai [11] szintén önhasonló megoldásokat származtattak. Stacionárius nem-newtoni határrétegeket Bognár [12] analizálta és adott önhasonló megoldásokat. A későbbiek során pedig általánosította a megoldásait a stacioner hővezetési mechanizmust is figyelembe véve [13, 14, 15]. Korábbi publikációink során már vizsgáltuk a kétmindenziós nem-newtoni folyadékokat leíró Navier-Stokes egyenletet, illetve a Rayleigh-Bénard-féle hővezetési problémákat [16, 17, 18]. Kijelenthetjük, hogy bizonyos szempontból a fűtött határréteg problémája részben egy Rayleigh-Bénard feladathoz is hasonlít. Jelenlegi dolgozatunkban a Sedov által bevezetett önhasonló Ansatz-ot [19, 20] alkalmazzuk és ezáltal a kezdeti PDE rendszert egy nemlineáris csatolt közönséges differenciálegyenlet-rendszerre (KDE) tudjuk transzformálni. A származtatott KDE rendszert kvadratúrával tudjuk megoldani és így analitikus eredményeket kapunk a sebességre, a hőmérsékletre, illetve a nyomásra mint eredeti dinamikai változókra.

Az alkalmazott vizsgálati módszerünket két megfontolás teszi indokolttá. Az első, hogy a nemlineáris jelenségeket leíró nemlineáris PDE-k megoldásának nincsen általános, egzaktul kidolgozott matematikai elmélete, vagyis nem létezik általános megoldási módszer. A vizsgálatok néhány módszertől eltekintve ad-hoc technikát igényelnek. Az egyik ilyen módszer a redukciós technika, amikor valamilyen új (a hely és időváltozó kombinációjából adódó) változó segítségével a kezdeti PDE-k KDE-ké transzformálhatóak, amelyeket sok esetben kvadratúrával integrálva analitikus végeredményt kapunk. A kezdeti fizikai paraméterek pl. a hővezetési állandó, a sűrűség a végső KDE-ben mint szabad paraméterek továbbra is megmaradnak és hatásuk direkt módon vizsgálhatóvá válik.

Véleményünk szerint két ilyen fajta fizikailag releváns redukciós Ansatz (vagy másnéven próbafüggvény) létezik, amelyek eredete a két ismert lineáris időfüggő PDE-ben keresendő. Ez a két alapvető egyenlet a hullám-, illetve a diffúziós (vagy hővezetési) egyenlet. Linearitásukból adódóan megoldásaikra igaz a szuperpozíció tétele. Mindkét PDE-re létezik természetes próbafüggvény vagy Ansatz. A hullámegyenlet egy tetszőleges fizikai változóra felírva $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ alakú, ahol c a hullám terjedési sebességét jelöli. A megoldásokat a közismert haladó hullámú Ansatz-cal, $u = f(x \pm ct)$ -vel számíthatjuk ki, amelyet szinte minden fizika szakkönyv említ. A diffúziós egyenlet esetén a Gauss-féle megoldás többféle módon származtatható, amelyeket szinte minden szak-, illetve tankönyv részletesen le is ír, viszont a megfelelő és természetes próbafüggvényt, az önhasonló Ansatz-ot nem említik. Néhány sorban megmutatható, hogy az önhasonló Ansatz ($t^{-\alpha} f[x/t^\beta]$) a két szabad kitevőjével (α, β) természetes módon adja meg az időben lecsengő, ugyanakkor a térben szétfolyó (diszperzív) Gauss alakú fundamentális megoldást [21].

Ezen két Ansatz segítségével tetszőleges nemlineáris PDE (vagy PDE rendszer) érdemben vizsgálható és az eredményekből megítélhetjük, hogy az egyenlet

milyen mértékben mutat hullám, illetve diszperzív szétfolyó tulajdonságokat. A teljesség érdekében megemlítjük a Lie szimmetrián [22] alapuló vizsgálati módszereket. Ezekkel a módszerekkel általában többféle, de leginkább csak matematika-ilag érdekes és a fizikai elveknek sok esetben ellentmondó pl. divergens, végtelen energiájú megoldások származtathatóak. Személyes tapasztalataink szerint a Lie szimmetriát alkalmazó szerzők dolgozataikban eredményként kapott függvényeiket egyáltalán nem prezentálják ábrákon, illetve a megoldások paraméter függéseit és ezek fizikai diszkusszióit is mellőzik.

A jelenlegi cikk szerzői egy jó évtizede kutatják a hidrodinamikai [23, 24], kvantummechanikai [25] és elektrodinamikai folyamatokat [26] a haladó hullámú, illetve a fent említett (és a továbbiakban részletezésre kerülő) önhasonló Ansatz-ok segítségével. Ezáltal a vizsgált jelenségek *globális* hullám, illetve diffúzív (időben „szétfolyó”) természetére vonatkozóan kapunk releváns információkat. A feladat további kihívását adja, hogy némely hullámszerű folyamatnál a két módszer összefüggővé válik [27]. A továbbiakban a fűtött határréteget leíró PDE-et fogjuk az önhasonló Ansatz-cal elemezni. Tudomásunk szerint a szakirodalomban a fűtött határréteg egyenleteinek még nem léteznek ilyenfajta analitikus időfüggő megoldásai.

2. Az alkalmazott modell és a származtatott eredmények

Vizsgálatainkat az alábbi PDE rendszeren mutatjuk be:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

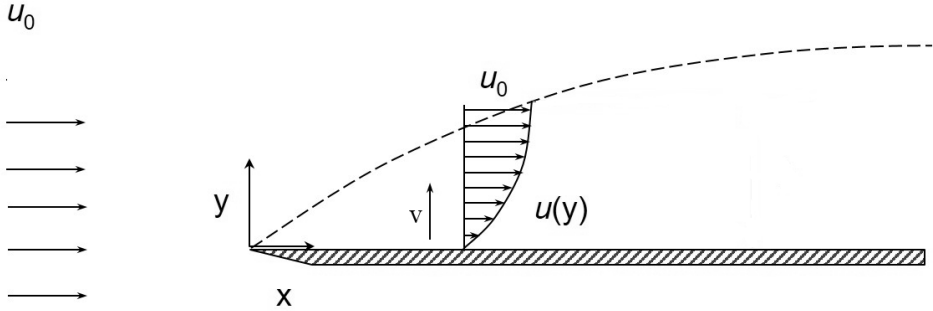
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\rho_{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_{\infty} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\rho_{\infty} c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_{\infty} c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + a \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (4)$$

ahol a dinamikai változók az alábbiak: $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ a határréteg fallal párhuzamos, illetve arra merőleges sebesség komponensei, $p(x, y, t)$ a nyomás, $T(x, y, t)$ pedig a hőmérséklet, ez esetben az a rész, amely az átlagtól való eltérést mutatja. A rendszer első egyenlete az összenyomhatatlan folyadékokra vonatkozó anyagmegmaradást leíró kontinuitási egyenlet, a második a felületre merőleges nyomásra vonatkozó egyenlet, a harmadik a felülettel párhuzamos sebesség komponensre vonatkozó egyszerűsített Navier-Stokes egyenlet. A bal oldal első tagja a lokális gyorsulásért, a második a konvektív gyorsulásért felelős. A jobb oldal első tagja a nyomás gradiens, ez hajtja az áramlást, a második tag pedig a belső

súrlódásért felel. Az utolsó, negyedik egyenlet pedig egy hővezetési egyenlet. A bal oldal első tagja a lokális hőmérséklet változásért, a második pedig a konvekció okozta hőmérséklet változásért felelős. A jobb oldal első tagja térbeli hőmérséklet változásáért, utolsó tagja pedig disszipatív viszkózus fűtésért felelős. A vizsgált rendszer geometriai viszonyait az első ábra szemlélteti.



1. ábra. A vizsgált rendszer geometriáját szemléltető sematikus ábra. A szaggatott vonal egy, az origóból induló félig végtelen felület mentén mutatja a vízszintes sebesség komponens $u(y)$ nagyságát az y tengely mentén.

Mind a négy dinamikai változó a két térbeli Descartes-féle koordináta, illetve az idő folytonos függvénye. A számított megoldásainkat a C^2 kétszer folytonosan differenciálható függvények terén értelmezzük és nem tételezünk fel pl. L^2 térbeli integrálhatóságot. Az egyenletben szereplő további fizikai paraméterek $\rho_\infty, c_p, \mu, \kappa, a$ pedig a folyadék sűrűsége aszimptotikus távolságokon és időkből, az állandó nyomáson vett fajhő, a kinematikai viszkozitás, a termikus diffúziós állandó, valamint a viszkózus fűtési tag erőssége. A hővezetési egyenlet utolsó tagja felelős a viszkózus fűtésből adódó hőforrásért, amelynek hatása magasabb áramlási sebességek esetén jelentős. Dolgozatunk második felében eredményeinket összehasonlítjuk azon fűtött határréteget leíró eredményekkel, amelyekben nem szerepel ez a fajta viszkózus forrástagg.

A fenti egyenletrendszer megoldását az alábbi önhasznó Ansatz alkalmazásával keressük [19, 20]:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= t^{-\alpha} f(\eta), & v(x, y, t) &= t^{-\delta} g(\eta), \\ T(x, y, t) &= t^{-\gamma} h(\eta), & p(x, y, t) &= t^{-\epsilon} i(\eta), \end{aligned} \quad (5)$$

ahol $\eta = \frac{x+y}{t^\beta}$ az új, úgynevezett hasonlósági változó, f, g, h és i pedig a redukált rendszer hasonlósági függvényei. A maradék öt kis görög betű $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ és ϵ pedig az önhasznó exponenseket jelenti, amelyek tetszőleges valós értékeket vehetnek

fel. A hasonlósági függvényekről feltesszük, hogy megfelelő simasággal rendelkeznek, tehát léteznek a fenti egyenletnek megfelelő első és másodrendű deriváltakkal. Az általunk alkalmazott Ansatz geometriáját és további tulajdonságait részletesen elemeztük előző tanulmányainkban [16, 17, 18].

A hasonlósági függvények, illetve az önhasonló exponensek pontos alakjára vonatkozó számítások menete a következő. Kiszámítjuk a dinamikai változók (5) megfelelő helykoordináta és idő deriváltjait és visszahelyettesítjük őket az eredeti (4) rendszer megfelelő egyenleteibe, így az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$t^{-\alpha-\beta}f' + t^{-\alpha-\delta}g' = 0, \quad (6)$$

$$t^{-\epsilon-\beta}i' = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\infty}(-\alpha t^{-\alpha-1}f - \beta t^{-\alpha-1}f'\eta) + \rho_{\infty}(t^{-2\alpha-\beta}ff' + t^{-\alpha-\delta-\beta}gf') = \\ + \mu t^{-\alpha-2\beta}f'' - t^{-\epsilon-\beta}i', \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \rho_{\infty}c_p(-\gamma t^{-\gamma-1}h - \beta t^{-\gamma-1}h'\eta) + \rho_{\infty}c_p(t^{-\alpha-\gamma-\beta}fh' + t^{-\delta-\gamma-\beta}gh') = \\ \kappa t^{-\gamma-2\beta}h'' + a t^{-2\alpha-2\beta}(f')^2. \end{aligned} \quad (9)$$

A jobb átláthatóság érdekében a hasonlósági függvények η argumentum szerinti deriválását $'$ -vel jelöljük (pl. $\frac{df(\eta)}{d\eta} = f'(\eta)$). Az önhasonló Ansatz-cal a redukció során a kezdeti (x, y, t) változókról az új η változóra térünk át, de csak akkor, ha a fenti egyenletrendszer függetlenné válik az időtől. Tehát el kell érjünk, hogy az összes időbeli hatvánnyal (pl. $t^{-\alpha-1}$) minden egyenlet minden tagját egyszerűsíthessük. Így egy lineáris egyenletrendszert kapunk a kitevőkre vonatkozóan, amely jelen esetben ellentmondásmentesen és egyértelműen megoldható. Minden exponens az alábbi pozitív racionális vagy egész értéket veszi fel:

$$\alpha = \beta = \delta = 1/2, \quad \epsilon = 1, \quad \gamma = 1. \quad (10)$$

Megjegyezzük, hogy az $1/2$ -es kitevő értékek a reguláris hővezetés esetén adják meg a Gauss megoldást. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a kapott sebességtér lényegében egyfajta diffúziós folyamat eredménye. Ez a kijelentés igaz a Navier-Stokes egyenletekre is [23, 24]. Egy fontos megjegyzés, hogy az önhasonló Ansatz (5) nem minden PDE rendszerre alkalmazható automatikusan, sok esetben az exponensek közötti feltételek ellentmondásra vezetnek.

A redukált KDE rendszer az alábbi alakot ölti:

$$f' + g' = 0, \quad (11)$$

$$i' = 0, \quad (12)$$

$$\rho_{\infty}\left(-\frac{f}{2} - \frac{f'\eta}{2}\right) + \rho_{\infty}(ff' + gf') = \mu f'' - i', \quad (13)$$

$$\rho_{\infty}c_p\left(-h - \frac{h'\eta}{2}\right) + \rho_{\infty}c_p(fh' + gh') = \kappa h'' + a(f')^2. \quad (14)$$

Rendszerünk egy hiányos csatolt nemlineáris másodrendű KDE, ami néhány algebrai lépéssel szétcsatolható. Vegyük észre, hogy az első két egyenlet teljes differenciál és így automatikusan integrálható. Eredményeit közvetlenül behelyettesítve a (13) egyenletbe, a sebesség változására vonatkozó KDE alakja a következő:

$$\frac{1}{\rho_\infty}(\mu f' + c_2 \eta + c_3) + \frac{f \cdot \eta}{2} - c_1 f = 0, \quad (15)$$

megoldását kvadratúrával kiszámíthatjuk:

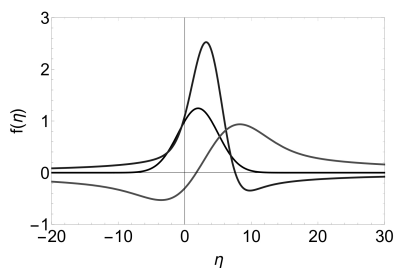
$$f = \left[\frac{-2c_2}{\rho_\infty} \exp\left(\frac{\rho_\infty \eta^2}{4\mu} - \frac{c_1 \eta \rho_\infty}{\mu}\right) - \sqrt{\frac{-\pi}{\mu \rho_\infty}} \exp\left(\frac{-c_1^2 \rho_\infty}{\mu}\right) \right] \cdot \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{-\rho_\infty}{4\mu}} + \frac{c_1 \rho_\infty}{\sqrt{-\mu \rho_\infty}}\right) (2c_1 c_2 + c_3) + c_4 \exp\left(\frac{\eta(-\eta + 4c_1)\rho_\infty}{4\mu}\right). \quad (16)$$

a kifejezésben szereplő erf a hibafüggvényt jelenti, tulajdonságairól a NIST kézikönyvből [28] tájékozódhatunk részletesebben. (A teljesség és eredményeink jövőbeni reprodukálhatóságának érdekében meg kell említenünk, hogy a levezetett KDE-k megoldásait a Maple 12 matematikai programcsomaggal számítottuk ki, majd deriválással és visszahelyettesítéssel ellenőriztük.) Vegyük észre, hogy pozitív valós fizikai ρ_∞, μ paraméter értékek esetén egy komplex mennyiség $\sqrt{-\rho_\infty/\mu}$ adódik a hibafüggvény argumentumában, ám a további komplex multiplikatív prefaktorral együtt a végső megoldás tisztán valóssá válik. Az eredmény lényeges paramétere a ρ_∞/μ hányados, amely ha nagyobb mint egy, akkor a függvény elkezd a Gauss görbéhez hasonlóvá válni. A második ábra általános sebesség hasonlósági függvényeket (16) mutat különféle paraméterértékekre. Az alkalmazott paraméterek önkényes értékűek, amelyek segítségével megpróbáltunk a lehető legáltalánosabb alakú megoldásokat szemléltetni. A harmadik ábra magát a sebességtér ábrázolja a $z = 0$ projekcióra vonatkozóan. A függvénynek az origóban nagyon hegyes maximuma, illetve minimuma van, ezt követően nagyon gyorsan csökken mind térben, mind pedig időben.

A sebességtér megoldásfüggvényének ismeretében a hőmérséklet változásra vonatkozó KDE egyértelműen meghatározható:

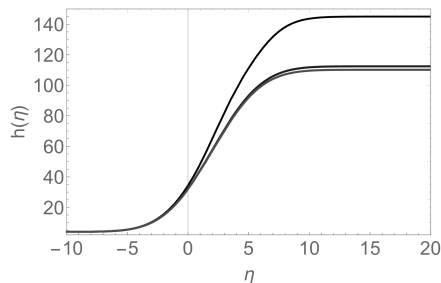
$$\kappa h'' - \rho_\infty c_p h' \left(c_1 - \frac{\eta}{2}\right) + \rho_\infty c_p h + a(f')^2 = 0. \quad (17)$$

Még a legegyszerűbb Gauss görbe alakú sebesség hasonlósági függvény esetén sem kaphatunk analitikus, zárt alakú megoldást. Azonban, hogy vizsgálhassuk eredményünket, rögzítjük a $(\rho_\infty, c_p, \kappa)$ fizikai paramétereket és az integrálási konstansokat bizonyos értékekre. A negyedik ábra három különféle a viszkozus hőforrás erősség értékre mutat megoldásfüggvényeket. Megjegyezzük, hogy magasabb a paraméterérték magasabb végső függvény értéket jelent. Az ötödik ábrán megmutatjuk a hőmérséklet eloszlás viselkedését az $a = 1$ esetre. A kapott függvény alakja hasonló maradt a hasonlósági függvényéhez.

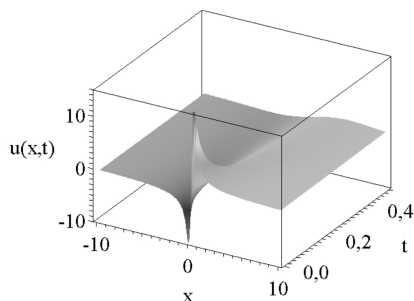


2. ábra. A sebesség tér $f(\eta)$ hasonlósági függvényének (16) grafikonjai három különféle paraméter halmazra vonatkozóan $(c_1, c_2, c_3, c_4, \mu, \rho_\infty)$.

A fekete, a kék, illetve a piros vonal a $(1, 0, 1, 0, 4.1, 0.9)$, $(2, -1, 0.5, 0, 2.5, 1)$ és a $(2, 2, 0.3, 0, 10, 1)$ paraméter kombinációt jelenti.

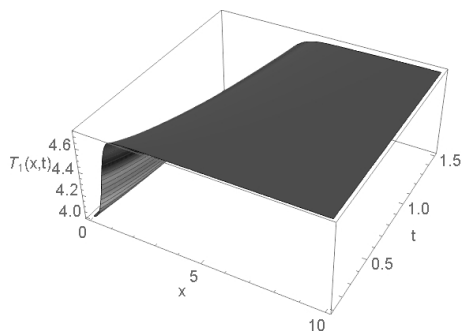


4. ábra. A hőmérséklet $h(\eta)$ hasonlósági függvényének (17) grafikonja három különböző viszkózus hőforrás paraméter esetére megadva. A fekete, kék és a piros folytonos vonal a $a = 10, 1$ és 0.1 értékre számított görbe. A többi paraméter $(c_1, c_2, c_3, c_4, \mu, \rho_\infty)$ értéke pedig $(2, -1, 0.5, 0, 2.5, 1)$.



3. ábra. Az x irányú sebesség komponens

$u(x, y = 0, t) = t^{-1/2}f(\eta)$ grafikonja ahol a $(c_1, c_2, c_3, c_4, \mu, \rho_\infty)$ paraméterek a $(2, -1, 0.5, 0, 2.5, 1)$ értékeket veszik fel.



5. ábra. A hőmérséklet eloszlás $T(x, y = 0, t) = t^{-1/2}h(\eta)$ grafikonja az $a = 1$ viszkózus hőforrás erősség értékre. A többi paraméter $(c_1, c_2, c_3, c_4, \mu, \rho_\infty)$ numerikus értéke pedig $(2, -1, 0.5, 0, 2.5, 1)$.

A teljesség érdekében megadjuk a nyomástérre vonatkozó eredményeket is. A nyomásváltozásra vonatkozó KDE és a megoldása is triviális:

$$i' = 0, \quad i = c_4, \quad (18)$$

Ebből következően a nyomásfüggvény alakja:

$$p(x, y, t) = t^{-\epsilon} \cdot i(x, y, t) = \frac{c_4}{t}, \quad (19)$$

ami annyit jelent, hogy a nyomás konstans az egész térben egy adott időpontban, ám van egy $1/t$ alakú időbeli lecsengése, ami gyorsabb, mint a sebességtér esetében. Vegyük észre, hogy a nyomás és a hőmérséklet időbeli lecsengése azonos alakú.

Tanulmányunk fő célkitűzése, hogy eredményeinket összehasonlítsuk a viszkózus fűtési tagot nem tartalmazó $(a(\partial u/\partial y)^2 = 0)$ hidrodinamikai rendszer eredményeivel.

A felhasznált Ansatz megegyezik az előzővel (5. egyenlet), ám a kapott önhasználó exponensek alakja némileg megváltozott:

$$\alpha = \beta = \delta = 1/2, \quad \epsilon = 1, \quad \gamma = \text{tetszőleges valós}. \quad (20)$$

Mivel kevesebb a kényszer feltétel az exponensek között, ezért lehetséges, hogy a γ exponens értéke határozatlanná vált. Tehát a hőmérséklet eloszlás időbeli lecsengése (vagy negatív értékek esetén végtelenhez való tartása) tetszőleges alakúvá vált. Mint a későbbiekben látni fogjuk, egy határozatlan önhasználó exponens, (mivel megjelenik a megoldásban) gazdag és sokrétű matematikai struktúrát eredményez. Értelemszerűen a származtatott KDE rendszer is nagyon hasonló alakú. A sebességre és a nyomásra vonatkozó eredmények teljes mértékben változatlanok, így ezekkel most nem foglalkozunk, ám a hőmérséklet hasonlósági függvényére adódó KDE egyszerűbbé vált:

$$\kappa h'' - \rho_\infty c_p h' \left(c_1 - \frac{\eta}{2} \right) + \rho_\infty c_p \gamma h = 0. \quad (21)$$

Ezzel ellentétben (17)-nek viszont már létezik zárt alakú megoldása:

$$h = c_2 M \left(\gamma, \frac{1}{2}; -\frac{c_p \rho_\infty [\eta - 2c_1]^2}{4\kappa} \right) + c_3 U \left(\gamma, \frac{1}{2}; -\frac{c_p \rho_\infty [\eta - 2c_1]^2}{4\kappa} \right), \quad (22)$$

ahol az M és az U a reguláris és irreguláris Kummer függvényeket jelöli. Ezen függvények tulajdonságairól részletekbe menően olvashatunk a már említett NIST kézikönyvben [28]. A továbbiakban a reguláris Kummer M megoldással foglalkozunk (tehát $c_3 = 0$), amelyik véges értéket vesz fel az origóban. A Kummer M és U függvények komplett ortonormált rendszert alkotnak, ha a függvények

argumentumai lineárisak. Jelen esetben azonban az argumentum négyzetes. Hasonló négyzetes argumentumú függvényekkel (amelyek lineáris argumentum esetén ortonormált rendszert alkotnak) eddigi vizsgálataink során már találkoztunk a Navier-Stokes [23, 24] és a Madelung [25] egyenletek hasonló analízisével.

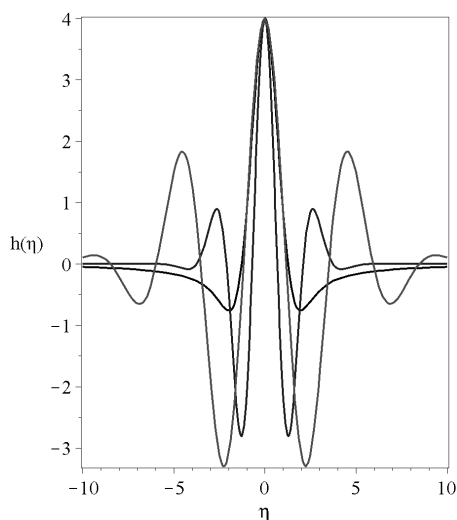
A hatodik ábra a hőmérséklet hasonlósági függvényét mutatja három általános paraméter együttesre kiszámolva. A megoldás görbeseregének legfontosabb paramétere a γ kitevő, minél nagyobb ennek az értéke, annál több nullátmenettel rendelkezik a függvény, ám maximum értéke egyre csökken. A c_1 -es integrálási konstans csak eltolja a megoldást az x tengely mentén, a c_2 pedig csak skálázza a maximális értéket. A $\frac{\rho_\infty c_p}{\kappa}$ hányados a megoldás félérték szélességéért felelős. Néhány speciális γ értékre a Kummer függvények más speciális függvényekre egyszerűsödnek, $\gamma = \pm\frac{1}{2}$ és 0 esetére a megoldások kifejezhetővé válnak a hibafüggvénnyel. Negatív egész γ értékekre páros fokú polinomokat kapunk, pl. $\gamma = -1$ esetén $f = (c_2 + c_3) \cdot (2\kappa + c_p \rho_\infty [\eta - 2c_1]^2)$. A polinom megoldások $\eta \rightarrow \infty$ esetén divergálnak, ezért nem tekinthetők fizikailag releváns megoldásnak, ezért nem elemezzük őket részletesebben.

Az utolsó, hetedik ábra a hőmérséklet eloszlás $y = 0$ vetületét ábrázolja a $\gamma = 0.8$ -as önhasonló exponens értékére. Látható, hogy a gyors tér és időbeli lecsengés ellenére a függvény mutat egy előjelváltást.

Mindezek ismeretében hasonlítsuk össze a két vizsgált modellt és értelmezzük a kapott eredményeket. Evidens, hogy a sebesség és nyomástér független a hőmérséklet eloszlástól (ezek lecsatolódnak a megoldás során). Egyértelműen látható tehát a viszkozus fűtési tag hatása. Azonos fizikai kezdeti feltételek mellett, ahol az egész térben egy időben $1/t$ alakú nyomáseloszlás és egy térben erősen lokalizált és gyorsan csökkenő sebességtér két lényegesen különböző hőmérséklet eloszlást eredményez. A viszkozus fűtés nélküli esetben, a fűtött felület gyakorlatilag kihűl, a kezdeti nagy sebesség és nyomás gyorsan csökkenti a hőmérsékletet, közben kisebb-nagyobb oszcillációkat okozva. A véges viszkozus fűtési tag a dinamika során felmelegíti a felületet, egyfajta sűrűlódásként hőt termel és visszafogottabb ingadozásokat eredményez.

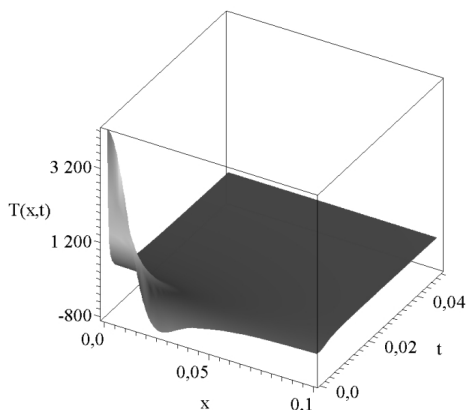
3. Összefoglalás és kitekintés

A dolgozatunkban fűtött határrétegek PDE egyenleteit vizsgáltuk az önhasonló Ansatz segítségével. Kétféle modell eredményeit hasonlítottuk össze; az elsőben figyelembe vettük a viszkozitásból adódó fűtési tagot, amely magasabb áramlási sebesség értékek esetén ad realisabb eredményt, a második vizsgált modellben azonban mellőztük ezt a tagot. Mind a sebesség, mind a nyomástér mindkét esetben analitikusan kifejezhető. Az első esetben a hibafüggvénnyel, a másodikban pedig egy triviális, $1/t$ alakú időfüggvénnyel. A fizika szempontjából egyetlen lényegesen különböző eredményt a hőmérséklet eloszlásra kaptuk. A viszkozus fűtési



6. ábra. A (21) hőmérséklet hasonlósági függvényre $h(\eta)$ vonatkozó megoldás három különféle paraméter szettre $(\gamma, c_2, c_3, c_p, \rho_\infty, \kappa)$ kiszámítva.

A fekete, a kék és a piros vonal a $(0.8, 4, 0, 1, 0.9, 0.3)$, $(3.4, 4, 0, 1, 1, 0.6)$ és a $(6.3, 4, 0, 1, 3, 10)$ numerikus értékekhez tartozó függvényeket ábrázolja.



7. ábra. A hőmérséklet eloszlás $T(x, y = 0, t) = \frac{1}{t^1} h(\eta)$ grafikonja a $(\gamma, c_2, c_3, c_p, \rho_\infty, \kappa)$ paraméterek $(0.8, 4, 0, 1, 0.9, 0.3)$ numerikus értékeire.

tag hiányában az eredményeket négyzetes argumentumú Kummer-függvényekkel írtuk fel analitikus formában, amely megoldások egy erősen csillapodó oszcillációs tulajdonságot mutatnak. Tehát a határrétegben a hőmérséklet nagy amplitúdójú változásokat mutat. Ha figyelembe vesszük a viszkózus tagot, akkor a végeredmény nem írható fel analitikus alakban, viszont mindenfajta oszcillációtól mentes és egy logisztikus függvényre emlékeztető formájú. Tanulmányunknak tehát az a legfontosabb következtetése, hogy a viszkózus hővezetési tag hiányában kihűl a felület, kezdeti hőmérséklete oszcillálva csökken, ám ha létezik véges viszkózus hővezetés, akkor ez az ingadozás már enyhébb a folyamat során.

További terveink, hogy vizsgálatainkat kiterjesztjük nem-newtoni közegekre is. Egy másik természetes általánosítási lehetőség, hogy ferroelektromos, esetleg magnetohidrodinamikusan közegek határrétegeit tanulmányozzuk.

4. Köszönetnyilvánítás

A 129257 számú projekt a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból biztosított támogatással, a K-18 pályázati program finanszírozásában valósult meg.

Hivatkozások

- [1] L. PRANDTL: *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*, Verhandlungen des III. Int. Math. Kongr., pp. 484–491 Heidelberg, Teubner, Leipzig (1905).
- [2] H. BLASIUS: *Grenzschichten in flüssigkeiten mit kleiner reibung*, Zeitschrift für Mathematische Physik, Vol. **56**, pp. 1–37 (1908).
- [3] H. SCHLICHTING AND K. GERSTEN: *Boundary-Layer Theory*, Springer, (2017).
- [4] Y. HORI: *Hydrodynamic Lubrication*, Springer (2006).
- [5] P.A. LIBBY AND H. FOX: *Some perturbation solutions in laminar boundary-layer theory*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. **17**, pp. 433–449 (1963), DOI: 10.1017/S0022112063001439.
- [6] P.K.H. MA AND W.H. HUI: *Similarity solutions of the two-dimensional unsteady boundary-layer equations*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. **216**, pp. 537–559 (1990), DOI: 10.1017/S0022112090000520.
- [7] G.I. BURDE: *The Construction of special explicit solutions of the boundary-layer equations. Steady flows*, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. **47**, pp. 247–260 (1994). DOI: 10.1093/qjmam/47.2.247.
- [8] G.I. BURDE: *The Construction of special explicit solutions of the boundary-layer equations. Unsteady flows*, The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. **48**, pp. 611–633 (1995). DOI: 10.1093/qjmam/48.4.611.
- [9] G.I. BURDE: *New similarity reductions of the steady-state boundary layer equations*, Journal of Physics A: Mathematical and General, Vol. **29**, pp. 1665–1683 (1996). DOI: 10.1088/0305-4470/29/8/015.
- [10] P.D. WEIDMAN: *New solutions for laminar boundary layers with cross flow*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik, Vol. **48**, pp. 341–356 (1997). DOI: 10.1007/s000330050035.
- [11] D.K. LUDLOW, P.A. CLARKSON AND A.P. BASSOM: *New similarity solutions of the unsteady incompressible boundary-layer equations* The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. **53**, pp. 175–206 (2000). DOI: 10.1093/qjmam/53.2.175.

- [12] G. BOGNÁR: *Similarity solution of boundary layer flows for non-Newtonian fluids*, International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. **10**, pp. 1555–1566 (2009). DOI: 10.1515/IJNSNS.2009.10.11-12.1555.
- [13] G. BOGNÁR AND J. KOVÁCS: *Non-isothermal steady flow of power-law fluids between parallel plates*, International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. **6**, pp. 122–129 (2012). DOI: 10.1.1.352.6564.
- [14] G. BOGNÁR: *Analytic Solutions to a Boundary Layer Problem for Non-Newtonian Fluid Flow Driven by Power Law Velocity Profile*, WSEAS Transactions on Fluid Mechanics, Vol. **6**, pp. 22–31 (2011).
- [15] U.S. MAHABALESHWAR, P.N. VINAY KUMAR, K.R. NAGARAJU, G. BOGNÁR AND S.N. RAVICHANDRA NAYAKAR: *A New Exact Solution for the Flow of a Fluid through Porous Media for a Variety of Boundary Conditions*, Fluids, Vol. **4** No. **3**, pp. 1–22 (2019). DOI: 10.3390/fluids4030125.
- [16] I.F. BARNA AND L. MÁTYÁS: *Analytic self-similar solutions of the Oberbeck-Boussinesq equation*, Chaos Solitons and Fractals, Vol. **78**, pp. 249–255 (2015). DOI: 10.1016/j.chaos.2015.08.002.
- [17] I.F. BARNA, M.A. POCSAI, S. LÖKÖS AND L. MÁTYÁS: *Rayleigh-Benard convection in the generalized Oberbeck-Boussinesq system* Chaos Solitons and Fractals, Vol. **103**, pp. 336–341 (2017). DOI: 10.1016/j.chaos.2017.06.024.
- [18] I.F. BARNA, L. MÁTYÁS AND M.A. POCSAI: *Self-similar analysis of a viscous heated Oberbeck-Boussinesq flow system*, Fluid Dynamics Research, Vol. **52**, 015515 (2020). DOI: 10.1088/1873-7005/ab720c.
- [19] L. SEDOV: *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, CRC Press, (1993).
- [20] YA. B. ZEL'DOVICH AND YU. P. RAIZER: *Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena*, Academic Press, New York, (1966).
- [21] L. MÁTYÁS AND I.F. BARNA: *General Self-Similar Solutions of Diffusion Equation and Related Constructions*, Romanian Journal of Physics, Vol. **67**, pp. 101–117 (2022). URL: https://rjp.nipne.ro/2022_67_1-2/RomJPhys.67.101.pdf.
- [22] P.J. OLVER: *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, (Graduate Texts in Mathematics), Springer, Vol. **107** (1986).
- [23] I.F. BARNA: *Self-Similar Solutions of Three-Dimensional Navier-Stokes Equation*, Communication in Theoretical Physics, Vol. **56**, pp. 745–750 (2011). DOI: 10.1088/0253-6102/56/4/25.
- [24] I.F. BARNA AND L. MÁTYÁS: *Analytic solutions for the three dimensional compressible Navier-Stokes equation*, Fluid Dynamics Research, Vol. **46**, 055508 (2014). DOI: 10.1088/0169-5983/46/5/055508.
- [25] I.F. BARNA, M.A. POCSAI AND L. MÁTYÁS: *Analytic Solutions of the Madelung Equation*, Journal of Generalized Lie Theory and Applications, Vol. **11** No. **2**, p. 4 (2017). DOI: 10.4172/1736-4337.1000271.
- [26] I.F. BARNA: *Self-similar shock wave solutions of the nonlinear Maxwell equations*, Laser Physics, Vol. **24**, 086002 (2014). DOI: 10.1088/1054-660X/24/8/086002.

- [27] I.F. BARNA AND R. KERSNER: *Heat conduction: a telegraph-type model with self-similar behavior of solutions*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Vol. **43**, 375210 (2010). DOI: 10.1088/1751-8113/43/37/375210.
- [28] F.W.J. OLVER, D.W. LOZIER, R.F. BOISVERT AND C.W. CLARK: *NIST handbook of mathematical functions*, Cambridge University Press, (2010).



- Született: 1972. november 13., Budapest.
- Végzettség: Mérnök-fizikus, Budapesti Műszaki Egyetem, Természet és Társadalom Tudományi Kar, 1997.
- Doktori cím: Justus Liebig Egyetem, Németország, 2002, Elméleti Fizikai Intézet, "Ionization of helium in relativistic heavy-ion collisions", témája elméleti atomfizika.
- Korábbi munkahelyek:
2002 - 2004 Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems, Drezda, Németország.
2004 - 2005 Bécsi Műszaki Egyetem, Elméleti Fizika Tanszék
2006 - 2013 MTA Atomenergia-kutató Intézet.
- Jelenlegi munkahely, beosztás: Wigner Fizikai Kutatóközpont, tudományos főmunkatárs.

-Oktatási tevékenység: Biofizika oktatása német nyelven az Állatorvostudományi Egyetemen elsőéves hallgatóknak.

- Kutatási terület: lézer - anyag kölcsönhatás, transzport folyamatok nemlineáris parciális differenciálegyenleteinek önhasonló és haladó hullám megoldásai.

- Publikációs tevékenység eredménye:

56 tudományos cikk, két könyvfejezet, hozzávetőleg 600 darab független hivatkozással.

BARNA IMRE FERENC

Wigner Fizikai Kutatóközpont,
Konkoly-Thege Miklós út 29 - 33, Budapest 1121
barna.imre@wigner.hu



- Született: 1974. június 2., Gyergyószentmiklós.
- Végzettség: Fizika licenciátus 1996, Babes-Bolyai Tudományegyetem, Fizika mesteri 1997.
- Doktori cím: Eötvös Loránd Tudományegyetem, 2002.
- Korábbi munkahelyek:
2001 - 2002 Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems, Drezda, Németország.
2003 - 2005 Center for Nonlinear Phenomena and Complex Systems, Université Libre de Bruxelles, Bruxelles, Belgium.
- Jelenlegi munkahely, beosztás:
Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, egyetemi adjunktus.
- Kutatási terület: transzportfolyamatok, illetve nemlineáris parciális egyenleteinek önhasznó

és haladó hullám megoldásai.

- Publikációs tevékenység eredménye:

30 tudományos cikk, egy könyv, egy könyvfejezet, hozzávetőleg 286 hivatkozás.

MÁTYÁS LÁSZLÓ

Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem,
Biomérnöki Tanszék,
Szabadság tér 1,
Csíkszereda, Hargita megye, 530104 Románia
matyaslaszlo@uni.sapientia.ro