

ÚJ MÓDSZER SZIMMETRIKUS SŰRŰSÉGFÜGGVÉNYEK SZUPERPOZÍCIÓINAK FELBONTÁSÁRA, I.

Írta: MEDGYESSY PÁL

1.

Bevezetőül néhány alapfogalmat elevenítünk fel.

a) Legyen $f(x, \alpha, \beta)$ adott analitikus alakú, kétparaméteres sűrűségfüggvény, α_k, β_k α , illetve β egy megengedett értéke. A

$$k_1(x) = \sum_{k=1}^N p_k f(x, \alpha_k, \beta_k)$$

függvényt, ahol $p_k > 0$, azonos (α_k, β_k) párok nincsenek és $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_N$, az $f(x, \alpha_k, \beta_k)$ sűrűségfüggvények — *a komponensek* — p_k *súlyokkal* képezett *szuperpozíciójának* nevezzük.

A gyakorlatban sokszor találkozunk a következő *problémával*.

Adva vannak egy $k_1(x)$ *sűrűségfüggvény-szuperpozíció* görbéje egyes pontjai ordinátáinak *mért* értékei. Az $N, p_k, \alpha_k, \beta_k$ paraméterek ismeretlenek. Meghatározandó a *mért* értékek alapján N és esetleg egyes p_k, α_k, β_k paraméterek *közelítő értéke*.

A problémánk megoldását szolgáltató *numerikus* eljárást a $k(x)$ *sűrűségfüggvény-szuperpozíció* (numerikus) *felbontásának* nevezzük.

Részletes tárgyalás és példák: [1], I. 1. §.

A következőkben a

$$k(x) = \sum_{k=1}^N p_k f\left(\frac{x - \alpha_k}{\beta_k}\right)$$

*típusú szuperpozíciók vizsgálatára szorítkozunk és azt is feltesszük, hogy $f(x)$ (0) szimmetrikus, szigorúan (0) egycsúcsú, folytonos sűrűségfüggvény.**

Vizsgálatainkban szükségünk van a következő definíciókra.

Legyen $f_1(x)$, illetve $f_2(x)$ (0) szimmetrikus, szigorúan (0) egycsúcsú sűrűségfüggvény. Azt mondjuk, hogy $f_2(x)$ görbéje (tágabb értelemben) *keskenyebb*, mint $f_1(x)$ görbéje, ha 1. $x > 0$ esetén az $f_2(x)$ sűrűségfüggvényhez tartozó eloszlásfüggvény görbéje az $f_1(x)$ sűrűségfüggvényhez tartozó eloszlásfüggvény görbéje felett halad és 2. $f_2(x)$ görbéjének csúcsmagassága nagyobb, mint $f_1(x)$ görbéjének csúcsmagassága.

Ekkor $f_2(x)$ görbéje $f_1(x)$ görbéjéből abszcisszatengely menti összenyomás és ordinátatengely menti nyújtással keletkezik, miközben a görbe alatti terület változatlan.

* Ha $-\infty < x < \infty$, $f(x)$ „(a) szimmetrikus”, azt jelenti, hogy $f(a-x) = f(a+x)$; $f(x)$ „szigorúan (a) egycsúcsú” pedig azt, hogy $f(x)$ szigorúan egycsúcsú, $x = a$ csúcshellyel.

Megállapodunk abban, hogy $f_1(x)$ és $f_2(x)$ eltolása nem változtat a „keskenyebb” viszonylaton.

Tekintsünk most egy $\{g(x, \lambda)\}$ ($A_1 \leq \lambda < A_2$) egyparaméteres sűrűségfüggvény-családot, melynek tagjai (0) szimmetrikusak és szigorúan (0) egycsúcsúak. Ha λ_i, λ_j a λ paraméter két különböző értéke, $A_1 < \lambda_i < \lambda_j < A_2$ és $g(x, \lambda_j)$ görbéje (tágabb értelemben) keskenyebb, mint $g(x, \lambda_i)$ görbéje, azt mondjuk, hogy λ $g(x, \lambda)$ görbéjének (A_1, A_2) *monoton formánsa*. (A_1, A_2) λ monoton változása irányára utal. — E monoton formáns szemléletes jelentése egyszerű: ha λ monoton növekedik, a megfelelő görbe egyre keskenyebb lesz; a keskenységet egyetlen szám jellemzi.

Részletek és egyéb „keskenyebbség”-definíciók: [1] II. 4. §.

A fenti $k(x)$ szuperpozíció esetére a felbontási eljárások lényege többek között a következőképp fogalmazható meg ([2], III. 1. §.).

A görbéjével képviselt $k(x)$ szuperpozícióhoz hozzárendelünk egy

$$b(y) = \sum_{k=1}^N p_k g_1(y, \alpha_k, \beta_k)$$

típusú úgynevezett *tesztfüggvényt*, melyre fennáll:

1. $g_1(y, \alpha_k, \beta_k)$ szigorúan egycsúcsú sűrűségfüggvény, $f\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k}\right)$ és $g_1(y, \alpha_k, \beta_k)$ közt jól definiált összefüggés áll fenn; emellett $g_1(y, \alpha_k, \beta_k)$ görbéje keskenyebb, mint $f\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k}\right)$ görbéje;

2. ha $(\alpha_k, \beta_k) \neq (\alpha_l, \beta_l)$, akkor $g_1(y, \alpha_k, \beta_k)$ görbéjének csúcshelye $g_1(y, \alpha_l, \beta_l)$ görbéjének csúcshelyétől legalább olyan távol van, mint $f\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k}\right)$ görbéjének csúcshelye $f\left(\frac{x-\alpha_l}{\beta_l}\right)$ görbéjének csúcshelyétől;

3. $k(x)$ és $b(y)$ közt összefüggés állítható fel az $f\left(\frac{x-\alpha_k}{\beta_k}\right)$ és $g_1(y, \alpha_k, \beta_k)$ közti összefüggés alapján.

Mindebből az következik, hogy ha a $b(y)$ sűrűségfüggvény-szuperpozíció görbét felrajzolnánk, abban az egyes komponensek görbéi *különváltabban* mutatkoznának meg, mint $k(x)$ görbéjében. Ha e különváltság elég nagymérvű, a komponensek görbéi szinte egymást nem is zavarva jelennének meg. Ekkor $b(y)$ görbéjéből a komponensek száma — és esetleg egyes paraméterek közelítő értéke is — megállapítható volna.

Mivel mindez *közelítőleg* igaz akkor is, ha $k(x)$ görbéjének *mért* ordináta-értékeiből $b(y)$ analitikus alakjának megfelelő numerikus módszerrel a $b(y)$ tesztfüggvény bizonyos közelítésének görbéjét állítjuk elő, *felbontási eljárásnak ez utóbbi görbe csúcsai számának, helyeinek stb. megállapítását fogjuk tekinteni*.

Adott felbontási probléma esetében a feladat tehát:

A) az említett $b(y)$ tesztfüggvény megtalálása;

B) a felbontandó szuperpozíció komponensei és a tesztfüggvény komponensei közti összefüggés meghatározása, és ennek alapján a felbontási eljárás alapjául szolgáló $b(y)$ tesztfüggvény előállítása a $k(x)$ szuperpozíció segítségével;

C) mindezek alapján numerikus módszer kidolgozása a tesztfüggvény valamilyen közelítése görbéjének előállítására.

Részletek és általánosítás: [2], III. 1. §.

2.

Korábbi munkáinkban a $b(y)$ tesztfüggvényt a $k(x)$ szuperpozíciót tartalmazó konvolúciós integrálegyenlet megoldása vagy konvolúciós transzformált szolgáltatta. A tesztfüggvénynek az előbbiekre épített analitikus kifejezését a *numerikus felbontás*kor egy

$$b^*(y) = \sum_{j=-m}^m c_j k(x+jh)$$

alakú összeggel közelítettük (h adott konstans).

E közelítés *hibája* azonban nehezen volt becsülhető; a kapott becslések a gyakorlatban használhatatlanok is voltak. $b^*(y)$ görbéjében általában számos olyan kisebb csúcs mutatkozott, melyről nem tudtuk megmondani, hogy $b(y)$ valamelyik komponense közelítésének görbéje-e vagy pedig a $k(x)$ mért értékeiben rejlő hibáktól, „zajtól” származik-e. A gyakorlatban előadódó szuperpozíciók felbontását ez sokszor megnehezítette.

Dolgozatunk jelen I. részének célja egy olyan új felbontási módszer ismertetése, mely kiküszöböli az említett nehézségeket.

3.

Új módszerünk *alapötlete*: adott $k(x)$ szuperpozícióhoz tesztfüggvényként $p(y) = \sum_{v=-m}^m c_v k(x+vh)$ típusú véges összeget kísérelünk meg hozzárendelni, minél kisebb m érték mellett ($m=1$ vagy 2), a c_v konstansokat a tesztfüggvényt értelmező feltételekből határozva meg. Ez esetben numerikus felbontáskor a tesztfüggvény analitikus kifejezésének közelítése elmarad és a $k(x)$ mért értékeiben rejlő „zajnak” a tesztfüggvényt eltorzító hatása is követhető. A $p(y)$ tesztfüggvény bevezetése tehát a keresett módszert szolgáltatja.

Hogy vizsgálódásunkat folytathassuk, határozottabb formát kell adnunk alapötletünknek. A később tárgyalandó példákat tartva szem előtt, $p(y)$ konkrét alakja a következő megfontolások alapján adható meg:

Legyen $f(x)$ a fenti (0) szimmetrikus, szigorúan (0) egycsúcsú sűrűségfüggvény és tekintsük a

$$h(y, P, \vartheta) = (1+2P)f(y) - P[f(y-\vartheta) + f(y+\vartheta)]$$

függvényt, ahol $P \geq 0$, $\vartheta \geq 0$. Látható, hogy $h(y, P, \vartheta)$ is (0) szimmetrikus és $h(y, 0, \vartheta) = f(y)$.

Tegyük fel, hogy bármely $\vartheta > 0$ -hoz található egy a ϑ -tól függő $P_0(\vartheta)$ korlát, melyre fennáll:

A) ha $0 \leq P < P_0(\vartheta)$, $h(y, P, \vartheta)$ nemnegatív, mikor is $h(y, P, \vartheta)$ sűrűségfüggvény;
 B) ha $0 \leq P < P_0(\vartheta)$, $h(y, P, \vartheta)$ szigorúan (0) egycsúcsú, vagyis $h'_y(y, P, \vartheta) \leq 0$ ($y > 0$) és nincs olyan nem félig végtelen intervallum az abszcisszatengelyen, melynek minden pontjában $h'_y(y, P, \vartheta) = 0$.

C) ha $0 \leq P < P_0(\vartheta)$, P $h(y, P, \vartheta)$ görbájének $(0, P_0(\vartheta))$ monoton formánsa, vagyis P növekedésekor $h(y, P, \vartheta)$ görbéje egyre keskenyebbé válik, olyan értelemben, hogy (az origóban levő) csúcsa emelkedése mellett (ami rögtön látható), a görbe az y -tengely felé irányulva összenyomódik.

Ezek után vegyük a $k(x) = \sum_{k=1}^N p_k f\left(\frac{x - \alpha_k}{\beta_k}\right)$ szuperpozícióhoz rendelt tesztfüggvénynek a következő $p(y, \lambda) = \sum_{k=1}^N p_k g_1(y, \alpha_k, \beta_k)$ függvényt, melyben egy később meghatározandó értékészletű λ paraméter is szerepel és ϑ rögzített:

$$p(y, \lambda) = (1 + 2\lambda)k(x) - \lambda[k(x - \vartheta) + k(x + \vartheta)].$$

$k(x)$ k -adik komponense, $f\left(\frac{x - \alpha_k}{\beta_k}\right)$ és $p(y, \lambda)$ k -adik komponense, $g_1(y, \alpha_k, \beta_k)$ közt a

$$g_1(y, \alpha_k, \beta_k) = (1 + 2\lambda)f\left(\frac{y - \alpha_k}{\beta_k}\right) - \lambda\left[f\left(\frac{y - \vartheta - \alpha_k}{\beta_k}\right) + f\left(\frac{y + \vartheta - \alpha_k}{\beta_k}\right)\right]$$

összefüggés áll fenn; mivel ez λ -t is tartalmazza, de csak $y - \alpha_k$ -től függ, vezessük be a $g_1(y, \alpha_k, \beta_k) = g(y - \alpha_k, \beta_k, \lambda)$ jelölést; ezzel

$$p(y, \lambda) = \sum_{k=1}^N p_k g(y - \alpha_k, \beta_k, \lambda).$$

Mivel skálaparaméter-változtatás vagy eltolás nemnegativitáson, egycsúcsúságon, keskenységi viszonylaton nem változtat, az előbbieket folytán $g(y - \alpha_k, \beta_k, \lambda)$ (α_k) szimmetrikus, szigorúan (α_k) egycsúcsú sűrűségfüggvény és görbájének $\lambda \left(0, P_0\left(\frac{\vartheta}{\beta_k}\right)\right)$

monoton formánsa. Így tehát görbéje keskenyebb, mint $f\left(\frac{x - \alpha_k}{\beta_k}\right) = g(x - \alpha_k, \beta_k, 0)$

görbéje, ha $0 < \lambda < P_0\left(\frac{\vartheta}{\beta_k}\right)$ és λ növekedésével keskenysége növekedik. Továbbá $g(y - \alpha_k, \beta_k, \lambda)$ és $g(y - \alpha_l, \beta_l, \lambda)$ görbéi csúcshelyeinek távolsága ugyanakkora, mint $f\left(\frac{x - \alpha_k}{\beta_k}\right)$ és $f\left(\frac{x - \alpha_l}{\beta_l}\right)$ görbéi csúcshelyeinek távolsága (azaz $|\alpha_k - \alpha_l|$).

Így tehát a $p(y, \lambda)$ és $k(x)$ közti fenti összefüggés tesztfüggvényt szolgáltat, ha λ értékére fennáll $0 < \lambda < P_0\left(\frac{\vartheta}{\beta_k}\right)$ ($k = 1, \dots, N$), vagyis mindig, amidőn $0 < \lambda < P_0\left(\frac{\vartheta}{\beta_N}\right)$.

Minél közelebb van λ $P_0\left(\frac{\vartheta}{\beta_N}\right)$ -hez, annál keskenyebbé válnak a tesztfüggvény komponenseinek görbéi, elsősorban a β_N paraméterű és annál inkább sikerülhet a felbontás. A legjobb komponens-különválást nyújtó λ értékéből $P_0\left(\frac{\vartheta}{\beta_N}\right)$ -re, vagyis

β_N -re is következtethetünk; ennél nagyobb λ alkalmazásakor viszont negatív tesztfüggvény-értékek léphetnek fel és a tesztfüggvény görbéje áttekinthetatlenné válik.

A gyakorlatban az a helyzet, hogy ϑ megválasztása után (amit az is befolyásol, hogy milyen pontokban adott $k(x)$ mért értéke) egyre növekedő λ értékekkel előállítjuk $p(y, \lambda)$ görbét, $k(x)$ mért értékei segítségével. Ezek a tesztfüggvény bizonyos közelítésének görbéi lesznek, melyekben annál jobban várható különálló komponens görbék megmutatkozása (csúcsok fellépése), minél közelebb van az épp használt λ

$P_0\left(\frac{\vartheta}{\beta_N}\right)$ -hez.

Ami ϑ megválasztását illeti, mindeddig abból indultunk ki, hogy ϑ ($\vartheta > 0$) tetszőleges, illetve, hogy $k(x)$ rendelkezésre álló mért értékei jelölik ki a szóbjövő ϑ -értékeket. A $\lambda \uparrow P_0\left(\frac{\vartheta}{\beta_N}\right)$ esetén fellépő keskenyebbé válás mértéke azonban ϑ -tól függ. A keskenyebbé válás szempontjából legjelentősebb a $g(y - \alpha_k, \beta_k, \lambda)$ ($k = 1, \dots, N$) komponensek görbéi csúcsmagasságának megnövekedése, feltéve, hogy λ megnövekedésekor e görbe „monoton” esik, emellett az y -tengely felé irányulóan összenyomódik. A csúcsmagasságok nyilván

$$g(0, \beta_k, \lambda) = (1 + 2\lambda)f(0) - 2\lambda f\left(\frac{\vartheta}{\beta_k}\right) \quad (k = 1, \dots, N);$$

$\lambda \uparrow P_0\left(\frac{\vartheta}{\beta_N}\right)$ esetén ennek minél gyorsabban növekednie kell. ϑ és $P_0(\vartheta)$ ismeretében az optimális λ -érték *elvileg* megtalálható. Vegyük azonban figyelembe, hogy a gyakorlatban $f\left(\frac{x - \alpha_k}{\beta_k}\right) = f\left(\frac{x - \alpha_k}{\beta_k}\right) + \varepsilon_k(x)$ áll rendelkezésünkre, ahol $\varepsilon_k(x)$ a „zaj” és e „zaj” továbbplántálódik $g(y - \alpha_k, \beta_k, \lambda)$ kiszámított értékeibe is, azokat $\hat{g}(y - \alpha_k, \beta_k, \lambda) = g(y - \alpha_k, \beta_k, \lambda) + \xi_k(y)$ -ná torzítva el. Könnyen belátható, hogy ha $|\varepsilon_k(x)| < E$, a $\xi_k(y)$ eltorzításra fennáll $|\xi_k(y)| < (1 + 4\lambda)E$, vagyis ez az eltorzítás nagyjából $(1 + 4\lambda)$ -val arányosan nő; λ azonban ϑ függvénye. Hasonlók igazak $p(y, \lambda)$ -nak $k(x)$ „zaja” okozta eltorzulására. A „zaj” megnövekedése miatt nem ajánlatos tehát olyan ϑ -t választani, amely mellett λ nagy lesz. — Világos, hogy a „zaj”, mint sztochasztikus folyamat-realizáció továbbplántálódása is elemi eszközökkel vizsgálható; erre itt nem térünk ki.

A gyakorlatban legjobb több, monoton változó ϑ értékkel kísérletezni, és a kapott tesztfüggvény-görbéket egybevetve keresni ki a legjobb felbontást mutatókat.

$P_0(\vartheta)$ értékét adott típusú $f\left(\frac{x - \alpha_k}{\beta_k}\right)$ komponensekből álló $k(x)$ szuperpozíció esetében analitikus eszközökkel vagy numerikus kísérletezéssel — $h(y, P, \vartheta)$ értékeit sokféle (P, ϑ) párra tabellázva — határozzuk meg. Ha $P_0(\vartheta)$ egyszer tabellázva van, e táblázat $f(x)$ típusához tartozó univerzális konstans-összegség lesz.

Belátható, hogy — korábbi módszereinkkel ellentétben — a közölt eljárás általában *nem* biztosítja azt, hogy a $p(y, \lambda)$ tesztfüggvénynek optimális esetben legalább egy komponense tetszőlegesen keskeny (végtelenbe futó csúcsához hasonló) görbéjű lesz. Ez például abból is következik, hogy rögzített ϑ mellett a két, megengedett P_1 és P_2 ($P_2 > P_1$) paraméterértékhez tartozó $h(y, P_1, \vartheta)$ és $h(y, P_2, \vartheta)$ függvények görbéi metszéspontjának abszcisszája csupán ϑ -tól függ és általában

nem tart zérushoz, még ha P_2 -höz keskenyebb görbe tartozik is, mint P_1 -hez. Nevezetesen

$$(1+2P_1)f(y) - P_1[f(y-\vartheta)+f(y+\vartheta)] = (1+2P_2)f(y) - P_2[f(y-\vartheta)+f(y+\vartheta)]$$

-ből

$$2f(y) - [f(y-\vartheta)+f(y+\vartheta)] = 0$$

következik, vagyis *nagyjából* $f''(y)=0$, és az ezen egyenlet megoldását szolgáltató $y=y_0$ érték általában nem 0, vagy ∞ , vagyis P növekedésekor $h(y, P, \vartheta)$ görbéje nem közeledik egyre jobban és jobban az ordinátatengelyhez.

Konkrét esetben tehát lehetséges, hogy új eljárásunk nem nyújtja a kívánt felbontást; ezt azonban csak kísérletezés döntheti el. Kétségtelen előnye mindenesetre egyszerűsége és a hibák (a „zaj”) befolyásának áttekinthető volta.

Mindezekre tekintettel új eljárásunkat a $k(x)$ szuperpozíció részleges, *parciális* (numerikus) *felbontásának* nevezzük.

Alapgondolata akkor is alkalmazható, ha $p(y, \lambda)$ helyett ennél bonyolultabb, $\sum_{v=-m}^m c_v k(x+vh)$ ($m=2, 3, \dots$) alakú tesztfüggvényt vezetünk be. Részletekbe azonban itt nem bocsátkozhatunk.

4.

A mondottakat két példával illusztráljuk.

1. PÉLDA. *Laplace-sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása.* Legyen

$$k(x) = \sum_{k=1}^N p_k \frac{e^{-\frac{|x-x_k|}{\beta_k}}}{2\beta_k} \quad (\alpha_i \neq \alpha_j \ (i \neq j); \ i, j = 1, \dots, N; \ 0 < \beta_1 \leq \dots \leq \beta_N < A_2).$$

Most

$$h(y, P, \vartheta) = (1+2P) e^{-|y|} - P(e^{-|y-\vartheta|} + e^{-|y+\vartheta|}) \quad (P \geq 0, \vartheta \geq 0)$$

és elemi számítással belátható, hogy ha $p \leq \frac{1}{2(\operatorname{ch} \vartheta - 1)}$ ($\vartheta > 0$), vagyis

$$P_0(\vartheta) = \frac{1}{2(\operatorname{ch} \vartheta - 1)},$$

akkor $h(y, P, \vartheta) \geq 0$ és $h'_y(y, P, \vartheta) \leq 0$ ($y > 0$) (az „=” bizonyos (y_1, ∞) szakaszon áll fenn ($y_1 > 0$)) és P $h(y, P, \vartheta)$ görbéjének $(0, P_n(\vartheta))$ monoton formánsa, megjegyezve, hogy $h(y, P, \vartheta)$ csúcsmagassága,

$$h(0, P, \vartheta) = 1 + 2P(1 - e^{-\vartheta}) \leq \frac{\operatorname{ch} \vartheta - e^{-\vartheta}}{\operatorname{ch} \vartheta - 1}$$

annál nagyobb, minél kisebb ϑ és minél közelebb van P $P_0(\vartheta)$ -hoz. Így tehát $k(x)$ -re alkalmazható a parciális felbontás módszere, és mert $\vartheta \downarrow 0$ esetén $h(0, P, \vartheta) \uparrow \infty$, a felbontáskor a $k(x)$ -hez rendelt $p(y, \lambda)$ tesztfüggvény N -edik komponensének görbéje elvileg tetszőlegesen elkeskenyedik. $k(x)$ mért értékeivel dolgozva, ϑ illetve P említett csökkentése, illetve az előbbivel összefüggő növekedése azonban a felbontási eljárás hibáját növeli, így tehát konkrét esetben különböző ϑ és az annak megfelelő λ értékekkel el kell végezni a felbontást és az eredményeket össze kell hasonlítani.

2. PÉLDA. *ch-sűrűségfüggvények szuperpozíciójának felbontása.* Legyen

$$k(x) = \sum_{k=1}^N p_k \frac{1}{2\beta_k \operatorname{ch} [\pi(x - \alpha_k)/2\beta_k]}$$

$$(\alpha_i \neq \alpha_j \text{ (} i \neq j \text{)}; i, j = 1, \dots, N; 0 < \beta_1 \leq \dots \leq \beta_N < \Lambda_2).$$

Itt

$$h(y, P, \vartheta) = (1 + 2P) \frac{1}{\operatorname{ch} y} - P \left[\frac{1}{\operatorname{ch} (y - \vartheta)} + \frac{1}{\operatorname{ch} (y + \vartheta)} \right]$$

és hosszadalmas, de elemi számítással belátható, hogy ha

$$P < \frac{1}{2(\operatorname{ch} \vartheta - 1)}, \text{ vagyis } P_0(\vartheta) = \frac{1}{2(\operatorname{ch} \vartheta - 1)},$$

akkor $h(y, P, \vartheta) > 0$ és $h'_y(y, P, \vartheta) < 0$ ($y > 0$) és P $h(y, P, \vartheta)$ görbéjének $(0, P_0(\vartheta))$ monoton formánása, megjegyezve, hogy $h(y, P, \vartheta)$ csúcsmagassága, $h(0, P, \vartheta) = 1 + 2P \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \vartheta} \right) < 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} \vartheta}$ annál nagyobb, minél kisebb ϑ és minél közelebb van P $P_0(\vartheta)$ -hoz. Így tehát $k(x)$ -re alkalmazható a parciális felbontás módszere.

Itt azonban $\vartheta \downarrow 0$ esetén $h(0, P, \vartheta) < 1 + \frac{1}{\operatorname{ch} \vartheta} \leq 2$, és így a felbontáskor a $k(x)$ -hez rendelt $p(y, \lambda)$ tesztfüggvény egyetlen komponensének görbéje sem keskenyedhetik el tetszőlegesen.

$k(x)$ mért értékeivel dolgozva, a felbontási eljárás hibájának változása úgy folyik le, mint az 1. Példa esetében és így itt is többféle ϑ és annak megfelelő λ értékkel el kell végezni a felbontást és az eredményeket egybe kell vetni.

Metodológiai példaként tekintsük a

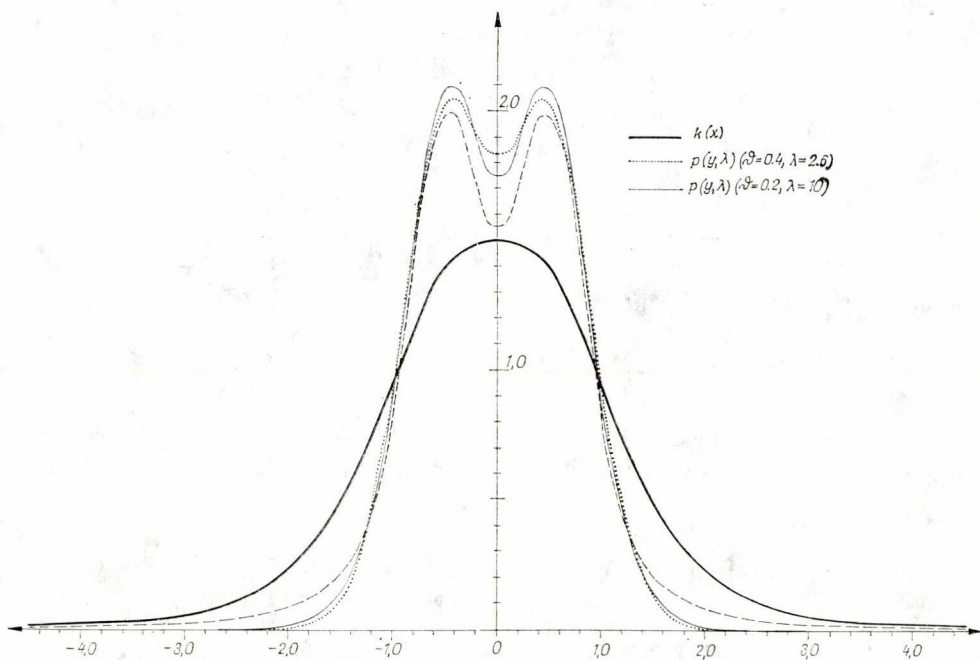
$$k(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}[\pi(x - 0,5)/2]} + \frac{1}{\operatorname{ch}[\pi(x + 0,5)/2]}$$

ch-sűrűségfüggvény szuperpozíció felbontását. Ezt más, bonyolult módszerrel [2], III. 1. § 2.2.-ben már elvégeztük. $k(x)$ görbéje egycsúcsú; az 1. ábrán a vastag vonal ábrázolja. A $k(x)$ -hez tartozó $p(y, \lambda)$ tesztfüggvény értékeit $\vartheta = 0,4$, $\lambda = 2,6$, illetve $\vartheta = 0,2$, $\lambda = 10$ mellett, $k(x)$ táblázatból kiszámított értékeiből 4 tizedesjegyet megtartva számítottuk ki. $p(y, \lambda)$ görbéjét az 1. ábrán $\vartheta = 0,4$, $\lambda = 2,6$ -ra a pontozott, $\vartheta = 0,2$ $\lambda = 10$ -re a vékony vonal mutatja. Összehasonlításul bemutatjuk a [2],

III. 1. §. 2.2.-ben leírt eljárással kapott tesztfüggvény-közelítés görbáját is (szaggatott vonal). A két — eredetileg rejtett — komponens már $p(y, \lambda)$ görbéjében is jól megmutatkozik.

Egyéb sűrűségfüggvény-szuperpozíció típusok vizsgálatával jelen cikkünk folytatásaiban foglalkozunk majd.

Köszönetünket fejezzük ki DELLAGRAMMATIKA KULÁnak az 1. ábrával kapcsolatos számolások elvégzéséért.



1. ábra

IRODALOM

- [1] MEDGYESSY PÁL: Sűrűségfüggvények és diszkrét eloszlások szuperpozícióinak felbontása. *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **21** (1972) 129—200.
- [2] MEDGYESSY PÁL: Sűrűségfüggvények és diszkrét eloszlások szuperpozícióinak felbontása. II. *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* **21** (1972) 261—382.

(Beérkezett: 1973. XI. 5.)