FÜGGVÉNYAPPROXIMÁCIÓ BERNSTEIN-TÍPUSÚ RACIONÁLIS TÖRTFÜGGVÉNYEKKEL ÉS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI VONATKOZÁSAI

Írta: BALÁZS KATALIN

Jelen dolgozat ún. *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvényekkel foglalkozik. Mint ismeretes, a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvényhez tartozó *Bernstein-féle* polinomok a következők:

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{0.1}$$

A *Bernstein*-polinomok fontos szerepet játszanak a matematika különböző ágaiban, így az approximációelméletben és a valószínűségszámításban is. Ismeretes például ([6]), hogy ha $f(x)$ folytonos a $[0, 1]$ intervallumban, akkor a (0. 1) *Bernstein*-polinomok egyenletesen konvergálnak az $f(x)$ függvényhez. BERNSTEINnek ez a tétele egyben WEIERSTRASS első approximációs tételének konstruktív bizonyítása is. VORONOVSZKAJA ([33]) aszimptotikus approximációs tételt bizonyított a *Bernstein*-polinomokra, KANTOROVICS [20] pedig bebizonyította, hogy ha $f(x)$ egész függvény, akkor a hozzátartozó $B_n(f; x)$ *Bernstein*-polinomok az egész tengelyen az $f(x)$ függvényhez konvergálnak. Ismeretes továbbá [29], hogy ha $f(x)$ deriválható függvény a $[0, 1]$ intervallumban, akkor a $B_n(f; x)$ *Bernstein*-polinomok deriváltjai is konvergálnak $f'(x)$-hez a $[0, 1]$-ben. A *Bernstein*-polinomokat fölhasználták a momentumok problémájának véges intervallumon való megoldásához is ([29]).

A *Bernstein*-polinomok jelentőségét látva több matematikus foglalkozott azzal a kérdéssel, hogy hogyan lehetne olyan operátorsorozatot konstruálni, akár polinomsorozatot, akár más típusú függvények sorozatát, amely végtelen intervallumon is rendelkezik a *Bernstein*-polinomok jó tulajdonságaival. Ezekről az eredményekről bővebben szólunk az 1. fejezet A. pontjában.

Ezen dolgozat célja is olyan operátorsorozat, mégpedig racionális törtfüggvénysorozat megadása, amely végtelen intervallumon is hasonlóan viselkedik, mint a *Bernstein*-polinomok a $[0, 1]$-ben. Az 1. fejezet B. pontjában definiáljuk az $R_n(f; x)$ *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvényeket, és megindokoljuk elnevezésüket is. A dolgozat további részében az $R_n(f; x)$ *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvények tulajdonságait vizsgáljuk.

A 2. fejezetben megmutatjuk, hogy az $R_n(f; x)$-ek konvergálnak $f(x)$-hez a $[0, \infty)$-ben, ha $f(x)$ folytonos és $f(x) = O(e^{\alpha x})$, ha $x \to \infty$.

A 3. fejezetben ún. aszimptotikus approximációs tételt bizonyítunk, a 4. fejezetben pedig igazoljuk, hogy az $R_n(f; x)$ deriváltja is tart $f'(x)$-hez, amennyiben $f(x)$ differenciálható.

Az 5. fejezetben az $R_n(f; x)$-eket az ott definiált „kvázibinomiális" eloszlás segítségével állítjuk elő, és valószínűségszámítási eszközökkel bizonyítjuk be a konvergenciatételt korlátos $f(x)$ függvények esetén.

A 6. fejezetben az $R_n(f; x)$-ek differenciákkal való előállítására bizonyítunk egy tételt.

I. FEJEZET

A. A Bernstein-polinomok általánosításai végtelen intervallumra

Ebben a részben röviden ismertetjük a *Bernstein*-polinomoknak végtelen intervallumra való általánosításával kapcsolatos főbb eredményeket.

CHLODOVSKY [10] a következő polinomsorozatot definiálta valamilyen, a $[0, \infty)$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvényhez:

$$B_n^*(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{h_n k}{n}\right)\left(\frac{x}{h_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{h_n}\right)^{n-k}\binom{n}{k}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

ahol $h_n \to \infty$, ha $n \to \infty$ ($h_n = 1$ esetben éppen a (0.1) szerint definiált *Bernstein*-polinomokat kapjuk). CHLODOVSKY bebizonyította, hogy ha $f(x)$ a $[0, \infty)$-ben folytonos és korlátos függvény, és $h_n = o(n)$, akkor

$$B_n(f{:}x) \to f(x), \quad \text{ha} \quad n \to \infty, 0 \leqq x < \infty.$$

Ezen túlmenően CHLODOVSKY bizonyos, nem túl gyorsan növekvő, nem korlátos, folytonos függvényekre is bizonyította a konvergenciát, mégpedig a következő eredményt érte el: ha $M(h_n)$ jelöli az $f(x)$ függvény maximumát $[0, h_n]$-ben, és az

$$M(h_n)e^{-\alpha(n/h_n)} \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

ahol $\alpha > 0$, $h_n = o(n)$, $h_n \to \infty$ ha $n \to \infty$, akkor az (1.1)-beli

$$B_n^*(f, x) \to f(x), \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

CHLODOVSKY igazolta azt is, hogy ha létezik $f'(x)$ a $[0, \infty)$ intervallumban, és $f'(x)$ eleget tesz a fentiekben részletezett nagyságrendi korlátozásnak, ahol most $M(h_n)$ az $f'(x)$ maximumát jelenti a $[0, h_n]$ intervallumban, akkor a $B_n^*(f; x)$ deriváltja is tart $f'(x)$-hez.

A matematikusok azonban nem csak polinomsorozatokat, hanem más típusú operátorsorozatokat is vizsgáltak, mint azt látni fogjuk. Ismert tény, hogy a *Bernstein*-polinomok származtathatók a binomiális eloszlás segítségével. SZÁSZ O. [32] a binomiális eloszlást a *Poisson*-eloszlással helyettesítette, és a következő végtelen összegekből álló operátorsorozatot konstruálta a $[0, \infty)$-ben értelmezett $f(x)$ függvényhez:

$$S_n(f; x) = e^{-nx}\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\frac{(nx)^\nu}{\nu!}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.2}$$

és ezt a *Bernstein*-polinomok általánosításának nevezte. SZÁSZ O. megmutatta, hogy $0 \leqq x < \infty$ esetén $S_n(f; x) \to f(x)$, ha $n \to \infty$, ha $f(x)$ folytonos, és $f(x) = O(x^m)(x \to \infty)$, sőt ha $f^{(k)}(x)$ létezik és $f^{(k)}(x) = O(x^m)(x \to \infty)$, akkor $S_n^{(k)}(f; x)$ is konvergál $f^{(k)}(x)$-hez, $k = 1, 2, \ldots$.

A konvergenciatételt GRÓF [14] élesítette, azaz bebizonyította, hogy $f^{(k)}(x)=O(e^{\alpha x})$ ($x\to\infty$, $\alpha>0$ rögzített) esetén is tart $S_n^{(k)}(f;x)$ $f^{(k)}(x)$-hez. GRÓF aszimptotikus approximációs tételt is igazolt az $S_n(f;x)$-ekre.

GRÓF [15] dolgozatában $S_n(f;x)$-nek a következő véges részletösszegét tekintette:

$$S_n^*(f;x)=e^{-nx}\sum_{\nu=0}^{N}f\left(\frac{\nu}{n}\right)\frac{(nx)^\nu}{\nu!}$$

és sikerült bebizonyítania, hogy ha létezik $f^{(k)}(x)$, akkor $S_n^{*(k)}(f;x)\to f^{(k)}(x)$, ahol $k=0,1,2,\ldots$; $N=N(n)\to\infty$ és $N(n)/n\to\infty$ $(n\to\infty)$; az $f(x)$-re tett alkalmas feltevések mellett.

Megemlítjük, hogy HIRSCHMAN, WIDDER és GELFOND [13], [16], [17] a

$$B_n^{**}(f;x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\binom{n}{k}e^{-kx}(1-e^{-x})^{n-k},\quad x\geqq 0,\ n=1,2,\ldots, \tag{1.3}$$

operátorsorozatról mutatta meg, hogy az $n\to\infty$ esetén konvergál az $f(x)$ függvényhez, ha $f(x)$ korlátos és folytonos a $[0,\infty)$ intervallumban, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ monoton növő, végtelenbe tartó sorozat, és $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ divergens.

Az (1.3)-ban definiált $B_n^{**}(f;x)$-ből a következőképpen kapható a $B_n(f;x)$ Bernstein-polinom: ha bevezetjük a $t=e^{-x}$ változót, és a_k helyébe k-t írva a $\sum_{i=k+1}^{n}\frac{1}{i}$ összeget $\log\frac{n}{k}$-val helyttesítjük (a két kifejezés aszimptotikusan egyenlő, ha n és k elég nagy), és $f\left(\log\frac{1}{t}\right)$-t $g(t)$-nek nevezzük, akkor a $B_n^{**}(f;x)$ helyett a $B_n(g;t)=\sum_{k=0}^{n}g\left(\frac{n}{k}\right)\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$ *Bernstein*-polinomhoz jutunk, tehát ilyen értelemben az (1.3)-beli $B_n^{**}(f;x)$-ek is a *Bernstein*-polinomok általánosításának tekinthetők.

BASZKAKOV [3] általánosabb alakban kereste, hogy milyen sorozatokkal lehet a folytonos függvényeket közelíteni. Bebizonyította, hogy ha $\varphi_n(x)$, $n=1,2,\ldots$, olyan függvények sorozata, hogy

a) $\varphi_n(x)$ analitikus a $[0,2R]$ intervallumban, $R>0$,
b) $\varphi_n(0)=1$,
c) $(-1)^k\varphi_n^{(k)}(x)\geqq 0$, $\quad k=1,2,\ldots,\quad x\in[0,R]$,
d) $-\varphi_n^{(k)}(x)=n\varphi_{m_n}^{(k-1)}(x)\,(1+\alpha_{kn}(x))$,

ahol $k=1,2,\ldots$, $x\in[0,R]$, és $\alpha_{kn}(x)$ egyenletesen tart 0-hoz rögzített k és x mellett, ha $n\to\infty$,

e) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{m_n}=1$,

akkor az

$$L_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{\varphi_n^{(k)}(x)}{k!}(-1)^kx^k,\quad n=1,2,\ldots \tag{1.4}$$

operátorsorozatra teljesül az, hogy $L_n(1; x) \to 1$, $L_n(t; x) \to x$, és $L_n(t^2; x) \to x^2$ egyenletesen a $[0, R]$ intervallumban, ebből pedig KOROVKIN [21] tétele értelmében (a tétel a dolgozat 5. fejezetében is megtalálható) az (1.4)-beli $L_n(f, x)$ $n \to \infty$ esetén egyenletesen konvergál $f(x)$-hez a $[0, R]$ intervallumban, ha $f(x)$ a $[0, R]$-ben folytonos és a $[0, \infty)$-ben korlátos függvény.

Vizsgálta ezenkívül az $L_n(f; x)$ $f(x)$-től való eltérésének nagyságrendjét, és aszimptotikus approximációs tételt is kimondott az $L_n(f; x)$-ekre.

Megmutatta továbbá, hogy $\varphi_n(x)$ helyébe $(1-x)^n$-et írva az (1.4) alatti $L_n(f; n)$-ek éppen a (0.1) Bernstein-polinomok lesznek, $\varphi_n(x)=e^{-nx}$ esetén pedig az (1.2) szerint definiált $S_n(f; x)$ operátorokat kapjuk.

BASZKAKOV a $\varphi_n(x)$-ek helyébe az $\frac{1}{(1+x)^n}$ függvényt tette, és így racionális törtfüggvényeket kapott:

$$L_n(f; x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} \left(\frac{x}{1+x}\right)^k, \tag{1.5}$$

$n=1, 2, \dots$, ez a sorozat pedig tétele értelmében egyenletesen konvergál minden $[0, R]$ intervallumon az $f(x)$ függvényhez, ha $f(x)$ folytonos a $[0, R]$-en, és korlátos az egész számegyenesen.

B. Az $R_n(f; x)$ Bernstein-típusú racionális törtfüggvények definíciója

Legyen $f(x)$ a $[0, \infty)$ intervallumban értelmezett, valós, egyértékű függvény, akkor a hozzá tartozó *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvényen a következőt értjük:

$$R_n(f; x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{b_n}\right) \binom{n}{k} (a_n x)^k, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{1.6}$$

ahol a_n és b_n az x-től nem függő, célszerűen választott, valós szám.

Az (1.6)-ban definiált racionális törtfüggvény valóban *Bernstein*-típusú. Ugyanis az (1.6) alatti $R_n(f; x)$-ben az

$$\frac{(a_n x)^k}{(1+a_n x)^n} = \left(\frac{a_n x}{1+a_n x}\right)^k \left(1 - \frac{a_n x}{1+a_n x}\right)^{n-k}$$

faktorban a $t = \frac{a_n x}{1+a_n x}$ jelölést bevezetve,

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{b_n}\right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

adódik (vö. (0.1)-gyel).

2. FEJEZET

Az $R_n(f; x)$-ek konvergenciatétele

Legyenek $R_n(f; x)$-ek az $f(x)$ függvényhez az (1.6)-ban definiált racionális törtfüggvények, amelyekben $a_n = \frac{b_n}{n}$, $b_n = n^{2/3}$, $n = 1, 2, \ldots$, és legyen $k_{2\omega}(\delta)$ az $f(x)$ függvény folytonossági modulusa a $[0, 2\omega]$ intervallumban, azaz

$$k_{2\omega}(\delta) = \sup_{\substack{x, y \in [0, 2\omega] \\ |x-y| \leqq \delta}} |f(x) - f(y)|.$$

Bizonyítani fogjuk a következő tételt:

I. TÉTEL. *Legyen $f(x)$ a $[0, \infty)$ intervallumban értelmezett, olyan folytonos függvény, amelyre $f(x) = O(e^{\alpha x})$, ha $x \to \infty$ és $\alpha \geqq 0$ tetszőleges, rögzített, valós szám, akkor a $0 \leqq x \leqq \omega$ intervallumban ($\omega > 0$, tetszőleges) az*

$$|f(x) - R_n(f; x)| \leqq c_0 \left\{ k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right) + \frac{1}{n^{2/3}} \right\} \tag{2.1}$$

egyenlőtlenség érvényes, ha n elég nagy, c_0 n-től független állandót jelöl.

A (2.1) egyenlőtlenség azt mutatja, hogy az $R_n(f; x)$ tart $f(x)$-hez, ha $n \to \infty$, minden $x \geqq 0$ esetén, és ez a konvergencia egyenletes minden $0 \leqq x \leqq \omega$ intervallumban.

Megjegyezzük, hogy az a_n és b_n más választása mellett is tart $R_n(f; x)$ az $f(x)$-hez. a_n-nek és b_n-nek a tételben szereplő választása a közelítés nagyságrendje szempontjából látszott célszerűnek.

A tétel igazolásához több segédtételre lesz szükség. A következőkben c_i $(i = 1, 2, \ldots)$ n-től független állandót fog jelölni.

2.1. SEGÉDTÉTEL. *Ha $x \geqq 0$, akkor igazak a következő azonosságok:*

$$\frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} (b_n x - k)^2 \binom{n}{k} (a_n x)^k = \frac{1}{(1+a_n x)^2} (a_n^2 b_n^2 x^4 + b_n x), \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a_n x)^k = 1, \tag{2.3}$$

ahol $n = 1, 2, \ldots$, $a_n = \frac{b_n}{n}$ és $b_n > 0$, tetszőleges, valós szám.

Bizonyítás. A

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a_n x)^k = (1 + a_n x)^n \tag{2.4}$$

nyilvánvaló azonosságot x szerint deriválva, majd x-szel mindkét oldalt szorozva a

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} (a_n x)^k = b_n x (1 + a_n x)^{n-1} \tag{2.5}$$

egyenlőséget kapjuk, ha figyelembe vesszük, hogy $a_n = \frac{b_n}{n}$. Ismét deriválva, és x-szel szorozva a

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} (a_n x)^k = (b_n^2 x^2 + b_n x)(1+a_n x)^{n-2} \tag{2.6}$$

egyenlőséghez jutunk. Ha a (2.4), (2.5) és (2.6) egyenlőségek mindkét oldalát rendre $b_n^2 x^2 (1+a_n x)^{-n}$, $-2b_n x(1+a_n x)^{-n}$, illetve az $(1+a_n x)^{-n}$ kifejezésekkel szorozzuk, majd a három egyenlőséget összeadjuk, akkor a bizonyítandó (2.2) egyenlőséget kapjuk. A (2.3) azonosság (2.4)-ből nyilvánvaló.

2.2. SEGÉDTÉTEL. *A* $0 \leqq x \leqq \omega$ *intervallumban* ($\omega > 0$, *tetszőleges, rögzített*) *érvényes a következő egyenlőtlenség, ha n elég nagy:*

$$A_n = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k/b_n \geqq 2\omega} e^{\alpha(k/b_n)} \binom{n}{k} (a_n x)^k \leqq c_5 \frac{a_n^2 x^4 + (x/b_n)}{(1+a_n x)^2}, \tag{2.7}$$

ahol $\alpha > 0$ *tetszőleges, rögzített, valós szám,* $a_n = \frac{b_n}{n} \to 0$, $b_n \to \infty$, *ha* $n \to \infty$, b_n *egyébként tetszőleges.*

Bizonyítás. Igaz a következő

$$\frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k/b_n \geqq 2\omega} e^{\alpha(k/b_n)} \binom{n}{k} (a_n x)^k = \tag{2.8}$$

$$= \left(\frac{1+a_n x e^{\alpha/b_n}}{1+a_n x}\right)^n \frac{1}{(1+a_n x e^{\alpha/b_n})^n} \sum_{k/b_n \geqq 2\omega} \binom{n}{k} (a_n x e^{\alpha/b_n})^k$$

egyenlőség. Ha $\alpha \geqq 0$ rögzített, $b_n \to \infty$, ha $n \to \infty$, akkor elég nagy n-re

$$e^{\alpha/b_n} - 1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{b_n}\right)^\nu \cdot \frac{1}{\nu!} < \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{b_n}\right)^\nu = \frac{\alpha}{b_n} \cdot \frac{1}{1-(\alpha/b_n)} = \frac{\alpha}{b_n - \alpha},$$

és így mivel $a_n = \frac{b_n}{n}$,

$$\left(\frac{1+a_n x e^{\alpha/b_n}}{1+a_n x}\right)^n = \left(\frac{1+a_n x + a_n x(e^{\alpha/b_n}-1)}{1+a_n x}\right)^n \leqq \left(1 + \frac{\alpha a_n x}{(1+a_n x)(b_n - \alpha)}\right)^n =$$

$$= \left(1 + \frac{\alpha b_n x}{n(1+a_n x)(b_n-\alpha)}\right)^n \leqq \exp\left\{\frac{\alpha b_n x}{(1+a_n x)(b_n - \alpha)}\right\},$$

ebből pedig (mivel $0 \leqq x \leqq \omega$, $b_n \to \infty$ és $a_n \to 0$, ha $n \to \infty$) az

$$\left(\frac{1+a_n x e^{\alpha/b_n}}{1+a_n x}\right)^n \leqq \exp\left\{\frac{\alpha b_n x}{(1+a_n x)(b_n - \alpha)}\right\} \leqq c_1 \tag{2.9}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. A (2.8) és (2.9) alapján, ha $t=xe^{\alpha/b_n}$, igaz a következő egyenlőtlenség:

$$(2.10)\qquad \frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k/b_n\geqq 2\omega} e^{\alpha(k/b_n)}\binom{n}{k}(a_nx)^k \leqq c_1\frac{1}{(1+a_nt)^n}\sum_{k/b_n\geqq 2\omega}\binom{n}{k}(a_nt)^k.$$

Tekintettel arra, hogy $0\leqq x\leqq\omega$, $\frac{k}{b_n}\geqq 2\omega$, ezért ha n elég nagy ($b_n\to\infty$, ha $n\to\infty$),

$$\frac{k}{b_n}-t \geqq 2\omega-\omega e^{1/2} = \omega(2-e^{1/2}) = c_2,$$

ebből pedig átrendezéssel és négyzetre emeléssel a

$$(2.11)\qquad \frac{c_3}{b_n^2}(k-b_nt)^2 \geqq 1$$

egyenlőtlenséghez jutunk. A (2.10), (2.11) és a (2.2) alapján, felhasználva, hogy $t=xe^{\alpha/b_n}$, ahol $\frac{\alpha}{b_n}\to 0$, ha $n\to\infty$,

$$A_n \leqq \frac{c_4}{b_n^2}\cdot\frac{1}{(1+a_nt)^n}\sum_{k/b_n\geqq 2\omega}(k-b_nt)^2\binom{n}{k}(a_nt)^k \leqq c_5\frac{a_n^2x^4+(x/b_n)}{(1+a_nx)^2},$$

ami a (2.7) alatti állítás bizonyítása.

KÖVETKEZMÉNY. *A* $0\leqq x\leqq\omega$ *intervallumban*

$$(2.12)\qquad \lim_{n\to\infty} A_n = 0.$$

A konvergenciatétel bizonyításához szükségünk lesz az $0\leqq x\leqq 2\omega$ intervallumban folytonos $f(x)$ függvényhez tartozó $k_{2\omega}(\delta)$ folytonossági modulus következő, ismert tulajdonságára (lásd pl. [29]):

Ha δ és λ tetszőleges pozitív szám, akkor

$$(2.13)\qquad k_{2\omega}(\lambda\delta) \leqq k_{2\omega}(\delta)\cdot(\lambda+1).$$

Rátérünk a *konvergenciatétel bizonyítására.* Az (1.2) és (2.3) miatt, figyelembe véve a tételben kimondott feltételeket

$$(2.14)\qquad \Delta_n(f;x) = |f(x)-R_n(f;x)| \leqq \frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{b_n}\right)\right|\binom{n}{k}(a_nx)^k \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k/b_n\leqq 2\omega} + \frac{1}{(1+a_nx)^n}\sum_{k/b_n\geqq 2\omega} = S_1+S_2.$$

A feltétel szerint $f(x)$ folytonos az $0\leqq x<\infty$ intervallumban, ezért ha $k_{2\omega}(\delta)$ jelöli a $[0, 2\omega]$ intervallumban a folytonossági modulusát, akkor (2.13) alapján kapjuk, hogy

$$(2.15)\qquad \left|f(x)-f\left(\frac{k}{b_n}\right)\right| \leqq k_{2\omega}\left(\left|x-\frac{k}{b_n}\right|\right) = k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^\beta}\cdot n^\beta\left|x-\frac{k}{b_n}\right|\right) \leqq$$

$$\leqq k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\left(n^\beta\left|x-\frac{k}{b_n}\right|+1\right).$$

A $\beta>0$ számot célszerűen fogjuk választani. A (2.14), (2.15) és (2.3) miatt

$$(2.16)\qquad S_1 \leqq k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\frac{n^\beta}{(1+a_n x)^n}\sum_{k/b_n\leqq 2\omega}\left|x-\frac{k}{b_n}\right|\binom{n}{k}(a_n x)^k+$$
$$+k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k/b_n\leqq 2\omega}\binom{n}{k}(a_n x)^k \leqq S_1'+k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

A *Cauchy—Schwarz*-egyenlőtlenség felhasználásával, majd az összegezést a teljes szummára kiterjesztve, figyelembe véve (2.2)-t és (2.3)-at, kapjuk, hogy

$$(2.17)\qquad S_1' \leqq k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\frac{n^\beta}{b_n}\left\{\frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n}(b_n x-k)^2\binom{n}{k}(a_n x)^k\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_n x)^k\right\}^{1/2} \leqq k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^\beta}\right)\frac{n^\beta}{b_n}\left\{\frac{1}{(1+a_n x)^2}(a_n^2 b_n^2 x^4+b_n x)\right\}^{1/2}.$$

Ha $\beta=\frac{1}{3}$ és $b_n=n^{2/3}$, akkor ebben az esetben $a_n=\frac{b_n}{n}=n^{-1/3}$, ezért a β ilyen választása mellett (2.16) és (2.17) miatt

$$(2.18)\qquad S_1 \leqq k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)[(x^4+x)^{1/2}+1].$$

Jelölje M az $f(x)$ függvény maximumát a $[0,\omega]$ intervallumban. Mivel $f(x)=O(e^{\alpha x})$, ha $x\to\infty$ ($\alpha\geqq 0$ rögzített), ezért (2.14) és (2.7) miatt, figyelemmel a_n és b_n előbbi választására

$$(2.19)\qquad S_2 \leqq \frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k/b_n\geqq 2\omega}(M+c_6 e^{\alpha(k/b_n)})\binom{n}{k}(a_n x)^k \leqq$$
$$\leqq c_7\left(a_n^2 x^4+\frac{x}{b_n}\right) \leqq \frac{c_7}{n^{2/3}}(x^4+x).$$

Ezek után a (2.14)-beli kifejezés a (2.18) és a (2.19) alapján a $0\leqq x\leqq\omega$ intervallumban a következőképpen becsülhető, ha n elég nagy:

$$(2.20)\qquad \Delta_n(f;x) \leqq c_0\left[k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)+\frac{1}{n^{2/3}}\right].$$

Ez pedig az I. tétel állításának bizonyítását adja.

3. FEJEZET

Aszimptotikus approximációs tétel az $R_n(f;x)$-ekre

E. V. Voronovszkaja [33] a (0.1) *Bernstein*-polinomokra bebizonyította, hogy

$$(3.1)\qquad B_n(f;x)=f(x)+\frac{f''(x)}{2n}x(1-x)+\frac{\varrho_n}{n},$$

ha $f(x)$ korlátos a $0\leqq x\leqq 1$ intervallumban, és az x pontban véges második deriváltja van. A (3.1)-ben ϱ_n az n növekedésével nullához tart.

Ebben a részben a (3.1)-hez hasonló aszimptotikus approximációs tételt bizonyítunk az (1.6)-ban definiált $R_n(f; x)$ *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvényekre. A tétel, amit bizonyítani fogunk, a következő:

II. TÉTEL. *Legyen $f(t)$ a $[0, \infty)$ intervallumban értelmezett olyan függvény, hogy $f(t)=O(e^{\alpha t})$, ha $t\to\infty$, $\alpha\geqq 0$ pedig tetszőleges, rögzített, valós szám, akkor minden olyan x pontban, amelyben $f''(t)=f''(x)$ létezik és véges,*

$$R_n(f; x) = f(x)+a_n f'(x)g_1(x)+a_n f''(x)g_2(x)+a_n\varrho_n, \tag{3.2}$$

ahol $\varrho_n\to 0$, $a_n=\frac{b_n}{n}\to 0$ és $\frac{n^{1/2}}{b_n}\to 0$, ha $n\to\infty$, továbbá

$$g_1(x) = \frac{-x^2}{1+a_n x},\quad g_2(x) = \frac{a_n b_n x^4+(x/a_n)}{2b_n(1+a_n x)^2}.$$

Megjegyezzük, hogy az a_n-re és b_n-re vonatkozó kikötések teljesülése esetén a $g_1(x)$ és a $g_2(x)$ csak x-től függő korlát alatt marad, és mivel $a_n\to 0$, ha $n\to\infty$, ezért a III. tétel valóban aszimptotikus approximációs tétel.

A II. tétel bizonyítása. A tételben kimondott feltételek szerint $f''(x)$ véges, így nyilvánvaló, hogy $f(t)$ az

$$f(t) = f(x)+f'(x)\,(t-x)+\left[\frac{f''(x)}{2}+\lambda(t)\right](t-x)^2 \tag{3.3}$$

alakban írható föl, ahol $\lambda(t)\to 0$, ha $t\to x$. Ennek alapján

$$f\left(\frac{k}{b_n}\right) = f(x)+f'(x)\left(\frac{k}{b_n}-x\right)+\left[\frac{f''(x)}{2}+\lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\right]\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^2. \tag{3.4}$$

Behelyettesítve ezt az $R_n(f; x)$-be, kapjuk, hogy

$$R_n(f; x) = \frac{f(x)}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_n x)^k+\frac{f'(x)}{b_n(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n}(k-b_n x)\binom{n}{k}(a_n x)^k+ \tag{3.5}$$

$$+\frac{f''(x)}{2b_n^2(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n}(k-b_n x)^2\binom{n}{k}(a_n x)^k+\frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n}\lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^2\binom{n}{k}(a_n x)^k.$$

Ha (2.5) mindkét oldalát osztjuk $(1+a_n x)^n$-nel, majd levonunk $b_n x$-et, és fölhasználjuk a (2.3) azonosságot, akkor

$$\frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n}(k-b_n x)\binom{n}{k}(a_n x)^k = \frac{-a_n x^2 b_n}{1+a_n x}. \tag{3.6}$$

Figyelembe véve a (2.3), (3.6), (2.2) azonosságokat

$$R_n(f; x) = f(x)+f'(x)\frac{-a_n x^2}{1+a_n x}+f''(x)\frac{a_n^2 b_n x^4+x}{2b_n(1+a_n x)^2}+r_n, \tag{3.7}$$

ahol

$$r_n = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} \lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^2 \binom{n}{k} (a_n x)^k. \tag{3.8}$$

Adjunk meg egy tetszőlegesen kicsiny $\varepsilon > 0$ számot, és válasszuk $\delta > 0$-t olyan kicsire, hogy ha $|t-x| < \delta$, akkor $|\lambda(t)| < \varepsilon$ teljesüljön. Ilyen δ mellett a (3.8) összeget bontsuk két részre:

$$r_n = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2, \tag{3.9}$$

ahol $\sum_1$ tartalmazza azokat a tagokat, ahol $\left|\frac{k}{b_n}-x\right| < \delta$ és $\sum_2$ azokat, ahol $\left|\frac{k}{b_n}-x\right| \geqq \delta$. A $\lambda(t)$-re vonatkozó előző megállapítások és (2.2) miatt

$$\left|\sum\nolimits_1\right| < \frac{\varepsilon}{b_n^2(1+a_n x)^2}(a_n^2 b_n^2 x^4 + b_n x). \tag{3.10}$$

Most felső becslést adunk $|\sum_2|$-re. A továbbiakban c_i, $i=8, 9, \dots$ csak x-től és α-tól függő, n-től független pozitív számok. Legyen $\omega > x$ rögzített szám. $\sum_2$-t bontsuk föl $\sum'$ és $\sum''$ összegére, ahol

$$\sum' = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{|(k/b_n)-x| \geqq \delta \text{ és } k/b_n < 2\omega} \lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^2 \binom{n}{k} (a_n x)^k, \tag{3.11}$$

illetve

$$\sum'' = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k/b_n \geqq 2\omega} \lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^2 \binom{n}{k} (a_n x)^k, \tag{3.12}$$

tehát

$$r_n = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits' + \sum\nolimits''. \tag{3.13}$$

A (3.3)-ból látható, hogy $\lambda(t)(t-x)^2$ korlátos, ha $t \in [0, 2\omega]$. Ezért, ha $\frac{k}{b_n} < 2\omega$ és $\left|\frac{k}{b_n}-x\right| \geqq \delta$, akkor $\left|\lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\right| < \frac{c_8}{\delta^2}$. Így (3.11) és a (2.2) értelmében

$$\left|\sum\nolimits'\right| < \frac{c_8\left(a_n^2 x^4 + (x/b_n)\right)}{\delta^2(1+a_n x)^2}. \tag{3.14}$$

Mivel $f(t) = O(e^{\alpha t})$ $(t \to \infty)$, ezért ha ω-t elég nagynak választjuk, akkor (3.4)-ből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\left|\lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^2\right| &= \left|f\left(\frac{k}{b_n}\right) - f(x) - f'(x)\left(\frac{k}{b_n}-x\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{-f''(x)}{2}\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^2\right| < c_9 e^{\alpha(k/b_n)}, \quad \text{ha} \quad \frac{k}{b_n} \geqq 2\omega.\end{aligned} \tag{3.15}$$

A (3.12), (3.15), (2.7) alapján adódik, hogy

$$\left|\sum\nolimits''\right| < c_{10} \frac{a_n x^4 + (x/b_n)}{(1+a_n x)^2}. \tag{3.16}$$

Legyen most

$$\varrho_n \overset{\text{def}}{=} \frac{r_n}{a_n}. \tag{3.17}$$

A (3.17), (3.13), (3.10), (3.14) és (3.16) alapján

$$|\varrho_n| < \varepsilon \frac{a_n^2 b_n x^4 + x}{a_n b_n (1+a_n x)^2} + \frac{c_8 (a_n^2 b_n x^4 + x)}{\delta^2 a_n b_n (1+a_n x)^2} + c_{10} \frac{a_n^2 b_n x^4 + x}{a_n b_n (1+a_n x)^2} = \tag{3.18}$$

$$= c_{11} \frac{a_n^2 b_n x^4 + x}{a_n b_n (1+a_n x)^2} = c_{12} \left(a_n x^4 + \frac{x}{a_n b_n} \right) \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

mert $a_n = \frac{b_n}{n} \to 0$, és $\frac{n^{1/2}}{b_n} \to 0$, ha $n \to \infty$. A (3.7), (3.8), (3.17), (3.18) a II. tétel igazolását adja.

4. FEJEZET

Az $R_n(f; x)$-ek deriváltjának konvergenciája

Jelöljük $R_n'(f; x)$-szel az $f(x)$ függvényhez tartozó, (1.6) szerint definiált racionális törtfüggvény x szerinti deriváltját. Ekkor igaz a

III. TÉTEL. *Legyen $f(t)$ a $[0, \infty)$ intervallumban értelmezett függvény, amelyre teljesül, hogy $f(t) = O(e^{\alpha t})(t \to \infty)$, $\alpha \geqq 0$ tetszőleges, rögzített, valós szám; tegyük föl továbbá, hogy a $t = x$ pontban $f'(t) = f'(x)$ létezik és véges, akkor*

$$R_n'(f; x) \to f'(x), \quad \text{ha} \quad n \to \infty, \tag{4.1}$$

ahol $a_n = \frac{b_n}{n} \to 0$, ha $n \to \infty$, és $b_n = n^{3/2}$.

A bizonyításhoz néhány lemmára lesz szükség.

4.1. SEGÉDTÉTEL. *Az $x \geqq 0$ feltétel teljesülése esetén az*

$$S_m(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} (k - b_n x)^m \binom{n}{k} (a_n x)^k, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.2}$$

racionális törtfüggvények között fennáll a következő rekurzív összefüggés:

$$S_{m+1}(x) = x \left[S_m'(x) + m b_n S_{m-1}(x) - \frac{a_n b_n x}{1+a_n x} S_m(x) \right], \quad m = 1, 2, \ldots \tag{4.3}$$

Bizonyítás. $S_m(x)$-et deriválva azt kapjuk, hogy

$$S_m'(x) = \frac{-1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} (k - b_n x)^{m-1} \binom{n}{k} (a_n x)^k \cdot m \cdot b_n +$$

$$+ \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} (k - b_n x)^{m-1} \binom{n}{k} (a_n x)^{k-1} \cdot (k - b_n x) \left(a_n k - a_n b_n x + a_n b_n x - \frac{a_n b_n x}{1+a_n x} \right).$$

Ebből megfelelő átírással

$$S_m'(x) = -mb_n S_{m-1}(x) + \frac{1}{x} S_{m+1}(x) + \left(b_n - \frac{b_n}{1+a_n x}\right) S_m(x),$$

ahonnan a bizonyítandó (4.3) adódik.

4.2. SEGÉDTÉTEL. *A (4.2)-ben definiált $S_m(x)$ racionális törtfüggvény előállítható a*

$$S_m(x) = \frac{1}{(1+a_n x)^m} \sum_{i=0}^{m} A_{m,i}(x) b_n^i, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.4}$$

alakban, ahol $A_{m,i}(x)$ polinomok b_n-től függetlenek, és együtthatóik az a_n polinomjai.

Bizonyítás. A (4.4) igazolása m szerinti teljes indukcióval történik. $S_0(x)$ éppen a (2.3) kifejezés, azaz

$$S_0(x) = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a_n x)^k = 1. \tag{4.5}$$

$S_1(x)$ pedig a (3.6) kifejezés:

$$S_1(x) = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} (k - b_n x) \binom{n}{k} (a_n x)^k = \frac{-a_n x^2 b_n}{1+a_n x} = \frac{A_{1,0}(x) + A_{1,1}(x) b_n}{1+a_n x}, \tag{4.6}$$

ahol $A_{1,0}(x)=0$, $A_{1,1}(x) = -a_n x^2$. $S_2(x)$ a (2.2)-ből adódik:

$$S_2(x) = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} (k - b_n x)^2 \binom{n}{k} (a_n x)^k = \frac{a_n^2 b_n^2 x^4 + b_n x}{(1+a_n x)^2} = \tag{4.7}$$

$$= \frac{A_{2,0}(x) + A_{2,1}(x) b_n + A_{2,2}(x) b_n^2}{(1+a_n x)^2},$$

ahol $A_{2,0}(x)=0$, $A_{2,1}(x)=x$ és $A_{2,2}(x)=a_n^2 \cdot x^4$. A (4.5), (4.6), (4.7)-ből látható, hogy a segédtétel állítása igaz az $m=0, 1, 2$ esetben. Tételezzük föl, hogy az állítás igaz m-re, és igazoljuk $m+1$-re is. A (4.3) rekurziós formula és az indukciós föltevés szerint

$$S_{m+1}(x) = x \left[\frac{\sum_{i=0}^{m} A_{m,i}' b_n^i (1+a_n x)^m - \sum_{i=0}^{m} A_{m,i}(x) b_n^i m a_n (1+a_n x)^{m-1}}{(1+a_n x)^{2m}} + \right.$$

$$\left. + \frac{m b_n}{(1+a_n x)^{m-1}} \sum_{i=0}^{m-1} A_{m-1,i}(x) b_n^i - \frac{a_n b_n x}{(1+a_n x)^{m+1}} \sum_{i=0}^{m} A_{m,i}(x) b_n^i \right],$$

ebből pedig átrendezéssel adódik, hogy

$$S_{m+1}(x) = \frac{1}{(1+a_n x)^{m+1}} \sum_{i=0}^{m+1} A_{m+1,i}(x) b_n^i,$$

ahol az $A_{m+1,i}(x)$ polinomok nyilvánvalóan eleget tesznek a segédtételben kimondottaknak.

4.3. SEGÉDTÉTEL. *Minden* $0 \leqq x \leqq \omega < \infty$ *intervallumban fönnáll a következő egyenlőtlenség, ha n elég nagy:*

$$(4.8)\qquad |S_m(x)| = \left|\frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n}(k-b_n x)^m \binom{n}{k}(a_n x)^k\right| \leqq K_m(\omega) a_n^m \cdot b_n^m,$$

$m=0, 1, 2, \ldots$, *ahol* $K_m(\omega)$ *csak* ω*-tól függő, pozitív állandó,* $a_n = \frac{b_n}{n}$, $b_n = n^{2/3}$.

Bizonyítás. (4.4) szerint

$$(4.9)\qquad S_m(x) = \frac{g_m(x)}{(1+a_n x)^m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

ahol $g_m(x) = \sum_{i=0}^{m} A_{m,i}(x) b_n^i$. Megmutatjuk, hogy $g_m(x)$ az x-nek $2m$-edfokú polinomja. (4.8) szerint

$$(4.10)\qquad S_m(x) = \frac{P_{n+m}(x)}{(1+a_n x)^n}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

ahol $P_{n+m}(x)$ pontosan $n+m$-edfokú polinom. $S_m(x)$ (4.9)-beli alakjából a (4.10) $(1+a_n x)^{n-m}$-mel való bővítéssel adódott, és ez csak úgy lehetséges, ha $g_m(x)$ pontosan $2m$-edfokú polinom.

Ezek után (4.8)-at m szerinti teljes indukcióval látjuk be. $m=0$ esetben $S_0(x) \equiv 1$, tehát (4.8) triviálisan teljesül. Az $m=1$ esetben, (4.6) értelmében

$$|S_1(x)| = \frac{a_n b_n x^2}{1+a_n x} \leqq \frac{\omega^2}{1+\omega} a_n b_n = K_1(\omega) a_n b_n.$$

Most tegyük fel, hogy valamilyen m természetes szám esetén igaz a (4.8) és lássuk be $m+1$-re. (4.9) és (4.3) szerint

$$(4.11)\qquad S_{m+1}(x) = x\left[\frac{g_m'(x)(1+a_n x)^m + g_m(x)(1+a_n x)^{m-1}\cdot m a_n}{(1+a_n x)^{2m}} + \right.$$

$$\left. + \frac{m b_n g_{m-1}(x)}{(1+a_n x)^{m-1}} - \frac{a_n b_n x g_m(x)}{(1+a_n x)^{m+1}}\right] = \frac{g_m'(x) x}{(1+a_n x)^m} + \frac{g_m(x)(x m a_n - a_n b_n x^2)}{(1+a_n x)^{m+1}} + \frac{g_{m-1}(x) m b_n x}{(1+a_n x)^{m-1}}.$$

A polinomokra vonatkozó *Markov*-egyenlőtlenség kimondja, hogy ha egy $Q(x)$ k-adfokú polinom abszolút értéke az $[a, b]$-n egy C korlát alatt marad, akkor

$$(4.12)\qquad |Q'(x)| \leqq \frac{2Ck^2}{(b-a)}, \quad \text{ha} \quad a \leqq x \leqq b.$$

Alkalmazzuk $g_m(x)$-re a *Markov*-egyenlőtlenséget. Mivel a (4.8) indukciós feltétel szerint

$$|g_m(x)| \leqq K_m(\omega) a_n^m b_n^m (1+a_n x)^m,$$

ezért

$$(4.13)\qquad |g_m'(x)| \leqq \frac{8m^2 k_m(\omega) a_n^m b_n^m}{\omega}(1+a_n x)^m \leqq K_m'(\omega) a_n^m b_n^m,$$

ha $0 \leqq x \leqq \omega$. (4.11), (4.8) és (4.13) alapján $a_n^{m+1} b_n^{m+1}$ kiemelésével

$$|S_{m+1}(x)| \leqq a_n^{m+1} b_n^{m+1} \left[\frac{K'_m(\omega)}{a_n b_n (1+a_n x)^m} + \left| \frac{K_m(\omega)(xm/b_n - x^2)}{(1+a_n x)^{m+1}} \right| + \right.$$

$$\left. + \frac{K_{m-1}(\omega) m x}{a_n^2 b_n (1+a_n x)^{m-1}} \right] \leqq K_{m+1}(\omega) a_n^{m+1} b_n^{m+1}$$

adódik.

A *III. tétel bizonyítása.* Tekintsük előbb azt az esetet, amikor $x > 0$. Az (1.6) és (2.3) miatt

$$R'_n(f; x) = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{b_n}\right) \binom{n}{k} a_n (a_n x)^{k-1} \left(k - \frac{b_n x}{1+a_n x}\right), \tag{4.14}$$

ebből átalakítással

$$R'_n(f, x) = \frac{1}{x(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{b_n}\right) \binom{n}{k} (a_n x)^k (k - b_n x) + \tag{4.15}$$

$$+ \frac{a_n b_n x}{(1+a_n x)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{b_n}\right) \binom{n}{k} (a_n x)^k .$$

Mivel $f'(x)$ létezik és véges, ezért

$$f\left(\frac{k}{b_n}\right) = f(x) + \left[f'(x) + \lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\right] \left(\frac{k}{b_n} - x\right), \tag{4.16}$$

ahol $\lambda(t) \to 0$, ha $t \to x$. Figyelembe véve a (4.15), (4.16), (2.2) és (4.6) alattiakat, átalakítással adódik, hogy

$$R'_n(f, x) = f'(x) \frac{1}{(1+a_n x)^2} + \Delta_n, \tag{4.17}$$

ahol

$$\Delta_n = \frac{b_n}{x(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} \lambda\left(\frac{k}{b_n}\right) \binom{n}{k} (a_n x)^k \left(\frac{k}{b_n} - x\right)^2 + \tag{4.18}$$

$$+ \frac{a_n b_n x}{(1+a_n x)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \lambda\left(\frac{k}{b_n}\right) \binom{n}{k} (a_n x)^k \left(\frac{k}{b_n} - x\right).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőlegesen kicsi, rögzített szám. Ekkor $\lambda(t) \to 0$ $(t \to x)$ miatt van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|\lambda(t)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad |t - x| < \delta. \tag{4.19}$$

Legyen továbbá $\omega > x$ rögzített szám. Bontsuk föl Δ_n-t:

$$\Delta_n = \frac{b_n}{x(1+a_nx)^n}\left\{\sum_{|(k/b_n)-x|<\delta}\lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\binom{n}{k}(a_nx)^k\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^2+\right.$$
$$\left.+\sum_{|(k/b_n)-x|\geqq\delta \text{ és } k/b_n<2\omega}+\sum_{k/b_n\geqq 2\omega}\right\}+$$
$$+\frac{a_nb_nx}{(1+a_nx)^{n+1}}\left\{\sum_{|(k/b_n)-x|<\delta}\lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\binom{n}{k}(a_nx)^k\left(\frac{k}{b_n}-x\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{|(k/b_n)-x|\geqq\delta \text{ és } k/b_n<2\omega}+\sum_{k/b_n\geqq 2\omega}\right\} = A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6. \tag{4.20}$$

(4.20), (4.19) és (2.2) miatt

$$|A_1| < \varepsilon\frac{a_n^2b_nx^3+1}{(1+a_nx)^2} < 2\cdot\varepsilon\omega^3, \quad \text{ha} \quad n \text{ elég nagy.} \tag{4.21}$$

Hasonlóan, (4.20) és (4.6) miatt

$$|A_4| < \varepsilon\frac{a_n^2b_nx^3}{(1+a_nx)^2} < \varepsilon\omega^3. \tag{4.22}$$

A $\lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\left(\frac{k}{b_n}-x\right)$ függvény (4.16) miatt korlátos, ha $\frac{k}{b_n}<2\omega$, sőt igaz az is, hogy

$$\left|\lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\right| < \frac{c_{12}}{\delta}, \quad \text{ha} \quad \left|\frac{k}{b_n}-x\right| \geqq \delta \quad \text{és} \quad \frac{k}{b_n} < 2\omega. \tag{4.23}$$

(c_i, $i=12, 13, \ldots$, ω-tól és α-tól függő, n-től független pozitív szám.) (4.20)-ból és (4.23)-ból következik, hogy

$$|A_2| \leqq \frac{c_{12}b_n}{\delta^3x(1+a_nx)^n}\sum_{|(k/b_n)-x|\geqq\delta \text{ és } k/b_n<2\omega}\binom{n}{k}(a_nx)^k\left(\frac{k}{b_n}-x\right)^4. \tag{4.24}$$

(4.8) és (4.24) alapján

$$|A_2| < \frac{c_{12}K_4(\omega)a_n^4b_n^4}{\delta^3b_n^4x} < c_{13}a_n^4b_n, \tag{4.25}$$

$c_{13}\cdot a_n^4b_n$ pedig 0-hoz tart a_n és b_n választása miatt.

Ha ω-t elég nagynak választjuk, akkor $f(t)=O(e^{\alpha t})(t\to\infty)$ miatt (4.16)-ból látható, hogy

$$\left|\lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\right| < c_{14}e^{\alpha(k/b_n)}, \quad \text{ha} \quad \frac{k}{b_n} \geqq 2\omega. \tag{4.26}$$

(4.20)-ból és (4.26)-ból azt kapjuk, hogy

$$|A_3| \leqq \frac{c_{14}}{b_nx(1+a_nx)^n}\sum_{k/b_n\geqq 2\omega}e^{\alpha(k/b_n)}\binom{n}{k}(a_nx)^k(k-b_nx)^2.$$

Alkalmazzuk a *Cauchy—Schwarz*-egyenlőtlenséget:

$$|A_3| \leqq \frac{c_{14}}{b_n x}\sqrt{\frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k/b_n \geqq 2\omega} e^{2\alpha(k/b_n)}\binom{n}{k}(a_n x)^k}\sqrt{\frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_n x)^k (k-b_n x)^4}.$$

A (2.7) tetszőleges $\alpha \geqq 0$-ra teljesül. (2.7) és (4.8) felhasználásával adódik, hogy

$$|A_3| \leqq \frac{c_{15}}{b_n x}\sqrt{\frac{a_n^2 x^4 + (x/b_n)}{(1+a_n x)^2}}\sqrt{K_4(\omega) a_n^4 b_n^4} < \tag{4.27}$$

$$< c_{16}(a_n^3 b_n + a_n^2 b_n^{1/2}) \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

$|A_5|$ becslését (4.23)-ból és (2.2)-ből kapjuk:

$$|A_5| = \left|\frac{a_n b_n x}{(1+a_n x)^{n+1}} \sum_{|(k/b_n)-x| \geqq \delta \text{ és } k/b_n < 2\omega} \lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\binom{n}{k}(a_n x)^k\left(\frac{k}{b_n}-x\right)\right| \leqq \tag{4.28}$$

$$\leqq \frac{c_{12} a_n x (a_n^2 b_n x^4 + x)}{\delta^2 (1+a_n x)^3} = a_n(c_{17} a_n^2 b_n + c_{18}),$$

ez pedig tart 0-hoz, ha $n \to \infty$. (4.26)-ból következik, hogy

$$\left|\lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\left(\frac{k}{b_n}-x\right)\right| \leqq c_{19} e^{\alpha(k/b_n)}, \quad \text{ha} \quad \frac{k}{b_n} \geqq 2\omega. \tag{4.29}$$

(4.29) és (2.7) felhasználásával becsüljük $|A_6|$-ot:

$$|A_6| = \left|\frac{a_n b_n x}{(1+a_n x)^{n+1}} \sum_{k/b_n \geqq 2\omega} \lambda\left(\frac{k}{b_n}\right)\binom{n}{k}(a_n x)^k\left(\frac{k}{b_n}-x\right)\right| \leqq \tag{4.30}$$

$$\leqq \frac{a_n b_n x c_{19} c_5 (a_n^2 x^4 + x/b_n)}{(1+a_n x)^3} \leqq c_{20}(a_n^3 b_n + a_n) \to 0,$$

ha $n \to \infty$.

(4.21), (4.25), (4.27), (4.22), (4.28), és (4.30)-ból látható, hogy

$$|\varDelta_n| \leqq \sum_{i=1}^{6} |A_i| \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

Így (4.17)-ből következik, hogy

$$R_n'(f; x) \to f'(x), \quad \text{ha} \quad n \to \infty, \quad \text{és} \quad x > 0.$$

Legyen most $x=0$, akkor a III. tétel feltétele értelmében $f'(+0)$ létezik és véges, s így $R_n(f; x)$ (1.6) alatti értelmezése miatt

$$R_n'(f; x)|_{x=0} = \left\{\frac{1}{(1+a_n x)^n} f(0) + nf\left(\frac{1}{b_n}\right)\frac{a_n x}{(1+a_n x)^n}\right\}'\Bigg|_{x=0} =$$

$$= b_n\left(-f(0) + f\left(\frac{1}{b_n}\right)\right) \to f'(0),$$

mivel $b_n \to \infty$, ha $n \to \infty$.

Ezzel a III. tételt igazoltuk.

5. FEJEZET

Az $R_n(f; x)$-ek kapcsolata a valószínűségszámítással

Ebben a fejezetben a konvergenciatétellel (I. tétel) kapcsolatos valószínűségszámítási tétellel foglalkozunk. Ebből a tételből következik, hogy bizonyos feltételeket teljesítő valószínűségeloszlások segítségével alkotott pozitív, lineáris operátorokkal korlátos és folytonos függvényeket közelíthetünk. Mi itt megmutatjuk, hogy a *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvények is származtathatók egy speciális valószínűségeloszlás-sorozat segítségével, továbbá, hogy az eloszlásoknak ez a sorozata is teljesíti az említett tétel feltételeit. Így a folytonos és korlátos függvényeknek *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvényekkel való közelítésére vonatkozó konvergenciatételt valószínűségszámítási eszközökkel is megkapjuk, hasonlóan, mint más, nevezetes eloszlásokkal konstruált operátorok esetén.

Az itt következő tétel nagy jelentőségű mind a valószínűségszámításban, mind az approximációelméletben, számos következménye és alkalmazása miatt.

Tegyük föl, hogy az x paraméter valamilyen véges vagy végtelen intervallumban változhat. Ekkor igaz a következő:

IV. TÉTEL. *Legyen $F_{n,x}$, $n=1, 2, \ldots$, $M_n(x)$ várható értékű és $D_n^2(x)$ szórásnégyzetű valószínűségeloszlások olyan sorozata, amelyre teljesül, hogy $M_n(x) \to x$, és $D_n^2(x) \to 0$, ha $n \to \infty$. Legyen továbbá $f(t)$ az egész számegyenesen korlátos és folytonos függvény. Ekkor*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dF_{n,x}(t) \to f(x), \quad \text{ha} \quad n \to \infty. \tag{5.1}$$

A konvergencia egyenletes minden olyan $-\infty < a \leqq x \leqq b < \infty$ intervallumban, ahol $M_n(x)$ egyenletesen tart x-hez, $D_n^2(x)$ egyenletesen tart 0-hoz.

FELLER [12] könyvének 218. oldalán található „fő lemma" konklúziója hasonló, ott azonban a szigorúbb $M_n(x)=x$, $n=1, 2, \ldots$, feltétel fönnállását követelik meg $M_n(x) \to x$ $(n \to \infty)$ helyett. Ahhoz, hogy a tétel eredményét a *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvények által meghatározott valószínűségeloszlásokra is alkalmazhassuk, a tételt az $M_n(x) \to x$ esetben is bizonyítani kell.

A IV. tételt a funkcionálanalízis eszközeivel KOROVKIN [21] is bebizonyította, valamivel általánosabb feltételek mellett. Ő ugyanis nem szorítkozott a valószínűségi eloszlásfüggvények szerint vett *Stieltjes*-integrálok esetére. A teljesség kedvéért röviden ismertetjük KOROVKIN eredményeit is. Az első tétel, amit KOROVKINtól idézünk, bizonyos pozitív lineáris funkcionálok sorozatára vonatkozik.

Azt mondjuk, hogy Φ a valós számokon értelmezett, valós számértékű függvények egy F halmazán értelmezett pozitív lineáris funkcionál, ha minden $f \in F$ függvényhez egy valós számot rendel, amit $\Phi(f)$-fel jelölünk, és Φ-re és F-re teljesülnek a következő tulajdonságok: tetszőleges a, b valós szám és $f_1 \in F$ és $f_2 \in F$ függvény esetén $af_1 + bf_2 \in F$, és

$$\Phi(af_1 + bf_2) = a\Phi(f_1) + b\Phi(f_2),$$

továbbá $\Phi(f) \geqq 0$, minden pozitív $f \in F$ függvény esetén (f-et akkor nevezzük pozitív függvénynek, ha $f(t) \geqq 0$ minden t-re).

TÉTEL (KOROVKIN [21]). *Ha pozitív lineáris funkcionálok* $\Phi_n(f)$, $n=1, 2, \dots$ *sorozatára teljesül, hogy*

$$\Phi_n(1) \to 1 \quad \text{és} \quad \Phi_n(\Psi) \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

ahol $\Psi(t)=(t-x)^2$, *akkor*

$$\Phi_n(f) \to f(x), \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

minden olyan $f(t)$ *függvény esetén, amely korlátos az egész számegyenesen, és a* $t=x$ *pontban folytonos.*

A tétel következménye könnyen ellenőrizhető feltételt fogalmaz meg annak eldöntésére, hogy a $\Phi_n(f)$ pozitív lineáris funkcionálok sorozatával közelíthetjük-e $f(x)$-et.

KÖVETKEZMÉNY. *Ha pozitív lineáris funkcionálok* $\Phi_n(f)$, $n=1, 2, \dots$, *sorozatára teljesül, hogy*

$$\Phi_n(1) \to 1,$$

$$\Phi_n(t) \to x,$$

$$\Phi_n(t^2) \to x^2, \quad \text{ha } n \to \infty,$$

akkor

$$\Phi_n(f) \to f(x), \quad \text{ha } n \to \infty,$$

minden olyan $f(t)$ *függvény esetén, amely korlátos az egész számegyenesen, és a* $t=x$ *pontban folytonos.*

Most vizsgáljuk meg, hogyan következik a IV. tétel KOROVKIN tételéből. Legyen F a korlátos és folytonos függvények halmaza. Értelmezzük F-en a következő lineáris funkcionál sorozatot:

$$\Phi_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dF_{n,x}(t), \quad n = 1, 2, \dots,$$

ahol $F_{n,x}$, ($n=1, 2, \dots$, x rögzített paraméter) olyan valószínűségeloszlások sorozata, amelyeknek $M_n(x)$ várható értéke x-hez, $D_n^2(x)$ szórásnégyzete 0-hoz tart, ha $n \to \infty$. A $\Phi_n(f)$ létezik, és pozitív lineáris funkcionál, mert folytonos és korlátos függvénynek valószínűségi eloszlásfüggvény szerint vett *Stieltjes*-integrálja. Azonnal látható, hogy az így választott Φ_n, $n=1, 2, \dots$, sorozat teljesíti a következmény feltételeit, mert

$$\Phi_n(1) = \int_{-\infty}^{\infty} 1 dF_{n,x}(t) = 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

és

$$\Phi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} t dF_{n,x}(t) = M_n(x) \to x, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

továbbá a

$$D_n^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (t-M_n(x))^2 dF_{n,x}(t)$$

azonosságból átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 dF_{n,x}(t) = D_n^2(x)+2M_n(x) \int_{-\infty}^{\infty} t dF_{n,x}(t) - \int_{-\infty}^{\infty} (M_n(x))^2 dF_{n,x}(t) =$$

$$= D_n^2(x)+2M_n^2(x)-M_n^2(x) = D_n^2(x)+M_n^2(x) \to x^2, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

KOROVKIN az egyenletes konvergencia fennállásának feltételeit is vizsgálta, bizonyos pozitív lineáris operátorok sorozatával való közelítés esetén.

Azt mondjuk, hogy az $f(t)$ függvények egy F halmazán adott egy $L(f; x)$ lineáris operátor, ha minden $f(t) \in E$ függvényhez egy $\varphi(x) = L(f; x)$ függvény van rendelve, továbbá tetszőleges a, b valós szám és $f_1 \in F$ és $f_2 \in F$ függvény esetén $af_1+bf_2 \in F$, és

$$L(af_1+bf_2; x) = aL(f_1; x)+bL(f_2; x).$$

Az $L(f; x)$ lineáris operátort a számegyenes E részhalmazán pozitív lineáris operátornak nevezzük, ha $x \in E$ esetén $L(f; x) \geqq 0$, minden olyan $f(t)$ függvény mellett, amely nem vesz föl negatív értékeket.

Megjegyezzük, hogy az $L(f; x)$ pozitív lineáris operátor minden rögzített $x \in E$ esetén egy pozitív lineáris funkcionál. Ha pedig minden rögzített $x \in E$ esetén $L(f; x)$ pozitív lineáris funkcionál, akkor $L(f; x)$ pozitív lineáris operátor az E halmazon.

TÉTEL (KOROVKIN [21]). *Ha az $L_n(f; x)$, $n=1, 2, \ldots$, pozitív lineáris operátorok sorozatára teljesülnek a következő feltételek:*

$$L_n(1; x) = 1+\alpha_n(x),$$

$$L_n(t; x) = x+\beta_n(x),$$

$$L_n(t^2; x) = x^2+\gamma_n(x),$$

ahol $\alpha_n(x)$, $\beta_n(x)$ és $\gamma_n(x)$ egyenletesen tart 0-hoz az $a \leqq x \leqq b$ véges, zárt intervallumon $n \to \infty$ mellett, akkor

$$L_n(f; x) \to f(x), \quad ha \quad n \to \infty,$$

egyenletesen az $a \leqq x \leqq b$ intervallumban, ha $f(t)$ korlátos függvény az egész számegyenesen, $[a, b]$-ben pedig folytonos.

Változzon most x a számegyenes valamely véges vagy végtelen intervallumában. Ekkor a IV. tételben szereplő

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dF_{n,x}(t) = \varphi_n(x) = L_n(f; x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

sorozat pozitív lineáris operátorsorozat, hiszen már korábban láttuk, hogy rögzített x mellett a

$$\Phi_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dF_{n,x}(t), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

sorozat pozitív lineáris funkcionálsorozat. Az így alkotott pozitív lineáris operátorsorozatok közül véges intervallumban való egyenletes konvergencia teljesülését fogjuk látni az a), b), c) és d) pontban szereplő $B_n(f; x)$, $S_n(f; x)$, $G_n(f; x)$, illetve $R_n(f; x)$ $(n=1, 2, \dots)$ operátorsorozatoknál.

Most pedig rátérünk a *IV. tétel bizonyítására.*

Bizonyítás. Nyilván

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dF_{n,x}(t) - f(x) \right| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)-f(x)|\, dF_{n,x}(t). \tag{5.2}$$

Legyen $\varepsilon>0$ tetszőlegesen kicsi, rögzített szám. Mivel f folytonos, ezért van olyan $\delta>0$, hogy $|f(t)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$, ha $|t-x|<\delta$, és így

$$\int_{|t-x|<\delta} |f(t)-f(x)|\, dF_{n,x}(t) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.3}$$

Másrészt

$$\int_{|t-x|\geqq\delta} |f(t)-f(x)|\, dF_{n,x}(t) \leqq \tag{5.4}$$

$$\leqq \int_{|t-x|\geqq\delta} \left|f(t)-f(M_n(x))\right| dF_{n,x}(t) + \int_{|t-x|\geqq\delta} \left|f(M_n(x))-f x)\right| dF_{n,x}(t).$$

A *Csebisev*-egyenlőtlenség szerint

$$P_n\left(|t-M_n(x)| \geqq \delta\right) \leqq \frac{D_n^2(x)}{\delta^2},$$

ezért f korlátossága miatt van olyan rögzített K szám, hogy

$$\int_{|t-x|\geqq\delta} \left|f(t)-f(M_n(x))\right| dF_{n,x}(t) \leqq \frac{KD_n^2(x)}{\delta^2}, \tag{5.5}$$

és elég nagy n-re

$$\frac{KD_n^2(x)}{\delta^2} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.6}$$

Mivel $M_n(x)\to x$, ha $n\to\infty$, ezért f folytonossága miatt

$$\left|f(M_n(x))-f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{5.7}$$

ha n elég nagy.

(5.5), (5.6) és (5.7) értelmében elég nagy n-re

$$\int_{|t-x|\geqq\delta} |f(t)-f(x)|\, dF_{n,x}(t) \leqq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}. \tag{5.8}$$

(5.2), (5.3) és (5.8) alapján pedig elég nagy n-re

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dF_{n,x}(t)-f(x)\right| < \varepsilon.$$

Ha az $-\infty<b\leqq x\leqq a<\infty$ intervallumban $M_n(x)$ és $D_n^2(x)$ egyenletesen tart x-hez, illetve 0-hoz, akkor a bizonyítás menetéből látható, hogy van olyan N természetes szám, hogy $n>N$ esetén

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dF_{n,x}(t)-f(t)\right| < \varepsilon,$$

minden $x\in[a, b]$ mellett.

Most a IV. tétel segítségével ismét bebizonyítjuk a *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvények konvergenciatételét korlátos és folytonos f függvényekre. Előtte ismertetjük a tétel néhány más, ismert, jellegében hasonló alkalmazását is, ahol ismert valószínűségeloszlásokról mutatjuk meg, hogy teljesítik a IV. tétel feltételeit, így ismert konvergenciatételek valószínűségszámítási bizonyítását kapjuk. Az a) pontban $F_{n,x}$-ként a binomiális eloszlás szerepel, és a (0.1)-ben megadott $B_n(f; x)$ *Bernstein*-polinom felel meg az $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dF_{n,x}(t)$-nek. A b) pontban a *Poisson*-eloszlással, illetve az (1.2)-beli *Szász*-féle operátorral foglalkozunk, a c) pontban a gammaeloszlással, illetve az ún. gammaoperátorral. Ezekből is látható, hogy sokszor a valószínűségszámítási módszerek igen célravezetőek lehetnek. Ezek után a d) pontban hasonló módszerrel tárgyaljuk az (1.6) *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvények, illetve az általuk meghatározott és a rövidség kedvéért „kvázibinomiális" eloszlásnak nevezett eloszlás esetét.

a) Legyen ξ_i, $i=1, 2, \ldots, n$, olyan független valószínűségi változók sorozata, amelyek 1 és 0 értéket vesznek föl, x, illetve $1-x$ valószínűséggel, $0\leqq x\leqq 1$. $F_{n,x}$ legyen $(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)n^{-1}$ eloszlása, azaz legyen

$$F_{n,x} = P\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}{n} = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}.$$

$F_{n,x}$ tehát binomiális eloszlás, várható értéke $M_n(x)=x$, szórásnégyzete pedig

$$D_n^2(x) = \frac{x(1-x)}{n} \to 0, \quad \text{ha} \quad n\to\infty,$$

a $0\leqq x\leqq 1$ intervallumban egyenletesen. Ha f a $[0, 1]$-ben folytonos függvény, amiből következik, hogy itt egyenletesen folytonos és korlátos is, akkor a IV. tétel értelmében

$$\int_0^1 f(t)\,dF_{n,x}(t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = B_n(f; x) \to f(x),$$

ha $n\to\infty$, és $0\leqq x\leqq 1$, és a konvergencia egyenletes. Azaz konstruktív, valószínűségszámítási bizonyítását kaptuk WEIERSTRASS híres tételének, amely kimondja, hogy véges, zárt intervallumban folytonos függvény egyenletesen közelíthető polinomok sorozatával, mégpedig konkrétan BERNSTEIN $B_n(f; x)$, $n=1, 2, \ldots$, polinomjaival ([6]).

b) Legyen most $F_{n,x}$ a $(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)n^{-1}$ eloszlása $(n=1, 2, \ldots)$, ahol ξ_i, $i=1, 2, \ldots, n$, független, x paraméterű, *Poisson*-eloszlású valószínűségi változók sorozata, $0 \leqq x < \infty$. Ekkor

$$M_n(x) = x, \quad D_n^2(x) = \frac{x}{n} \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

minden $0 \leqq a \leqq x \leqq b < \infty$ intervallumban egyenletesen. $f(t)$ legyen tetszőleges, $[0, \infty)$-ben korlátos és folytonos függvény. Vezessük be az

$$S_n(f; x) = \int_0^\infty f(t)\,dF_{n,x}(t)$$

jelölést. $S_n(f; x)$-et *Szász—Mirakyan*-féle operátornak is szokták nevezni. $S_n(f; x)$-re alkalmazhatjuk a IV. tételt:

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^\infty f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \to f(x), \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

a $0 \leqq x < \infty$ intervallumban. A konvergencia minden $0 \leqq a \leqq x \leqq b < \infty$ intervallumban egyenletes. Mint az 1. fejezetben említettük, az $S_n(f; x)$-ekre vonatkozó tételt SzÁsz O. [32] bizonyította be, a korlátosság helyett azt az esetet is megengedve, ha $f(t) = O(t^m)$, ha $t \to \infty$, m tetszőleges.

c) Legyen $F_{n,x}$, $n=1, 2, \ldots$, a $(0, \infty)$-be koncentrált n-edrendű, n/x paraméterű gammaeloszlások sorozata, $x>0$. $F_{n,x}$-ek teljesítik a IV. tétel feltételeit, hiszen

$$M_n(x) = x, \quad D_n^2(x) = \frac{x^2}{n} \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to \infty.$$

A szórásnégyzet egyenletesen tart 0-hoz minden $0 < a \leqq x \leqq b < \infty$ intervallumban. Ha f $(0, \infty)$-ben folytonos és korlátos függvény, akkor a IV. tétel értelmében f közelíthető a

$$G_n(f; x) = \int_0^\infty f(t)\,dF_{n,x}(t), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ún. gammaoperátorok sorozatával, azaz

$$G_n(f; x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty f(t) \left(\frac{n}{x}\right)^n t^{n-1} e^{-(n/x)t}\,dt \to f(x),$$

ha $n \to \infty$, és $x>0$. A konvergencia $(0, \infty)$ minden véges részintervallumában egyenletes.

d) Ebben a pontban valószínűségszámítási eszközökkel látjuk be, hogy a $[0, \infty)$-ben folytonos és korlátos függvények közelíthetők az (1.6) *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvényekkel.

Először bevezetjük a „kvázibinomiális” eloszlás fogalmát. Legyen $x \geqq 0$, $a_n > 0$, $n=1, 2, \ldots$. Tekintsük az (1.6)-ban definiált $R_n(f; x)$ n-edik *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvény k-adik alapfüggvényét. Az $x \geqq 0$ és $a_n > 0$ feltétel miatt

$$\frac{1}{(1+a_n x)^n}\binom{n}{k}(a_n x)^k \geqq 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

(2.3) szerint pedig

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+a_n x)^n}\binom{n}{k}(a_n x)^k = 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

tehát megállapítottuk, hogy rögzített n és $x \geqq 0$ esetén a

$$p_k = \frac{1}{(1+a_n x)^n}\binom{n}{k}(a_n x)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

számok valószínűségeloszlást alkotnak.

A kapott valószínűségeloszlásokat származtathatjuk például a következő módon: legyen $x \geqq 0$, n természetes szám, $a_n > 0$, mindhárom mennyiség rögzített. Jelölje $\xi_i^{(n)}$, $i=1, 2, \ldots n$, azon független valószínűségi változókat, amelyek $\frac{a_n x}{1+a_n x}$ valószínűséggel veszik föl az 1 értéket, és $\frac{1}{1+a_n x}$ valószínűséggel a 0-t. Annak a valószínűsége, hogy $\xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)}$ k-val egyenlő:

$$P(\xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \ldots \xi_n^{(n)} = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{a_n x}{1+a_n x}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{1+a_n x}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{(1+a_n x)^n}\binom{n}{k}(a_n x)^k = p_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

ami éppen az (1.6) n-edik *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvény k-adik alapfüggvényének az x helyen fölvett értéke.

Ezt az eloszlást nevezhetjük n-edrendű, $a_n x$ paraméterű „kvázibinomiális” eloszlásnak, hiszen a $\xi_i^{(n)} = 1$ esemény $\frac{a_n x}{1+a_n x}$ valószínűségét p-vel jelölve éppen a binomiális eloszláshoz jutunk:

$$P(\xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} \ldots + \xi_n^{(n)} = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{a_n x}{1+a_n x}\right)^k \left(\frac{1}{1+a_n x}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

ahol $0 \leqq p < 1$.

Alkalmazzuk most a IV. tételt a *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvények esetére. Legyen $F_{n,x}$, $n=1, 2, \ldots$ a $(\xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)}) b_n^{-1}$ eloszlása, ahol a $\xi_i^{(n)}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ a fentebb definiált, $b_n \to \infty$ és $a_n = \frac{b_n}{n} \to 0$, ha $n \to \infty$. Az így definiált

$F_{n,x}$, $n=1, 2, \ldots$, eloszlások sorozata teljesíti a IV. tétel feltételeit, mert egyrészt $\xi_i^{(n)}$ várható értéke

$$M(\xi_i^{(n)}) = \frac{a_n x}{1+a_n x}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

és figyelembe véve, hogy $a_n = \frac{b_n}{n}$, illetve $a_n \to 0$, ha $n \to \infty$,

$$M_n(x) = M\left(\frac{\xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)}}{b_n}\right) = \frac{n}{b_n} \cdot \frac{a_n x}{1+a_n x} = \frac{x}{1+a_n x} \to x,$$

ha $n \to \infty$. Másrészt

$$D^2(\xi_i^{(n)}) = M(\xi_i^{(n)2}) - M^2(\xi_i^{(n)}) = \frac{a_n x}{1+a_n x} - \frac{a_n^2 x^2}{(1+a_n x)^2} = \frac{a_n x}{(1+a_n x)^2},$$

és ezért a szórásnégyzet

$$D_n^2(x) = D^2\left(\frac{\xi_1^{(n)} + \xi_2^{(n)} + \ldots + \xi_n^{(n)}}{b_n}\right) = \frac{n}{b_n^2} \cdot \frac{a_n x}{(1+a_n x)^2} = \frac{x}{b_n(1+a_n x)^2} \to 0,$$

ha $n \to \infty$, itt szintén az $a_n = \frac{b_n}{n} \to 0$ feltételt kell fölhasználni. Igaz továbbá, hogy $M_n(x)$ és $D_n^2(x)$ egyenletesen tart x-hez, illetve 0-hoz minden $0 \leqq a \leqq x \leqq b < \infty$ intervallumban. A IV. tétel értelmében tehát tetszőleges $[0, \infty)$-ben korlátos és folytonos f függvény esetén

$$(5.9) \qquad \int_0^\infty f(t)\,dF_{n,x}(t) = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{b_n}\right) \binom{n}{k} (a_n x)^k =$$

$$= R_n(f; x) \to f(x), \quad \text{ha} \quad n \to \infty,$$

$x \geqq 0$, $a_n = \frac{b_n}{n} \to 0$, és $b_n \to \infty$ (ha $n \to \infty$) mellett. A konvergencia $[0, \infty)$ minden véges részintervallumában egyenletes.

6. FEJEZET

Az $R_n(f; x)$-ek előállítása differenciákkal

A dolgozat 1. fejezetének B pontjában már utaltunk arra, hogy miért neveztük az $R_n(f; x)$ operátorokat *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvényeknek. A $B_n(f; x)$ *Bernstein*-polinomok és az $R_n(f; x)$-ek közötti analógia világosan látható abból is, hogy az I., II. és III. tételt sikerült igazolni a *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvényekre, hiszen ilyen tételek a Bernstein-polinomokra is igazak. Láttuk azt is, hogy az $R_n(f; x)$-eket hasonló kapcsolat fűzi a „kvázibinomiális" eloszláshoz, mint a $B_n(f; x)$-eket a binomiális eloszláshoz. Most a *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvényeknek még egy olyan tulajdonságával foglalkozunk, amelyhez hasonlóval a *Bernstein*-polinomok is rendelkeznek.

Ismeretes, hogy a *Bernstein*-polinomok fölírhatók véges differenciák segítségével is, és ezt az előállítást az analízisben és a valószínűségszámításban egyaránt fölhasználják. Megmutatjuk, hogy a *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvények is előállíthatók ilyen alakban.

Ha adott egy c_n, $n=0, 1, 2, \ldots$, számsorozat, akkor a $\Delta c_n = c_{n+1} - c_n$ egyenlőséggel definiáljuk a Δ differenciaoperátort. A Δ operátort alkalmazzuk a Δc_n sorosorozatra, kapjuk a $\Delta^2 c_n$ sorozatot. Általában $\Delta^r c_n = \Delta(\Delta^{r-1} c_n)$, ahol $\Delta^0 c_n = c_n$, és $\Delta^1 c_n = \Delta c_n$. Teljes indukcióval belátható, hogy

$$\Delta^r c_n = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r+k} c_{n+k}. \tag{6.1}$$

Legyen ezek után $c_n = f(x+nh)$, ahol x és $h>0$ rögzített érték, és tekintsük most a $\underset{h}{\Delta} = h^{-1}\Delta$ differenciahányados operátort, azaz legyen

$$\underset{h}{\Delta} f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

A magasabb rendű differenciahányadosokat a következőképpen definiáljuk: $\underset{h}{\Delta}^r = \underset{h}{\Delta}\underset{h}{\Delta}^{r-1}$, ahol $\underset{h}{\Delta}^0 f(x) = f(x)$ és $\underset{h}{\Delta}^1 = \underset{h}{\Delta}$. A (6.1) formula itt a következőnek felel meg:

$$\underset{h}{\Delta}^r f(x) = h^{-r} \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r+k} f(x+kh). \tag{6.2}$$

(6.2) segítségével az $f(x)$-hez tartozó n-edik *Bernstein*-polinom a következő módon írható föl (FELLER [12] 221. oldal):

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (hx)^k \underset{h}{\Delta}^k f(0), \quad \text{ahol} \quad h = \frac{1}{n}.$$

A *Bernstein*-típusú racionális törtfüggvények pedig a következőképpen állíthatók elő:

V. TÉTEL. *Az* (1.6) *Bernstein-típusú racionális törtfüggvény azonos a következővel:*

$$R_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k \left(\frac{a_n x}{1+a_n x} \right)^k \underset{h}{\Delta}^k f(0),$$

ahol $h = \dfrac{1}{b_n}$, $x \geqq 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Bizonyítás. $\dfrac{1}{b_n}$-t h-val és $\dfrac{a_n x}{1+a_n x}$-et t-vel jelölve, az (1.6)-beli $R_n(f; x)$ így írható:

$$R_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f(kh) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad 0 \leqq t < 1. \tag{6.3}$$

(6.3)-at írjuk föl t polinomjaként a szokásos alakban. $(1-t)^{n-k}$-t NEWTON binomiális tétele szerint kifejtve kiszámíthatjuk t^j együtthatóját:

$$\sum_{k=0}^{j} f(kh)\binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k}(-1)^{j-k} = \binom{n}{j}\sum_{k=0}^{j} f(kh)\binom{j}{k}(-1)^{j+k}.$$

Ez a kifejezés pedig (6.2) szerint $\binom{n}{j} h^j \underset{h}{\Delta^j} f(0)$-val egyenlő. A j helyett k indexre áttérve adódik, hogy

$$R_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(ht)^k \underset{h}{\Delta^k} f(0), \quad \text{ahol} \quad t = \frac{a_n x}{1+a_n x},$$

és éppen ezt kellett bizonyítanunk.

IRODALOM

[1] ARATÓ, M. és RÉNYI, A.: Probabilistic proof of a theorem on the approximation of continuous functions by means of generalized Bernstein polynomials, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **8** (1957), 91—98.

[2] BALÁZS, K.: Approximation by Bernstein type rational functions, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **26** (1975), 123—134.

[3] Баскаков, В. А.: Пример последоватеьности линейных положительных операторов в пространстве непрерывных функций *Докл. Акад. Наук.* СССР **113** (1957), 249—251.

[4] Баскаков, В. А.: Об одном обощении многочленов С. Н. Бернштеина, *Изв. Высш. Учебн. Завед. Мат. №. 13.*, **16** (1960). 48—53.

[5] Баскаков, В. А.: О некоторых условиях сходимости линейных положительных операторов, *Успехи Мат. Наук.* **16**/1. (1961), 131—134.

[6] BERNSTEIN, S. N.: Démonstration du theorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités, **13** Харьков, *Сообщ. Матем. Об.* (2) **13** (1912), 1—2. (1912), 1—2.

[7] BUTZER, P. L.: Linear combinations of Bernstein polynomials, *Canad. J. Math.* **5** (1953), 559—567.

[8] BUTZER, P. L.: On the extension of Bernstein polynomials to the infinite interval, *Proc. Am. Math. Soc.* **5** (1954), 547—553.

[9] CHENEY, E. W. és SHARMA, A.: Bernstein power series, *Canad. J. Math.* **16** (1964), 241—252.

[10] CHLODOVSKY, I.: Sur le développement des fonctions dans un intervalle infini en séries de polynômes de M. S. Bernstein, *Compositio Math.*, **4** (1937), 380—393.

[11] EISENBERG, S. és WOOD, B.: Approximating unbounded functions with linear operators generated by moment sequences, *Studia Math.* **35** (1970), 299—304.

[12] FELLER, W.: *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. II., New York, 1966.

[13] Гельфонд, А. О.: Об обобщенных полиномах С. Н. Бернштейна, *Изв. Акад. Наук. СССР.* **14** (1950), 413—420.

[14] GRÓF JÓZSEF: A Szász O.-féle operátor approximációs tulajdonságairól, *MTA III. Oszt. Közl.* **20** (1971), 35—44.

[15] GRÓF, J.: Über Approximation durch Polynome mit Belegunsfunktion, *Annales Univ. Sci. Budapest Sect. Math.* 1974.

[16] HIRSCHMAN, I. J. és WIDDER, D. V.: *The convolution transform*, Princeton, 1955, 240—246.

[17] HIRSCHMAN, I. J. és WIDDER, D. V.: Generalized Bernstein polynomials, *Duke Math. Journal*, **16** (1949), 433—438.

[18] JAKIMOVSKI, A. és LEVIATAN, D.: Generalized Bernstein polynomials, *Math. Z.*, **93** (1966), 416—426.

[19] JAKIMOVSKI, A. és LEVIATAN, D.: Generalized Bernstein power series, *Math. Z.* **96** (1967), 333—342.

[20] Канторович, Л. В.: О сходимости последовательности полиномов С. Н. Беришгейна запределами основого интервала, *Изв. Акад. Наук СССР*, сер. физ.-матем., (1931), 1103—1115.

[21] Коровкин, П. П.: *Линейные операторы и теория приближений,* Москва, 1957.
[22] Lorentz, G. G.: *Bernstein polynomials,* Toronto, 1953.
[23] Łuszczki, Z.—Mikusiński, I.—Urbanik, K.—Wloka, I.—Zieleżny, Z.: Einige Bemerkungen über die Hirschman—Widdersche Funktionen, *Colloquium Mathematicum,* **4** (1956), 30—32.
[24] Мамедов, Р. Г.: Асимптотическое значение дифференцируемых функций линейными положительными операторами, *Докл. Акад. Наук. СССР,* **128** (1959), 471—474.
[25] Мамедов, Р. Г.: Об асимптотическом значении приближения многократно дифференцируемых функций линейными положительными операторами, *Докл. Акад. Наук. СССР,* **146** (1962), 1013—1016.
[26] Meyer—König, W. és Zeller, K.: Bernsteinsche Potenzreihen, *Studia Math.* **19** (1960), 89—94.
[27] Müller, M. W.: *Die Folge der Gammaoperatoren,* Doktori értekezés, Stuttgart, 1967.
[28] Müller, M. W.: On asymptotic approximation theorems for sequences of linear positive operators, *Proceedings of a Symposium held at Lancaster,* July 1969, *Approximation Theory,* London, 1970.
[29] Natanszon, I. P.: Konstruktív függvénytan, Budapest, 1952.
[30] Schurer, F.: *On linear positive operators in approximation theory.* Doktori értekezés, Delft, 1965.
[31] Stancu, D. D.: Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators, *Revue Roumaine de Math. Pures et Appl.* **13** (1968), 1173—1194.
[32] Szász, O.: Generalizations of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval, *J. Research Nat. Bur. Standards,* **45** (1950), 239—245.
[33] Вороновская, Е. В.: Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна, *Докл. Акад. Наук (А)* (1932), 79—85.

(Beérkezett: 1973. XI. 21.)

APPROXIMATION BY BERNSTEIN TYPE RATIONAL FUNCTIONS AND ITS RELATION TO PROBABILITY THEORY

By

K. Balázs

Summary

Unbounded functions can be approximated on an infinite interval by means of *Bernstein*-type rational functions introduced in this paper. For a function $f(x)$, $0 \leqq x < \infty$, we define the n-th *Bernstein*-type rational function by

$$R_n(f; x) = \frac{1}{(1+a_n x)^n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{b_n}\right) \binom{n}{k} (a_n x)^k, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

where a_n and b_n are constants depending only on n. $R_n(f; x)$ may be called a *Bernstein*-type one, for substituting $\frac{a_n x}{1+a_n x}$ by t in $R(f; x)$ we get a polynomial similar to *Bernstein* polynomial of degree n. The following theorems are proved:

Theorem I. *Let $f(x)$ be a continuous function defined in* $[0, \infty)$ *such that* $f(x) = O(e^{\alpha x})$, $(x \geqq 0, \alpha \geqq 0$ fixed). *If* $a_n = \frac{b_n}{n}$, $b_n = n^{2/3}$, *then in any interval* $0 \leqq x \leqq \omega$ $(\omega > 0)$ *the inequality*

$$|f(x) - R_n(f; x)| \leqq c_0 \left\{ k_{2\omega}\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right) + \frac{1}{n^{2/3}} \right\}$$

holds for n sufficiently large, where c_0 is a constant depending on ω and α only, and $k_{2\omega}(\delta)$ denotes the modulus of continuity of $f(x)$ in $[0, 2\omega]$.

This inequality shows that $R_n(f; x) \to f(x)$ if $n \to \infty$ and $0 \leqq x < \infty$. This convergence is unifom in every finite interval $0 \leqq x \leqq \omega$.

THEOREM II. *Let $f(t)$ be a function defined in* $[0, \infty)$ *for which* $f(t)=O(e^{\alpha t})$ $(t\to\infty, \alpha\geqq 0)$. *If* $f''(t)$ *exists and is finite at the point* $t=x$, *then*

$$R_n(f; x) = f(x)+a_n f'(x) g_1(x)+a_n f''(x) g_2(x)+a_n \varrho_n,$$

where $\varrho_n\to 0$, $a_n=\dfrac{b_n}{n}\to 0$ *and* $\dfrac{n^{1/2}}{b_n}\to 0$, *if* $n\to\infty$, *moreover*

$$g_1(x) = \frac{-x^2}{1+a_n x}, \qquad g_2(x) = \frac{a_n b_n x^4+(x/a_n)}{2b_n(1+a_n x)^2}$$

$g_1(x)$ and $g_2(x)$ remain under a limit depending only on x, so Theorem II. is a *Voronovskaya*-type asymptotic approximation theorem.

THEOREM III. *Let $f(t)$ be a function defined in* $[0, \infty)$, *for which* $f(t)=O(e^{\alpha t})$ $(t\to, \alpha\geqq 0$ fixed). *If $f'(t)$ exists at the point $t=x$, then*

$$R_n'(f; x) \to f'(x), \quad \text{if} \quad n\to\infty,$$

where $a_n=\dfrac{b_n}{n}\to 0$, *and* $b_n=n^{2/3}$.

The convergence theorem (Theorem I.) for bounded functions is proved by probabilistic tools, too, using the following general theorem: let x be a parameter varying in a finite or infinite interval, $F_{n,x}$ $(n=1, 2, \ldots)$ be asequence of probability distributions with expectation $M_n(x)$ and variance $D_n^2(x)$. If $\lim\limits_{n\to\infty} M_n(x)=x$ and $\lim\limits_{n\to\infty} D_n^2(x)=0$, then $\lim \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dF_{n,x}(t)\to f(x)$ for every bounded continuous function f. The convergence is uniform in every interval, wherre $M_n(x)\to x$ and $D_n^2(x)\to 0$ uniformly. We can apply the theorem if we introduce a „quasi binomial" distribution. Let $\xi_i^{(n)}$ $(i=1, 2, \ldots)$ be independent random variables assuming the values 1 and 0 with probability $\dfrac{a_n x}{1+a_n x}$ and $\dfrac{1}{1+a_n x}$ respectively ($x\geqq 0$ fixed), and let $F_{n,x}$ be the distribution of $\dfrac{1}{b_n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^{(n)}$. If $a_n=\dfrac{b_n}{n}\to 0$ and $b_n\to\infty$ $(n\to\infty)$, then $M_n(x)\to x$ and $D_n^2(x)\to 0$. So we have

$$\int_0^\infty f(t)\,dF_{n,x}(t) = \frac{1}{(1+a_n x)^n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{b_n}\right)\binom{n}{k}(a_n x)^k = R_n(f; x)\to f(x), \quad \text{if} \quad n\to\infty,$$

for a continuous and bounded function $f(x)$, $x\geqq 0$. The convergence is uniform in every finite subinterval of $[0, \infty)$.

THEOREM V. *Bernstein type rational functions can be rewritten by finite differences:*

$$R_n(f{:}\ x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} h^k \left(\frac{a_n x}{1+a_n x}\right)^k \Delta_h^k f(0), \quad \textit{where} \quad h=\frac{1}{b_n},\ x\geqq 0.$$