A LOKÁLIS GYŰRŰK ELMÉLETÉHEZ, II.

D. A. Buchsbaum egy problémájáról

Írta: WOLFGANG VOGEL és MÁRKI LÁSZLÓ

I. FEJEZET

D. A. BUCHSBAUM EGY PROBLÉMÁJÁRÓL

1. §. Első ellenpélda a Buchsbaum-problémára

D. A. BUCHSBAUM 1965-ben a varennai nyári iskolán az alábbi problémát vetette fel (l. [2]):

Legyen A lokális gyűrű (azaz: kommutatív, egységelemes *Noether*-gyűrű egyetlen M maximális ideállal). Legyen $Q \lhd A$ paraméterideál (azaz: $\dim A$ számú elemmel generálható M-primér ideál). Elég nagy n-ekre tekintsük a *Hilbert—Samuel*-polinomot:

$$l_A(A/Q^{n+1}) = e_0(Q, A)\binom{n+d}{d} - e_1(Q, A)\binom{n+d-1}{d-1} + \ldots + (-1)^d e_d(Q, A),$$

ahol $d = \dim A$, és az $e_i(Q, A)$ együtthatók egész számok.

BUCHSBAUM kérdése a következő: Invariánsa-e az $l_A(A/Q) - e_0(Q, A)$ különbség A-nak, azaz van-e olyan, Q-tól független $I(A)$ szám, melyre

$$l_A(A/Q) - e_0(Q, A) = I(A)?$$

BUCHSBAUM azt sejtette, hogy igen, mégpedig $I(A) = \dim A - \operatorname{codh} A$, ahol $\operatorname{codh} A$ az A homologikus kodimenziója (l. 0. fejezet, 3.13. definíció előtti megjegyzést).

A 0.3.14. tétel szerint $l_A(A/Q) - e_0(Q, A) = 0$ akkor és csak akkor, ha A *Cohen—Macaulay*-gyűrű, azaz ha $\dim A - \operatorname{codh} A = 0$. *Cohen—Macaulay*-gyűrűkben tehát a *Buchsbaum*-sejtés triviálisan teljesül.

Az alábbi tétel viszont azt mutatja, hogy nemcsak a *Buchsbaum*-sejtésre, de a problémára is tagadó a válasz.

1.1. TÉTEL. *$l_A(A/Q) - e_0(Q, A)$ nem föltétlenül invariánsa A-nak.*

Bizonyítás. Megadunk egy alkalmas (A, M) lokális gyűrűt és abban $Q(n)$ paraméterideálokat úgy, hogy a fenti különbség függjön attól, hogy melyik $Q(n)$-t választottuk.

Tekintsük az $R =: K[x_0, x_1, x_2, x_3]$ polinomgyűrűben a következő ideált:

$$B =: (x_1^2, x_1 x_2) = (x_1) \cap (x_1^2, x_2).$$

Ezzel megkonstruáljuk az alábbi lokális gyűrűt:

$$A =: (R_x/B)_{(1, x_2, x_3)\cdot(R/B)} \cong R_{(x_1, x_2, x_3)}/B \cdot R_{(x_1, x_2, x_3)}.$$

R-ben a $B \subset (x_1) \subset (x_1, x_2) \subset (x_1, x_2, x_3)$ lánc B és (x_1, x_2, x_3) között prímideálokkal tovább már nem finomítható, sőt, már B sem prímideál. Egészítsük most ki ezt a láncot R egy maximális prímideálláncává. Ha itt B-vel faktorizálunk, majd (x_1, x_2, x_3) szerint lokalizálunk, akkor A egy maximális prímideálláncát kapjuk — eközben viszont a láncban a B alatt szereplő ideálok mind a (0)-ba (ami nem prímideál A-ban), az (x_1, x_2, x_3) fölötti ideálok pedig az (1)-be mennek át. Eszerint $\dim A=2$.

x_3 nem nullosztó A-ban, és $(B, x_3)=(x_1, x_3)\cap(x_1^2, x_2, x_3)$ miatt az x_3 prímsorozatot nem lehet „meghosszabbítani" (x_0 már egység A-ban), így $\operatorname{codh} A=1$. A tehát nem *Cohen—Macaulay*-gyűrű.

Tekintsük A-ban a

$$Q = Q(n) =: (x_2, x_3^n)\cdot A \quad (n \geqq 1)$$

ideált. Q-nak az R-ben $(B, Q)=(x_1^2, x_2, x_3^n)$ felel meg, és ez (x_1, x_2, x_3)-primér ideál, így Q $(x_1, x_2, x_3)\cdot A$-primér ideál A-ban, továbbá Q-t $2=\dim A$ elem generálja; Q tehát paraméterideál.

Most kiszámítjuk $l_A(A/Q)$ és $e_0(Q, A)$ értékét. Definíció szerint $l_A(A/Q)$ egy tovább már nem finomítható $A/Q\supset\ldots\supset(0)$ lánc A/Q-tól különböző elemeinek a számát jelenti, ahol a lánc elemei A/Q rész-A-modulusai. Egy ilyen láncnak A-ban ideálok egy Q fölött tovább már nem finomítható lánca felel meg:

$$A\supset M\supset\ldots\supset Q.$$

(Közvetlenül A alatt természetesen az A lokális gyűrű maximális ideálja áll.) Ebben a láncban minden ideál M-primér a következő, könnyen igazolható tétel szerint: Legyen S *Noether*-gyűrű, $M\lhd S$ maximális ideál; egy $N\neq S$ ideál akkor és csak akkor M-primér, ha tartalmazza M valamely hatványát.

A konstrukciója szerint a fenti, M és Q közötti primér ideál-láncnak R-ben primér ideálok egy (x_1, x_2, x_3) és $(B, Q)=(x_1^2, x_2, x_3^n)$ közti lánca felel meg, és ez az utóbbi lánc sem finomítható tovább. Ezzel azt kaptuk, hogy $l_A(A/Q)$ a $(B, Q)\lhd R$ ideálelméleti multiplicitásával egyenlő. Minthogy (x_1^2, x_2, x_3^n) és (x_1, x_2, x_3) között az

$$(x_1^2, x_2, x_3^n) \subset (x_1^2, x_2, x_1x_3^{n-1}, x_3^n) \subset\ldots\subset (x_1^2, x_2, x_1x_3, x_3^n) \subset (x_1, x_2, x_3^n) \subset$$

$$\subset (x_1, x_2, x_3^{n-1}) \subset\ldots\subset (x_1, x_2, x_3)$$

primér lánc tovább már nem finomítható, azért tehát $l_A(A/Q)=2n$.

Könnyen igazolható, hogy B és Q lokálisan nem elfajulóan metszi egymást, így $e_0(Q, A)$ kiszámítására felhasználhatjuk a 0. fejezet 3.10. tételét (minthogy (B, Q) primér ideál, azért most $t=1$):

$$h_0(B)\cdot h_0\big((x_2, x_3^n)\big) = e_0(Q, A)\cdot h_0\big((x_1, x_2, x_3)\big).$$

Itt (x_2, x_3^n) és (x_1, x_2, x_3) főosztályhoz tartozó ideál, így a 0.2.10. gyakorlat 1. állítása szerint $h_0((x_2, x_3^n))=n$ és $h_0((x_1, x_2, x_3))=1$; $B=(x_1)\cap(x_1^2, x_2)$-re viszont ugyanezen gyakorlat 2. állítása értelmében $h_0(B)=h_0(x_1)=1$. Az így nyert értékeket a fenti egyenlőségbe behelyettesítve $e_0(Q, A)=n$ adódik.

Példánkban tehát $l_A(A/Q)-e_0(Q, A)=n$, ami függ n-től, vagyis a Q megválasztásától, q.e.d.

Ezek után természetesen vetődik fel a kérdés: milyen gyűrűkben létezik ilyen $I(A)$ invariáns? Erre majd a II. fejezetben adunk választ.

2. §. A Buchsbaum-probléma egy geometriai interpretációja. Példák.

A következőkben eddigi fogalmaink, eredményeink geometriai jelentését vizsgáljuk. Ezzel kapcsolatban hadd idézzük W. GRÖBNERt [10]: „A polinomgyűrűk absztrakt elmélete önmagában zárt, nem igényel geometriai megfontolásokat vagy bizonyításokat. Az elmélet geometriai oldalát interpretáció útján nyerjük, ideálelméleti fogalmaknak és műveleteknek geometriai fogalmakat és műveleteket feleltetünk meg. Emellett megmarad annak a lehetősége, hogy bizonyos interpretációkat megváltoztassunk, és így újabb, különböző geometriákhoz jussunk."

Most pedig először is bevezetjük az algebrai sokaság fogalmát.

Legyen adott egy k kommutatív test, és legyen K a k algebrai lezártja. A K fölötti n-dimenziós P_n^K projektív tér pontjait $(y_0, \ldots, y_n)$ $n+1$-esekkel reprezentáljuk, ahol $y_i \in K$, a $(0, \ldots, 0)$ $n+1$-es egyetlen pontnak sem felel meg, továbbá az $(y_0, \ldots, y_n)$ és az $(y_0', \ldots, y_n')$ $n+1$-es ugyanazt a pontot reprezentálja, ha létezik olyan $t \in K$, hogy $y_i' = ty_i$, $i = 0, \ldots, n$. Az $(y_0, \ldots, y_n)$ $n+1$-est nevezzük a megfelelő pont homogén koordinátáinak is: ezt a pontot gyakran csak így jelöljük: (y).

Legyen $F(Y_0, \ldots, Y_n) \in k[Y_0, \ldots, Y_n]$ homogén polinom és $P \in P_n^K$. Ha P valamely $(y_0, \ldots, y_n)$ homogén koordinátáira $F(y_0, \ldots, y_n) = 0$, akkor ez P bármely homogén koordinátáira is teljesül; ilyenkor azt mondjuk, hogy P nullahelye F-nek, vagy hogy F eltűnik P-ben. Ha $A \lhd k[Y_0, \ldots, Y_n]$ homogén ideál, akkor az A-beli polinomok közös nullahelyeit az A ideál nullahelyeinek nevezzük, A összes nullahelyének a halmazát pedig A sokaságának. Ez utóbbit $V(A)$-val jelöljük.

2.1. DEFINÍCIÓ. Az $E \subset P_n^K$ halmaz *algebrai projektív sokaság k* fölött, ha létezik olyan $A \lhd k[Y_0, \ldots, Y_n]$ homogén ideál, melyre $V(A) = E$.

Minthogy egy előre rögzített k alaptesttel dolgozunk, azért a következőkben nem fogjuk explicite feltüntetni, hogy a szóban forgó algebrai projektív sokaságot k fölött tekintjük. Sőt, algebrai projektív sokaság helyett is általában csak sokaságot fogunk mondani.

Legyen $E \subset P_n^K$ tetszőleges. E-hez hozzárendeljük azt a $\mathscr{P}(E)$-vel jelölt, $k[Y_0, \ldots, Y_n]$-beli ideált, amelyet az E valamennyi pontjában eltűnő homogén polinomok generálnak. A $k[Y_0, \ldots, Y_n]$ polinomgyűrű $\mathscr{P}(E)$ alakban $(E \subset P_n^K)$ előállítható homogén ideáljainak a halmazát I-vel jelöljük.

2.2. *Gyakorlat.* Igazoljuk az alábbi összefüggéseket (A, B, $A_i \lhd k[Y_0, \ldots, Y_n]$ homogén; E, F, $E_i \subset P_n^K$):

(1) $A \subset B \Rightarrow V(A) \supseteq V(B)$

(1') $E \subset F \Rightarrow \mathscr{P}(E) \supseteq \mathscr{P}(F)$

(2) $V\left(\sum_i A_i\right) = \bigcap_i V(A_i)$

(2') $\mathscr{P}\left(\bigcup_i E_i\right) = \bigcap_i \mathscr{P}(E_i)$

(3) $V(A \cap B) = V(A \cdot B) = V(A) \cup V(B)$

(4) $V(\mathscr{P}(E)) \supseteq E$

(4') $\mathscr{P}(V(A)) \supseteq A$

(5) $V(\mathscr{P}(E)) = E \Leftrightarrow E$ sokaság

(5') $\mathscr{P}(V(A)) = A \Leftrightarrow A \in I$

(6) $A \in I \Rightarrow \sqrt{A} = A,$

ahol a $\sqrt{A}$ ideál (az A *radikálja*) pontosan azokból a (homogén) polinomokból áll, amelyeknek valamilyen hatványa A-ba esik,

(7) ha A B-primér ideál, akkor $V(A) = V(B)$.

2.3. Definíció. A V algebrai projektív sokaság *reducibilis*, ha előállítható két olyan sokaság egyesítéseként, amelyek V-nek valódi részhalmazai. Ellenkező esetben V-t *irreducibilisnek* nevezzük.

2.4. *Gyakorlat.* (1) A V sokaság akkor és csak akkor irreducibilis, ha $\mathscr{P}(V)$ prímideál.

(2) Tegyük fel, hogy az $A \lhd k[Y_0, \ldots, Y_n]$ homogén ideál nem lényegtelen, azaz A nem $(Y_0, \ldots, Y_n)$-primér ideál. Akkor $V(A) \neq \emptyset$, és $\mathscr{P}(V(A)) = \sqrt{A}$. (Ez az ún. projektív nullahely-tétel.) (L. [33] § 121, vagy [35] 171. o.)

(3) Minden V sokaság előállítható véges sok irreducibilis sokaság egyesítéseként:

$$V = \bigcup_{i=1}^{h} V_i.$$

Ha itt a V_i-k egyikét sem hagyhatjuk el, akkor ez az előállítás egyértelmű; a benne szereplő sokaságokat a V irreducibilis komponenseinek nevezzük.

(4) Konkrétan, V egyértelmű irreducibilis felbontása

$$V = \bigcup_{i=1}^{h} V(P_i),$$

ahol $P_1, \ldots, P_h$ a $\mathscr{P}(V)$ ideálhoz tartozó izolált prímideálok.

Legyen V algebrai projektív sokaság, $A = \mathscr{P}(V)$ a hozzá tartozó homogén ideál. A (homogén) dimenzióját a V (projektív) dimenziójának is nevezzük — ez megegyezik a dimenzióról alkotott szokásos geometriai elképzeléssel. Legyen most V és W két tetszőleges sokaság P_n^K-ben, akkor a 0.2.4. tétel következménye szerint

$$\dim V \cap W \geqq \dim V + \dim W - n.$$

Azt mondjuk, hogy V és W (globálisan) nem elfajulóan metszi egymást, ha

$$\dim V \cap W = \dim V + \dim W - \mathrm{n},$$

és ez pontosan ugyanazt jelenti, mint hogy A és B metszete (globálisan) nem elfajuló (l. 0.2.5. definíció), ahol A és B a V-nek, ill. W-nek megfelelő ideál. Az elfajuló metszet extrém példája az, amikor az egyik sokaság tartalmazza a másikat. Nem triviálisan elfajuló a metszet például akkor, ha W hiperfelület (azaz valamilyen F alakra az $F = 0$ egyenletnek eleget tevő pontok összessége; más szóval $B = (F)$ főideál), és W tartalmazza V egy maximális dimenziójú komponensét. Például:

P_3^K-ban legyen V az $x_0=x_1=0$ és az $x_2=x_3=0$ kitérő egyenesek egyesítése, W az $x_3=0$ sík. Ez a sík tartalmazza az $x_2=x_3=0$ egyenest, az $x_0=x_1=0$ egyenest pedig az $x_0=x_1=x_3=0$ pontban metszi. A dimenziók összehasonlításával azonnal látszik, hogy V és W metszete elfajuló. Más, nem triviális példa: $n\geqq 4$ esetén a P_n^K térben bármely két térgörbe (azaz: 1-dimenziós sokaság) metszete elfajuló; P_3^K-ban két térgörbe metszete akkor és csak akkor nem elfajuló, ha a metszet üres. — A dimenziócsökkentés tétele (0.2.3. tétel) lényeges segítséget nyújt annak a megállapítására, hogy mikor nem elfajuló két sokaság metszete.

Most pedig multiplicitáselméleti kérdésekre térünk rá. Ehhez előrebocsátunk néhány általános megjegyzést.

BEZOUT klasszikus tétele azt mondja ki, hogy ha a síkban egy m-edrendű és egy q-adrendű görbének csak véges sok közös pontja van, akkor ezek száma legföljebb $m\cdot q$. A tétel ilyen formában már MACLAURIN 1720-ban megjelent, „*Geometrica organica*" c. könyvében is szerepel, de első teljes bizonyítása BEZOUT-tól származik. Az erre vonatkozó irodalom általában nem említi, hogy BEZOUT 1764-ben nemcsak a fenti tételt, hanem annak n-dimenziós megfelelőjét (ez a 0.2.10. gyakorlatunk első pontja a $\varrho=n$ esetben) is bebizonyította.

A multiplicitáselmélet fő problémáját a fenti példában így fogalmazhatjuk meg: a közös pontokhoz egy *multiplicitás*nak nevezett (pozitív) egész számot akarunk hozzárendelni úgy, hogy egy m-edrendű és egy q-adrendű görbe pontosan $m\cdot q$ pontban messe egymást, ha a metszéspontokat a megfelelő multiplicitással számoljuk. Általában, legyen a P_n^K térben a V és a W sokaság metszete (globálisan) nem elfajuló. Problémánk most a következő: a $V\cap W$ metszet maximális dimenziójú C komponenseihez egy-egy χ_C multiplicitást akarunk hozzárendelni úgy, hogy érvényben maradjon a 0.2.13. tétel utáni megjegyzések értelmében vett *Bezout*-tétel:

$$h_0(A)\cdot h_0(B) = \sum_C \chi_C\cdot h_0(P_C),$$

ahol A és B a V-hez, ill. W-hez tartozó ideál, P_C pedig a C-hez tartozó prímideál.

0. fejezetünk 2. paragrafusának a végén már találkoztunk egy ilyen multiplicitásfogalommal: eszerint χ_C-nek a Q_C ideálelméleti multiplicitását választjuk, ahol Q_C az (A, B) P_C-primér komponense (ez egyértelmű, mert C maximális dimenziójú komponens). Ez a multiplicitás — amely különben W. GRÖBNERtől származik — az algebra alaptételében fellépő multiplicitásnak az általánosítása. A 0.2.14. példánk azonban azt mutatja, hogy χ_C ilyen megválasztásával a *Bezout*-tétel nem lesz mindig igaz.

Másrészről a XIX. században az ún. olasz iskola olyan módszereket fejlesztett ki, amelyek a leszámláló geometria (abzählende Geometrie) elméletéhez vezettek. E módszerekkel sikerült bizonyos speciális metszetproblémákban multiplicitást megadniok. A leszámláló geometria elméletének alapjai azonban, sajnos, nem voltak egzaktak. HILBERT 15. problémája éppen e módszerek egzakt megalapozását kívánta. Ezt azután lényegében B. L. VAN DER WAERDEN végezte el (l. [32]), de az ő felépítése is megköveteli bizonyos feltételek teljesülését. Csak A. WEILnek sikerült 1946-ban megjelent könyvében [34] olyan általános multiplicitáselméletet megadnia, amely minden metszetproblémára alkalmazható. A V és a W sokaság egy maximális dimenziójú C komponensének a multiplicitását A. WEIL $i(V\cdot W, C)$-vel jelöli. Minthogy azonban az $i(V\cdot W, C)$ szám konkrét megadása gyakran igen bonyolult, azért továbbra is indokolt W. GRÖBNER [7]-ben kitűzött programja: 1) lehetőleg az egyszerű ideálelméleti multiplicitással dolgozzunk, 2) találjuk meg, mi az oka annak, hogy az ideálelméleti multiplicitás alkalmazásakor a *Bezout*-tétel bizonyos esetekben nem teljesül. Ez utóbbi kérdés a multiplicitáselméletben J.-P. SERRE [23] által bevezetett homologikus algebrai számításmód segítségével a [3] és a [12] dolgozatban nyert választ.

Később P. SAMUEL megmutatta (l. [21]), hogy a *Weil*-féle $i(V\cdot W, C)$ multiplicitások alkalmas lokális gyűrűk segítségével is megadhatók; konstrukcióját a következőkben majd részletesen is leírjuk. WEIL [34] és SAMUEL [21] eredményei szerint ha $V=\bigcup_j V_j$ és $W=\bigcup_k W_k$ nem elfajulóan metszi egymást C-ben, akkor

$$i(V\cdot W, C) = \sum i(V_j\cdot W_k, C),$$

ahol a szummázás mindazokra a (j, k) párokra történik, amelyekre V_j és W_k nem elfajulóan metszi egymást C-ben. Ezért a multiplicitási problémában az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy mindkét sokaság irreducibilis, A. WEIL [34] egy eredménye szerint pedig még azt is föltehetjük, hogy a két sokaság egyikét főosztályhoz tartozó (prím)ideál definiálja.

Fő témánkra való tekintettel megemlítjük még, hogy D. A. BUCHSBAUM problémája algebrai geometriai megfelelőjének pozitív megválaszolása azt jelentené, hogy a *Gröbner*- és a *Weil*-féle multiplicitás csak egy additív invariánsban különbözik egymástól.

Végül pedig a rend fogalmának geometriai jelentéséről ejtünk néhány szót.

Legyen először is $A\lhd k[x_0, ..., x_n]$ 0-dimenziós ideál, A 0-dimenziós primér komponensei $Q_1, ..., Q_s$ (A-nak lehet 1-dimenziós komponense is). Akkor a 0.2.8. gyakorlat 2) állítása értelmében

$$h_0(A) = h_0(Q_1)+...+h_0(Q_s),$$

így a 0.2.13. tétel szerint

$$h_0(A) = \mu_1\cdot h_0(P_1)+...+\mu_s h_0(P_s),$$

ahol P_i a Q_i-hez tartozó prímideál, μ_i pedig a Q_i multiplicitása. Itt mindegy, hogy *Gröbner*- vagy *Weil*-féle multiplicitást veszünk, hiszen $R=:(k[x_0,...,x_n]/A)_{P_i\cdot(k[x_0,...,x_n]/A)}$ 0-dimenziós, tehát *Cohen—Macaulay*-gyűrű, akkor pedig

$$\mu(Q_i) = l_R(R/Q_i) = e_0(Q_i, R) = i\big(V(A)\cdot V(P_i), V(P_i)\big).$$

Igazolható, hogy ha P_i 0-dimenziós prímideál, akkor egyrészt $V(P_i)$ egyetlen pontból áll (és így $V(Q_i)$ is), másrészt pedig $h_0(P_i)=1$. Eszerint

$$h_0(A) = \mu_1+...+\mu_s,$$

azaz A rendje éppen az A sokaságához tartozó pontok száma, mindegyiket a megfelelő multiplicitással véve.

Legyen most A tetszőleges d-dimenziós ideál. Keressünk először d olyan hipersíkot: $H_1, ..., H_d$ (az őket definiáló lineáris egyenletek: $l_1=0, ..., l_d=0$), melyekre $h_0(A, l_1, ..., l_d)=h_0(A)$ és $\dim(A, l_1, ..., l_d)=0$. A 0.2.11. tétel értelmében ilyenek mindig találhatók. Geometriailag ez azt jelenti, hogy a $V(A)$ sokaságot addig metsszük egy-egy H_i hipersíkkal, amíg végül 0-dimenziós $V(A)\cap H_1\cap...\cap H_d$ sokasághoz nem jutunk. A H_i-k kiválasztására vonatkozó feltétel azt fejezi ki, hogy a H_i hipersíkok $V(A)$-hoz viszonyítva „általános helyzetűek": H_i nem tartalmaza $V(A)\cap H_1\cap \cap\ldots\cap H_{i-1}$ egyetlen legmagasabb vagy második legmagasabb dimenziójú komponensét sem. — Ezzel a kérdést visszavezettük a 0-dimenziós esetre: dim $A=d$ esetén $V(A)$-t elmetsszük egy általános helyzetű $H_1\cap\ldots\cap H_d$ $(n-d)$-dimenziós lineáris altérrel, és most $h_0(A)$ éppen az így kapott metszéspontok száma, mindegyiket a megfelelő multiplicitással számolva.

A szükséges fogalmak ismeretében most már rátérhetünk Buchsbaum problémájának geometriai megfelelőjére:

Legyen V és W két irreducibilis algebrai sokaság a P_n^K projektív térben, $k[x_0, \ldots, x_n]$-ben a megfelelő prímideálok P_V és P_W, és tegyük fel, hogy V és W (globálisan) nem elfajulóan metszi egymást. Legyen C a $V\cap W$ egy maximális dimenziójú irreducibilis komponense, P_C a megfelelő prímideál; más szóval, P_C egy, a (P_V, P_W)-hez tartozó maximális dimenziójú (tehát izolált) prímideál. Jelölje A a V lokális gyűrűjét C-ben:

$$A =: k[x_0, \ldots, x_n]_{P_C}/P_V \cdot k[x_0, \ldots, x_n]_{P_C} \cong (k[x_0, \ldots, x_n]/P_V)_{P_C\cdot(k[x_0,\ldots,x_n]/P_V)}.$$

A vizsgálatával arról nyerhetünk információt, hogyan viselkedik V a C egy környezetében (innen ered az A elnevezése).

Tegyük még fel, hogy P_W főosztályhoz tartozó ideál, vagyis $P_W=(F_1, \ldots, F_\varrho)$, dim $P_W=n-\varrho$. Jelölje $f_1, \ldots, f_\varrho$ az $F_1, \ldots, F_\varrho$-nak megfelelő, P_V szerinti mellékosztályokat. Minthogy P_V és P_W prímideál, tehát egynemű, azért a 0.3.9. definíció utáni 3) gyakorlat szerint P_V és P_W metszete lokálisan sem elfajuló (más szóval: V és W lokálisan nem elfajulóan metszi egymást), így e gyakorlatunk utáni megállapításunk értelmében $Q=: (f_1, \ldots, f_\varrho)\cdot A$ paraméterideál. Ekkor jól definiált a Q multiplicitása: $e_0(Q, A)$. P. SAMUEL redukciótétele ([21] II. fejezet, §7, b; 83. o.) szerint $e_0(Q, A)$ éppen az A. *Weil*-féle $i(V\cdot W, C)$ multiplicitás.

Tekintsük (P_V, P_W) egy primér felbontását; ebben szerepel egy, a P_C prímideálhoz tartozó Q_C izolált primér komponens. Jelölje $\mu(C)$ a Q_C ideálelméleti multiplicitását (l. 0. fejezet, 2.12. definíció). Megmutatjuk, hogy

$$\mu(C) = l_A(A/(f_1, \ldots, f_\varrho)\cdot A).$$

Tekintsük a $(P_V, P_W)\subseteqq Q_C\subset\ldots\subset P_C$ láncot, ahol Q_C és P_C között tovább már nem finomítható primér lánc áll. Ha most P_V-vel faktorizálunk és P_C szerint lokalizálunk, akkor, A-t is hozzáírva, egy $Q\subseteqq Q'_C\subset\ldots\subset M\subset A$ láncot kapunk, ahol Q'_C a Q_C-nek megfelelő M-primér ideál, és ez a lánc Q'_C és A között nem finomítható. Minthogy P_C a (P_V, P_W)-hez tartozó izolált prímideál, azért (P_V, P_W)-nek csak egyetlen primér komponense eshet teljesen P_C-be, Q_C; így $(P_V, P_W)\cdot k[x_0, \ldots, x_n]_{P_C}=Q_C\cdot k[x_0,\ldots,x_n]_{P_C}$, és persze még inkább $Q=Q'_C$. A fenti $Q\subset\ldots\subset M\subset A$ lánc tehát nem finomítható, ami Q-val faktorizálva éppen azt adja, hogy $\mu(C)=l_A(A/Q)$. (Eközben persze hallgatólagosan felhasználtuk, hogy A/Q részmodulusainak A-ban primér ideálok felelnek meg, de ezt már tudjuk az 1.1. tétel bizonyításából.)

Ebben a geometriai helyzetben tehát BUCHSBAUM sejtése, ill. problémája így fogalmazható meg:

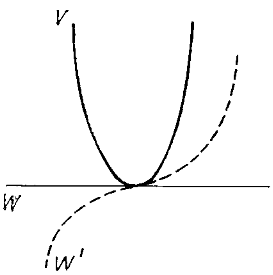
(P_1) $\mu(C)-i(V\cdot W, C)=\dim A-\operatorname{codh} A$.

(P_2) Létezik-e olyan $N(V, C)$ (tehát W-től független) egész szám, amelyre

$$\mu(C)-i(V\cdot W, C) = N(V, C)?$$

Az 1. §-ban tárgyalt általános esettel szemben tehát most csak olyan A lokális gyűrűkkel és $Q \lhd A$ paraméterideálokkal foglalkozunk, melyekre az $e_0(Q, A)$ *Samuel*-féle multiplicitás egy alkalmas $i(V \cdot W, C)$ *Weil*-féle multiplicitás, és itt a fenti konstrukció V, W és C-ből éppen A-t és Q-t szolgáltatja. Az 1.1. tételben szereplő példa nem ilyen, és ez indokolja további vizsgálatainkat.

Megjegyzések. 1. Tegyük fel, hogy a W sokaságot úgy deformáljuk, hogy az így kapott W' sokaság továbbra is irreducibilis, egy ugyanahhoz a főosztályhoz tartozó ideálnak felel meg és V-t nem elfajulóan metszi. Tegyük még fel, hogy a $V \cap W$ egy maximális dimenziójú C irreducibilis komponense irreducibilis komponense $V \cap W'$-nek is. (Feltételeinkből következik, hogy C $V \cap W'$-nek is maximális dimenziójú komponense.) A deformáció következtében a (P_V, P_W) ideál Q_C primér komponense persze általában erősen megváltozik; az új, a $(P_V, P_{W'})$-nek megfelelő primér komponens legyen Q'_C. Ekkor általában megváltozik a Q_C ideálelméleti multiplicitása is: $\mu(Q_C) = \mu(C) \neq \mu(C') = \mu(Q'_C)$. Ha Buchsbaum (P_2) problémájára a válasz pozitív, ez azt jelenti, hogy a két multiplicitás, $\mu(C)$ és $i(V \cdot W, C)$ különbségét a W sokaság ilyen deformálása változatlanul hagyja:



1. ábra

$$\mu(C) - i(V \cdot W, C) = \mu(C') - i(V \cdot W', C) = N(V, C).$$

2. 0.3.8. tételünk szerint mindig $\mu(C) \geqq i(V \cdot W, C)$, és itt egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha A *Cohen—Macaulay*-gyűrű, márpedig A csak V-től és C-től függ. Ezért ha a (P_1) vagy a (P_2) problémára ellenpéldát keresünk, csak olyan esetekkel érdemes foglalkoznunk, ahol $\mu(C) - i(V \cdot W, C) \geqq 1$. Ilyen példák kereséséhez nyújt segítséget a következő tétel:

2.5. TÉTEL. *Legyen adott két irreducibilis sokaság: V és W. Akkor és csak akkor létezik $V \cap W$-nek olyan C komponense, melyre $\mu(C) - i(V \cdot W, C) \geqq 1$, ha a P_V és a P_W ideálra nem teljesül a Bezout-tétel, vagyis ha*

$$h_0((P_V, P_W)) \neq h_0(P_V) \cdot h_0(P_W).$$

Megjegyzés. W. GRÖBNER általánosított *Bezout*-tétele (0.2.10. gyakorlat 3) állítás) szerint akkor V (azaz P_V) nem lehet perfekt. Sőt, V lokálisan perfekt sem lehet (D. REES [16] nyomán V-t lokálisan perfektnek nevezzük, ha V lokális gyűrűje minden pontban *Cohen—Macaulay*-gyűrű). Az utóbbi állításunk a 0.3.16. tétel felhasználásával igazolható; l. még A. REITBERGER—W. VOGEL [17].

2.5. tételünk a 0.2.13. tétel utáni megjegyzések, továbbá a 0.3.8. és a 0.3.10. tétel segítségével bizonyítható; a bizonyítást az Olvasóra hagyjuk. (Lásd még M. HERRMANN—W. VOGEL [12], Satz 1.)

A következőkben két olyan példát mutatunk be, amelyek a (P_1) probléma állítását támasztják alá.

Tekintsük P_4^K-ben azt a két irreducibilis sokaságot, V-t és W-t, amelyet az alábbi két prímideál definiál:

$P_V =: (x_1^2 x_3 - x_2^3,\ x_1 x_4 - x_2 x_3,\ x_1 x_3^2 - x_2^2 x_4,\ x_2 x_4^2 - x_3^3)$ (ez a *Macaulay*-féle prímideál) és

$P_W =: (x_1, x_4)$.

Ekkor $(P_V, P_W)=(x_1, x_2^3, x_2x_3, x_3^3, x_4)$. Könnyen igazolható, hogy V és W metszete nem elfajuló, és egyetlen C komponensből áll; a C-hez tartozó prímideál $P_C=$ $=(x_1, x_2, x_3, x_4)$. V lokális gyűrűje C-ben

$$A =: R_{(x_1,x_2,x_3,x_4)}/P_V \cdot R_{(x_1,x_2,x_3,x_4)},$$

ahol $R=: k[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$. A 0.3.14. tétel utáni példa szerint A nem *Cohen—Macaulay*-gyűrű, $\dim A=2$ és $\operatorname{codh} A=1$.

Most $Q_C=(P_V, P_W)=(x_1, x_2^3, x_2x_3, x_3^3, x_4)$ és $P_C=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ között egy tovább nem finomítható primér lánc

$$(x_1, x_2^3, x_2x_3, x_3^3, x_4) \subset (x_1, x_2^2, x_2x_3, x_3^3, x_4) \subset (x_1, x_2, x_3^3, x_4) \subset (x_1, x_2, x_3^2, x_4) \subset$$
$$\subset (x_1, x_2, x_3, x_4),$$

így $l_A(A/Q)=\mu(C)=5$. Másrészt a 0.3.10. tétel alkalmazásával

$$h_0(P_V)\cdot h_0(P_W) = e_0(Q, A)\cdot h_0(P_C)$$

adódik. A 0.2.14. példa szerint $h_0(P_V)=4$, $h_0(P_W)=1$, a 0.2.10. gyakorlat 1) állítása szerint $h_0(P_C)=1$. Tehát $e_0(Q, A)=i(V\cdot W, C)=4$.

2.6. KÖVETKEZMÉNY. A fenti példa jelöléseivel $\mu(C)-i(V\cdot W, C)=1=\dim A-$ $-\operatorname{codh} A$, azaz (P_1) teljesül.

Megjegyzés. Ha most a fenti példában a W sokaságot úgy változtatjuk, hogy a P_C-hez tartozó metszetkomponens változatlan maradjon, az új W' sokasághoz tartozó ideál pedig (x_i, F) alakú legyen valamilyen F homogén polinommal, akkor a $\mu(C)-i(V\cdot W', C)$ különbség továbbra is 1 marad; pl. az Olvasó meggyőződhet róla, hogy $Q=: (x_2, x_1^2+x_4^2)\cdot A$ esetén $l_A(A/Q)=9$ és $e_0(Q, A)=8$. Semmit sem tudunk viszont mondani arról a még általánosabb esetről, amikor x_i helyett is valamilyen alkalmas, bonyolultabb F' alakot választunk.

Ha a (P_1) problémára egyéb, nem triviális példákat keresünk (ahol tehát $\dim A>\operatorname{codh} A$), akkor figyelembe kell vennünk a 2.5. tétel állítását. Speciálisan, további nem perfekt prímideálokra van szükségünk. Az előbbi példában szereplő nem perfekt prímideál egészen az utóbbi évekig (pontosabban 1965-ig) meglehetősen egyedül állt az irodalomban. Akkor W. GRÖBNER [8] megmutatta, hogy nem perfekt prímideálokat nyerhetünk, ha *Veronese*-sokaságokat (a definíciót lásd alább) egy x_i-tengely ideális pontjából az $x_i=0$ hipersíkra vetítünk. Így végtelen sok nem perfekt prímideált kapunk; az előző példában szereplő *Macaulay*-féle prímideál éppen ezek legegyszerűbbike.

Röviden megadjuk W. GRÖBNER [8] konstrukcióját:

A $k[y_0, \ldots, y_n]=: k[y]$ homogén polinomgyűrűben tekintsük az összes m-edfokú hatványszorzatot: $y_0^{i_0}\ldots y_n^{i_n}$, $i_0+\ldots+i_n=m$, és rendezzük őket valahogyan, például lexikografikusan, sorozatba. Az ilyen hatványszorzatok száma $\binom{n+m}{m}=:N+1$. $k[y]$-on kívül tekintsük még a $k[x_0, \ldots, x_N]=: k[x]$ homogén polinomgyűrűt, és végezzük el a következő helyettesítést:

$$(*) \qquad x_{(i)} \to y^{(i)} = y_0^{i_0} \ldots y_n^{i_n},$$

ahol $y^{(i)}$ a hatványszorzat-sorozat i-edik eleme. Az egyszerűség kedvéért x_i helyett $x_{(i)}$-t írunk, ahol $(i)=(i_0, \ldots, i_n)$ az $y^{(i)}$-nek megfelelő vektor.

A $V_{n,m} \lhd k[x]$ *Veronese*-ideált azok a $\Phi(x)=\Phi(x_0, \ldots, x_N) \in k[x]$ alakok alkotják, amelyek a $(*)$ behelyettesítés elvégzése után eltűnnek:

$$V_{n,m} = \{\Phi(x_{(i)}) \in k[x] | \Phi(y^{(i)}) = 0\}.$$

A *Veronese*-ideáloknak megfelelő algebrai projektív sokaságokat *Veronese*-sokaságoknak nevezzük.

A *Veronese*-ideálok bázisát és *Hilbert*-függvényét L. S. GODDARD [4], [5] adta meg. Eredményei valamivel rövidebb bizonyítással szerepelnek [8]-ban is, további tételekkel együtt, melyek a *Veronese*-ideálok perfektségére és bizonyos projekcióira vonatkoznak. Most bizonyítás nékül közöljük GODDARD, ill. GRÖBNER néhány eredményét:

Minden *Veronese*-ideál perfekt prímideál; a $V_{n,m}$-nek megfelelő sokaság része az $N=\binom{n+m}{n}-1$ dimenziós projektív térnek, szingularitása nincs, dimenziója n, rendje $h_0(V_{n,m})=m^n$ és $s=:\binom{N+2}{2}-\binom{2m+n}{n}$ másodrendű sokaság metszeteként állítható elő, azaz $V_{n,m}$-nek van s alakból álló bázisa. Ez a bázis $x_{(i)}x_{(k)}-x_{(l)}x_{(p)}$ alakú polinomokból áll, ahol $(i)+(k)=(l)+(p)$.

Most megváltoztatjuk a $(*)$ helyettesítést: elhagyjuk az $y_0^{m-1}y_1$ hatványszorzatot, és ennek megfelelően $x_1=x_{(m-1,1,0,\ldots,0)}$ helyébe mindenütt 0-t írunk; ezzel eggyel kevesebb határozatlanunk marad. Az új helyettesítés segítségével definiáljuk a $V_{n,m}^{(1)}$ ideált: ez a $V_{n,m}$-hez tartozó, x_1-et nem tartalmazó alakokból áll; azaz

$$V_{n,m}^{(1)} = V_{n,m} \cap k[x_0, x_2, \ldots, x_N].$$

Geometriailag ez azt jelenti, hogy a $V_{n,m}$ ideál által meghatározott sokaságot az x_1 tengely ideális pontjából az $x_1=0$ hipersíkra vetítjük. W. GRÖBNER [8] szerint a $V_{n,m}^{(1)}$ prímideál $n=1$ esetén perfekt, $n \geqq 2$ esetén nem perfekt.

Hasonlóan minden i-re, $i=0, \ldots, N$, képezhetjük a $V_{n,m}^{(i)}$ prímideálokat; az $i=2$ esetben például szintén [8] szerint $V_{n,m}^{(2)}$ nem perfekt, ha $n \geqq 1$ és $m \geqq 4$. ($V_{1,4}^{(2)}$ éppen a 2.6. következményben szereplő *Macaulay*-féle prímideál.) Ha most a $V_{n,m}^{(i)}$ prímideál sokaságát az x_j-tengely ideális pontjából az $x_j=0$ hipersíkra vetítjük (azaz x_j helyébe is 0-t írunk), akkor újabb $V_{n,m}^{(i,j)}$ prímideálhoz jutunk, és így tovább.

B. RENSCHUCH (Potsdam) igen hasznos módszert dolgozott ki, amely lehetővé teszi $V_{n,m}^{(i,j\ldots)}$ báziselemeinek a meghatározását, és ennek a segítségével vizsgálja a *Veronese*-sokaságok vetületeit. Minimális bázis explicit megadása azonban még ezzel a módszerrel is meglehetősen nehéz. Polinomideálokról szóló dolgozatában [19] leírja ezt a módszert és több példát is közöl. Néhány példájára (bizonyítás nélkül) mi is támaszkodunk.

Most még egy olyan példát fogunk látni, amely (P_1) állítását támasztja alá. Minthogy W. GRÖBNER [8] vizsgálatai szerint $V_{n,m}^{(1)}$ és $V_{n,m}^{(2)}$ struktúrája lényegesen különböző, és a 2.6. következményben az $x_2=0$ hipersíkra vetítettünk, azért most az $x_1=0$ hipersíkra fogunk vetíteni. [8] szerint ez esetben a legegyszerűbb nem perfekt prímideál $V_{2,3}^{(1)}$. B. RENSCHUCH [19] nyomán ismerjük a $V_{2,3}^{(1)}$ ideál egy bázisát, és tudjuk, hogy $V_{2,3}^{(1)} \lhd k[x_0, \ldots, x_8]$. Most $R=: k[x_0, \ldots, x_9]$-ben azt a P_V prímideált tekintjük, amelyet úgy kapunk, hogy $V_{2,3}^{(1)}$ báziselemeiben mindenütt eggyel nagyobb indexet veszünk:

$$P_V =: (x_1x_5-x_2^2, x_1x_7-x_2x_3, x_1x_8-x_2x_4, x_1x_9-x_2x_5, x_2x_6-x_3x_4, x_2x_7-x_4^2,$$
$$x_2x_8-x_4x_5, x_2x_9-x_5^2, x_3x_5-x_4^2, x_3x_7-x_4x_6, x_3x_8-x_5x_6, x_3x_9-x_5x_7,$$
$$x_4x_7-x_5x_6, x_4x_8-x_5x_7, x_4x_9-x_5x_8, x_6x_8-x_7^2, x_6x_9-x_7x_8, x_7x_9-x_8^2, x_1x_6-x_3^3).$$

Legyen $P_W =: (x_1, x_6, x_9)$, akkor

$$(P_V, P_W) = (x_1, x_2^2, x_3^3, x_5^2, x_6, x_7^2, x_8^2, x_9, x_2x_3, x_2x_5, x_3x_7, x_3x_8, x_5x_7, x_5x_8,$$
$$x_3x_5-x_4^2, x_2x_7-x_4^2, x_2x_4, x_3x_4, x_2x_8-x_4x_5, x_4x_7, x_4x_8).$$

$(P_V, P_W)\lhd R$ primér ideál, a hozzá tartozó prímideál

$$P_C =: (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9).$$

$\dim P_W=6$, $\dim P_C=0$, és látni fogjuk, hogy $\dim P_V=3$; tehát P_V és P_W nem elfajulóan metszi egymást, és a metszet egyetlen komponensből áll.

Konstruáljuk most meg az $A=: R_{P_C}/P_V\cdot R_{P_C}$ lokális gyűrűt! [8] szerint $k[x_0, \ldots, x_8]$-ban $\dim V_{2,3}^{(1)}=2$, így R-ben $\dim P_V=3$. Mivel $\dim P_C=0$, azért $\dim A=3$. $Q=(x_1, x_6, x_9)\cdot A$ tehát paraméterideál. Most a 2.6. következmény bizonyításához hasonló, de annál valamivel fáradságosabb számolás útján az alábbi eredményt kapjuk:

2.7. KÖVETKEZMÉNY. $\mu(C)=10$, $i(V\cdot W, C)=9$, $\dim A=3$ és $\operatorname{codh} A=2$, vagyis (P_1) állítása ez esetben is igaz.

Ismeretesek olyan sokaságok is, amelyek szintén nem perfekt prímideálokhoz tartoznak, nem állíthatók elő *Veronese*-sokaságok vetületeiként, és igaz rájuk (P_1) (lásd B. RENSCHUCH—J. STÜCKRAD—W. VOGEL [20]). Ezért azt gondolhatnánk, hogy a fenti, geometriai feltételek mellett a *Buchsbaum*-sejtés mindig igaz. Ez azonban nem így van. A következőkben olyan példát adunk meg, amelyben (P_1) nem teljesül, de amely bonyolultabb, mint a 2.6. vagy a 2.7. következményben szereplő példa. Inkább csak „érzés alapján" olyan, nem perfekt prímideált keresünk, amelynek van legalább egy legalább negyedfokú bázispolinomja. A fenti, (P_1)-et alátámasztó példákban ugyanis valamennyi bázispolinom legfeljebb harmadfokú volt. Ilyen bonyolultabb példát pl. *Veronese*-sokaságok többszörös vetítésével kaphatunk.

Tekintsük a $V_{1,5}$ prímideállal definiált sokaságot, és vetítsük előbb az $x_2=0$, majd az $x_3=0$ hipersíkra. (Ez a legegyszerűbb olyan eset, amikor egy *Veronese*-sokaság kétszeres vetítésével térgörbét kapunk.) Térjünk át most is eggyel magasabb dimenziós térbe, és tekintsük $R=: k[x_0, \ldots, x_4]$-ben azt a P_V prímideált, amelyet úgy kapunk, hogy $V_{1,5}^{(2,3)}$ báziselemeiben mindenütt eggyel nagyobb indexet írunk. Ekkor [19] szerint $P_V=(x_1x_4-x_2x_3, x_1^3x_3-x_2^4, x_1^2x_3^2-x_2^3x_4, x_1x_3^3-x_2^2x_4^2, x_3^4-x_2x_4^3)$, $\dim P_V=2$ és a 0.2.14. példához hasonlóan igazolható, hogy $h_0(P_V)=5$. Legyen $P_W=: (x_1, x_4)$, akkor $(P_V, P_W)=(x_1, x_4, x_2x_3, x_2^4, x_3^4)$ primér, a hozzá tartozó prímideál $P=: (x_1, x_2, x_3, x_4)$, így $\dim P_W=3$, $\dim (P_V, P_W)=1$, V és W tehát nem elfajulóan metszi egymást egyetlen C komponensben. Képezzük most az $A=:R_P/P_V\cdot R_P$ lokális egyűrűt és a $Q=: (x_1, x_4)\cdot A$ paraméterideált. Ekkor a 2.6. következmény bizonyításához hasonlóan kapjuk, hogy

2.8. KÖVETKEZMÉNY. $\mu(C)=7$, $i(V\cdot W, C)=5$, $\dim A=2$, $\operatorname{codh} A=1$, tehát (P_1) nem igaz.

Megjegyzés. B. RENSCHUCH, J. STÜCKRAD és W. VOGEL [20] megmutatta, hogy a (P_1)-ben szereplő $\mu(C)-i(V\cdot W, C)$ különbség értéke tetszőleges nem negatív egész értéket felvehet.

1. *Probléma.* Mikor teljesül (P_1)?

Azt sejtjük, hogy ez V struktúrájának egy eddig még ismeretlen tulajdonságától függ. Talán definiálható homogén polinomideáloknak egy olyan, a lokálisan perfekt ideálokat tartalmazó osztálya, amelyben igaz (P_1). [1])

A (P_2) problémáról pillanatnyilag nagyon keveset tudunk. A (P_1) problémával kapcsolatban vizsgált példák alapján a keresett $N(V, C)$ invariáns lehetne például a következő: Legyen $(p_1, \ldots, p_s)$ a V sokaságot definiáló P_V prímideál egy minimális bázisa, $M=\max_{1\leq i\leq s} \operatorname{gr} p_i$, $m=\min_{1\leq i\leq s} \operatorname{gr} p_i$. Igazolható, hogy M és m nem függ a p_i bázispolinomok választásától. Legyen most

$$N(V, C) = (M-m)(\dim A-\operatorname{codh} A).$$

Eddig példáink szerint ez megfelelne; a következő, [19]-ben szereplő példa azonban azt mutatja, hogy ez az $N(V, C)$ nem lehet a keresett invariáns.

Tekintsük a $V_{1,6}^{(1,3,4)}$ nem perfekt prímideált, és legyen az eggyel magasabb dimenziójú $R=:k[x_0, \ldots, x_4]$ gyűrűben a megfelelő prímideál P_V. [19] szerint

$$P_V = (x_1x_3^2-x_2^2x_4,\ x_1x_4^2-x_2x_3^2,\ x_1^2x_4-x_2^3,\ x_2x_4^3-x_3^4).$$

A 0.2.14. példában látott módszerrel igazolható, hogy $h_0(P_V)=6$ és $\dim P_V=2$. Legyen továbbá

$$P_W =: (x_1, x_4),$$

akkor $h_0(P_W)=1$, $\dim P_W=3$.

$(P_V, P_W)=(x_1, x_4, x_2x_3^2, x_2^3, x_3^4)$ primér ideál, a hozzá tartozó prímideál $P_C=: (x_1, x_2, x_3, x_4)$, így $\dim(P_V, P_W)=1$ és $\mu((P_V, P_W))=\mu(C)=8$. P_V és P_W metszete tehát nem elfajuló. Képezzük most az

$$A =: R_{(x_1,x_2,x_3,x_4)}/P_V\cdot R_{(x_1,x_2,x_3,x_4)}$$

lokális gyűrűt és a $Q=: (x_1, x_4)\cdot A$ paraméterideált, akkor a 0.3.10. tételből $e_0(Q, A)=6$ adódik. Eszerint $l_A(A/Q)-e_0(Q, A)=\mu(C)-e_0(Q, A)=2$, így a 0.3.14. tétel értelmében A nem *Cohen—Macaulay*-gyűrű. Ez azt jelenti, hogy $\operatorname{codh} A\leq 1$, hiszen azonnal látszik, hogy $\dim A=2$. Másrészt viszont $P_V: x_1=P_V$, azaz x_1 nem nullosztó A-ban, így $\operatorname{codh} A\geq 1$.

Végeredményben azt kaptuk, hogy

$$\mu(C)-i(V\cdot W, C) = 8-6 \neq (4-3)(2-1) = (M-m)(\dim A-\operatorname{codh} A),$$

tehát

[1]) Megjegyzés a korrektúra olvasásakor: A problémát azóta megoldották, ld. B. RENSCHUCH—J. STÜCKRAD—W. VOGEL [20].

2.9. KÖVETKEZMÉNY. $(M-m)(\dim A-\operatorname{codh} A)$ nem lehet a (P_2) problémában keresett $N(V, C)$ invariáns.

Megjegyezzük még, hogy korábbi példáinkkal ellentétben most P_V bázisában nem szerepelt másodfokú alak.

A 2.9. következmény ellenére is azt sejtjük, hogy a (P_2) problémára a válasz pozitív, mégpedig

$$\mu(C)-i(V\cdot W, C) = t\cdot(\dim A-\operatorname{codh} A),$$

ahol t a P_V báziselemeinek a fokától függő nem negatív egész szám. Ezzel kapcsolatban merül fel a következő probléma:

2. Probléma. Perfekt-e (vagy lokálisan perfekt-e) egy $P\lhd k[x_0, ..., x_n]$ homogén prímideál, ha egy minimális bázisának valamennyi eleme ugyanolyan fokú? (Pl. lokálisan perfektek-e azok a sokaságok, amelyeket MUMFORD [15] vizsgált?) [2])

Végül ismét megfogalmazzuk az I. fejezetünk fő problémáját:

3. *Probléma.* Létezik-e olyan, csak V-től és C-től függő nem negatív egész szám, $N(V, C)$, melyre

$$\mu(C)-i(V\cdot W, C) = N(V, C)?\,[3])$$

Az 1. § alapján tudjuk, hogy ha itt a korlátozó geometriai feltételeinktől eltekintünk, akkor ilyen invariáns nem létezik.

3. §. M. Auslander és D. A. Buchsbaum néhány lokális multiplicitáselméleti eredménye

Legyen (R, M) lokális gyűrű, Q M-primér ideál. Az $e_0(Q, R)$ multiplicitás meghatározásakor a 0.3.7. tétel szerint elég arra az esetre szorítkoznunk, amikor Q paraméterideál. A következőkben látni fogjuk, hogy az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük azt is, hogy a paraméterrendszer rendelkezik bizonyos tulajdonságokkal. E célból M. AUSLANDER—D. A. BUCHSBAUM [1], § 4 néhány eredményét közöljük (bizonyítás nélkül). Ezek az eredmények önmagukban is érdekesek, azonkívül pedig kiegészítik eddigi multiplicitáselméleti vizsgálatainkat.

Minthogy e paragrafus során általában modulusokkal fogunk foglalkozni, azért most előrebocsátunk bizonyos moduluselméleti eredményeket. Ezek pontosan úgy bizonyíthatók, mint a megfelelő, a 0. fejezetünk 1. paragrafusában szereplő gyűrűelméleti eredmények, ezért a bizonyításukra nem térünk ki (lásd még [35], IV. fejezet, függelék).

[2]) Megjegyzés a korrektúra olvasásakor: Az általános kérdésre a válasz: nem. B. RENSCHUCH ellenpéldát konstruált a [19] dolgozatban közölt módszerrel. A zárójelben álló speciális kérdés még nyitott.

[3]) Megjegyzés a korrektúra olvasásakor: Időközben bizonyítást nyert, hogy ilyen invariáns nem mindig létezik. Ld. J. STÜCKRAD—W. VOGEL: Über das Amsterdamer Programm von W. Gröbner und Buchsbaum-Varietäten. *Monatsh. Math.* **78** (1974), 433—445.

Legyen R tetszőleges gyűrű (nem föltétlen *Noether*-féle), E R-modulus, F részmodulusa E-nek. Az F részmodulus *radikálja*

$$\sqrt{F} = \{a \in R \mid \exists n \text{ term. szám } a^n \cdot E \subset F\} \lhd R.$$

Az $F \subset E$ részmodulust *primér*nek nevezzük, ha

$$ax \in F, \quad a \in R, \quad x \in E \Rightarrow x \in F \quad \text{vagy} \quad a \in \sqrt{F}.$$

Ha F primér részmodulusa E-nek, akkor $\sqrt{F}$ prímideál R-ben.

Azt mondjuk, hogy E *Noether-modulus,* ha E olyan unitér modulus, melynek minden részmodulusa végesen generálható. Ha R *Noether*-gyűrű, akkor egy E unitér R-modulus akkor és csak akkor *Noether*-féle, ha végesen generálható. Ha E *Noether*-modulus, akkor E minden F részmodulusa előállítható véges sok primér részmodulus nem rövidíthető metszeteként; ezeket a primér részmodulusokat F primér komponenseinek nevezzük. F primér komponenseinek a radikálja (a komponenshez tartozó prímideál) egyértelmű, és egyértelműek az F izolált primér komponensei is (ez utóbbiakat ugyanúgy definiáljuk, mint az ideáloknál).

A 0.3.4. tétel utáni megjegyzésünk értelmében tekintsünk egy R szemilokális gyűrűt, egy $V \lhd R$ nyílt ideált és egy E *Noether*-féle R-modulust, akkor az $l_R(E/V^{n+1} \cdot E)$ *Hilbert—Samuel*-polinom fölírható ilyen alakban:

$$l_R(E/V^{n+1} \cdot E) = e_0(V, E)\binom{n+d}{d} + \ldots, \quad \text{ahol} \quad d = \dim R.$$

Itt $\binom{n+\dim E}{\dim E}$ együtthatója az első el nem tűnő együttható, azaz $e_0(V, E) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dim E < \dim R$. Az is igazolható, hogy ha V generálható paraméterrendszerrel, és létezik olyan m természetes szám és $x \in V$, hogy $x^m \cdot E = 0$ és x kiegészíthető egy V-t generáló paraméterrendszerré, akkor $e_0(V, E) = 0$.

A következő tétel multiplicitások kiszámításához nyújt segítséget:

3.1. Tétel. *Legyen R, V és E olyan, mint fent,* $\dim R = d$, *és tegyük fel, hogy V d elemmel generálható: $V = (x_1, \ldots, x_d)$. Akkor*

$$e_0(V, E) = l_R(E/V \cdot E) - l_{R/V_{d-1}}((V_{d-1} \cdot E) : x_d/(V_{d-1} \cdot E)) -$$

$$- \sum_{k=1}^{d-1} e_0(V/V_k, (V_{k-1} \cdot E) : x_k/V_{k-1} \cdot E)),$$

ahol $V_k =: (x_1, \ldots, x_k)$, $k = 1, \ldots, d-1$, $V_0 \cdot E =: (0)$, *továbbá*

$$(V_{k-1} \cdot E) : x_k = \{e \in E \mid x_k \cdot e \in V_{k-1} \cdot E\} \supseteq V_{k-1} \cdot E.$$

Auslander és Buchsbaum azt is észrevette, hogy a V ideál x_i generátorainak alkalmas megválasztásával a fenti, meglehetősen bonyolult képlet jelentősen egyszerűsíthető. Úgy tűnik, hogy ez az eredményük az irodalomban eddig még nem nyert alkalmazást, nekünk azonban szükségünk lesz rá a II. fejezetben.

3.2. Lemma. *Legyen R, V és E olyan, mint a* 3.1. *tételben; akkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

(i) $e_0(V/V_k, (V_{k-1}\cdot E)\colon x_k/(V_{k-1}\cdot E)) = 0, \quad k = 0, \dots, d-1.$

(ii) $e_0(V, E) = l_R(E/V\cdot E) - l_{R/V_{d-1}}((V_{d-1}\cdot E)\colon x_d/(V_{d-1}\cdot E)),$

(iii) *Minden k-ra ($k=0, \dots, d-1$): x_k nem eleme egyetlen olyan P prímideálnak sem, amely a $V_{k-1}\cdot E$ modulushoz tartozik (a moduluselméleti primér felbontás értelmében), és amelyre* $\dim P \geqq d-k$.

3.3. DEFINÍCIÓ. Legyen R, V és E olyan mint a 3.1. tételben, továbbá $\dim E = \dim R = d$ és $V=(x_1, \dots, x_d)$. Azt mondjuk, hogy $x_1, \dots, x_d$ *redukált paraméterrendszere E-nek,* ha

(a) $x_1, \dots, x_d$ paraméterrendszer (R-ben), azaz $l_R(R/V) < \infty$ és

(b) $e_0(V, E) = l_R(E/V\cdot E) - l_{R/V_{d-1}}((V_{d-1}\cdot E)\colon x_d/(V_{d-1}\cdot E)),$

ahol $V_{d-1} = (x_1, \dots, x_{d-1})$.

Általában az $E=R$ esettel fogunk foglalkozni, és ekkor egyszerűen csak *redukált paraméterrendszer*ről beszélünk.

Megjegyzés. Innen azonnal következik, hogy ha $x_1, \dots, x_d$ redukált paraméterrendszere E-nek, akkor $x_1, \dots, x_{d-1}, y$ is az minden olyan $y\in R$-re, amellyel $x_1, \dots, x_{d-1}, y$ paraméterrendszer (R-ben). Ehhez az észrevételünkhöz kapcsolódik az alábbi lemma:

3.4. LEMMA. *$(x_1, \dots, x_{d-1}, x)$ és $(x_1, \dots, x_{d-1}, y)$ paraméterrendszer R-ben, akkor paraméterrendszer $(x_1, \dots, x_{d-1}, xy)$ is, és tetszőleges E Noether-féle R-modulusra*

$$e_0((x_1, \dots, x_{d-1}, xy), E) = e_0((x_1, \dots, x_{d-1}, x), E) + e_0((x_1, \dots, x_{d-1}, y), E).$$

Most pedig AUSLANDER és BUCHSBAUM dolgozatának fő eredménye következik:

3.5. TÉTEL. *Legyen R szemilokális gyűrű, E Noether-féle R-modulus,* $\dim R = \dim E$, *és tegyük fel, hogy a $V \lhd R$ ideál generálható (R-beli) paraméterrendszerrel, akkor V generálható E egy redukált paraméterrendszerével.*

II. FEJEZET

LOKÁLIS GYŰRŰK EGY ÚJ OSZTÁLYA

1. §. A Cohen—Macaulay gyűrűk egy általánosítása

Legyen (A, M) lokális gyűrű, $B \lhd A$. A rövidség kedvéért bevezetünk néhány jelölést: Ass (B) jelölje a B-hez tartozó prímideálokat, Assh (B) a maximális dimenziójú, B-hez tartozó prímideálokat, $U(B)$ pedig a B-hez tartozó, maximális dimenziójú primér ideálok metszetét. Ekkor Assh $(B)=$ Ass $(U(B))=$ Assh $(U(B))$, és B pontosan akkor egynemű, ha $B=U(B)$.

Gyakran használjuk majd a következő segédtételt:

1.1. SEGÉDTÉTEL. *Legyen $B, P_1, \dots, P_n \lhd A$, $P_1, \dots, P_n$ prímideál, továbbá minden i-re ($i=1, \dots, n$)* $\dim P_i \geqq \dim B$ *és* $P_i \notin$ Ass (B). *Akkor létezik olyan $b\in B$, melyre $b\notin P_i$ ($i=1, \dots, n$).*

Bizonyítás. A 0.2.7. definíció utáni 2) gyakorlat szerint elegendő azt belátnunk, hogy $B \nsubseteq P_i$, $i=1, \ldots, n$. Tegyük fel ezzel ellentétben, hogy $B \subseteq P_k$ valamilyen $1 \leq k \leq n$-nel, és legyen $\operatorname{Ass}(B) = \{P_{(1)}, \ldots, P_{(m)}\}$; akkor megfelelő $\varrho_1, \ldots, \varrho_m$ természetes számokkal $\prod_{j=1}^{m} P_{(j)}^{\varrho_j} \subseteq B \subseteq P_k$, tehát létezik olyan j, $1 \leq j \leq m$, hogy $P_{(j)} \subseteq P_k$, és itt egyenlőség nem állhat, mivel $P_{(j)} \in \operatorname{Ass}(B)$ és $P_k \notin \operatorname{Ass}(B)$. Eszerint $B \subseteq P_{(j)} \subset P_k$, így $\dim B \geq \dim P_{(j)} > \dim P_k \geq \dim B$, ami ellentmondás, q.e.d.

Megjegyezzük még, hogy e fejezetben a példáinkat mind úgy konstruáljuk, hogy egy k test fölötti R polinomgyűrűnek egy ideálja szerinti faktorát vesszük, majd lokalizálunk egy prímideál szerint, és az így kapott A lokális gyűrűt vizsgáljuk. Vizsgálataink során azonban az előző fejezetben részletesen leírt megfeleltetések szerint A helyett R-ben számolunk, anélkül, hogy erre külön utalnánk.

Most pedig az 1. §. legfontosabb definíciója következik:

1.2. DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy $a_1, \ldots, a_r$ $(a_i \in M)$ *gyenge prímsorozat* vagy *gyenge A-sorozat,* ha minden i-re, $i=1, \ldots, r$,

$$M \cdot [(a_1, \ldots, a_{i-1}) : a_i] \subseteq (a_1, \ldots, a_{i-1})$$

$\big(i=0$ esetén $(a_1, \ldots, a_i) =: (0)\big)$.

1.3. KÖVETKEZMÉNY. Minden prímsorozat gyenge prímsorozat.

Példa: Legyen $R =: k[x_0, \ldots, x_3]$, $B =: (x_1^2, x_1 x_2) \lhd R$, $A =: R_{(x_1, x_2, x_3)}/B \cdot R_{(x_1, x_2, x_3)}$. Az 1.1.1. tételünk bizonyításában láttuk, hogy $\dim A = 2$, $\operatorname{codh} A = 1$ és A-ban nem teljesül a Buchsbaum-probléma állítása.

a) állítás: x_3, x_2 gyenge prímsorozat A-ban, de nem prímsorozat. Valóban,

$$(x_1, x_2, x_3)\,[B : x_3] = (x_1, x_2, x_3) \cdot B \subseteq B,$$

$$(x_1, x_2, x_3)[(B, x_3) : x_2] = (x_1, x_2, x_3) \cdot (x_1, x_3) \subseteq (B, x_3),$$

mivel

$$(B, x_3) = (x_1, x_3) \cap (x_1^2, x_2, x_3) = (x_1^2, x_1 x_2, x_3)$$

és

$$(B, x_3) : x_2 = (x_1, x_3) : x_2 \cap (x_1^2, x_2, x_3) : x_2 = (x_1, x_3) \cap (1) = (x_1, x_3);$$

x_3, x_2 tehát gyenge prímsorozat; prímsorozat viszont nem lehet, hiszen $\operatorname{codh} A = 1$. Látni fogjuk, hogy a gyenge prímsorozatok hossza is legföljebb $\dim A$, így x_3, x_2 maximális gyenge prímsorozat.

b) állítás: x_2, x_3 nem gyenge prímsorozat. Valóban,

$$(x_1, x_2, x_3)\,[B : x_2] = (x_1, x_2, x_3)\,(x_1) = (x_1^2, x_1 x_2, x_1 x_3) \nsubseteq B.$$

Példánkból tehát a következőket szűrhetjük le:

1) létezik olyan gyenge prímsorozat, ami nem prímsorozat,

2) a prímsorozatokkal ellentétben, a gyenge prímsorozatokban igen lényeges az elemek sorrendje,

3) ha a *Cohen—Macaulay*-gyűrűket úgy próbáljuk általánosítani, hogy a 0.3.13. definícióban prímsorozat helyett gyenge prímsorozatot veszünk, akkor ebben a bővebb gyűrűosztályban már nem teljesülne a *Buchsbaum*-probléma állítása.

Most egy szükséges és egy elegendő feltételt adunk annak eldöntésére, hogy egy adott sorozat gyenge prímsorozat-e.

1.4. SEGÉDTÉTEL. *Ha $a_1, \dots, a_r$ gyenge prímsorozat, akkor minden i-re $(i=1, \dots, r)$*

$$(*) \qquad a_i \notin P \quad \forall P \in \mathrm{Ass}\,((a_1, \dots, a_{i-1})),\ \dim P \geqq 1.$$

Bizonyítás. A gyenge prímsorozat definíciójából következik, hogy minden i-re $(i=1, \dots, r)$

$$(a_1, \dots, a_{i-1})\colon a_i \subseteqq (a_1, \dots, a_{i-1})\colon M,$$

$a_i \in M$ miatt viszont

$$(a_1, \dots, a_{i-1})\colon a_i \supseteqq (a_1, \dots, a_{i-1})\colon M,$$

így

$$(a_1, \dots, a_{i-1})\colon a_i = (a_1, \dots, a_{i-1})\colon M.$$

Tegyük most fel, hogy létezik olyan $P \in \mathrm{Ass}\,((a_1, \dots, a_{i-1}))$, melyre $\dim P \geqq 1$ (azaz $P \neq M$) és $a_i \in P$. Legyen Q az $(a_1, \dots, a_{i-1})$ ideál egy P-primér komponense, akkor létezik olyan $n \geqq 0$ egész szám, hogy $a_i^{n+1} \in Q$, $a_i^n \notin Q$. Legyen továbbá M egy bázisa $(m_1, \dots, m_t)$, akkor

$$(a_1, \dots, a_{i-1})\colon a_i^{n+1} = ((a_1, \dots, a_{i-1})\colon a_i)\colon a_i^n = ((a_1, \dots, a_{i-1})\colon M)\colon a_i^n =$$

$$= \left(\bigcap_{j=1}^{t} (a_1, \dots, a_{i-1})\colon m_j\right)\colon a_i^n = \bigcap_{j=1}^{t} (a_1, \dots, a_{i-1})\colon (a_i^n m_j) = \bigcap_{j=1}^{t} ((a_1, \dots, a_{i-1})\colon a_i^n)\colon m_j =$$

$$= ((a_1, \dots, a_{i-1})\colon a_i^n)\colon M.$$

Itt $(a_1, \dots, a_{i-1})\colon a_i^{n+1}$-nek nincs P-primér komponense, $((a_1, \dots, a_{i-1})\colon a_i^n)\colon M$-nek viszont van, ami ellentmondás, q.e.d.

1.5. KÖVETKEZMÉNY. Minden gyenge prímsorozat kiegészíthető redukált paraméterrendszerré, így ha $a_1, \dots, a_r$ gyenge prímsorozat, akkor $r \leqq \dim A$.

Megjegyzés. A $(*)$ feltétel nem elegendő, amint azt a következő példa mutatja. Tekintsük ismét az 1.3. következmény utáni példában megadott A lokális gyűrűt és abban az x_3^2, x_2 sorozatot. Erre teljesül $(*)$, mivel x_3^2 nem eleme egyetlen, az (x_1^2, x_1x_2)-höz tartozó prímideálnak sem, továbbá $(x_1^2, x_1x_2, x_3^2) = (x_1, x_3^2) \cap \cap (x_1^2, x_2, x_3^2)$, $x_2 \notin (x_1, x_3)$, (x_1^2, x_2, x_3^2) pedig A-ban 0-dimenziós. Másrészt viszont x_3^2, x_2 nem gyenge prímsorozat, ugyanis

$$(x_1, x_2, x_3)\,[(x_1^2, x_1x_2, x_3^2)\colon x_2] = (x_1, x_2, x_3)\,(x_1, x_3^2) \ni x_1x_3 \quad \text{és} \quad x_1x_3 \notin (x_1^2, x_1x_2, x_3^2).$$

1.6. SEGÉDTÉTEL. *Ha egy $a_1, \dots, a_r$ $(a_i \in M)$ sorozatra teljesül $(*)$, továbbá minden i-re $(i=1, \dots, r)$ $M \cdot (Q'_{i-1}\colon a_i) \subseteqq Q'_{i-1}$, ahol Q'_{i-1} az $(a_1, \dots, a_{i-1})$ ideál egy M-primér komponense (ha ilyen nincsen, akkor $Q^1_{i-1} =\colon A$), akkor $a_1, \dots, a_r$ gyenge prímsorozat.*

Bizonyítás. Legyen $(a_1, ..., a_{i-1})$ egy primér felbontása $Q'_{i-1} \cap Q_1 \cap ... \cap Q_t$, akkor

$$M \cdot [(a_1, ..., a_{i-1}): a_i] = M \cdot [Q_1: a_i \cap ... \cap Q_t: a_i \cap Q'_{i-1}: a_i] =$$
$$= M \cdot [Q_1 \cap ... \cap Q_t \cap Q'_{i-1}: a_i] = M \cdot Q_1 \cap ... \cap M \cdot Q_t \cap M \cdot (Q'_{i-1}: a_i) \subseteqq$$
$$\subseteqq Q_1 \cap ... \cap Q_t \cap Q'_{i-1} = (a_1, ..., a_{i-1}), \qquad \text{q.e.d.}$$

Megjegyzés. Az 1.6. segédtétel második feltétele nem szükséges, amint azt az alábbi példa mutatja. Tekintsük ismét az 1.3. következmény utáni példában szereplő lokális gyűrűt; láttuk, hogy ebben x_3, x_2 gyenge prímsorozat. Legyen most $i=2$; (x_1^2, x_1x_2, x_3)-nak az a primér komponense, amely A-ban M-primér lesz, (x_1^2, x_2, x_3), erre pedig

$$(x_1, x_2, x_3)[(x_1^2, x_2, x_3): x_2] = (x_1, x_2, x_3) \cdot (1) \subsetneqq (x_1^2, x_2, x_3).$$

1.7. TÉTEL. *Legyen (A, M) lokális gyűrű,* $\dim A = d$. *Ekkor ekvivalensek a következő állítások:*

(i) *Minden paraméterrendszer gyenge prímsorozat.*

(ii) *Ha $a_1, ..., a_d$ paraméterrendszer, akkor minden $0 \leqq k < d$-re*

$$M \cdot U((a_1, ..., a_k)) \subseteqq (a_1, ..., a_k).$$

(iii) *Ha $a_1, ..., a_d$ paraméterrendszer, $a \in M$ és* $\dim(a_1, ..., a_{k-1}, a) = d-k$, *ahol $1 \leqq k \leqq d$, akkor*

$$(a_1, ..., a_{k-1}): a_k = (a_1, ..., a_{k-1}): a.$$

(iv) *Ha $a_1, ..., a_d$ paraméterrendszer, $a \in M$ és* $\dim(a_1, ..., a_{d-1}, a) = 0$ *(azaz $a_1, ..., a_{d-1}, a$ is paraméterrendszer), akkor*

$$(a_1, ..., a_{d-1}): a_d = (a_1, ..., a_{d-1}): a.$$

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(iii): Minthogy $\dim(a_1, ..., a_{k-1}, a) = d-k$ esetén $a_1, ..., a_{k-1}, a$ kiegészíthető paraméterrendszerré (l. 0.3.11a. következmény), azért (i) értelmében $a_1, ..., a_{k-1}, a$ is és $a_1, ..., a_{k-1}, a_k$ is gyenge prímsorozat, így az 1.4. segédtétel bizonyítása szerint

$$(a_1, ..., a_{k-1}): a_k = (a_1, ..., a_{k-1}): M = (a_1, ..., a_{k-1}): a.$$

(iii)$\Rightarrow$(ii): Legyen $0 \leqq k < d$, $B =: (a_1, ..., a_k)$, és válasszunk egy olyan $a \in M$ elemet, melyre $a_1, ..., a_k, a$ kiegészíthető paraméterrendszerré. Most $B = U(B) \cap C$, ahol $\dim C < d-k$. Ekkor az 1.1. segédtétel szerint létezik olyan $a' \in C$ elem, hogy $a' \notin P$ egyetlen $P \in \mathrm{Assh}(B)$-re sem, így a 0.3.11a. következmény értelmében $a_1, ..., a_k, a'$ is kiegészíthető paraméterrendszerré. Feltevésünk szerint akkor

$$U(B) = U(B): a' = (U(B): a') \cap (C: a') = B: a' = B: a,$$

innen

$$a \cdot U(B) = a \cdot (B: a) \subseteqq B.$$

Legyen most $m \in M$ tetszőleges és $\mathrm{Assh}(B) = \{P_1, ..., P_n\}$. Tegyük fel, hogy $m \in P_1, ..., P_t$ és $m \notin P_{t+1}, ..., P_n$. Az 1.1. segédtétel szerint létezik olyan $m' \in C \cap \cap P_{t+1} \cap ... \cap P_n$, melyre $m' \notin P_1, ..., P_t$. Most akkor $a_1, ..., a_k, m+m'$ kiegészíthető paraméterrendszerré, így a fentiek szerint $(m+m')U(B)\subseteq B$. $m'\in C$ miatt viszont $m'U(B)\subseteq U(B)\cap C=B$, tehát $mU(B)\subseteq B$, q.e.d.

(ii)⇒(i): Legyen $a_1 \dots, a_d$ egy tetszőleges paraméterrendszer A-ban és $1\leqq i\leqq d$, akkor a 0.3.11a. következmény szerint $a_i\notin P$, ha $P\in \mathrm{Assh}\big((a_1, \dots, a_{i-1})\big)=$ $=\mathrm{Ass}\big(U((a_1, \dots, a_{i-1}))\big)$, így $U\big((a_1, \dots, a_{i-1})\big):a_i=U\big((a_1, \dots, a_{i-1})\big)$. Ekkor viszont $(a_1, \dots, a_{i-1}):a_i\subseteq U\big((a_1, \dots, a_{i-1})\big)$, tehát $M\cdot[(a_1, \dots, a_{i-1}):a_i]\subseteq M\cdot U\big((a_1, \dots, a_{i-1})\big)\subseteq$ $\subseteq(a_1, \dots, a_{i-1})$, q.e.d.

(iii)⇒(iv) triviális.

(iv)⇒(iii): Tegyük fel, hogy $a_1, \dots, a_k$ és $a_1, \dots, a_{k-1}, a$ kiegészíthető paraméterrendszerré ($1\leqq k\leqq d$). Az 1.1. segédtétel szerint található olyan $a_{k+1}\in M$, amely nem eleme egyetlen olyan prímideálnak sem, amely $\mathrm{Assh}\big((a_1, \dots, a_k)\big)$-hoz vagy $\mathrm{Assh}\big((a_1, \dots, a_{k-1}, a)\big)$-hoz tartozik. Ugyanígy továbbhaladva adjuk meg az $a_{k+2}, \dots, a_d$ elemeket is; ekkor a 0.3.11a. következmény szerint $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_d$ is és $a_1, \dots, a_{k-1}, a, a_{k+1}, \dots, a_d$ is paraméterrendszer. Az 1.3.4. lemma értelmében akkor paraméterrendszer $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}^n, \dots, a_d^n, a_k$ és $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}^n, \dots, a_d^n, a$ is minden $n\geqq 1$-re. Legyen most $B=:(a_1, \dots, a_{k-1})$, akkor

$$B\colon a_k \subseteq \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} (B, a_{k+1}^n, \dots, a_d^n)\right]: a_k = \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} (B, a_{k+1}^n, \dots, a_d^n)\right]: a$$

az indukciós feltevés szerint, így

$$B\colon a_k \subseteq \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} (B, (a_{k+1}, \dots, a_d)^n\right]: a = B\colon a.$$

Itt az utolsó egyenlőség helyett többet is igazolunk: megmutatjuk, hogy ha az (A, M) lokális gyűrűben egy B és egy C ideálra $B, C\subseteq M$, akkor $\bigcap_{n=1}^{\infty} (B, C^n)=B$. Ehhez W. KRULL egy tételét használjuk fel, miszerint ha (A, M) lokális gyűrű, akkor $\bigcap_{n=1}^{\infty} M^n=(0)$ (l. [35]). Legyen most $\bar{A}=:A/B$ és $\bar{C}=:C\cdot\bar{A}$, akkor

$$0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{C}^n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (B, C^n)/B = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (B, C^n)\right)/B,$$

így valóban $B=\bigcap_{n=1}^{\infty} (B, C^n)$.

A fenti meggondolásunkban a_k és a szerepét felcserélve azt kapjuk, hogy $B{:}a\subseteq B{:}a_k$, tehát $B{:}a_k=B{:}a$, q.e.d.

1.8. DEFINÍCIÓ. *Buchsbaum-gyűrűnek* vagy röviden **B**-*gyűrűnek* nevezzük azokat a lokális gyűrűket, amelyekben teljesülnek az 1.7. tétel ekvivalens állításai.

1.9. KÖVETKEZMÉNY. Minden *Cohen—Macaulay*-gyűrű **B**-gyűrű.

1.10. KÖVETKEZMÉNY. **B**-gyűrűben minden paraméterrendszer redukált.

1.11. KÖVETKEZMÉNY. Ha A **B**-gyűrű és $a_1, \dots, a_k$ kiegészíthető A egy paraméterrendszerévé, akkor $A/(a_1, \dots, a_k)$ is **B**-gyűrű.

Látni fogjuk a 2. §-ban, hogy a *Buchsbaum*-problémával kapcsolatos a következő kérdés: mikor **B**-gyűrű egy olyan lokális gyűrű, amely nem *Cohen—Macaulay*-féle? Erre adunk most egy szükséges feltételt az alábbi tétel segítségével. Ez a tétel különben jóval általánosabban is igaz, szemilokális gyűrűk fölötti modulusokra (l. [29]).

1.12. TÉTEL. *Legyen (A, M) lokális gyűrű,* $\dim A=d$, $Q=:(x_1, \dots, x_d) \lhd A$ *paraméterideál. Ekkor az alábbi két állítás ekvivalens:*

(i) *minden k-ra* $(k=1, \dots, d)$: $x_k \notin P$, *ha*

$$P \in \operatorname{Ass}((x_1, \dots, x_{k-1})) \quad \text{és} \quad \dim P = d-k,$$

(ii) $x_1, \dots, x_d$ *prímsorozat.*

Bizonyítás. (ii)$\Rightarrow$(i) triviális.

(i)$\Rightarrow$(ii): A 0.3.14. tétel szerint (ii) éppen azt jelenti, hogy *A Cohen—Macaulay*-gyűrű. Ezt kell tehát bizonyítanunk.

Az 1.3.1. tétel szerint

$$e_0(Q, A) = l_A(A/Q) - l_{A/Q_{d-1}}(Q_{d-1}: x_d/Q_{d-1}) - \sum_{k=0}^{d-1} e_0(Q/Q_k, Q_{k-1}: x_k/Q_{k-1}),$$

ahol $Q_k=:(x_1, \dots, x_k)$. Feltevésünkből és az 1.3.2. lemmából következik, hogy

$$e_0(Q/Q_k, Q_{k-1}: x_k/Q_{k-1}) = 0, \quad k = 1, \dots, d-1.$$

(i) feltevésünk szerint x_k nem eleme az $(x_1, \dots, x_{k-1})$-hez tartozó $(d-k)$-dimenziós prímideáloknak, (ii) feltevésünk és a 0.3.11a. következmény miatt azonban az $(x_1, \dots, x_{k-1})$-hez tartozó $(d-k+1)$-dimenziós prímideáloknak sem lehet eleme. $k=d$ esetén ez éppen azt jelenti, hogy x_d nem eleme egyetlen $(x_1, \dots, x_{d-1})$-hez tartozó prímideálnak sem, vagyis $Q_{d-1}:x_d=Q_{d-1}$. Ezt az előző eredményeinkkel összevetve $e_0(Q, A)=l_A(A/Q)$ adódik, így a 0.3.14. tétel szerint *A Cohen—Macaulay*-gyűrű.

1.13. KÖVETKEZMÉNY. Legyen (A, M) lokális gyűrű, $\dim A=d$. Ha A **B**-gyűrű, de nem *Cohen—Macaulay*-gyűrű, akkor bármely $(a_1, \dots, a_d)$ paraméterrendszerre az $(a_1, \dots, a_{d-1})$ ideálnak van M-primér komponense.

Ez azt jelenti, hogy ha A nem *Cohen—Macaulay*-gyűrű, akkor az 1.7. tétel (iv) állítása sohasem triviális (ha ugyanis $(a_1, \dots, a_{d-1})$-nek nem lenne M-primér komponense, akkor a (iv) állítás triviálisan teljesülne).

2. §. A Buchsbaum-probléma megoldása

Most visszatérünk D. A. BUCHSBAUM problémájára. Legyen (A, M) lokális gyűrű, $\dim A=d$, $Q \lhd A$ paraméterideál. Problémánk ekkor a következő: mikor független az $l_A(A/Q)-e_0(Q, A)$ szám a Q paraméterideáltól, azaz mikor létezik olyan $I(A)$ invariáns, hogy $l_A(A/Q)-e_0(Q, A)=I(A)$ minden $Q \lhd A$ paraméterideálra?

2.1. SEGÉDTÉTEL. *Ha az* $l_A(A/Q)-e_0(Q, A)$ *szám minden* $Q \lhd A$ *paraméterideálra azonos, akkor A-ban minden paraméterrendszer redukált.*

Bizonyítás. Legyen $Q=:(a_1, \ldots, a_d)$ tetszőleges paraméterideál, akkor az 1.3.4. lemma szerint $Q'=:(a_1, \ldots, a_{d-1}, a_d^2)$ is paraméterideál. Legyen most $Q_0=:(0)$, $k=1, \ldots, d-1$ esetén pedig $Q_k=:(a_1, \ldots, a_k)$ és $E_k=: Q_{k-1}:a_k/Q_{k-1}$, akkor feltevésünk és az 1.3.1. tétel szerint

$$0 = l_A(A/Q')-e_0(Q', A)-l_A(A/Q)+e_0(Q, A) =$$

$$(1) \qquad = \sum_{k=1}^{d-1} [e_0(Q'/Q_k, E_k)-e_0(Q/Q_k, E_k)]+l_{A/Q_{d-1}}(Q_{d-1}: a_d^2/Q_{d-1})-$$

$$-l_{A/Q_{d-1}}(Q_{d-1}: a_d/Q_{d-1}) = \sum_{k=1}^{d-1} e_0(Q/Q_k, E_k)+l_{A/Q_{d-1}}(Q_{d-1}: a_d^2/Q_{d-1}:a_d),$$

ugyanis az 1.3.4. lemma értelmében

$$e_0(Q'/Q_k, E_k) = 2e_0(Q/Q_k, E_k).$$

Minthogy (1) jobb oldalán minden összeadandó $\geqq 0$, azért mindegyikük 0. Tehát $e_0(Q/Q_k, E_k)=0$, $k=1, \ldots, d-1$, ami az 1.3.2. lemma és az 1.3.3. definíció szerint éppen azt jelenti, hogy az $a_1, \ldots, a_d$ paraméterrendszer redukált.

Megjegyzés. A 2.1. segédtétel bizonyításából az is kiderül, hogy

$$l_{A/Q_{d-1}}(Q_{d-1}:a_d^2/Q_{d-1}:a_d) = 0,$$

tehát ha a 2.1. segédtétel feltevése teljesül, akkor minden $a_1, \ldots, a_d$ paraméterrendszerre

$$Q_{d-1}: a_d^n = Q_{d-1}: a_d.$$

Dolgozatunk fő eredménye a következő tétel, amely BUCHSBAUM problémájának a megoldását szolgáltatja:

2.2. TÉTEL. *Legyen (A, M) lokális gyűrű,* dim $A=d$, *akkor az alábbi két állítás ekvivalens:*

(i) *létezik olyan $I(A)$ invariáns, hogy minden $Q\lhd A$ paraméterideálra*

$$l_A(A/Q)-e_0(Q, A) = I(A),$$

(ii) *A* B-*gyűrű.*

Bizonyítás. (i)$\Rightarrow$(ii): Legyen $a_1, \ldots, a_d$ egy tetszőleges paraméterrendszer, $a\in M$ pedig olyan, hogy $a_1, \ldots, a_{d-1}, a$ is paraméterrendszer. Az 1.3.4. lemma szerint akkor paraméterrendszer $a_1, \ldots, a_{d-1}, a\cdot a_d$ is. A 2.1. segédtétel szerint minden paraméterrendszer redukált, azaz

$$l_A(A/Q)-e_0(Q, A) = l_{A/Q_{d-1}}(Q_{d-1}: a_d/Q_{d-1}),$$

feltevésünk értelmében pedig ez a szám invariáns, így

$$l_{A/Q_{d-1}}(Q_{d-1}: a_d/Q_{d-1}) = l_{A/Q_{d-1}}(Q_{d-1}: a\cdot a_d/Q_{d-1}) = l_{A/Q_{d-1}}(Q_{d-1}: a/Q_{d-1}).$$

Innen következik egyrészt $Q_{d-1}:a_d=Q_{d-1}:a\cdot a_d$, másrészt $Q_{d-1}:a=Q_{d-1}:a\cdot a_d$, vagyis

$$Q_{d-1}: a_d = Q_{d-1}: a,$$

és így az 1.7. tétel szerint A **B**-gyűrű.

(ii)$\Rightarrow$(i): A bizonyítást d szerinti teljes indukcióval végezzük. Mindenekelőtt azonban megjegyezzük, hogy az 1.10. következmény szerint A-ban minden paraméterrendszer redukált. Legyen $d=1$, a_1 és a (redukált) paraméterrendszer, akkor az 1.7. tétel értelmében $0:a_1=0:a$, így

$$l_A(A/(a_1))-e_0((a_1), A)-l_A(A/(a))+e_0((a), A) = l_A(0: a_1)-l_A(0: a) = 0.$$

Tegyük most fel, hogy $\dim A \leqq d-1$ esetén az állítás igaz. Legyen $\dim A=d$ és $a_1, \dots, a_d$ egy tetszőleges (redukált) paraméterrendszer, $Q=:(a_1, \dots, a_d)$ és $B=:(a_1, \dots, a_{d-1})$, akkor $l_A(A/Q)-e_0(Q, A)=l_{A/B}(B:a_d/B)$. Itt a baloldal független az $a_1, \dots, a_d$ elemek sorrendjétől, ezért a jobboldal is független tőle. Legyen most $a_1', \dots, a_d'$ egy tetszőleges másik (redukált) paraméterrendszer, $Q'=:(a_1', \dots, a_d')$, $B'=:(a_1', \dots, a_{d-1}')$. Az 1.1. segédtételünk szerint létezik olyan $a\in M$, hogy $a\notin P$ egyetlen $P\in \operatorname{Assh}(B)\cup \operatorname{Assh}(B')$-re sem. A 0.3.11a. következmény és az 1.7. tétel (ii) állítása szerint akkor

$$B: a_d = B: a \quad \text{és} \quad B': a_d' = B: a.$$

Legyen most $\bar{A}=:A/(a)$, $C=:(a, a_1, \dots, a_{d-2})$, $C'=:(a, a_1', \dots, a_{d-2}')$, $\bar{C}=:C\cdot\bar{A}$, $\bar{C}'=:C'\cdot\bar{A}$. Az 1.11. következmény szerint $\bar{A}$ is **B**-gyűrű, és $(\bar{C}, a_{d-1}\cdot\bar{A})$, ill. $(\bar{C}', a_{d-1}'\cdot\bar{A})$ paraméterideál $\bar{A}$-ban. Ekkor

$$l_A(A/Q)-e_0(Q, A) = l_{A/B}(B: a_d/B) = (l_{A/B}(B: a/B) = l_{A/C}(C: a_{d-1}/C),$$

mivel egyik fenti megjegyzésünk értelmében ez a kifejezés független az elemek sorrendjétől

$$= l_{\bar{A}/\bar{C}}(\bar{C}: \bar{a}_{d-1}/\bar{C}),$$

mivel

$$\bar{C}: \bar{a}_{d-1}/\bar{C} = (C/(a): \bar{a}_{d-1})/(C/(a)) \cong (C: a_{d-1}/(a))/(C/(a)) \cong C: a_{d-1}/C$$

$$= l_{\bar{A}/\bar{C}}(\bar{C}': \bar{a}_{d-1}'/\bar{C}') \text{ az indukciós feltevés szerint}$$

$$= l_{A/C'}(C': a_{d-1}'C') = l_{A/B'}(B': a/B') = l_{A/B'}(B': a_d'/B') = l_A(A/Q')-e_0(Q', A),$$

q. e. d.

2.3. KÖVETKEZMÉNY. Ha A **B**-gyűrű, akkor tetszőleges $a_1, \dots, a_d$ paraméterrendszerre és n természetes számra

$$Q_{d-1}: a_d^n = Q_{d-1}: a_d.$$

(L. a 2.1. segédtétel utáni megjegyzést.)

Megjegyzés. A fenti tétel szerint $l(A/Q)-e_0(Q, A)$ általában nem invariánsa az A lokális gyűrűnek. Elképzelhető viszont, hogy ez a különbség mégiscsak konstans, ha csupán olyan Q paraméterideálokra szorítkozunk, amelyek generálhatók gyenge prímsorozattal. A következő példa azonban azt mutatja, hogy még ez sem áll fenn.

Tekintsük ismét az 1.1.1. tételben szereplő A lokális gyűrűt, továbbá legyen $Q=:(x_3, x_2)$ és $Q'=:(x_3^2, x_3+x_2)$. A 2.1.3. következmény utáni példában láttuk, hogy x_3, x_2 gyenge prímsorozat; hasonlóan igazolható, hogy x_3^2, x_3+x_2 is az. Végül az 1.1.1. tétel bizonyítása szerint $l(A/Q)-e_0(Q, A)=1$, és ugyanolyan módon látható az is, hogy $l(A/Q')-e_0(Q', A)=2$.

Most megadunk egy szükséges és egy elegendő feltételt annak eldöntésére, hogy egy lokális gyűrű **B**-gyűrű-e. Az ezeknek megfelelő esetekben megadjuk az $I(A)$ invariánst is. A 3. § példái nyomán látni fogjuk, hogy egyik feltételünk sem szükséges és elegendő.

2.4. SEGÉDTÉTEL. *Legyen* (A, M) *lokális gyűrű,* $C \lhd A$, *és tegyük fel, hogy* A/C **B**-*gyűrű. Legyen továbbá* $a_1, \ldots, a_t \in M$ *olyan, hogy* $\dim (C, a_1, \ldots, a_t) = \dim C - t \geqq 0$, *akkor*

$$U(C) \cap (a_1, \ldots, a_t) \subseteqq C.$$

Bizonyítás. t szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. $t=0$ esetén $(a_1, \ldots, a_t) =: (0)$, az állítás triviális. Legyen most $t \geqq 1$, és tegyük fel, hogy $t-1$-ig az állítás igaz. Legyen $D =: (a_1, \ldots, a_t)$ és $D' =: (a_1, \ldots, a_{t-1})$, $u =: \sum_{i=1}^{t} r_i a_i \in U(C) \cap D$ tetszőleges elem. A/C **B**-gyűrű, így az 1.7. tétel (ii) állítása szerint ($k=0$ esetén)

$$M/C \cdot U(0) \subseteqq (0),$$

azaz

$$M \cdot U(C) \subseteqq C.$$

Ezért $r_t \cdot a_t^2 = ua_t - \sum_{i=1}^{t-1} r_i a_i a_t \in (C, D')$, tehát $r_t \in (C, D')\colon a_t^2$. Minthogy azonban $a_1, \ldots, a_t$ paraméterrendszerré egészíthető ki A/C-ben (l. 0.3.11a. következmény) és A/C **B**-gyűrű, azért $(C, D')\colon a_t^2 = (C, D')\colon a_t$. Eszerint $r_t a_t \in (C, D')$, azaz $r_t a_t = a' + \sum_{i=1}^{t-1} r_i' a_i$, ahol $a' \in C \subseteqq U(C)$. Ekkor

$$u - a' = \sum_{i=1}^{t} r_i a_i - a' = \sum_{i=1}^{t-1} (r_i + r_i') a_i \in U(C) \cap D',$$

az indukciós feltevésünk szerint $U(C) \cap D' \subseteqq C$, így $u \in C$, q.e.d.

2.5. TÉTEL. *Ha* A **B**-*gyűrű, akkor* **B**-*gyűrű* $A/U(0)$ *is, és*

$$I(A/U(0)) = I(A) - l_A(U(0)).$$

Bizonyítás. Legyen $a_1, \ldots, a_d$ tetszőleges paraméterrendszer A-ban, $Q =: (a_1, \ldots, a_d)$. Általában, ha A tetszőleges gyűrű,

$$0 \to N' \to N \to N'' \to 0$$

pedig A-modulusokból álló tetszőleges egzakt sorozat, akkor a hosszúság definíciója szerint

$$l_A(N) = l_A(N') + l_A(N'').$$

Ha pedig A lokális gyűrű és Q paraméterideál, akkor

$$e_0(Q, N) = e_0(Q, N') + e_0(Q, N''),$$

minthogy a 3.1. tételt d-szer egymás után alkalmazva az e_0 multiplicitásokat elő tudjuk állítani hosszúságok összegeként, és így a problémát az előzőre vezetjük vissza.

Tekintsük most a következő két egzakt sorozatot:

$$0 \to U(0) \to A \to A/U(0) \to 0,$$

$$0 \to U(0)/U(0) \cap Q \to A/Q \to A/(U(0), Q) \to 0,$$

a fentiek szerint akkor

(2) $l_A(A/Q) - e_0(Q, A) = l_A(A/(U(0), Q)) - e_0(Q, A/U(0)) + l_A(U(0)/U(0) \cap Q) -$

$$- e_0(Q, U(0)).$$

Alkalmazzuk most a 2.4. segédtételt a $C=(0)$, $(a_1, \ldots, a_t)=Q$ esetben:

$$(0) \subseteqq U(0) \cap Q \subset (0),$$

ezért

$$U(0)/U(0) \cap Q \cong U(0).$$

Másrészt az 1.7. tétel (ii) állítása értelmében

$$a_k \cdot U(0) \subseteqq M \cdot U(0) \subseteqq (0),$$

így az 1.3.1. tétel előtti megjegyzés szerint

$$e_0(Q, U(0)) = 0.$$

Végül $U(0) \subseteqq \mathrm{Ann}\,(A/(U(0), Q))$ miatt (a $\bar{Q} = Q \cdot A/U(0)$ jelöléssel)

$$l_A(A/(U(0), Q)) = l_{A/U(0)}(A/(U(0), Q)) = l_{A/U(0)}(A/U(0))/\bar{Q}),$$

és ugyanezért

$$l_A((A/U(0))/Q^{n+1} \cdot (A/U(0))) = l_{A/U(0)}((A/U(0))/\bar{Q}^{n+1}),$$

így persze megegyezik a *Hilbert—Samuel*-polinomjuk főegyütthatója is, azaz $e_0(Q, A/U(0)) = e_0(\bar{Q}, A/U(0))$, ahol az első esetben $A/U(0)$-t mint A-modulust tekintjük, a második esetben pedig mint lokális gyűrűt.

Mindezeket (2)-be beírva azt kapjuk, hogy

(3) $$l_{A/U(0)}((A/U(0))/\bar{Q}) - e_0(\bar{Q}, A/U(0)) = l_A(A/Q) - e_0(Q, A) - l_A(U(0)).$$

Minthogy pedig $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_d$ (ahol $\bar{a}_i$ az a_i-t tartalmazó $U(0)$ szerinti mellékosztály) akkor és csak akkor paraméterrendszer $A/U(0)$-ban, ha $a_1, \ldots, a_d$ paraméterrendszer A-ban, azért (3) éppen a kívánt állítás.

2.6. KÖVETKEZMÉNY. Ha A **B**-gyűrű, $0 \leqq k < d$ és $a_1, \ldots, a_k$ kiegészíthető A egy paraméterrendszerévé, akkor $A/U(a_1, \ldots, a_k)$ is **B**-gyűrű, és

$$I(A/U(a_1, \ldots, a_k)) = I(A) - l_A(U(a_1, \ldots, a_k)).$$

Bizonyítás. Állításunk közvetlenül leolvasható az 1.11. következményből és a 2.5. tételből.

2.7. SEDÉDTÉTEL. *Legyen A lokális gyűrű, $B \lhd A$, $a_1, \ldots, a_s \in A$ pedig olyan elemek, amelyek A/B-sorozatot alkotnak, akkor $C =: (a_1, \ldots, a_s)$-sel ($s=0$ esetén $C =: (0)$)*

$$B \cap C = B \cdot C.$$

Bizonyítás. s szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. $s=0$ esetén az állítás triviális. Tegyük fel, hogy $s-1$-re állításunk teljesül. Legyen $C'=:(a_1, \dots, a_{s-1})$, továbbá $x=: \sum_{i=1}^{s} r_i a_i \in B \cap C$, akkor

$$r_s a_s = x - \sum_{i=1}^{s-1} r_i a_i \in (B, C'),$$

azaz

$$r_s \in (B, C') : a_s.$$

Minthogy azonban $a_1, \dots, a_s$ A/B-sorozat, azért $(B, C'):a_s=(B, C')$, így létezik olyan $x' \in B$ elem, hogy

$$r_s = x' + \sum_{i=1}^{s-1} r_i' a_i.$$

Most

$$x - x' \cdot a_s = (r_1 + r_1' \cdot a_s) a_1 + \dots + (r_{s-1} + r_{s-1}' \cdot a_s) a_{s-1} \in B \cap C',$$

az indukciós feltevés szerint $B \cap C' = B \cdot C'$, így létezik olyan $x_1, \dots, x_{s-1} \in B$, melyre

$$x = x_1 a_1 + \dots + x_{s-1} a_{s-1} + x' a_s \in B \cap C,$$

tehát $B \cap C \subseteq B \cdot C$; $B \cdot C \subseteq B \cap C$ triviális.

2.8. TÉTEL. *Legyen (A, M) lokális gyűrű. Ha $A/U(0)$ Cohen—Macaulay-gyűrű és $M \cdot U(0)=(0)$, akkor A **B**-gyűrű, és*

$$I(A) = l_A(U(0)).$$

Bizonyítás. Bizonyításunk hasonló a 2.5. tételéhez. Legyen $a_1, \dots, a_d$ tetszőleges paraméterrendszer, $Q=: (a_1, \dots, a_d)$. $M \cdot U(0)=(0)$ miatt itt is $e_0(Q, U(0))=0$. Ha most a 2.7. segédtételbe $B=: U(0)$-t és $C=: Q$-t teszünk, akkor azt kapjuk, hogy

$$U(0) \cap Q = U(0) \cdot Q \subseteq U(0) \cdot M = (0),$$

vagyis itt is $U(0) \cap Q = (0)$. Most is érvényes tehát a 2.5. tételben nyert előállítás, de mivel $A/U(0)$ *Cohen—Macaulay*-gyűrű, azért $I(A/U(0))=0$. Ezért valóban

$$l_A(A/Q) - e_0(Q, A) = l_A(U(0)).$$

3. §. Példák, problémák

Az itt szereplő példákkal az előző paragrafusban nyert eredményeinket kívánjuk megvilágítani.

3.1. TÉTEL. *Legyen m és n két tetszőleges természetes szám, akkor létezik olyan **B**-gyűrű: A, melyre* $\dim A=n$, $\operatorname{codh} A=0$ *és* $I(A)=m$.

Bizonyítás. Legyen K egy tetszőleges test, r és s pedig két tetszőleges természetes szám, $0<r<s$. Legyen továbbá $R_s=: K[x_1, \dots, x_s]$, $B_r=: (x_1, \dots, x_r) \cap$ $\cap [(x_1, \dots, x_r)^2, (x_{r+1}, \dots, x_s)] \lhd R_s$, $R_s^*=: R_{s(x_1, \dots, x_s)}$ és $B_r^*=: B_r \cdot R_s^*$. Ekkor R_s^* lokális gyűrű és $\dim R_s^*=s$. Képezzük most az $A_{r,s}=: R_s^*/B_r^*$ lokális gyűrűt; erre $\dim A_{r,s}=s-r$, továbbá $\operatorname{codh} A_{r,s}=0$, mivel B_r^*-nek van $(x_1, \dots, x_s)$-primér komponense R_s^*-ban.

Minthogy R_s-ben $(x_1, ..., x_s) \cdot (x_1, ..., x_r) = B_r$, azért $A_{r,s}$-ben $M \cdot U(0) = (0)$; másrészt pedig $A_{r,s}/U(0) = R_s^*/(x_1, ..., x_r) \cdot R_s^*$ *Cohen—Macaulay*-gyűrű, hiszen benne $x_{r+1}, ..., x_s$ prímsorozat, így a 2.8. tétel szerint $A_{r,s}$ **B**-gyűrű, melyre

$$I(A_{r,s}) = l_{A_{r,s}}(U(0)) = l_{R_s}((x_1, ..., x_s) \cdot R_s/((x_1, ..., x_r)^2 \cdot R_s, (x_{r+1}, ..., x_s) \cdot R_s)) = r.$$

Innen $s=n+m$ és $r=m$ esetén éppen a kívánt állítást kapjuk.

Az itt megadott példa alapján a következőket állapíthatjuk meg:

KÖVETKEZMÉNY. 1. Attól még, hogy egy **B**-gyűrűben nincsen nem üres prímsorozat, lehet benne akármilyen nagy (előre megadott hosszúságú) gyenge prímsorozat.

2. **B**-gyűrűkben az $I(A)$ invariáns általában nem $\dim A - \operatorname{codh} A$.

A következő példában olyan egydimenziós lokális gyűrűt látunk, amelyben nincsen nem üres gyenge prímsorozat; a maximális gyenge prímsorozatok hossza tehát általában nem a gyűrű dimenziója.

3.2. *Példa.* Legyen K egy tetszőleges test,

$$R =: K[x, y]_{(x,y)} \quad \text{és} \quad B =: (x) \cap (y) \cap (x^3, y^3) = (x^3 y, xy^3) \cdot R.$$

Ekkor $A =: R/B$ egydimenziós lokális gyűrű; megmutatjuk, hogy A-ban nincsen nem üres gyenge prímsorozat.

Tegyük fel, hogy van, akkor van olyan $f(x, y)$ homogén polinom, melyre

$$B:f = B:(x, y) = B:(x) \cap B:(y) = (x^3 y, x^2 y^2, xy^3).$$

Tegyük fel először, hogy f-ben nincsen lineáris tag: $f = \sum_{i+k \geq 2} a_{ik} x^i y^k$, $a_{ik} \in K$. Akkor $x^2 y f \in B$, azaz $x^2 y \in B:f$, de $x^2 y \notin B:(x, y)$, hiszen $y \cdot x^2 y \notin B$.

Legyen most általában $f = ax + by + g$, ahol $a, b \in K$ és $g(x, y)$ olyan polinom, amely nem tartalmaz lineáris tagot. Legyen továbbá $h =: ax^2 y - bxy^2$, akkor $h \cdot g \in B$ és $h \cdot (ax+by) = a^2 x^3 y - b^2 xy^3 \in B$, azaz $h \in B:f$, de $h \notin B:(x, y)$.

Mindkét esetben ellentmondáshoz jutottunk, tehát semmilyen f polinom sem alkothat A-ban gyenge prímsorozatot.

A 0.3.15. 3) gyakorlat szerint perfekt polinomideálokból *Cohen—Macaulay*-gyűrűket nyerhetünk, és ez a tulajdonság jellemzi is a perfekt ideálokat. Ezért felmerül a kérdés: milyen polinomideálokra szolgáltat ez az eljárás **B**-gyűrűket? A következő példa azt mutatja, hogy az így definiált polinomideálok osztálya határozottan nagyobb a perfekt ideálokénál.

3.3. *Példa.* Legyen K egy tetszőleges test,

$$R =: K[x_0, ..., x_4] \quad \text{és} \quad B =: (x_1, x_2) \cap (x_3, x_4) = (x_1 x_3, x_1 x_4, x_2 x_3, x_2 x_4).$$

A 0.2.7. definíció utáni 4) gyakorlat szerint $B \lhd R$ nem perfekt. Tekintsük most az

$$A =: R_{(x_1, ..., x_4)} B \cdot R_{(x_1, ..., x_4)}$$

lokális gyűrűt. Megmutatjuk, hogy A **B**-gyűrű.

Minthogy $\dim A=2$ és $(x_1, \ldots, x_4)\cdot U(B)=(x_1, \ldots, x_4)\cdot B\subseteqq B$, azért az 1.7. tétel (ii) állítása értelmében elegendő azt igazolnunk, hogy ha $F\in(x_1, \ldots, x_4)$, $F\notin(x_1, x_2)$ és $F\notin(x_3, x_4)$, akkor

$$(x_1, \ldots, x_4)\,U(B, F) \subseteqq (B, F).$$

Írjuk fel F-et $F=f+g$ alakban, ahol $f\in(x_1, x_2)$, $f\notin(x_3, x_4)$ és $g\in(x_3, x_4)$, $g\notin(x_1, x_2)$, akkor $(B, F)=(B, f+g)$. Megmutatjuk, hogy $U(B, F)=(B, f, g)$. Ebből már következik a kívánt állítás, hiszen $x_3f, x_4f, x_1g, x_2g\in B$ miatt $x_1f=x_1(f+g)-x_1g\in(B, F)$, hasonlóan $x_2f, x_3g, x_4g\in(B, F)$ és így $(x_1, \ldots, x_4)U(B, F) = (x_1, \ldots, x_4)B+(x_1, \ldots, x_4)f+(x_1, \ldots, x_4)g\subseteqq(B, F)$.

Meg kell még mutatnunk, hogy $U(B, F)=(B, f, g)$.

Ismeretes (és könnyen igazolható), hogy egy tetszőleges S gyűrű ideáljai moduláris hálót alkotnak, vagyis ha $X, Y, Z\lhd S$ és $Y\subseteqq Z$, akkor $(X, Y)\cap Z=(Y, X\cap Z)$. Ezt az azonosságot kétszer alkalmazva kapjuk, hogy

$$(x_1, x_2, g)\cap(x_3, x_4, f) = (B, f, g).$$

A dimenziócsökkentés tétele (0.2.3. tétel) értelmében itt a baloldalon szereplő mindkét R-beli ideál 1-dimenziós, tehát a 3 főosztályhoz tartozik és így egynemű, ami egyben azt is jelenti, hogy (B, f, g) egynemű ideál. A dimenziócsökkentés tétele és F választása szerint (B, F) is 1-dimenziós ideál, tehát $U(B, F)$ és (B, f, g) egyaránt 1-dimenziós primér ideálok metszete. Most először azt mutatjuk meg, hogy mindkét ideálhoz ugyanazok a prímideálok tartoznak. Ehhez az 1. fejezetben definiált radikál egy tulajdonságára lesz szükségünk.

Az 1.2.2. gyakorlat (6) pontjában megadott definíció egy ekvivalens átfogalmazása szerint egy X ideál radikálja, $\sqrt{X}$ az X-hez tartozó izolált prímideálok metszete. Igazolható, hogy ha $\sqrt{X}=P_1\cap\ldots\cap P_r$, akkor tetszőleges Y ideálra

$$\sqrt{(X, Y)} = \sqrt{(X, P_1)}\cap\ldots\cap\sqrt{(X, P_r)}.$$

Ezt az összefüggést felhasználva

$$\sqrt{U(B, F)} = \sqrt{(B, F)} = \sqrt{(x_1, x_2, F)} \cap \sqrt{(x_3, x_4, F)} = \sqrt{(x_1, x_2, g)} \cap \sqrt{(x_3, x_4, f)} =$$
$$= \sqrt{(x_1, x_2, f, g)} \cap \sqrt{(x_3, x_4, f, g)} = \sqrt{(B, f, g)},$$

tehát az $U(B, F)$-hez, ill. a (B, f, g)-hez tartozó izolált prímideálok (azaz a hozzájuk tartozó összes prímideál) metszete megegyezik, amiből a prímtulajdonság és az azonos dimenziók miatt következik, hogy a két ideálhoz tartozó prímideálok páronként megegyeznek.

Legyen most P egy tetszőleges, az $U(B, F)$-hez és a (B, f, g)-hez tartozó prímideál. Igazolnunk kell még, hogy $U(B, F)$ és (B, f, g) P-primér komponense megegyezik, vagy ami ugyanazt jelenti, hogy (B, F) és (B, f, g) P-primér komponense megegyezik, tehát hogy $(B, F)\cdot R_P=(B, f, g)\cdot R_P$. Tegyük fel, hogy P a (B, f, g)-ben pl. (x_1, x_2, g)-hez tartozik, akkor $\dim P=1$ miatt x_3 és x_4 közül legalább az egyik biztosan nem eleme P-nek. Most akkor

$$(B, F)\cdot R_P = \big(B\cdot R_P, (F)\cdot R_P\big) = \big((x_1, x_2)\cdot R_P, (F)\cdot R_P\big) = (x_1, x_2, F)\cdot R_P =$$
$$=(x_1, x_2, g)\cdot R_P,$$

másrészt viszont

$$(B, f, g)\cdot R_P = \big(B\cdot R_P, (f, g)\cdot R_P\big) = \big((x_1, x_2)\cdot R_P, (f, g)\cdot R_P\big) = (x_1, x_2, f, g)\cdot R_P =$$
$$= (x_1, x_2, g)\cdot R_P,$$

tehát valóban $(B, F)\cdot R_P = (B, f, g)\cdot R_P$. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Megjegyezzük még, hogy a fenti példában B egynemű ideál, azaz $U(B)=B$, így A-ban $U(0)=(0)$, tehát $A/U(0)\cong A$, A pedig nem *Cohen—Macaulay*-gyűrű, hiszen B nem perfekt. Ez azt mutatja, hogy a 2.8. tételben megadott elégséges feltétel nem szükséges ahhoz, hogy A **B**-gyűrű legyen. A következő példa alapján pedig a 2.5. tételben látott szükséges feltétel nem elegendő.

3.4. *Példa.* Tekintsük ismét az előző példában szereplő R gyűrűt és $B\lhd R$ ideált. Legyen

$$C =: B\cap(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, x_1x_3, x_2x_4) = (x_1x_3, x_2x_4, x_1x_4^2, x_1^2x_4, x_2x_3^2, x_2^2x_3)$$

és

$$S =: R_{(x_1,\dots,x_4)}/C\cdot R_{(x_1,\dots,x_4)}.$$

Minthogy $U(C)=U(B)=B$, azért $(x_1, \dots, x_4)\cdot U(C)=(x_1, \dots, x_4)\cdot B$, és könnyen igazolható, hogy $(x_1, \dots, x_4)\cdot B\subseteq C$; $(x_1, \dots, x_4)U(C)\subseteq C$-ből viszont következik, hogy S-ben $M\cdot U(0)=(0)$. Tekintsük most (x_1+x_3)-at. x_1+x_3 nem eleme egyetlen, C-hez tartozó maximális dimenziójú prímideálnak sem $R_{(x_1,\dots,x_4)}$-ben, így S-ben x_1+x_3 kiegészíthető paraméterrendszerré. Ha megmutatjuk, hogy $(x_1, x_4)\cdot U(C, x_1+x_3)\subsetneqq(C, x_1+x_3)$, akkor S-ben $M\cdot U\big((x_1+x_3)\cdot S\big)\subsetneqq(x_1+x_3)\cdot S$, így az 1.7. tétel (ii) állítása értelmében S nem **B**-gyűrű.

Valóban,

$$(C, x_1+x_3) = (x_1x_3, x_2x_4, x_1x_4^2, x_1^2x_4, x_2x_3^2, x_2^2x_3, x_1+x_3) =$$
$$= (x_1^2, x_3^2, x_1x_3, x_2x_4, x_2^2x_3, x_1x_4^2, x_1+x_3) = (x_1, x_2, x_3)\cap(x_1, x_3, x_4)\cap$$
$$\cap(x_1^2, x_2, x_3^2, x_4^2, x_1x_3, x_1+x_3)\cap(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4, x_1x_3, x_1+x_3),$$

így

$$U(C, x_1+x_3) = (x_1, x_2, x_3)\cap(x_1, x_3, x_4) = (x_1, x_3, x_2x_4),$$

és most pl. $x_2x_1\in x_2U(C, x_1+x_3)$, de $x_2x_1\notin(C, x_1+x_3)$, tehát S nem **B**-gyűrű, holott $U(C)=B$ miatt $S/U(0)\cong A$, vagyis $S/U(0)$ **B**-gyűrű.

Most egy újabb dimenzió-fogalmat definiálunk:

3.5. Definíció. Legyen A lokális gyűrű. A gyenge A-sorozatok maximális elemszámát A gyenge homologikus kodimenziójának nevezzük, és így jelöljük: s-codh A.

Az 1.3. és az 1.5. következmény szerint akkor

$$\text{codh}\, A \leqq \text{s-codh}\, A \leqq \dim A.$$

Az 1.3. következmény utáni példa és a 3.2. példa szerint itt egyik egyenlőtlenség sem helyettesíthető általában egyenlőséggel. Az 1.7. tétel (i) állítása értelmében ha A **B**-gyűrű, akkor s-codh $A=\dim A$, és minden maximális gyenge A-sorozat hossza $\dim A$; az 1.3. következmény utáni példa viszont azt mutatja, hogy s-codh $A=\dim A$-ból még nem következik, hogy A **B**-gyűrű.

Végül pedig néhány további problémát sorolunk fel:

4. *Probléma.* a) Egyenlő hosszúak-e egy lokális gyűrűben a maximális gyenge prímsorozatok?

b) Jellemezzük azokat az A lokális gyűrűket, amelyekre $\dim A = \text{s-codh}\, A$.

c) **B**-gyűrű-e az A lokális gyűrű, ha minden maximális gyenge A-sorozat hossza $\dim A$?[4)]

5. *Probléma.* Adjunk meg lokális gyűrűkben olyan „használható" feltételeket, amelyek teljesülése esetén abból, hogy egy paraméterrendszer generálható gyenge prímsorozattal, következik ugyanez minden paraméterrendszerre — ami pedig éppen azt jelenti, hogy a vizsgált gyűrű **B**-gyűrű.[5)]

6. *Probléma.* Jellemezzük a **B**-gyűrűket paraméterrendszerek felhasználása nélkül.

7. *Probléma.* Jellemezzük a **B**-gyűrűket homologikus módszerek, pontosabban a lokális kohomológia módszereinek a segítségével. (A *Cohen—Macaulay*-gyűrűk ilyen jellemzését l. [6], [11].)[6)]

8. *Probléma.* Jellemezzük (homologikus módszerekkel) azokat a lokális gyűrűket, amelyekben létezik gyenge prímsorozat. (Prímsorozatokra l. MATSUMURA [14], 26. tétel.)

9. *Probléma.* Határozzuk meg az A **B**-gyűrű $I(A)$ invariánsát.[7)]

10. *Probléma.* a) Jellemezzük azokat a **B**-gyűrűket, amelyekben $I(A) = \dim A - \text{codh}\, A$.

b) Adjunk meg további érdekes $I(A)$ invariánsokat, valamint olyan feltételeket, amelyek ezek fellépését vonják maguk után.[8)]

11. *Probléma.* **B**-gyűrű-e $K[x_0, \ldots, x_4]_{(x_1, \ldots, x_4)}/P \cdot K[x_0, \ldots, x_4]_{(x_1, \ldots, x_4)}$, ahol P a *Macaulay*-féle prímideál?[9)]

12. *Probléma.* Legyen $R =: K[x_0, \ldots, x_n]$. Jellemezzük azokat a $C \lhd R$ ideálokat, amelyekre $(R/C)_{(x_0, \ldots, x_n) \cdot R/C}$ **B**-gyűrű. (Ez a probléma a geometriai alkalmazás szempontjából igen érdekes.)

4) Megjegyzés a korrektúra olvasásakor: Az a) és a c) kérdésre a válasz: nem, ld. N. T. CUONG—N. V. TRUNG: Über **B**-Moduln und ihre Verallgemeinerungen, Szakdolgozat, Universität Halle, 1974. A probléma b) részre továbbra is nyitott.

5) Megjegyzés a korrektúra olvasásakor: A $\dim A - \text{codh} A = 1$ speciális esetben ismeretes ilyen feltétel, ld. N. T. CUONG—N. V. TRUNG: Über **B**-Moduln und ihre Verallgemeinerungen, Szakdolgozat, Universität Halle, 1974.

6) Megjegyzés a korrektúra olvasásakor: Azóta már vannak részeredmények: egy szükséges feltétel (ld. B. RENSCHUCH—J. STÜCKRAD—W. VOGEL [20]) és egy elegendő feltétel (ld. J. STÜCKRAD—W. VOGEL: Toward a theory of Buchsbaum singularities, preprint, Universität Halle, 1975).

7) Megjegyzés a korrektúra olvasásakor: A problémát időközben megoldották, ld. B. RENSCHUCH—J. STÜCKRAD—W. VOGEL [20].

8) Megjegyzés a korrektúra olvasásakor: a) megoldását ld. B. RENSCHUCH—J. STÜCKRAD—W. VOGEL [20], b)-hez pedig egy újabb érdekes invariánst adott meg P. SCHENZEL: Lokale Kohomologie und Ungemischtheitssätze, Disszertáció, Universität Halle 1975.

9) Megjegyzés a korrektúra olvasásakor: Időközben bizonyítást nyert, hogy a fenti gyűrű valóban **B**-gyűrű, ld. J. STÜCKRAD—W. VOGEL: Über das Amsterdamer Programm von W. Gröbner und Buchsbaum-Varietäten, *Monatsh. Math.* **78** (1974), 433—445.

IRODALOM

[1] AUSLANDER, M.—BUCHSBAUM, D. A.: Codimension and multiplicity, *Ann. of Math.* **68** (1958), 625—657.

[2] BUCHSBAUM, D. A.: *Complexes in local ring theory*. In: *Some aspects of ring theory*, C.I.M.E., Roma, 1965, 223—228.

[3] BUDACH, L.—VOGEL, W.: Cohen—Macaulay Moduln und der Bezoutsche Satz, *Monatsh. Math.* **73** (1969), 97—111.

[4] GODDARD, L. S.: Bases for the prime ideals associated with certain classes of algebraic varieties, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **39** (1943), 35—47.

[5] GODDARD, L. S.: Prime ideals and postulation formulae. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **44** (1948), 43—49.

[6] GROTHENDIECK, A.: *Local Cohomology, Lecture Notes in Math.*, **41**, Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1967.

[7] GRÖBNER, W.: *Moderne algebraische Geometrie. Die idealtheoretischen Grundlagen*, Springer, Wien—Innsbruck, 1949.

[8] GRÖBNER, W.: Über Veronesesche Varietäten und deren Projektionen, *Arch. Math.* **16** (1965), 257—264.

[9] GRÖBNER, W.: *Algebraische Geometrie* I, II. B.I. Mannheim, 1968/70.

[10] GRÖBNER, W.: Teoria degli ideali e geometria algebrica, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, **41** (1971), 171—242.

[11] HARTSHORNE, R.: *Residues and Duality, Lecture Notes in Math.*, **20**, Springer, Berlin— New York, 1966.

[12] HERRMANN, M.—VOGEL, W.: Bemerkungen zur Multiplizitätstheorie von Gröbner und Serre, *J. Reine Angew. Math.* **241** (1970), 42—46.

[13] HERRMANN, M.—VOGEL, W.: Über Cohen—Macaulay Punkte, *J. of Algebra*, **24** (1973), 396—404.

[14] MATSUMURA, H.: *Commutative algebra*, W. A. Benjamin, New York, 1970.

[15] MUMFORD, D.: *Varieties defined by quadratic equations*, C.I.M.E., Roma, 1970, 31—100.

[16] REES, D.: The grade of an ideal or module, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53** (1957), 28—42.

[17] REITBERGER, H.—VOGEL. W.: A cohomology condition in idealtheoretical multiplicity theory. *Rend. di Mat.* (3), Vol. **5**, Ser. VI. (1972), 1—7.

[18] RENSCHUCH, B.: Verallgemeinerungen des Bezoutschen Satzes, *Sitzungsber. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Nat. Kl.* **107** (1966), Nr. 4.

[19] RENSCHUCH, B. u. a.: Beiträge zur konstruktiven Theorie der Polynomideale, *Wiss. Z. der Pädagog. Hochsch. Potsdam, Math.-Naturw. Reihe* **17** (1973), 141—153.

[20] RENSCHUCH, B.—STÜCKRAD, J.—VOGEL, W.: Weitere Bemerkungen zu einem Problem der Schnittheorie und über ein Mass von A. Seidenberg für die Imperfektheit, *J. of Algebra*, **37** (1975), 447—471.

[21] SAMUEL, P.: *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique, Ergebn. der Math.*, **4**, Springer, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1955.

[22] SERRE, J.-P.: Faisceaux algébriques cohérents, *Ann. of Math.* **61** (1955), 197—278.

[23] SERRE, J.-P.: *Algèbre Locale. Multiplicités, Lecture Notes in Math.*, **11**, Springer, Berlin, 1965.

[24] STÜCKRAD, J.—VOGEL, W.: Über die h_1-Bedingung in der idealtheoretischen Multiplizitätstheorie, *Beitr. Alg. Geom.* **1** (1971), 73—76.

[25] STÜCKRAD, J.—VOGEL, W.: Ein Korrekturglied in der Multiplizitätstheorie von D. G. Northcott und Anwendungen, *Monatsh. Math.* **76** (1972), 264—271.

[26] STÜCKRAD, J.—VOGEL, W.: Eine Verallgemeinerung der Cohen—Macaulay Ringe und Anwendungen auf ein Problem der Multiplizitätstheorie, *J. Math. Kyoto Univ.*, **13** (1973), 513—528.

[27] VOGEL, W.: Grenzen für die Gültigkeit des Bezoutschen Satzes, *Monatsber. Deutsch. Akad. Wiss. Berlin* **8** (1966), 1—7.

[28] VOGEL, W.: Idealtheoretische Ordnungsbestimmung des Schnittes einer Veroneseschen und Grassmannschen Varietät, *Arch. Math.* **21** (1970), 567—570.

[29] VOGEL, W.: Über eine Konstruktion von Primsequenzen und lokal vollständige Durchschnitte, *Publ. Math.*, (sajtó alatt).

[30] VOGEL, W.: Über eine Vermutung von D. A. Buchsbaum, *J. of Algebra*, **25** (1973), 106—112.

[31] VOGEL, W.: Schnitte von perfekten Mannigfaltigkeiten. In: *Beiträge zur algebraischen Geometrie*, Veröffentlichungen der Univ. Innsbruck, Math. Studien 91, Innsbruck, 1974.

[32] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Einführung in die algebraische Geometrie*, Springer, Berlin, 1939.

[33] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Algebra* II, 4. kiadás, Springer, Berlin—Heidelberg, 1959.
[34] WEIL, A.: *Foundations of algebraic geometry*, 2. kiadás, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Nr. 29, Providence, 1962.
[35] ZARISKI, O.—SAMUEL, P.: *Commutative algebra* I, II. Van Nostrand, Princeton, 1958/60.

(Beérkezett: 1973. XII. 6.)

TO THE THEORY OF LOCAL RINGS
On a problem of D. A. Buchsbaum

By

W. VOGEL—L. MÁRKI

Summary

This work contains the material of the lecture "*To the theory of local rings — On a problem of D. A. Buchsbaum*" given by the first named author at the Eötvös Loránd University of Budapest in the fall semester, 1972. The aim of these lectures was to present some methods of local algebra and of algebraic geometry by giving the solution of a problem proposed by D. A. BUCHSBAUM (Brandeis University, Massachusetts, USA) at a summer school in Varenna (Italy) in 1965. Concerning the solution of this problem, the lectures were based on the works [20], [26] and [30]. The material was critically, by own ideas revised by the second named author.

Chapter 0 gives an introduction to commutative and local algebra. Most results from there are well known, they are to be found e.g. in the standard work of O. ZARISKI and P. SAMUEL "*Commutative Algebra*" I, II. Nevertheless, our exposition is directed towards the aim of the lectures, the problem of BUCHSBAUM. Hereby we give some results in §§2 and 3 of this chapter being published only in papers or even being unpublished yet. By giving several examples and exercises we had the intention to illustrate and to loosen this rather concise chapter.

Chapters I and II deal exclusively with the problem of D. A. BUCHSBAUM, formulated as follows: Let A be a local ring (noetherian, commutative with unity) and Q a parameter ideal. Consider the *Hilbert—Samuel*-polynomial with n sufficiently large:

$$l_A(A/Q^{n+1}) = e_0(Q, A)\binom{n+d}{d} - e_1(Q, A)\binom{n+d-1}{d-1} + \ldots + (-1)^d e_d(Q, A)$$

where $d=\dim A$. Does there exist an invariant $I(A)$ of A such that

$$l_A(A/Q) - e_0(Q, A) = I(A)?$$

In particular, BUCHSBAUM conjectured that $I(A)=\dim A-\operatorname{codh} A$.

In § 1 of Chapter I we show by an example that there exist local rings in which $l_A(A/Q)-e_0(Q,A)$ is not independent of the choice of Q. Further, in this chapter, we give a geometric interpretation of the problem.

In Chapter II we characterize the local rings in which the problem of D. A. BUCHSBAUM has a positive solution. These rings are called **B**-rings (after the name of BUCHSBAUM). For this characterization the notion of prime sequences is generalized as follows: Let A be a local ring, M its maximal ideal. The sequence $a_1, \ldots, a_r$ of elements of M is called a weak prime sequence (or weak A-sequence) if we have

$$M\cdot[(a_1, \ldots, a_{i-1}): a_i] \subseteqq (a_1, \ldots, a_{i-1})$$

for $i=1, \ldots, r$. Now the main result of this work says that the local ring A is a **B**-ring (i.e. there exists an invariant $I(A)$ with $l_A(A/Q)-e_0(Q, A)=I(A)$) if and only if every system of parameters in A is a weak prime sequence. We also give further characterizations of **B**-rings, and conclude by giving some examples and a number of problems.

Б. Фогель—Л. Марки

К ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНЫХ КОЛЕЦ

Об одной проблеме Д. А. Буксбаума

В этой работе излагается материал лекций «*К теории локальных колец — Об одной проблеме Д. А. Буксбаума*», прочитанных первым из вышеуказанных авторов в Будапештском Университете им. Лоранда Этвеша в осеннем семестре 1972 года. Лекции имели целью представить некоторые методы локальной алгебры и алгебраической геометрии путем решения проблемы Д. А. Буксбаума, предложенной на летнем конгрессе в Варенне (в Италии) в 1965-ом году. Решение этой проблемы основано на работах [20], [26], [30]. Материал лекций был критически переработан и дополнен собственными мыслями второго из вышеуказанных авторов.

В главе 0 излагаются основы коммутативной и локальной алгебры. Результаты этой главы вообще хорошо известны, они находятся, например, в книге О. Зарисского и П. Самюэля «*Коммутативная алгебра*», I. II. Всё-таки, наше построение преследует цель подготовиться к решению проблемы Буксбаума. При этом в §§2 и 3 приводятся некоторые результаты, опубликованные до сих пор только в отдельных трудах или совсем не опубликованные. Дается несколько примеров и упражнений, с намерением развернуть и пояснить эту довольно сжатую главу.

В главах I и II мы занимаемся исключительно проблемой Буксбаума, которую мы теперь сформулируем: Пусть A — локальное кольцо (нётерово, коммутативное с единицей) и Q — идеал, порождаемый системой параметров. Рассмотрим многочлен *Гильберта—Самюэля* для достаточно большого n:

$$l_A(A/Q^{n+1}) = e_0(Q, A)\binom{n+d}{d} - e_1(Q, A)\binom{n+d-1}{d-1} + \ldots + (-1)^d e_d(Q, A),$$

где $d = \dim A$. Существует ли инвариант $I(A)$ кольца A такой, что

$$l_A(A/Q) - e_0(Q, A) = I(A)?$$

В частности, Буксбаум предполагал, что $I(A) = \dim A - \operatorname{codh} A$.

В §1 главы I примером показывается существование локального кольца A, для которого $l_A(A/Q) - e_0(Q, A)$ зависит от выбора Q. Затем, в той же главе, дается геометрическая интерпретация проблемы.

В главе II характеризуются локальные кольца, для которых проблема Д. А. Буксбаума имеет положительное решение. Такие кольца называются **B**-кольцами (по имени Буксбаума). Чтобы осуществить эту характеризацию, обобщается понятие простой последовательности следующим образом: Пусть A – локальное кольцо, M – его максимальный идеал. Последовательность $a_1, \ldots, a_r$ элементов из M называется слабой простой последовательностью (или слабой A-последовательностью), если для всяких $i = 1, \ldots, r$ выполняется

$$M\cdot[(a_1, \ldots, a_{i-1}) : a_i] \subseteq (a_1, \ldots, a_{i-1}).$$

Главный результат нашей работы утверждает, что локальное кольцо A является **B**-кольцом (т. е. существует инвариант $I(A)$ свойством $l_A(A/Q) - e_0(Q,A) = I(A)$) тогда и только тогда, если каждая система параметров в A — слабая простая последовательность. Даются также дальнейшие характеристики **B**-колец, а в заключение несколько примеров и ряд проблем.