EGYENLŐTLENSÉGEK NUMERIKUS BIZONYÍTÁSA, II.

Írta: RUDA MIHÁLY

1. Bevezetés

Dolgozatunkban egyenlőtlenségek numerikus vizsgálatával kapcsolatos eredményeink közlését folytatjuk. A következőkben néhány további bizonyítási eljárást mutatunk be. Szó lesz továbbá a tárgyalt algoritmusok alkalmazásakor felmerülő nehézségekről, melyek a vizsgált függvények, illetve értelmezési tartományuk tulajdonságaiból, valamint a számítási eljárások korlátozott pontosságából adódnak.

2. Bizonyítási eljárások

Az [1] dolgozatban a következő típusú eljárások szerepelnek:

a) Differenciálható függvények összehasonlítása az első — esetleg a második — derivált, illetve a deriváltakra adható korlátok ismeretében.

b) Speciális tulajdonságú függvények esete: monoton növekvő vagy csökkenő, monoton deriválttal rendelkező függvények.

c) Egyenlőtlenségek vizsgálata szélsőérték keresési eljárások segítségével.

Tekintsünk most néhány további lehetőséget!

d) Legyen $f(x)$ és $g(x)$ egy I intervallumon egyenletesen folytonos függvény! Legyen adott az I intervallumon az f, illetve a g $\omega_f(r)$, illetve $\omega_g(r)$ folytonossági modulusára egy $\Omega_f(r)$, illetve egy $\Omega_g(r)$ felső becslés, a $0<r\leqq R$ értékekre (ahol R egy rögzített pozitív érték). Ekkor, ha található véges sok olyan x_i pont és r_i érték $(0<r_i\leqq R,\ i=1, 2, \ldots, n)$, hogy az x_i pontok r_i sugarú környezetei lefedik az I intervallumot, és minden x_i pontban teljesül az

$$f(x_i)-g(x_i)-\Omega_f(r_i)-\Omega_g(r_i) > 0 \tag{1}$$

egyenlőtlenség, akkor igaz az $f(x)>g(x)$, $x\in I$ reláció.

e) Az [1] dolgozatban bizonyos monotonitási tulajdonságok teljesülésekor egyszerűsített eljárások szerepelnek (l. a fenti b) pontot). A vizsgált függvények, illetve deriváltjaik lokális szélsőérték helyeinek ismeretében olyan részekre oszthatjuk az értelmezési tartományt, mely részeken külön-külön már teljesülnek a fent említett monotonitási tulajdonságok.

Ha a szélsőérték-helyeket valamely numerikus eljárással keressük meg — ezekről l. például [2] —, akkor a minden esetben korlátozott számítási pontosság miatt a szélsőérték-helyeknek legtöbbször csak egy környezetét tudjuk kijelölni. Ezekben a környezetekben a függvényvizsgálat még külön eljárást igényel.

f) A szélsőérték-keresési eljárások mellett az ugyanacsak részletesen kidolgozott gyökkeresési eljárások alkalmazásával is vizsgálhatunk egyenlőtlenségeket. Ha valamely H halmazon értelmezett $f(x)$, $g(x)$ függvényekre a $h(x)=f(x)-g(x)$, $(x \in H)$ függvény folytonos, van pozitív értéke és nincs gyöke a H halmazon, akkor igaz az $f(x)>g(x)$ $(x \in H)$ reláció. Általában folytonos, illetve differenciálható függvényekre kézenfekvő jól bevált gyökkeresési, illetve szélsőérték-keresési eljárásokat alkalmazni. Fordítva is igaz: módszereinket gyökkeresési és szélsőérték-keresési eljárásoknál is alkalmazhatjuk. Eljárásaink segítségével (l. az a—e) pontokat) azonban függvények egy igen széles osztályánál bizonyíthatunk egyenlőtlenségeket. Az eddig szereplő módszerekhez hasonlókat akkor is megadhatunk, ha bármilyen módon becslést tudunk adni az értelmezési tartomány egyes pontjainak megfelelő környezetében a vizsgált függvények változásának mértékére. Nemcsak lineáris becslések szerepelhetnek (mint pl. a d) pontban), hanem bármely más könnyen kezelhető függvénytípus, például monoton vagy monoton deriváltú becslések, visszavezetve az adott függvények vizsgálatát a b) és e) pontokban említett speciális esetekre.

g) Két adott $f(x)$, $g(x)$ ($x \in I$, ahol I egy egydimenziós intervallum) függvényből kiindulva nem csak az e) pontban leírt módon juthatunk monoton függvényekhez, hanem a következő meggondolásokkal is.

Legyen $f(x)$ és $g(x)$ $(x \in I)$ korlátos változású! Ekkor létezik olyan $f_1(x)$ és $g_1(x)$ monoton növekvő, illetve $f_2(x)$ és $g_2(x)$ monton fogyó függvény, hogy $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, $g(x)=g_1(x)+g_2(x)$, $(x \in I)$. Ha találunk ilyen felbontást, akkor az $f(x)>g(x)$ $(x \in I)$ reláció helyett elegendő az $f_1(x)-g_2(x)>g_1(x)-f_2(x)$ monoton függvények közti egyenlőtlenséget vizsgálni. Nem korlátos változású függvények numerikus összehasonlítása sokkal nehezebbnek látszik.

3. Különböző típusú értelmezési tartományok és többváltozós függvények vizsgálata

Az előző szakaszban, illetve az [1] dolgozatban szereplő eljárások legegyszerűbben egydimenziós zárt intervallumon alkalmazhatók. A következőkben más típusú értelmezési tartományokkal is foglalkozunk.

a) A probléma véges sok pontban értelmezett függvények vizsgálatánál a legegyszerűbb. Gyakorlatilag tulajdonképpen minden más vizsgálatot erre az esetre vezetünk vissza.

b) Előfordulhat, hogy bár az értelmezési tartomány intervallum, mégis egyes pontjaiban, illetve egyes pontok valamely környezetében külön meggondolásokra van szükség. Ilyen esettel állunk szemben például, ha egy nyílt intervallumon akarunk két folytonos függvény között egyenlőtlenséget bizonyítani, miközben azok az egyik határpontban egyenlők.

c) Az értelmezési tartomány korlátos, de nem intervallum. Zárt intervallumok egy rendszerével lefedjük az értelmezési tartományt, és a lefedő rendszerre alkalmas módon kiterjesztett függvényt vizsgáljuk. Egy másik megoldás: intervallumok egy rendszerével kitöltjük az értelmezési tartományt vagy egy részét, és a kitöltött részen vizsgáljuk az adott függvényeket. A maradék részen külön meggondolást alkalmazunk.

Az adott függvények változásának mértékét ismerve, sokszor sem az értelmezési tartomány kiterjesztésére, sem külön meggondolásokra nincs szükség, hiszen a 2. pontban említett eljárások nem feltétlenül használják ki az értelmezési tartomány zártságát, összefüggőségét.

d) Az értelmezési tartomány nem korlátos. Numerikus eljárás ekkor közvetlenül általában nem alkalmazható. Periodikus függvényeknél a periodicitást kihasználva gyakran korlátos tartományra szűkíthetjük a vizsgálatot. Ha az összehasonlítandó függvények nem periodikusak, periódusuk aránya irracionális vagy a közös periódus túl nagy, a következő módok valamelyikén juthatunk egy megfelelő korlátos értelmezési tartományhoz. Tekintsünk példaként egyváltozós függvényeket!

A vizsgált $f(x)$, $g(x)$ függvények értelmezési tartományán olyan $x'=\varphi(x)$ transzformációt alkalmazunk, hogy az $f(x')$ és $g(x')$ közös periódusa elég kicsi. Ha $\varphi(x)$ monoton, a vizsgálatot végezhetjük magukon az $f(x)$, $g(x)$ — és nem szükségképpen az $f(\varphi(x))$, $g(\varphi(x))$ — függvényeken is, egy megfelelő intervallumon. Mivel $\varphi(x)$ nem feltétlenül lineáris — ha egyáltalán létezik —, az utóbb említett intervallum hossza függhet a vizsgálat helyétől is.

Alkalmazhatunk olyan leképezést is, amely a $p=(x, y)$, $y=f(x)$ pontokat olyan $p'=(x', y')$ pontokra képezi le, hogy az $y'=f'(x')$ függvény periodikus lesz. Természetesen, ilyenkor adott x érték mellett a leképezésnek y-ra vonatkozóan szigorúan monotonnak kell lennie: szakaszonként vagy minden x pontban növekvőnek vagy minden x pontban csökkenőnek.

A nem korlátos tartományon elhelyezkedő $p=(x, y)$, $y=f(x)$ pontokat leképezhetjük egy korlátos tartományba is. Ekkor már korlátos tartományon értelmezett, korlátos függvények esetével állunk szemben.

A különböző transzformációk alkalmazásakor azonban előfordulhat, hogy az eredetileg jól kezelhető, de nem korlátos függvényekre a transzformációk után nem alkalmazhatók sikeresen az adott eljárások.

e) Nem korlátos értelmezési tartományt leképezhetünk magasabb dimenziós korlátos halmazra is. Általában transzformációk alkalmazásakor a vizsgált pontokat tartalmazó tér típusát megváltoztathatjuk.

Egy numerikus vizsgálat előtt az értelmezési tartomány, illetve az értékkészlet transzformációjának lehetőségét érdemes alaposan megvizsgálni.

f) Többváltozós függvényeknél két nehézség felmerülése gyakori:

Az értelmezési tartomány még egyszeresen összefüggő halmazoknál is sokkal változatosabb lehet, mint egy dimenzióban.

Ha az értelmezési tartomány egy-egy pontjának ugyanakkora sugarú környezetében tudjuk az egyenlőtlenséget vizsgálni, mint egy hasonló átmérőjű egydimenziós tartományon, akkor általában hatványozottan több lépést kell végrehajtani. Ez a lépésszám-növekedés magasabb dimenzióban gyakorlatilag „végtelenre" növelheti az eljárás végrehajtási idejét. Megfelelő egyszerűsítésekkel, illetve a vizsgált függvények tulajdonságainak kihasználásával azonban sokszor lényegesen csökkenthető a lépésszám. A szerző például geometriai feladatoknál 12, 18 és 20 változós függvényekre is tudta alkalmazni a fenti eljárásokat egzakt tételek előállítására, számológép segítségével.

4. A számítási hiba szerepe

Numerikus eljárásoknál a használt számértékek pontosságára és az eljárások maximális lépésszámára adott korlátok függvényében rendszerint bizonyos hibatagokat fogadunk el. Ez azt jelenti, hogy tetszőleges valós számok helyett csak bizonyos intervallum-végpontokkal tudunk számolni. [Egy eljárással kapcsolatos hiba fogalmán sokszor sztochasztikus mennyiséget értenek (l. pl. [2]). Mi ilyen jellegű kérdésekkel nem foglalkozunk.]

Eddig szereplő eljárásainkon belül (l. [1], illetve a jelen dolgozat 2. pontját) az $f(x) > g(x)$ egyenlőtlenség bizonyítását az $f(x)-g(x)$ különbségfüggvénynek különböző pontok környezetében való pozitivitásának és ezen keresztül egy

$$\varphi(x) > 0, \quad x \in (x_1, \ldots, x_n), \tag{2}$$

egyenlőtlenségnek bizonyítására vezethetjük vissza. Lényeges felhívni rá a figyelmet, hogy a $\varphi(x)$ függvény itt már magába foglalja a bizonyításhoz szükséges becsléseket, például a deriváltakra, a folytonossági modulusra adott korlátokat is.

Az x_i argumentumokat mi jelölhetjük ki, tehát általunk pontosan kifejezhető értékek. Az ellenkező esetben (l. a 3. pontot) elvi nehézségek adódnak.

Sokszor magukat a függvényértékeket is pontosan kifejezhetjük, például bizonyos tartományon belül tetszőleges polinomok esetében. Ha a vizsgált függvény zárt alakban nem fejezhető ki — például hatványsorral vagy numerikus integrállal adjuk meg —, akkor is bizonyos kívánt pontosságot elérhetünk. Tetszőleges pontosság elérése azonban általában lehetetlen.

Akár zárt alakban fejezzük ki a vizsgált függvényeket, akár nem, a lehetséges maximális pontosság függvényében a különböző műveletek végzésekor hibatagok léphetnek fel. Például azért mert a függvény argumentumai között fellépő nagyságrendbeli különbség, vagy a kiértékelés lépéseinek a száma túlságosan nagy. Ezek a hibatagok a függvényértékekkel azonos nagyságrendűek is lehetnek, másrészt ugyanazon függvény különböző kiértékelési módjai különböző hibatagokhoz és így különböző számított értékekhez vezthetnek. Például a $\sum_{n=1}^{K} \frac{1}{n}$ értéket a rendelkezésre álló pontossághoz viszonyítva elég nagy K-ra nem lehet közvetlenül kiszámítani, hanem csak megfelelő részletösszegekre való bontással.

Egy $\varphi(x)$ függvény kiszámításakor fellépő $\Delta\varphi(x) \geqq 0$ hibatag tehát függ egyrészt az általunk megadható legrövidebb intervallum hosszától (amely nyilvánvalóan az intervallum elhelyezkedésétől is függ), az x argumentumtól, a φ függvénytől és a kiértékelés módjától. Tehát a (2) egyenlőtlenség numerikus bizonyításának szükséges és elégséges feltétele a

$$\varphi(x) - \Delta_{\varphi}(x) > \delta \tag{3}$$

egyenlőtlenség teljesülése, ahol δ a minimális kifejezhető pozitív érték.

Ha a (3) egyenlőtlenség teljesülését az eredeti egyenlőtlenség teljesülése mellett nem tudjuk biztosítani, a vizsgált függvények kedvezőtlen tulajdonságai miatt, akkor a φ függvény, illetve az értelmezési tartomány transzformálásával esetenként elérhetjük a (3) egyenlőtlenség teljesülését, illetve meggyorsíthatjuk a bizonyítási eljárást (l. még az előző 3. pontot).

Ugyanígy pontosabb becsléseket adva a φ függvényre (például a kifejezhető pontosság növelésével) az eljárások lépésszáma csökkenthető, viszont a pontosabb számítási, becslési eljárások időigényesebbek. Érdekes feladat esetenként az optimális eljárások megkeresése.

IRODALOM

[1] RUDA MIHÁLY: Egyenlőtlenségek numerikus bizonyítása I., *MTA III. Osztály Közleményei*, **19**, (1969), 349—357.
[2] WILDE, D. J.: *Optimum seeking methods*, Prentice-Hall Inc. (1965).

(Beérkezett: 1974. I. 2.)

NUMERICAL PROOF OF INEQUALITIES, II.

By

M. RUDA

Summary

Methods for numerical proof of inequalities are given. Various tipe of functions and domains are investigated.