D. REES EGY TÉTELÉNEK KITERJESZTÉSE

Írta: TRAN QUY TIEN

1. §. Bevezetés

D. REES [3] dolgozatában a következő fontos struktúratételt bizonyította be: egy S (nullelemes) félcsoport akkor és csak akkor teljesen O-egyszerű, ha egy nullelemmel kiegészített csoport fölötti, reguláris *Rees*-féle mátrixfélcsoporttal izomorf. Ugyanott szükséges és elégséges feltételt adott arra vonatkozóan, hogy két, nullelemmel kiegészített csoport fölötti, reguláris *Rees*-féle mátrixfélcsoport izomorf legyen. (Az említett fogalmakat és eredményeket illetően lásd például A. H. CLIFFORD—G. B. PRESTON [1] könyvét.)

O. STEINFELD [4] dolgozatában REES struktúratételének következő általánosítása szerepel: egy S (nullelemes) félcsoport akkor és csak akkor hasonlóan felbontható, ha egy null- és egységelemes félcsoport fölötti, lokálisan reguláris *Rees*-féle mátrixfélcsoporttal izomorf. E dolgozatban REES másodiknak említett eredményét általánosítva szükséges és elégséges feltételt adunk arra, hogy két, null- és egységelemes félcsoport fölötti, lokálisan reguláris *Rees*-féle mátrixfélcsoport izomorf legyen.

Az alapvető félcsoportelméleti eredményeket és fogalmakat illetően A. H. CLIFFORD—G. B. PRESTON [1] könyvére utalunk.

2. §. Előkészületek és a főeredmény

A tétel kimondása előtt két fogalmat kell definiálnunk. A H null- és egységelemes félcsoport fölötti $S=M^0(H; I, \Lambda; P=(p_{\lambda i}))$ *Rees*-féle mátrixfélcsoportot *lokálisan regulárisnak* nevezzük, ha a P szendvicsmátrixnak megvannak a következő tulajdonságai:

1. P minden oszlopában létezik legalább egy balról invertálható elem; az i-edik ($i \in I$) oszlopban legyen a $p_{\mu(i)i}$ elem ilyen, azaz $p''_{\mu(i)i}p_{\mu(i)i}=e$ ($\mu(i) \in \Lambda, p''_{\mu(i)i} \in H$, e a H egységeleme).

2. P minden sorában létezik legalább egy jobbról invertálható elem; a λ-adik ($\lambda \in \Lambda$) sorban legyen a $p_{\lambda j(\lambda)}$ elem ilyen, azaz $p_{\lambda j(\lambda)}p'_{\lambda j(\lambda)}=e$ ($j(\lambda) \in I$, $p'_{\lambda j(\lambda)} \in H$, e a H egységeleme).

3. P elemei között létezik legalább egy $p_{\lambda i}(\lambda \in \Lambda, i \in I)$ invertálható elem, azaz $p_{\lambda i}^{-1}p_{\lambda i}=p_{\lambda i}p_{\lambda i}^{-1}=e$ ($p_{\lambda i}^{-1} \in H$).

Ha a dolgozatban egy $S=M^0(H; I, \Lambda; P=(p_{\lambda i}))$ lokálisan reguláris *Rees*-féle mátrixfélcsoportról lesz szó, akkor $p_{\mu(i)i}, p''_{\mu(i)i}, p_{\lambda j(\lambda)}, p'_{\lambda j(\lambda)}$ mindig a szendvicsmátrix itt megadott elemeit jelöli, e pedig a H egységelemét.

A H null- és egységelemes félcsoport fölötti $I\times\Lambda$-típusú $U=(u_{i\lambda})$ mátrixot *reverzibilisnek* nevezzük, ha U minden sorában és minden oszlopában pontosan egy O-tól különböző elem van, és U mindegyik O-tól különböző eleme invertálható.

TÉTEL. *Két lokálisan reguláris Rees-féle mátrixfélcsoport* $S=M^0(H;\, I,\, \Lambda;\, P=(p_{\lambda i}))$ *és* $S^*=M^{*0}(H^*;\, I^*,\, \Lambda^*;\, P^*=(p^*_{\lambda^* i^*}))$ *akkor és csak akkor izomorf egymással, ha létezik H-nak* H^**-ra való olyan* ω *izomorfizmusa és létezik egy-egy olyan* $U=(u^*_{j^*i})$ $I^*\times I$*-típusú,* $V=(v^*_{\lambda\mu^*})$ $\Lambda\times\Lambda^*$*-típusú reverzibilis mátrix, hogy* $P\omega=VP^*U$.

KÖVETKEZMÉNY. (Lásd A. H. CLIFFORD—G. B. PRESTON [1], Corollary 3.12.) *Az* $S=M^0(G;\, I,\, \Lambda;\, P)$ *és az* $S^*=M^{*0}(G^*;\, I^*,\, \Lambda^*;\, P^*)$ *reguláris Rees-féle mátrixfélcsoport akkor és csak akkor izomorf egymással, ha létezik* G^0*-nak* G^{*0}*-ra való olyan* ω *izomorfizmusa, és létezik olyan* U $I^*\times I$*-típusú, ill.* V $\Lambda\times\Lambda^*$*-típusú reverzibilis mátrix, hogy* $P\omega=VP^*U$.

3. §. Az elégségesség igazolása

Tegyük fel, hogy ω H-nak H^*-ra való izomorfizmusa és $P\omega=VP^*U$, ahol $U=(u^*_{j^*i})$ és $V=(v^*_{\lambda\mu^*})$ $I^*\times I$-típusú, illetve $\Lambda\times\Lambda^*$-típusú reverzibilis mátrix.

Minthogy $P\omega=VP^*U$, azért $p_{\lambda_i}\omega=v^*_{\lambda\mu^*}p^*_{\mu^*j^*}u^*_{j^*i}$, ahol $u^*_{j^*i}$ és $v^*_{\lambda\mu^*}$ invertálható elem H^*-ban.

$u^*_{j^*i}$ az U mátrix i-edik oszlopának és j^*-adik sorának invertálható eleme. A reverzibilis mátrix definíciója szerint $\varphi: i\to j^*$ I-nek I^*-ra való kölcsönösen egyértelmű leképezése. Hasonlóan $\psi:\lambda\to\mu^*$ Λ-nak Λ^*-ra való kölcsönösen egyértelmű leképezése.

Most tekintsük a $\theta:(a)_{i\lambda}\to[u^*_{j^*i}(a\omega)v^*_{\lambda\mu^*}]_{j^*\mu^*}$ $(a\in H)$ leképezést; ez S-et S^*-ba viszi.

Legyen $(k)\varphi=l^*$ $(k\in I;\, l^*\in I^*)$ és $(\nu)\psi=\varrho^*$ $(\nu\in\Lambda;\, \varrho^*\in\Lambda^*)$, akkor $(b)_{k\nu}\theta=$ $=[u^*_{l^*k}(b\omega)v^*_{\nu l^*}]_{l^*\varrho^*}$.

θ S-nek S^*-ba való homomorfizmusa, ugyanis tetszőleges $(a)_{i\lambda}$; $(b)_{k\nu}$ $(\in S)$ elemekre

$$\begin{aligned}((a)_{i\lambda}\circ(b)_{k\nu})\theta &= (ap_{\lambda k}b)_{i\nu}\theta = [u^*_{j^*i}(ap_{\lambda k}b)\omega v^*_{\nu\varrho^*}]_{j^*\varrho^*} = \\ &= [u^*_{j^*i}(a\omega)(p_{\lambda k}\omega)(b\omega)v^*_{\nu\varrho^*}]_{j^*\varrho^*} = [u^*_{j^*i}(a\omega)(v^*_{\lambda\mu^*}p^*_{\mu^*l^*}u^*_{l^*k})(b\omega)v^*_{\nu\varrho^*}]_{j^*\varrho^*} = \\ &= [u^*_{j^*i^*}(a\omega)v^*_{\lambda\mu^*}]_{j^*\mu^*}\circ[u^*_{l^*k}(b\omega)v^*_{\nu\varrho^*}]_{l^*\varrho^*} = (a)_{i\lambda}\theta\circ(b)_{k\nu}\theta.\end{aligned}$$

Megmutatjuk, hogy θ kölcsönösen egyértelmű leképezés. Valóban, ha az $(a)_{i\lambda}$; $(b)_{k\nu}$ $(\in S)$ elemekre $[u^*_{j^*i}(a\omega)v^*_{\lambda\mu^*}]_{j^*\mu^*}=[u^*_{l^*k}(b\omega)v^*_{\nu\varrho^*}]_{l^*\varrho^*}$, akkor $j^*=l^*$; $\mu^*=\varrho^*$, tehát a φ és a ψ leképezés kölcsönös egyértelműsége miatt $i=k$; $\lambda=\nu$. Így azt nyertük, hogy $u^*_{j^*i}(a\omega)v^*_{\lambda\mu^*}=u^*_{j^*i}(b\omega)v^*_{\lambda\mu^*}$, amiből $u^*_{j^*i}$ és $v^*_{\lambda\mu^*}$ invertálhatósága miatt $a\omega=b\omega$ következik, ezért $a=b$. Ezzel igazoltuk, hogy $(a)_{i\lambda}=(b)_{k\nu}$.

Végül azt bizonyítjuk be, hogy θ az S-nek S^*-ra való leképezése. Legyen $[a^*]_{j^*\mu^*}$ S^*-nak egy tetszőleges eleme. Akkor az $(u^{*-1}_{j^*i}a^*v^{*-1}_{\lambda\mu^*})\omega^{-1}$ $(\in H)$ elemmel

$$((u^{*-1}_{j^*i}a^*v^{*-1}_{\lambda\mu^*})\omega^{-1})_{i\lambda}\theta = [u^*_{j^*i}((u^{*-1}_{j^*i}a^*v^{*-1}_{\lambda\mu^*})\omega^{-1})\omega v^*_{a\mu^*j^*\mu^*}] = [a^*]_{j^*\mu^*}.$$

Tehát θ valóban S-nek S^*-ra való izomorfizmusa.

MEGJEGYZÉS. Az elégségesség igazolásánál nem használtuk ki, hogy az $S=u^0(H;\, I,\, \Lambda;\, P=(p_{\lambda i}))$ és az $S^*=u^{*0}(H^*;\, I^*,\, \Lambda^*;\, P^*=(p^*_{\lambda^*i^*}))$ *Rees*-féle mátrixfélcsoport lokálisan reguláris.

4. §. A szükségesség igazolása

Ehhez némi előkészületre, néhány lemmára lesz szükségünk.

Egy H null- és egységelemes félcsoport fölötti $S=M^0(H;\, I,\, \Lambda;\, P=(p_{\lambda i}))$ *Rees-féle* mátrixfélcsoportban tekintsük a következő részhalmazokat:

$$R_i = \{(a)_{i\lambda}/a\in H;\ \lambda\in\Lambda\}$$

és

$$L_\lambda = \{(a)_{i\lambda}/a\in H;\ i\in I\}.$$

R_i és L_λ definíciója szerint

$$S=\bigcup_{i\in I} R_i = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda (R_i\cap R_k = 0,\ \text{ ha }\ i\neq k;\ L_\lambda\cap L_\gamma = 0,\ \text{ ha }\ \lambda\neq\gamma).$$

Kimutatható, hogy $R_i[L_\lambda]$ S-nek jobboldali [baloldali] ideálja, továbbá $M^0_{i\lambda}=R_i\cap L_\lambda$ S-nek részfélcsoportja.

Érvényesek a következő lemmák:

1. LEMMA. (Lásd L. MÁRKI [2].) *Legyen adott egy* $S=M^0(H;\, I,\, \Lambda;\, P=(p_{\lambda i}))$ *lokálisan reguláris Rees-féle mátrixfélcsoport. A* H *és az* $M^0_{i\lambda}$ *félcsoport akkor és csak akkor izomorf egymással, ha* $p_{\lambda i}$ *invertálható elem, mégpedig ez esetben*

$$\varphi\colon H\to M^0_{i\lambda}(a\to(ap_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda})$$

izomorfizmus.

2. LEMMA. *Legyen* $S=M^0(H;\, I,\, \Lambda;\, P=(p_{\lambda i}))=\bigcup_{i\in I} R_i=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} L_\lambda$ *és*

$$S^*=M^{*0}(H^*;\, I^*,\, \Lambda^*;\, P^*=(p^*_{\lambda^* i^*}))=\bigcup_{i^*\in I^*} R^*_{i^*}=\bigcup_{\lambda^*\in\Lambda^*} L^*_{\lambda^*}$$

lokálisan reguláris Rees-féle mátrixfélcsoport. Ha a θ *leképezés az* S*-nek* S^**-ra való izomorfizmusa, akkor létezik olyan* $i\to i^*$ $(i\in I;\ i^*\in I^*)$ *és* $\lambda\to\lambda^*$ $(\lambda\in\Lambda;\ \lambda^*\in\Lambda^*)$ *kölcsönösen egyértelmű leképezés, hogy* $R_i\theta=R^*_{i^*}$, $L_\lambda\theta=L^*_{\lambda^*}$, $M^0_{i\lambda}\theta=M^{*0}_{i^*\lambda^*}$.

Bizonyítás. Ismeretes, hogy $(p''_{\mu(i)i})_{i\mu(i)}=E_i$ idempotens elem, és $R_i=E_i\circ S$. (Lásd O. STEINFELD [4]!)

Vegyünk most egy tetszőleges R_i jobbideált és ennek egy tetszőleges $E_i\circ T$ elemét $(T\in S)$. Tudjuk, hogy $E_i\theta$ az S^* egy idempotens eleme. Ha $E_i\theta\in R^*_{i^*}$, akkor $(E_i\circ T)\theta=(E_i\theta)\circ(T\theta)\in R^*_{i^*}$, ugyanis $R^*_{i^*}$ az S^* egy jobbideálja, azaz

$$R_i\theta\subseteq R^*_{i^*}\qquad (i^*\in I^*). \tag{1}$$

Mivel θ izomorfizmus, azért létezik olyan θ^{-1} leképezés, amely az S^*-nek S-re való izomorfizmusa. A fenti bizonyításhoz hasonló okoskodás arra vezet, hogy $R^*_{i^*}\theta^{-1}$ az S valamely R_k $(k\in I)$ jobboldali ideáljának része. Kimutatjuk, hogy $R_i=R_k$.

Tegyük fel, hogy $R^*_{i^*}\theta^{-1}\subseteq R_k$ és $k\neq i$. Legyen $0\neq(a)_{i\lambda}\in R_i$, akkor $(a)_{i\lambda}\theta\in R_i\theta\subseteq R^*_{i^*}$. E miatt $((a)_{i\lambda}\theta)\theta^{-1}\in R^*_{i^*}\theta^{-1}$, de $R^*_{i^*}\theta^{-1}\subseteq R_k$, ezért $((a)^*_{i^*}\theta)\theta^{-1}\in R_k$, azaz $(a)_{i\lambda}\in R_k$. Eszerint $0\neq(a)_{i\lambda}\in R_i\cap R_k$, ami ellentmond az $R_i\cap R_k=0$ $(i\neq k)$ feltevésünknek. Ezzel igazoltuk, hogy $R_i=R_k$. Tehát $R^*_{i^*}\theta^{-1}\subseteq R_i$ vagyis

$$R^*_{i^*}\subseteq R_i\theta. \tag{2}$$

(1)-ből és (2)-ből látható, hogy $R_i\theta=R^*_{i^*}$.

Hasonlóan bebizonyítható, hogy $L_\lambda\theta=L^*_{\lambda^*}$.

A fenti egyenlőségekből közvetlenül adódik, hogy léteznek a keresett $i \to i^*$ ($i \in I$; $i^* \in I^*$) és $\lambda \to \lambda^*$ ($\lambda \in \Lambda$; $\lambda^* \in \Lambda^*$) kölcsönösen egyértelmű leképezések.

Azt kell még igazolnunk, hogy $M^0_{i\lambda}\theta = M^{*0}_{i^*\lambda^*}$. Vegyük $M^0_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda$ egy tetszőleges $(a)_{i\lambda}$ elemét ($a \in H$). Könnyen belátható, hogy $(a)_{i\lambda}\theta \in R^*_{i^*} \cap L^*_{\lambda^*} = M^{*0}_{i^*\lambda^*}$, tehát $M^0_{i\lambda}\theta \subseteqq M^{*0}_{i^*\lambda^*}$. Fordítva, vegyük $M^{0*}_{i^*\lambda^*} = R^*_{i^*} \cap L^*_{\lambda^*}$ egy tetszőleges $[a^*]_{i^*\lambda^*}$ elemét ($a^* \in H^*$). Világos, hogy $[a^*]_{i^*\lambda^*}\theta^{-1} \in R_i \cap L_\lambda = M^0_{i\lambda}$, ezért $[a^*]_{j^*\lambda^*} \in M^0_{i\lambda}\theta$, vagyis $M^{*0}_{i^*\lambda^*} \subseteqq \subseteqq M^0_{i\lambda}\theta$. Azt nyertük tehát, hogy $M^0_{i\lambda}\theta = M^{*0}_{i^*\lambda^*}$. Ezzel a 2. lemma bizonyítását befejeztük.

3. LEMMA. *Legyen* $S = M^0(H; I, \Lambda; P = (p_{\lambda i}))$ *és* $S^* = M^{*0}(H^*; I^*, \Lambda^*; P^* = (p^*_{\lambda^* i^*}))$ *két egymással izomorf lokálisan reguláris Rees-féle mátrixfélcsoport, és legyen* $\theta: (a)_{i\lambda} \to (a)_{i\lambda}\theta = [a^*]_{i^*\lambda^*}$ ($a \in H$; $a^* \in H^*$) *S-nek S^*-ra való izomorfizmusa. H-nak egy a eleme akkor és csak akkor invertálható, ha az a^* elem invertálható H^*-ban.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a invertálható elem. Mivel θ S-nek S^*-ra való leképezése, ezért az $[e^*]_{i^*\nu^*}$ ($\in S^*$) elemhez létezik olyan $(x)_{i\nu}$ ($\in S$) elem, hogy $(x)_{i\nu}\theta = [e^*]_{i^*\nu^*}$ (e^* a H^* egységeleme). Most

$$(x)_{i\nu} = (ap_{\lambda j(\lambda)}p'_{\lambda j(\lambda)}a^{-1}p''_{\mu(i)i}p_{\mu(i)i}x)_{i\nu} = (a)_{i\lambda} \circ (p'_{\lambda j(\lambda)}a^{-1}p''_{\mu(i)i})_{j(\lambda)\mu(i)} \circ (x)_{i\nu}.$$

A θ leképezést alkalmazva azt nyerjük, hogy

$$[e^*]_{i^*\nu^*} = [a^*]_{i^*\lambda^*} \circ [t^*]_{j^*(\lambda^*)\mu^*(i^*)} \circ [e^*]_{i^*\nu^*} = [a^*p^*_{\lambda^*j^*(\lambda^*)}t^*p^*_{\mu^*i^*(i^*)^*}e^*]_{i^*\nu^*}, \ (t^* \in H^*);$$

eszerint $e^* = a^*p^*_{\lambda^*j^*(\lambda^*)}t^*p^*_{\mu^*(i^*)i^*}$, tehát a^* jobbról invertálható elem H^*-ban.

Duális módon igazolhatjuk, hogy a^* egy balról invertálható elem.

Összefoglalva, azt nyertük, hogy a^* H^*-nak invertálható eleme. Hasonlóan igazoljuk, hogy ha a^* invertálható elem H^*-ban, akkor a invertálható H-ban.

4. LEMMA. *Legyen* $S = M^0(H; I, \Lambda; P = (p_{\lambda i}))$ *és* $S^* = M^{*0}(H^*; I^*, \Lambda^*; P^* = (p^*_{\lambda^* i^*}))$ *két egymással izomorf lokálisan reguláris Rees-féle mátrixfélcsoport, és* $\theta: (a)_{i\lambda} \to (a)_{i\lambda}\theta$ *jelölje a megfelelő izomorf leképezést. A P mátrix $p_{\lambda i}$ eleme akkor és csak akkor invertálható H-ban, ha $p^*_{\lambda^* i^*}$ invertálható H^*-ban.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $p_{\lambda i}$ invertálható elem. Mindenekelőtt azt bizonyítjuk, hogy ha $p_{\lambda i}$ inverze $p^{-1}_{\lambda i}$ ($\in H$), akkor $(p^{-1}_{\lambda i})_{i\lambda}$ egységeleme $M^0_{i\lambda}$-nak. Valóban, vegyük $M^0_{i\lambda}$ egy tetszőleges $(a)_{i\lambda}$ elemét ($a \in H$; $i \in I$; $\lambda \in \Lambda$). Világos, hogy

$$(a)_{i\lambda} \circ (p^{-1}_{\lambda i})_{i\lambda} = (ap_{\lambda i}p^{-1}_{\lambda i})_{i\lambda} = (a)_{i\lambda}$$

és

$$(p^{-1}_{\lambda i})_{i\lambda} \circ (a)_{i\lambda} = (p^{-1}_{\lambda i}p_{\lambda i}a)_{i\lambda} = (a)_{i\lambda}.$$

A 2. lemma szerint tudjuk, hogy $M^0_{i\lambda}\theta = M^{*0}_{i^*\lambda^*}$. Mivel θ izomorfizmus, azért $(p^{-1}_{\lambda i})_{i\lambda}\theta$ egységeleme $M^{*0}_{i^*\lambda^*}$-nak. Vezessük be a következő jelölést:

$$(p^{-1}_{\lambda i})_{i\lambda}\theta = [q^*]_{i^*\lambda^*} \quad (q^* \in H^*;\ i^* \in I^*;\ \lambda^* \in \Lambda^*).$$

$p^{-1}_{\lambda i}$ invertálható elem H-ban, így a 3. lemma szerint q^* invertálható elem H^*-ban, tehát létezik olyan q^{*-1} elem, hogy $q^*q^{*-1} = q^{*-1}q^* = e^*$ (e^* a H^* egységeleme). Mivel $[q^*]_{i^*\lambda^*}$ egységeleme $M^{*0}_{i^*\lambda^*}$-nak, azért

$$[q^{*-1}]_{i^*\lambda^*} \circ [q^*]_{i^*\lambda^*} = [q^{*-1}]_{i^*\lambda^*}, \quad \text{vagyis} \quad [q^{*-1}p^*_{\lambda^*i^*}q^*]_{i^*\lambda^*} = [q^{*-1}]_{i^*\lambda^*}.$$

Így $q^{*-1}p^*_{\lambda^* i^*}q^*=q^{*-1}$, ezért $p^*_{\lambda^* i^*}q^*=e^*$. Másrészt $[q^*]_{i^*\lambda^*}\circ[q^{*-1}]_{i^*\lambda^*}=[q^{*-1}]_{i^*\lambda^*}$, ugyanis $[q^*]_{i^*\lambda^*}$ egységeleme $M^{*0}_{i^*\lambda^*}$-nak; innen $[q^*p^*_{\lambda^* i^*}q^{*-1}]_{i^*\lambda^*}=[q^{*-1}]_{i^*\lambda^*}$. Ebből adódik, hogy $q^*p^*_{\lambda^* i^*}q^{*-1}=q^{*-1}$, ezért $q^*p^*_{\lambda^* i^*}=e^*$.

Ezzel megmutattuk, hogy $p^*_{\lambda^* i^*}$ invertálható elem H^*-ban. Hasonlóan igazolható, hogy $p_{\lambda i}$ invertálható elem H-ban, ha $p^*_{\lambda^* i^*}$ invertálható H^*-ban.

A lemmák alapján kimutatjuk a feltétel szükségességét.

Tegyük fel, hogy $S=M^0(H;\, I,\, \Lambda;\, P=(p_{\lambda i}))$ és $S^*=M^{*0}(H^*;\, I^*,\, \Lambda^*;\, P^*=(p^*_{\lambda^* i^*}))$ két, egymással izomorf lokálisan reguláris *Rees*-féle mátrixfélcsoport, és jelölje $\theta:(a)_{i\lambda}\to(a)_{i\lambda}\theta$ a megfelelő izomorf leképezést.

A 2. lemma szerint létezik a

$$\varphi: I\to I^*(i\leftrightarrow i^*)$$

és

$$\psi: \Lambda\to\Lambda^*(\lambda\leftrightarrow\lambda^*)$$

kölcsönösen egyértelmű leképezés.

Az S lokálisan reguláris volta miatt a P szendvics-mátrixban létezik legalább egy $p_{\mu j}$ invertálható elem, azaz $p^{-1}_{\mu j}p_{\mu j}=p_{\mu j}p^{-1}_{\mu j}=e$. A 4. lemma alapján $p^*_{\mu^* j^*}$ invertálható elem H^*-ban. Most az 1. lemma szerint létezik az

$$\alpha: H\to M^0_{j\mu}(a\to(ap^{-1}_{\mu j})_{j\mu})$$

és

$$\beta: H^*\to M^{*0}_{j^*\mu^*}(a^*\to[a^*p^{*-1}_{\mu^* j^*}]_{j^*\mu^*})$$

izomorfizmus.

Mivel a 2. lemma értelmében $\theta:M^0_{j\mu}\to M^{0*}_{j^*\mu^*}$ izomorfizmus, azért $\omega=\alpha\theta\beta^{-1}$ a H-nak H^*-ra való izomorfizmusa.

Tudjuk, hogy $p^*_{\lambda^* i^*}\beta=[p^*_{\lambda^* i^*}p^{*-1}_{\mu^* j^*}]_{j^*\mu^*}=[e^*]_{j^*\lambda^*}\circ[p^{*-1}_{\mu^* j^*}]_{i^*\mu^*}$. De $0^*\neq[p^{*-1}_{\mu^* j^*}]_{i^*\mu^*}\in S^*$, ezért $0\neq[p^{*-1}_{\mu^* j^*}]_{i^*\mu^*}\theta^{-1}\in S$ és $0^*\neq[e^*]_{j^*\lambda^*}\in S^*$, ezért $0\neq[e^*]_{j^*\lambda^*}\theta^{-1}\in S$.

Legyen $[p^{*-1}_{\mu^* j^*}]_{i^*\mu^*}\theta^{-1}=(c_i)_{i\mu}$ ($\neq 0$ és $[c^*]_{j^*\lambda^*}\theta^{-1}=(d_\lambda)_{j\lambda}$ ($\neq 0$) ($c_i\in H;\, d_\lambda\in H$).

Most tekintsük p^*-nak a $p^*_{\lambda^* i^*}$ elemét.

$$\begin{aligned} p^*_{\lambda^* i^*} &= (p^*_{\lambda^* i^*}\beta\theta^{-1})\theta\beta^{-1} = ([e^*]_{j^*\lambda^*}\circ[p^{*-1}_{\mu^* j^*}]_{i^*\mu^*})\theta^{-1}\theta\beta^{-1} = \\ &= ([e^*]_{j^*\lambda^*}\theta^{-1}\circ[p^{*-1}_{\mu^* j^*}]_{i^*\mu^*}\theta^{-1})\theta\beta^{-1} = \big((d_\lambda)_{j\lambda}\circ(c_i)_{i\mu}\big)\alpha^{-1}\omega = \\ &= (d_\lambda p_{\lambda i}c_i)_{j\mu}\alpha^{-1}\omega = (d_\lambda p_{\lambda i}c_i p_{\mu j})\omega = (d_\lambda\omega)(p_{\lambda i}\omega)\big((c_i p_{\mu j})\omega\big). \end{aligned}$$

Minthogy θ^{-1} izomorfizmus, $p^{*-1}_{\mu^* j^*}$ és e^* invertálható, azért a 3. lemma szerint c_i és d_λ is invertálható elem H-ban. Mivel ω izomorfizmus és c_i, d_λ, $p_{\mu j}$ invertálható, ezért $(d_\lambda\omega)^{-1}$ és $\big((c_i p_{\mu j})\omega\big)^{-1}$ létezik H^*-ban.

Innen látjuk, hogy $p_{\lambda i}\omega=(d_\lambda\omega)^{-1}p^*_{\lambda^* i^*}\big((c_i p_{\mu j})\omega\big)^{-1}$, tehát $p_{\lambda i}\omega=v^*_\lambda p^*_{\lambda^* i^*}u^*_i$, ahol $v^*_\lambda=(d_\lambda\omega)^{-1}$ és $u^*_i=\big((c_i p_{\mu j})\omega\big)^{-1}$.

Most definiáljuk az $U=(u^*_{j^* i})$ $I^*\times I$-típusú mátrixot:

$$u^*_{j^* i^*}=\begin{cases} u^*_i, & \text{ha } j^*=i^* \quad (u^*_i\in H^*) \\ 0^*, & \text{ha } j^*\neq i^* \end{cases}$$

és hasonlóan a $V=(v^*_{\lambda\mu^*})$ $\Lambda\times\Lambda^*$-típusú mátrixot:

$$v^*_{\lambda\mu^*}=\begin{cases} v^*_\lambda, & \text{ha } \mu^*=\lambda^* \quad (v^*_\lambda\in H^*) \\ 0^*, & \text{ha } \mu^*\neq\lambda^*. \end{cases}$$

Látható, hogy az U mátrix i-edik oszlopában is és j^*-adik sorában is pontosan egy nem nulla elem van:
$u_i^* = ((c_i p_{\mu j})\omega)^{-1}$, és u_i^* invertálható elem H^*-ban. Eszerint $U = (u_{j^* i}^*)$ reverzibilis mátrix.

Hasonlóan $V = (v_{\lambda\mu^*}^*)$ is reverzibilis mátrix.

Végül tudjuk, hogy $p_{\lambda i}\omega = v_\lambda^* p_{\lambda^* i^*}^* u_i^* = v_{\lambda\lambda^*}^* p_{\lambda^* i^*}^* u_{i^* i}^*$, azaz $P\omega = VP^*U$.

A tételt ezzel teljesen bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON, *The algebraic theory of semigroups, Vol I.* Math. Surveys, No. 7, American Math. Soc. Providence, 1961.
[2] L. MÁRKI, On locally regular Rees matrix semigroups, *Acta Sci. Math.* 37 (1975), 95—102.
[3] D. REES, On semi-groups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **36** (1940), 387—400.
[4] O. STEINFELD, On a generalization of completely O-simple semigroups, *Acta Sci, Math.* **28** (1967), 135—145.

(Beérkezett: 1974. XII. 12.)