

A KÜLFÖLDI SZAKIRODALOMBÓL

A HERMITIKUS OPERÁTOROK FOLYTATÁSÁRA VONATKOZÓ ALAPTÉTELEK ÉS NÉHÁNY ALKALMAZÁSUK AZ ORTOGONÁLIS POLINOMOK ELMÉLETÉRE ÉS A MOMENTUM PROBLÉMÁRA*

Írta: M. G. KREJN és M. A. KRASZNOSZELSZKIJ

A hermitikus operátorokról szóló alapvető munkájában NEUMANN JÁNOS [11] ezen operátorok általa Cayley-transzformációnak elnevezett lineáris tört transzformációja segítségével a $\mathfrak{H}$ Hilbert-térben értelmezett hermitikus operátorok folytatásának a problémáját visszavezette az izometrikus operátorok folytatásának egyszerűbb kérdésére. Ilyen módon rögtön meg lehetett állapítani a hermitikus operátorok folytatásával kapcsolatos leglényegesebb törvényszerűségeket.

Munkájában NEUMANN JÁNOS kimondta azt a sejtést, hogy pozitív hermitikus operátornak mindig van pozitív önadjungált (hipermaximális) folytatása, és ezt valamivel később M. H. STONE [20] és K. FRIEDRICHS [17] be is bizonyította.

Ezeknek a szerzőknek azonban nem sikerült adott pozitív hermitikus operátor összes pozitív önadjungált folytatásait alkalmas módon megszerkeszteni, ezeket a folytatásokat osztályozni, és annak a kritériumát megtalálni, hogy egyetlen pozitív folytatás létezen.

Ezeket a kérdéseket a jelen cikk egyik szerzője oldotta meg ([6]g, i) úgy, hogy ismét a lineáris tört transzformáció ötletét felhasználva a pozitív operátorok folytatásának a problémáját új problémára, a $\mathfrak{H}$ tér $\mathfrak{D}$ alterén értelmezett korlátos „hermitikus” operátorok hermitikusságot és normát (vagy a normára vonatkozó felső korlátot) megtartó folytatásainak a problémájára vezette vissza.

Az utóbbi probléma megoldása alapján nagyon egyszerűen be lehetett bizonyítani azt is, hogy minden sűrűn definiált és „spektrális hézaggal” rendelkező hermitikus operátornak van a hézagot megtartó önadjungált folytatása (lásd 9. §).

Dolgozatunkban ismertetjük mindezeket a folytatási tételeket, és közben szisztematikusan alkalmazzuk a lineáris operátorok lineáris tört transzformációjának az ötletét.

NEUMANN JÁNOS említett munkájának fontos eredményei közé tartozik az is, hogy bevezette a hermitikus operátorok defekt számainak a fogalmát és megállapította, hogy ezek a felső, ill. alsó félsíkban invariánsak. Nemrég nagyon egyszerű eszközökkel sikerült kimutatni [7], hogy ezek az eredmények általánosíthatók tetszés szerinti zárt lineáris operátor esetére. A jelen cikkben a szerzők egy rendkívül egyszerű és szemléletes lemmára támaszkodva általánosítják ezeket az eredményeket tetszés szerinti lineáris operátorok esetére.

A nyert általános tételek alkalmazására az ortogonális polinomok elmélete és a momentum probléma területéről mutatunk példákat.

* *Успехи математических наук*, 2, № 3 (1947), 60—106.

Ezek kevesebb *analízisbeli tudnivaló* előzetes ismertetését teszik szükségessé, mint egyéb alkalmazások.

A példák megválasztását azonban nemcsak ez a körülmény indokolja.

A momentum probléma fontos szerepet játszott az önadjungált operátorok spektrális felbontására vonatkozó alapvető tételek felállításánál.

CARLEMAN, HELLINGER és mások a momentum problémán próbálták ki a hermitikus operátorok elmélete által nyújtott apparátus élességét, és a sikerek a két területen általában egymást kísérték. Elég rámutatni arra, hogy a két elmélet alap-tételeit CARLEMAN [4a], NEUMANN [11], HAMBURGER [3], NEVANLINNA ([10]a, b) és RIESZ MARCEL ([14]a, b) csaknem egyidőben bizonyította be véglegesen.

Végül szovjet matematikusok nemrég megjelent munkáikban ([6]a—i, [8], [9]a—d) új kapcsolatokat fedeztek fel a hermitikus operátorok elmélete és az „általánosított momentum probléma” között, ily módon kiszélesítve a hermitikus operátorok alkalmazásainak a területét.

Megjegyezzük azonban, hogy a folytatások elméletének itt ismertetendő új eredményei a matematikai fizika peremérték feladataiban — a hermitikus operátorok elméletének tulajdonképpeni forrásaiban — is fontos alkalmazásokra találnak, de ezeknek a kifejtése nagyon messzire vezetne.

Dolgozatunk címét jobban igazolná, ha ismertetnénk M. A. NAJMARK ([9]a, b) fontos eredményeit is, amelyek a hermitikus operátorok tágabb térbe kilépő önadjungált folytatásairól szólnak, ettől azonban idő hiányában kénytelenek voltunk eltekinteni.

A jelen cikkben foglalt eredeti tételek jelentős részét M. G. KREIN sajtó alatt levő ([6]i) munkájából vettük át. Szintén tőle származik mindaz, ami a szerzők által alább ismertetendő példákban új.

A dolgozat megértése céljából az olvasónak ismerni kell a *Hilbert*-terek geometriájának alapvető tételeit és az önadjungált operátorok alaptulajdonságait a spektrális felbontási tételig terjedően. Mindezek a tudnivalók megtalálhatók A. I. PLESZNER ([12]a) cikkében vagy N. I. AHJJEZER előadásainak sokszorosított jegyzetében (lásd még [12]b).

1. §. Alapfogalmak

1. Olyan lineáris operátorokat fogunk vizsgálni, amelyek egy $\mathfrak{H}$ *Hilbert*-térben hatnak.

A $\mathfrak{H}$ *Hilbert*-térben ható A lineáris operátor értelmezési tartományát $\mathfrak{D}(A)$ -val, értékkészletét pedig $\mathfrak{R}(A)$ -val fogjuk jelölni. Tehát

$$\mathfrak{R}(A) = A\mathfrak{D}(A).$$

Az azonosság operátorát I -vel fogjuk jelölni.

Emlékeztetünk arra, hogy az A lineáris operátort akkor mondják *zárt*nak, ha $f_n \in \mathfrak{D}(A)$ ($n=1, 2, \dots$), $f_n \rightarrow f$, $Af_n \rightarrow h$ esetén $f \in \mathfrak{D}(A)$ és $h = Af$.

A komplex sík λ_0 pontját az A operátorra nézve *reguláris típusúnak* fogjuk nevezni, ha található olyan pozitív k_{λ_0} szám, amelyre

$$(1.1) \quad |(A - \lambda_0 I)f| \geq k_{\lambda_0} |f| \quad (f \in \mathfrak{D}(A)).$$

Az A operátorra nézve reguláris típusú pontok nyílt halmazt alkotnak, ugyanis ha λ_0 az A operátorra nézve reguláris típusú, akkor $|\lambda - \lambda_0| < k_{\lambda_0}$ esetén

$$|(A - \lambda I)f| \cong |(A - \lambda_0 I)f| - |\lambda - \lambda_0| |f| \cong k_{\lambda} |f| \quad (f \in \mathfrak{D}(A)),$$

ahol

$$k_{\lambda} = k_{\lambda_0} - |\lambda - \lambda_0|.$$

Egy reguláris típusú λ pontot az A operátorra nézve *regulárisnak* mondunk, ha az $\mathfrak{R}(A - \lambda I)$ halmaz *egybe esik az egész $\mathfrak{H}$ térrel*.

Minden a $\mathfrak{H}$ térben sűrű $\mathfrak{D}(A)$ értelmezési tartománnyal rendelkező A operátornak megfelel egy és csak egy olyan A^* operátor, amelyre az $f \in \mathfrak{D}(A^*)$, $h = A^*f$ összefüggések akkor és csak akkor állnak fenn, ha

$$(Ag, f) = (g, h) \quad (g \in \mathfrak{D}(A)).$$

Az A^* operátort A *adjungáltjának* nevezzük.

Az általánosan elfogadott terminológiától eltérően az A operátort akkor fogjuk *hermitikusnak* mondani, ha

$$(Af, g) = (f, Ag) \quad (f, g \in \mathfrak{D}(A)).$$

A hermitikus A operátort *önadjungáltnak* nevezzük, ha $\overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathfrak{H}$ és $A^* = A$.

Minden nem valós λ a hermitikus operátorokra nézve reguláris típusú és az önadjungált operátorokra nézve reguláris. Megfordítva, ha egy hermitikus A operátorra nézve minden nem valós λ reguláris, akkor A önadjungált.

PÉLDA ÖNADJUNGÁLT OPERÁTORRA. Tekintsünk egy a valós tengelyen értelmezett korlátos nemfogyó $\sigma(t) = \sigma(t-0)$ ($-\infty < t < \infty$, $\sigma(-\infty) = 0$) függvényt. Mint ismeretes, azok a komplex értékű $f(t)$ függvények, amelyek σ -mérhetők és σ -ra nézve négyzetesen integrálhatók,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 d\sigma(t) < \infty,$$

egy $\mathfrak{L}_{\sigma}$ teljes Hilbert-teret alkotnak, ha két ilyen függvény skaláris szorzatát az

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} d\sigma(t)$$

képlettel értelmezzük. Tekintsük az azokból az $f(t) \in \mathfrak{L}_{\sigma}$ függvényekből álló $\mathfrak{D}(T)$ lineáris halmazt, amelyekre

$$\int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|^2 d\sigma(t) < \infty,$$

és értelmezzünk ezen a halmazon egy T operátort a

$$Tf(t) = tf(t) \quad (f(t) \in \mathfrak{D}(T))$$

egyenlőség segítségével.

Világos, hogy a T operátor hermitikus. Ezen felül önadjungált is, mert ha a λ szám nem valós, akkor a $(T - \lambda I)g = f$ egyenletnek tetszés szerinti $f \in \mathfrak{L}_{\sigma}$ mellett van megoldása, ti. $g = f/(\lambda - \lambda)$, vagyis fennáll az $\mathfrak{R}(T - \lambda I) = \mathfrak{H}$ egyenlőség.

Az U operátort *izometrikusnak* nevezzük, ha

$$(Uf, Ug) = (f, g) \quad (f, g \in \mathfrak{D}(U)).$$

Az olyan izometrikus operátort, amelyre $\mathfrak{D}(U) = \mathfrak{R}(U) = \mathfrak{H}$, *unitérnek* mondjuk.

2. Az $\tilde{A}$ operátort az A operátor folytatásának nevezzük, ha $\mathfrak{D}(\tilde{A}) \supset \mathfrak{D}(A)$ és $\tilde{A}f = Af$, valahányszor $f \in \mathfrak{D}(A)$.

Ha egy A operátornak vannak zárt folytatásai, akkor létezik egy $\bar{A}$ minimális zárt folytatás; ezt A lezárásának fogjuk nevezni. Az A operátor összes többi zárt folytatása az $\bar{A}$ operátornak is folytatása.

Megemlítjük, hogy a $\mathfrak{H}$ térben mindenütt sűrű $\mathfrak{D}(A)$ értelmezési tartománnyal rendelkező hermitikus A operátornak mindig van lezárása és az ismét hermitikus.

2. §. A lineáris operátorok defekt számai

1. Legyen $\mathfrak{Q}_1$ és $\mathfrak{Q}_2$ két lineáris halmaz $\mathfrak{H}$ -ban:

$$\mathfrak{Q}_i \subset \mathfrak{H} \quad (i = 1, 2).$$

$\mathfrak{N}_i$ -vel fogjuk jelölni $\bar{\mathfrak{Q}}_i$ ($\mathfrak{Q}_i$ lezárása) ortogonális komplementumát a $\mathfrak{H}$ térben:

$$\bar{\mathfrak{Q}}_i \oplus \mathfrak{N}_i = \mathfrak{H} \quad (i = 1, 2).$$

Emlékeztetünk arra, hogy egy $f \in \mathfrak{H}$ elemnek az $\mathfrak{Q}_i \subset \mathfrak{H}$ ($i = 1, 2$) halmaztól mért $\varrho(f, \mathfrak{Q}_i)$ távolságát a

$$\varrho(f, \mathfrak{Q}_i) = \inf_{g \in \mathfrak{Q}_i} |f - g| \quad (i = 1, 2)$$

képlet értelmezi.

A

$$(2.1) \quad \theta(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = \max \left\{ \sup_{f \in \mathfrak{Q}_2, |f|=1} \varrho(f, \mathfrak{Q}_1), \sup_{f \in \mathfrak{Q}_1, |f|=1} \varrho(f, \mathfrak{Q}_2) \right\}$$

mennyiséget az $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ lineáris halmazok nyílásának fogjuk nevezni.

Nyilvánvaló, hogy

$$0 \leq \theta(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = \theta(\bar{\mathfrak{Q}}_1, \bar{\mathfrak{Q}}_2) \leq 1.$$

2.1. LEMMA. *Két altér, $\mathfrak{Q}_1$ és $\mathfrak{Q}_2$ nyílása egyenlő ortogonális komplementumaik, $\mathfrak{N}_1$ és $\mathfrak{N}_2$ nyílásával:*

$$\theta(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = \theta(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2).$$

A $\varrho(f, \mathfrak{Q}_i)$ távolságot a következőképpen is ki lehet számítani:

$$\varrho(f, \mathfrak{Q}_i) = \max_{h \in \mathfrak{N}_i, |h|=1} |(f, h)|.$$

Ennélfogva

$$(2.2) \quad \theta(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = \sup \{ |(g_1, h_2)|, |(g_2, h_1)| \},$$

ahol a felső határ mindazokra a g_i, h_i elemekre képezendő, amelyekre

$$g_i \in \mathfrak{Q}_i, h_i \in \mathfrak{N}_i, |g_i| = |h_i| = 1 \quad (i = 1, 2).$$

Az $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ alterek nyílásának így kapott kifejezéséből (amely szimmetrikus a g_i, h_i elemekben) a lemma állítása közvetlenül következik.

2.2. LEMMA. Ha $\theta(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = m < 1$, akkor $\mathfrak{Q}_1$, ill. $\mathfrak{N}_1$ dimenziója megegyezik $\mathfrak{Q}_2$, ill. $\mathfrak{N}_2$ dimenziójával¹.

Tegyük fel, hogy az $\mathfrak{Q}_1$ altér dimenziója nagyobb, mint az $\mathfrak{Q}_2$ altéré.

Legyen P az $\mathfrak{Q}_1$ -re való merőleges vetítés operátora $\mathfrak{H}$ -ban. Az $\mathfrak{Q}_2$ altér $\mathfrak{Q}_1$ altérre való $P\mathfrak{Q}_2$ vetületének a dimenziója nem nagyobb, mint $\mathfrak{Q}_2$ dimenziója. Végtes dimenziójú $\mathfrak{Q}_2$ esetén ez nyilvánvaló, végtelen dimenziójú $\mathfrak{Q}_2$ -re pedig abból következik, hogy egy $\mathfrak{Q}_2$ -ben mindenütt sűrű $\mathfrak{M}$ halmaz $P\mathfrak{M}$ vetülete mindenütt sűrű $P\mathfrak{Q}_2$ -ben.

Ekkor $\mathfrak{Q}_1$ -ben található olyan h elem ($|h|=1$), amely ortogonális $P\mathfrak{Q}_2$ -re: $(P\mathfrak{Q}_2, h)=0$, vagyis $(\mathfrak{Q}_2, Ph)=0$. Mivel $Ph=h$, azt kapjuk, hogy $(\mathfrak{Q}_2, h)=0$.

Megmutattuk, hogy $h \in \mathfrak{Q}_1$, $h \in \mathfrak{N}_2$. Így a (2.2) képlet alapján $\theta(\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = 1$, ellentmondásban a lemma feltevésével.

Ugyanezek a megfontolások alkalmazhatók az $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ alterekre is, mert a 2.1. lemma értelmében $\theta(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2) = m < 1$.

2. I. TÉTEL. Legyen G a komplex sík összefüggő tartománya, amelynek a pontjai az A operátorra nézve reguláris típusúak. Ekkor az $\mathfrak{R}(A - \lambda I)$ halmaz $\mathfrak{N}_\lambda$ ortogonális komplementumának a dimenziója minden $\lambda \in G$ érték mellett ugyanaz.

Bizonyítás. Meg fogjuk mutatni, hogy minden egyes $\lambda_0 \in G$ pontnak van olyan W környezete, hogy $\mathfrak{N}_\lambda$ és $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ dimenziója minden $\lambda \in W$ mellett megegyezik; ebből a tétel állítása már következik.

Legyen W a λ_0 pont $\frac{1}{3}k_{\lambda_0}$ sugarú környezete. Ekkor az (1.1) összefüggés értelmében a $\lambda \in W$ pontokra fennáll

$$|(A - \lambda I)f| \geq |(A - \lambda_0 I)f| - |\lambda - \lambda_0| |f| > \frac{2}{3} k_{\lambda_0} |f| \quad (f \in \mathfrak{D}(A))$$

és

$$|(A - \lambda I)f - (A - \lambda_0 I)f| = |\lambda - \lambda_0| |f| < \frac{1}{2} |(A - \lambda I)f|,$$

$$|(A - \lambda I)f - (A - \lambda_0 I)f| < \frac{1}{3} |(A - \lambda_0 I)f|.$$

Ennélfogva az $\overline{\mathfrak{R}(A - \lambda_0 I)}$, $\overline{\mathfrak{R}(A - \lambda I)}$ alterek nyílása nem nagyobb, mint $\frac{1}{2}$:

$$\theta(\overline{\mathfrak{R}(A - \lambda_0 I)}, \overline{\mathfrak{R}(A - \lambda I)}) \leq \frac{1}{2} \quad (\lambda \in W),$$

tehát a 2.2. lemma szerint $\mathfrak{N}_\lambda$ ($\lambda \in W$) dimenziója egyenlő $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ dimenziójával.

A tételt bebizonyítottuk.

¹ Emlékeztetünk arra, hogy egy $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{H}$ lineáris halmaz dimenziójának az $\mathfrak{N}$ -beli teljes ortonormális rendszerek számosságát nevezik. Ez a számosság egyenlő az $\mathfrak{N}$ -ben sűrű $E \subset \mathfrak{N}$ halmazok számosságai közül a legkisebbel. Nem nehéz megmutatni, hogy ha $\theta(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2) < 1$, akkor a (2.1) képletben a „max” jel után álló szuprérumok megegyeznek, és a θ nyílás az $\mathfrak{N}_1$ és $\mathfrak{N}_2$ közötti szög szinuszának tekinthető. A 2.1. és 2.2. lemma Banach-tér esetére is általánosítható.

A $\lambda \in G$ értékekhez tartozó $\mathfrak{R}_\lambda$ alterek dimenzióját az A operátor G -beli defekt számának fogjuk nevezni (G összefüggő).

Hermitikus operátor esetén a komplex sík felső és alsó félsíkja A -ra nézve reguláris típusú pontokból áll. Ezért hermitikus operátornak legfeljebb két különböző defekt száma lehet.

Az (m, n) párt, ahol m az A operátor felső félsíkbeli, n pedig A alsó félsíkbeli defekt száma, az A operátor *defekt indexének* mondjuk. Ha a valós tengely valamelyik pontja reguláris típusú, akkor a hermitikus operátor defekt számai egyenlők. Önadjungált operátor mindkét defekt száma nulla.

3. Szemléltessük a bevezetett fogalmakat két példával.

2.1. *példa.* Legyen V fél-unitér operátor, vagyis olyan operátor, amely az egész $\mathfrak{H}$ teret izometrikusan $\mathfrak{H}$ valamilyen valódi részére képezi le:

$$(Vf, Vg) = (f, g) \quad (f, g \in \mathfrak{H}, \mathfrak{R}(V) \neq \mathfrak{H}).$$

Minden λ pont, amely a komplex sík egységkörén belül vagy kívül helyezkedik el, reguláris típusú, ugyanis

$$|(V - \lambda I)f| \equiv |Vf| - |\lambda| |f| = (1 - |\lambda|) |f| \quad (|\lambda| < 1)$$

és

$$|(V - \lambda I)f| \equiv |\lambda| |f| - |Vf| = (|\lambda| - 1) |f| \quad (|\lambda| > 1).$$

Legyen az $f_0 \in \mathfrak{H}$ ($|f_0| = 1$) elem ortogonális az $\mathfrak{R}(V - \lambda I)$ halmazra. Ekkor

$$|\lambda| = |\lambda f_0| = \min_{g \in \mathfrak{R}(V - \lambda I)} |\lambda f_0 - g| \leq |\lambda f_0 - (\lambda f_0 - Vf_0)| = 1.$$

Tehát $|\lambda| > 1$ esetén $\mathfrak{R}(V - \lambda I)$ egybe esik a $\mathfrak{H}$ térrel.

A $\lambda = 0$ esetben a fél-unitér operátor definíciója szerint $\mathfrak{R}(V)$ nem azonos $\mathfrak{H}$ -val, így az I. tétel értelmében minden olyan λ -ra, amelyre $|\lambda| < 1$, az $\mathfrak{R}(V - \lambda I)$ halmaz a $\mathfrak{H}$ tér valódi altere. A megfelelő $\mathfrak{R}_\lambda$ ortogonális komplementumok n dimenziója egyenlő $\mathfrak{R}_0$ -nak, az $\mathfrak{R}(V)$ altér ortogonális komplementumának a dimenziójával.

Következésképpen a fél-unitér operátoroknak két defekt, számuk van: 0 és n . Megjegyezzük, hogy mivel a defekt számok nem egyenlők, fél-unitér operátornak az egységkörön nincs reguláris típusú pontja.

2.2. *példa.* Legyen M a komplex sík zárt valódi részhalmaza, és legyen M -en értelmezve egy $\sigma(\mathcal{E})$ ($\mathcal{E} \subset M$) Radon-mérték, amelyre

$$(2.3) \quad \int_M d\sigma = 1, \quad \int_M |z|^n d\sigma(z) < \infty \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Azoknak az M -en értelmezett $f(z)$ függvényeknek a halmaza, amelyek saját maguk és négyzetük is σ -integrálhatók,

$$\int_M |f(z)|^2 d\sigma(z) < \infty,$$

mint ismeretes, egy $\mathfrak{L}_2(M)$ teljes Hilbert-teret alkot, ha a skaláris szorzatot az

$$(f, g) = \int_M f(z) \overline{g(z)} d\sigma(z)$$

képlettel definiáljuk.

A (2.3) összefüggések értelmében z minden polinomja benne van ebben a térben. Az alábbiakban azt a $\mathfrak{H}_\sigma$ Hilbert-teret fogjuk vizsgálni, amelyet úgy kapunk, hogy a polinomok halmazát az $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ térben lezárjuk.

Az $1, z, z^2, \dots$ sorozat ortonormálása útján $\mathfrak{H}_\sigma$ -ban egy $D_k(z)$ ($k=0, 1, \dots$), $D_0=1$ teljes ortonormális bázist nyerünk. Értelmezzünk a polinomoknak a $\mathfrak{H}_\sigma$ térben sűrű $\mathfrak{P}$ halmazán egy A operátort az

$$AP(z) = zP(z) \quad (P(z) \in \mathfrak{P})$$

képlettel.

Az A operátor $\Re(A)$ értékkészlete azokból a polinomokból áll, amelyek a $z=0$ helyen nullával egyenlők. Hasonlóképpen $\Re(A-\lambda I)$ a $z=\lambda$ helyen nullával egyenlő polinomok halmaza.

Ha $\lambda_0 \notin M$, akkor minden $z \in M$ pontra $|z - \lambda_0| \geq \alpha > 0$, úgyhogy $P(z) \in \mathfrak{P}$ esetén²

$$\|(A - \lambda_0 I)P(z)\|^2 = \int_M |z - \lambda_0|^2 |P(z)|^2 d\sigma(z) \geq \alpha^2 \|P(z)\|^2.$$

Tehát az M halmaz komplex síkbeli N komplementumának minden pontja az A operátorra nézve reguláris típusú.

1°. Az A operátor defekt számai csak 0-val vagy 1-gyel lehetnek egyenlők.

Ha $\Re(A - \lambda I)$ nem sűrű $\mathfrak{H}_\sigma$ -ban (a λ pontban nullává váló polinomok halmaza nem mindenütt sűrű az összes polinomok halmazában), akkor $D_0 \notin \Re(A - \lambda I)$, de $\Re(A - \lambda I)$ és D_0 lineáris burka megegyezik $\mathfrak{P}$ -vel, tehát sűrű $\mathfrak{H}_\sigma$ -ban. Ennélfogva ilyen λ -ra a defekt szám 1.

Ugyanezen megfontolások szerint ahhoz, hogy a defekt szám 0-val legyen egyenlő, szükséges és elégséges a

$$(2.4) \quad \varrho(D_0, \Re(A - \lambda I)) = \inf_{P(z) \in \mathfrak{P}} \|1 - (z - \lambda)P(z)\| = 0$$

egyenlőség fennállása.

A norma jel alatt álló kifejezés tetszés szerinti polinom, amely a λ helyen az 1 értéket veszi fel. Ezek a polinomok előállíthatók $Q(z)/Q(\lambda)$ alakban vagy, a $Q(z)$ függvényt a $D_k(z)$ ortogonális polinomok szerint kifejtve, $\sum_{k=0}^n c_k D_k(z) / \sum_{k=0}^n c_k D_k(\lambda)$ alakban.

A (2.4) feltételből a következőt kapjuk:

$$\varrho(D_0, \Re(A - \lambda I)) = \inf \frac{\left\| \sum_{k=0}^n c_k D_k(z) \right\|}{\left| \sum_{k=0}^n c_k D_k(\lambda) \right|} = 0,$$

² Annak érdekében, hogy a $P(z)$ függvénynek mint a $\mathfrak{H}_\sigma$ tér elemének a normáját megkülönböztessük a $P(z)$ függvény abszolút értékétől, a 2.2. példában az elemek normáját a $\|P(z)\|$ jellel fogjuk jelölni.

ahol az infimum az összes $\sum_{k=0}^n c_k D_k(z)$ ($n=0, 1, \dots$) polinomokra képezendő. Tetszés szerinti rögzített n mellett az infimum $c_k = \overline{D_k(\lambda)}$ esetén éretik el és értéke $\left(\sum_{k=0}^n |D_k(\lambda)|^2\right)^{-1/2}$. Innen

$$\varrho(D_0, \Re(A - \lambda I)) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |D_k(\lambda)|^2}}.$$

Tehát ahhoz, hogy a λ pontban eltűnő polinomok halmaza sűrű legyen $\mathfrak{P}$ -ben, vagy ami ugyanaz, $\mathfrak{H}_\sigma$ -ban, szükséges és elégséges, hogy a

$$(2.5) \quad |D_0|^2 + |D_1(\lambda)|^2 + |D_2(\lambda)|^2 + \dots$$

sor divergens legyen.

Figyelembe véve az I. tételt a következő állításra jutunk:

2°. Minden λ pontban, amely az N halmaz ugyanazon összefüggő komponenséhez tartozik, a (2.5) sor egyszerre konvergál vagy divergál.

Az első esetben az A operátor defekt száma ebben a komponensben 1, a másodikonban 0.

Szintén könnyen belátható, hogy:

3°. Ha az M halmaz korlátos, akkor az N halmaz azon komponensén, amely a végtelen távoli pontot tartalmazza, a (2.5) sor divergens.

Valóban, tegyük fel, hogy az M halmaz a $|z| < R$ körben fekszik; ekkor $|\lambda| > R$ esetén

$$\begin{aligned} \varrho(D_0, \Re(A - \lambda I)) &= \inf_{P(z) \in \mathfrak{P}} \left\| (z - \lambda) \left(\frac{D_0}{z - \lambda} - P(z) \right) \right\| \equiv \\ &\equiv (R + |\lambda|) \inf_{P(z) \in \mathfrak{P}} \left\| \frac{1}{z - \lambda} - P(z) \right\|. \end{aligned}$$

Másrészt $n \rightarrow \infty$ esetén

$$\left\| \frac{1}{\lambda - z} - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{\lambda^{k+1}} \right\| \rightarrow 0,$$

tehát

$$\varrho(D_0, \Re(A - \lambda I)) = 0.$$

Tekintsünk néhány speciális esetet.

a) Legyen M az egységkörvonal.

Ebben az esetben $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ azoknak az $f(z) = f(e^{i\theta})$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) függvényeknek a Hilbert-tere, amelyek négyzetükkel együtt σ -integrálhatók valamilyen nem-csökkenő $\sigma(\theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) függvényre vonatkozóan.

Az A operátor ($AP(z) = zP(z)$) ebben az esetben izometrikus:

$$(AP, AQ) = \int_0^{2\pi} |z|^2 P(z) \overline{Q(z)} d\sigma(z) = \int_0^{2\pi} P(z) \overline{Q(z)} d\sigma(z) = (P, Q) \quad (z = e^{i\theta}).$$

Ha az A operátort lezárjuk $\mathfrak{H}_\sigma$ -ban, akkor vagy unitérre vagy fél-unitérre válik (lásd a 2.1. példát).

Megmutatjuk, hogy az első eset akkor és csak akkor áll fenn, ha a polinomok halmaza sűrű az $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ térben, azaz a $D_k(z)$ ($k=0, 1, \dots$) rendszer teljes ortonormális rendszer $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ -ben.

Valóban, ha $\bar{A}$ unitér operátor, akkor $\bar{A}\mathfrak{H}_\sigma = \mathfrak{H}_\sigma$, következésképpen $\bar{A}^{-1}$ létezik az egész $\mathfrak{H}_\sigma$ téren, úgyhogy $z^{-k} = \bar{A}^{-k}D_0 \in \mathfrak{H}_\sigma$ ($k=1, 2, \dots$). Ily módon $\mathfrak{H}_\sigma$ azonos az összes

$$\sum_{k=-n}^n c_k z^k \quad (z = e^{i\theta}; n = 0, 1, 2, \dots)$$

trigonometrikus polinomok halmazának a lezárásával, ez pedig, mint ismeretes, az $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ tér.

Megfordítva, ha $\mathfrak{H}_\sigma = \mathfrak{L}_\sigma(M)$, vagyis $\bar{\mathfrak{P}} = \mathfrak{L}_\sigma(M)$, akkor A lezárása $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ -ben az a T operátor lesz, amelyet a

$$Tf = zf \quad (f \in \mathfrak{D}(T))$$

egyenlőség értelmez, ez pedig unitér.

Bizonyos függvényteni megfontolásokat alkalmazva meg lehet mutatni, hogy ahhoz, hogy a polinomok rendszere ne legyen sűrű $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ -ben és így

$$\sum_{k=0}^{\infty} |D_k(z)|^2 < \infty \quad (|z| < 1)$$

legyen, szükséges és elégséges az

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{\sigma'(\theta)} d\theta < \infty$$

feltétel teljesülése (lásd [5], [6f]).

b) Álljon a $\mathfrak{D}(T)$ halmaz azokból az $f(z) \in \mathfrak{L}_\sigma(M)$ függvényekből, amelyekre

$$\int_M |zf(z)|^2 d\sigma(z) < \infty,$$

és értelmezzük a T operátort a

$$Tf(z) = zf(z) \quad (f(z) \in \mathfrak{D}(T))$$

egyenlőséggel.

Az olvasóra bizzuk annak a bebizonyítását, hogy a T operátor zárt. Nyilvánvaló, hogy minden $\lambda \notin M$ pont reguláris T -re vonatkozóan.

A T operátor az A operátor zárt folytatása az $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ térben. Ebből következik, hogy A -nak van lezárása.

Megjegyezzük még, hogy bármilyen $\lambda \notin M$ mellett a $(z-\lambda)^{-1}$ függvény hozzá tartozik a T operátor $\mathfrak{D}(T)$ értelmezési tartományához.

Legyen W az M halmaz komplex síkra vonatkozó N kiegészítő halmazának valamelyik komponense.

4°. Ha a W tartományban az A operátor defekt száma nulla, akkor minden $\lambda \in W$ pontra a $(z - \lambda)^{-1}$ függvény benne van $\mathfrak{H}_\sigma$ -ban.

Csakugyan, legyen $\bar{A}$ az A operátor lezárása, λ pedig W valamelyik pontja. Ekkor található olyan $g \in \mathfrak{D}(\bar{A}) \subset \mathfrak{H}_\sigma$ elem, hogy $(\bar{A} - \lambda I)g = 1$. Minthogy a T operátor az $\bar{A}$ operátor folytatása, $(T - \lambda I)g = 1$, és ebből következik, hogy $g = (z - \lambda)^{-1}$.

5°. Ha az M halmaz N kiegészítő halmazának valamelyik W komponensében egy λ_0 pontra a $(z - \lambda_0)^{-1}$ függvény $\mathfrak{H}_\sigma$ -hoz tartozik, akkor minden $\lambda \in W$ esetén is igaz az, hogy a $(z - \lambda)^{-1}$ függvény $\mathfrak{H}_\sigma$ -hoz tartozik.

Ha A defekt száma W -ben nullával egyenlő, akkor a bebizonyítandó kijelentés a 4°. állításból következik. Abban az esetben, amikor az A operátor defekt száma a W komponensben 1, akkor, amint az 1°. állítás bizonyítása során megmutattuk, $q(D_0, \Re(A - \lambda_0 I)) > 0$, és ebből következik, hogy $(z - \lambda_0)^{-1}$ nincs benne az $\bar{A}$ operátornak (A lezárásának) az értelmezési tartományában.

Értelmezzünk a $\mathfrak{H}_\sigma$ tér

$$f = g + c(z - \lambda_0)^{-1} \quad (g \in \mathfrak{D}(\bar{A}))$$

alakú elemein egy B operátort a

$$Bf = zf = \bar{A}g + c + c\lambda_0(z - \lambda_0)^{-1}$$

egyenlőség útján.

Nyilvánvaló, hogy B értékkészlete is $\mathfrak{H}_\sigma$ -hoz tartozik. A B operátor az A operátor folytatása, T pedig B folytatása. Következésképpen a $\lambda \in W$ pontok a B operátorra nézve reguláris típusúak. Minthogy $(B - \lambda_0 I)(z - \lambda_0)^{-1} = 1$ és $\Re(\bar{A} - \lambda_0 I) \subset \Re(B - \lambda_0 I)$, a B operátor W -beli defekt száma nullával egyenlő.

Most már csak szó szerint meg kell ismételni a 4°. állítás bizonyítását.

6°. Ha az $\bar{A}$ operátor defekt száma W -ben 1-gyel egyenlő és valamilyen $\lambda_0 \in W$ pontra $(z - \lambda_0)^{-1} \in \mathfrak{H}_\sigma$, akkor $\bar{A}$ defekt száma N mindegyik komponensében 1-gyel egyenlő és $(z - \lambda)^{-1} \in \mathfrak{H}_\sigma$ minden $\lambda \in M$ pontra.

Tegyük fel, hogy valamelyik komponensben $\bar{A}$ defekt száma 0, vagyis valamilyen $\lambda \in M$ pontra $\Re(\bar{A} - \lambda I) = \mathfrak{H}_\sigma$. Ekkor

$$(B - \lambda I)(z - \lambda_0)^{-1} = (\bar{A} - \lambda I)g,$$

ahol B az 5°. állítás bizonyítása során megszerkesztett operátor és g a $\mathfrak{D}(\bar{A})$ halmaz eleme. Az utóbbi egyenlőségből $\bar{A}g = Bg$ miatt következik, hogy

$$(B - \lambda I)((z - \lambda_0)^{-1} - g) = 0,$$

innen pedig $(z - \lambda_0)^{-1} = g \in \mathfrak{D}(\bar{A})$, mivel a λ pont a B operátorra nézve reguláris típusú. De ha $(z - \lambda_0)^{-1} \in \mathfrak{D}(\bar{A})$, akkor A defekt száma W -ben nullával egyenlő.

Megmutattuk, hogy a defekt szám N mindegyik komponensében 1. Egyidejűleg megmutattuk, hogy a B operátor mindegyik defekt száma 0. A további megfontolások ugyanolyanok, mint a 4°. állítás bizonyításában.

c) Most néhány kritériumot fogunk megállapítani arra, hogy a polinomok $\mathfrak{P}$ halmaza sűrű legyen az $\mathfrak{Q}_\sigma(M)$ térben.

Azt fogjuk mondani, hogy az M halmaz α tulajdonságú, ha abból, hogy

$$\int_M \frac{d\omega(z)}{z-\lambda} = 0$$

minden $\lambda \notin M$ pontra, ahol $\omega(\mathcal{E})$ valamilyen komplex értékű, teljesen additív, az M halmaz Borel-féle részhalmazából álló halmaztesten értelmezett függvény, következik, hogy $\omega(\mathcal{E})=0$ ($\mathcal{E}$ az M halmaz tetszés szerinti Borel-féle részhalmaza).

Például α tulajdonságú minden olyan görbe, amelynek minden korlátos szakasza rektifikálható (lásd [13]).

7° . Legyen az M halmaz α tulajdonságú. Ha az A operátor defekt számai nullával egyenlők, akkor a polinomok rendszere sűrű $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ -ben, azaz $\mathfrak{H}_\sigma = \mathfrak{L}_\sigma(M)$.

Mint hogy minden defekt szám nullával egyenlő, a 4° . állításból következik, hogy mindegyik $(z-\lambda)^{-1}$ ($\lambda \notin M$) függvény benne van $\mathfrak{H}_\sigma$ -ban. Ha egy $h(z) \in \mathfrak{L}_\sigma(M)$ függvény ortogonális a $\mathfrak{H}_\sigma$ térre, akkor speciálisan ortogonális minden $(z-\lambda)^{-1}$ ($\lambda \notin M$) függvényre, vagyis

$$\int_M \frac{\overline{h(z)} d\sigma(z)}{z-\lambda} = 0 \quad (\lambda \notin M),$$

minthogy pedig az M halmaz α tulajdonságú, M tetszés szerinti $\mathcal{E}$ Borel-féle részhalmazára

$$\int_{\mathcal{E}} \overline{h(z)} d\sigma(z) = 0$$

és innen

$$\int_M |h(z)|^2 d\sigma(z) = 0.$$

Az állítást bebizonyítottuk.

A vizsgált esetben, amikor A összes defekt számai nullával egyenlők, bármilyen σ_1 mérték, amely lényegesen különbözik a $\sigma_0 = \sigma$ mértéktől (legalább egy nyílt halmazon nem egyenlő σ -val), a polinomok $\mathfrak{P}$ halmazán olyan metrikát generál, amely különbözik a $\mathfrak{H}_{\sigma_0} = \mathfrak{H}_\sigma$ tér metrikájától.

Valóban, ha a σ_1 függvény a polinomok halmazán ugyanazt a metrikát generálja, mint a $\sigma_0 = \sigma$ függvény, akkor tetszés szerinti $\lambda \notin M$ esetén található olyan $(z-\lambda)P_n(z)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) polinom-sorozat, amely mindkét $\mathfrak{H}_{\sigma_i}$ ($i=0, 1$) térben 1-hez tart:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M |1 - (z-\lambda)P_n(z)|^2 d\sigma_i(z) = 0 \quad (i=0, 1).$$

Ebben az esetben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M \left| \frac{1}{z-\lambda} - P_n(z) \right|^2 d\sigma_i(z) = 0 \quad (i=0, 1),$$

következésképpen

$$\int_M \frac{d\sigma_i(z)}{z-\lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M P_n(z) d\sigma_i(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n, 1) \quad (i=0, 1),$$

és így

$$\int_M \frac{d\sigma_1(z)}{z-\lambda} = \int_M \frac{d\sigma_0(z)}{z-\lambda} \quad (\lambda \notin M).$$

Innen adódik, hogy a σ_1 és a $\sigma_0 = \sigma$ mérték megegyezik (lényegében).

Ily módon bebizonyítottuk, hogy a vizsgált esetben az

$$\int_M z^j \bar{z}^k d\sigma_1(z) = \int_M z^j \bar{z}^k d\sigma_0(z) \quad (j, k = 0, 1, 2, \dots)$$

egyenlőségekből következik, hogy σ_1 és σ_0 megegyezik (lényegében).

Ha az A operátor defekt számai a $\mathfrak{H}_\sigma$ térben nem mind nullák, akkor az utóbbi állítás általában nem érvényes még akkor sem, ha feltesszük, hogy $\mathfrak{H}_{\sigma_1}$, illetve $\mathfrak{H}_{\sigma_0}$ egybe esik az $\mathfrak{L}_{\sigma_1}(M)$, illetve $\mathfrak{L}_{\sigma_0}(M)$ térrel (lásd 5. §.).

A 6°. állítás felhasználásával azonban még a következő kritérium is megadható arra, hogy a polinomok $\mathfrak{P}$ halmaza sűrű legyen az $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ térben.

8°. Legyen az M halmaz α tulajdonságú. Ha az N halmaz valamelyik W komponensében az A operátor defekt száma 1, továbbá egy $\lambda_0 \in W$ pontra $(z - \lambda_0)^{-1} \in \mathfrak{H}_\sigma$, akkor a $\mathfrak{P}$ halmaz sűrű az $\mathfrak{L}_\sigma(M)$ térben.

A 7°. állítás bizonyításából kitűnik, hogy elég megmutatni, hogy a $(z - \lambda)^{-1}$ függvény minden $\lambda \notin M$ esetén $\mathfrak{H}_\sigma$ -hoz tartozik, ez pedig a 6°. állításból következik.

d) Legyen M a valós tengely: $z = t$ ($-\infty < t < \infty$). Ebben az esetben az A operátor hermitikus. A $D_k(t)$ ortogonális polinomok választhatók valósoknak. Ekkor $D_k(\bar{\lambda}) = \overline{D_k(\lambda)}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), tehát a (2.5) sor minden nem valós λ -ra egyszerre konvergál vagy divergál.

Az első esetben az A operátor defekt indexe (1, 1). A második esetben a defekt index (0, 0), vagyis A önadjungált.

Az 5. paragrafusban részletesen tanulmányozni fogjuk az itt felmerülő lehetőségeket.

3. §. Operátorok lineáris tört transzformációi

Legyen az A operátor értelmezési tartománya $\mathfrak{D}(A)$, és tegyük fel, hogy valamilyen γ és δ mellett a $\gamma A\varphi + \delta\varphi = 0$ ($\varphi \in \mathfrak{D}(A)$) egyenlőségből következik, hogy $\varphi = 0$. Értelmezzünk az

$$(3.1) \quad f = \gamma Ag + \delta g \quad (g \in \mathfrak{D}(A))$$

alakú elemeken egy B operátort a

$$(3.2) \quad Bf = \alpha Ag + \beta g$$

képlet segítségével, ahol az α, β számok eleget tesznek az

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

feltételnek.

A B lineáris operátort A lineáris tört transzformáltjának fogjuk nevezni és a

$$(3.3) \quad B = (\alpha A + \beta I)(\gamma A + \delta I)^{-1}$$

módon jelöljük.

Mínt hogy az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ számokat velük arányos mennyiségekkel helyettesítve az B operátor nem változik meg, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

3.1. LEMMA. Ha B az A operátorral a (3.3) képlet szerint fejezhető ki, akkor A a B operátorból az alábbi módon adódik:

$$(3.4) \quad A = (\delta B - \beta I)(-\gamma B + \alpha I)^{-1}.$$

Valóban, a (3.1), (3.2) egyenleteket megoldva a g, Ag elemekre azt kapjuk, hogy

$$(3.5) \quad g = -\gamma Bf + \alpha f, \quad Ag = \delta Bf - \beta f \quad (g \in \mathfrak{D}(A), f \in \mathfrak{D}(B)),$$

ezenkívül $g=0$ esetén $f=0$. Így a lineáris tört transzformáció definíciója értelmében fennáll a (3.4) egyenlőség.

1°. Ha az A és a B operátor egymás lineáris tört transzformáltja, akkor egyikük zártságából következik a másik zártága.

Legyen A zárt. Ha az $f_n \in \mathfrak{D}(B)$ és a Bf_n ($n=1, 2, \dots$) sorozat tart egy f_0 , ill. h_0 elemhez, akkor a

$$g_n = -\gamma Bf_n + \alpha f_n, \quad Ag_n = \delta Bf_n - \beta f_n \quad (g_n \in \mathfrak{D}(A), f_n \in \mathfrak{D}(B); n = 1, 2, \dots)$$

sorozatok rendre valamilyen g_0 , ill. φ_0 elemhez tartanak. Mínt hogy azonban A zárt, azt kapjuk, hogy $g_0 \in \mathfrak{D}(A)$ és $\varphi_0 = Ag_0$. A (3.1), (3.2) összefüggések alapján

$$f_n = \gamma Ag_n + \delta g_n, \quad Bf_n = \alpha Ag_n + \beta g_n \quad (g_n \in \mathfrak{D}(A), f_n \in \mathfrak{D}(B); n = 1, 2, \dots).$$

Az $n \rightarrow \infty$ határátmenettel nyerjük:

$$f_0 = \gamma Ag_0 + \delta g_0, \quad h_0 = \alpha Ag_0 + \beta g_0,$$

úgyhogy $f_0 \in \mathfrak{D}(B)$ és $h_0 = Bf_0$, vagyis a B operátor zárt.

Az 1°. állításból következik, hogy ha az A operátor zárt és a λ pont A -ra nézve reguláris típusú, akkor $\Re(A - \lambda I)$ zárt altér.

Csakugyan, az $(A - \lambda I)^{-1}$ operátor, amelynek értelmezési tartománya $\Re(A - \lambda I)$, az (1.1) képlet értelmében korlátos, az 1°. állítás alapján pedig zárt; következésképpen zárt altéren van értelmezve.

2°. Ha az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ számok valósak és az A operátor hermitikus vagy önadjungált, akkor a B operátor is hermitikus, illetve önadjungált.

Valóban, ha A hermitikus, akkor tetszés szerinti $g_1, g_2 \in \mathfrak{D}(A)$ elemekre

$$\begin{aligned} (\alpha Ag_1 + \beta g_1, \gamma Ag_2 + \delta g_2) &= \alpha \gamma (Ag_1, Ag_2) + \alpha \delta (Ag_1, g_2) + \beta \gamma (g_1, Ag_2) + \beta \delta (g_1, g_2) = \\ &= \alpha \gamma (Ag_1, Ag_2) + \alpha \delta (g_1, Ag_2) + \beta \gamma (Ag_1, g_2) + \beta \delta (g_1, g_2) = \\ &= (\gamma Ag_1 + \delta g_1, \alpha Ag_2 + \beta g_2), \end{aligned}$$

tehát a (3.1), (3.2) összefüggések folytán

$$(Bf_1, f_2) = (f_1, Bf_2) \quad (f_1, f_2 \in \mathfrak{D}(B)).$$

Legyen az A operátor önadjungált. Megmutatjuk, hogy ekkor bármilyen nem valós λ -ra az $\Re(B - \lambda I)$ halmaz megegyezik az egész $\mathfrak{H}$ térrel, és így a hermitikus B operátor önadjungált.

A (3.1), (3.2) egyenlőségek szerint az $\Re(B - \lambda I)$ halmaz az

$$\alpha Ag + \beta g - \lambda(\gamma Ag + \delta g) = (\alpha - \lambda\gamma)Ag + (\beta - \lambda\delta)g \quad (g \in \mathfrak{D}(A))$$

alakú elemekből áll.

Mint hogy az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ számok valósak, valós λ értékekre $\alpha - \lambda\gamma \neq 0$ és a

$$\mu = -\frac{\beta - \lambda\delta}{\alpha - \lambda\gamma}$$

szám nem valós; következésképpen

$$\Re(B - \lambda I) = \Re(A - \mu I) = \mathfrak{H}.$$

Speciálisan, ha egy A önadjungált operátor inverz operátora, A^{-1} létezik, akkor önadjungált.

3°. Ha $\gamma = \bar{\alpha}$, $\delta = \bar{\beta}$ és az A operátor hermitikus vagy önadjungált, akkor B izometrikus, illetve unitér.

Valóban, ha az A operátor hermitikus, akkor tetszés szerinti $g_1, g_2 \in \mathfrak{D}(A)$ elemekre

$$\begin{aligned} (\alpha Ag_1 + \beta g_1, \alpha Ag_2 + \beta g_2) &= \\ &= \alpha \bar{\alpha} (Ag_1, Ag_2) + \alpha \bar{\beta} (Ag_1, g_2) + \bar{\alpha} \beta (g_1, Ag_2) + \bar{\beta} \beta (g_1, g_2) = \\ &= \gamma \bar{\gamma} (Ag_1, Ag_2) + \delta \bar{\gamma} (g_1, Ag_2) + \gamma \bar{\delta} (Ag_1, g_2) + \delta \bar{\delta} (g_1, g_2) = \\ &= (\gamma Ag_1 + \delta g_1, \gamma Ag_2 + \delta g_2), \end{aligned}$$

azaz

$$(Bf_1, Bf_2) = (f_1, f_2) \quad (f_1, f_2 \in \mathfrak{D}(B)),$$

tehát B izometrikus.

Legyen az A operátor önadjungált. Ekkor a B izometrikus operátor $\mathfrak{D}(B) = \Re(\bar{\alpha}A + \bar{\beta}I)$ értelmezési tartománya és $\Re(B) = \Re(\alpha A + \beta I)$ értékkészlete a $\mathfrak{H}$ tér, és így B unitér.

Analóg módon lehet bizonyítani az ellenkező irányú állítást:

4°. A 3°. állítás feltételei mellett a B operátor izometrikus vagy unitér voltából következik, hogy A hermitikus, illetve önadjungált.

A hermitikus A operátor olyan lineáris tört transzformáltját, amelyre teljesülnek a 3°. állításban szereplő feltételek, A Cayley-transzformáltjának fogjuk nevezni;

a $\lambda = -\frac{\delta}{\gamma}$ jelöléssel ez az

$$(3.6) \quad U_\lambda = (A - \bar{\lambda}I)(A - \lambda I)^{-1} \quad (\text{Im } \lambda \neq 0)$$

alakra hozható.

4. §. Hermitikus operátorok folytatása

1. 4.1. LEMMA. Legyen B az A operátor lineáris tört transzformáltja:

$$B = (\alpha A + \beta I)(\gamma A + \delta I)^{-1}.$$

Ha ezenkívül $\tilde{A}$ az A operátor olyan folytatása, hogy a $\gamma \tilde{A}\varphi + \delta\varphi = 0$ egyenlőség csak $\varphi = 0$ esetén állhat fenn, akkor az $\tilde{A}$ operátor

$$\tilde{B} = (\alpha \tilde{A} + \beta I)(\gamma \tilde{A} + \delta I)^{-1}$$

lineáris tört transzformáltja a B operátor folytatása.

Ez a lemma a lineáris tört transzformáció definíciójából következik.

A lemma lehetővé teszi, hogy amikor bizonyos osztályba tartozó operátorok valamilyen tulajdonságot megtartó folytatásait keressük, akkor ezt a feladatot alkalmas lineáris tört transzformáció segítségével visszavezzük egy másik osztályhoz tartozó operátorok megfelelő tulajdonságú folytatásainak a megtalálására.

A Cayley-transzformáció segítségével, mint a 3.§ 3^o. és 4^o. állítása mutatja, az A hermitikus operátor önadjungált folytatásainak a megkeresését az

$$U_\lambda = (A - \lambda I)(A - \bar{\lambda}I)^{-1}$$

izometrikus operátor unitér folytatásainak a megkeresésére lehet visszavezetni.

2. Az U_λ operátor értelmezési tartománya a

$$\mathfrak{D}(U_\lambda) = \mathfrak{R}(A - \lambda I) = \mathfrak{Q}_\lambda$$

altér, értékkészlete pedig

$$\mathfrak{R}(U_\lambda) = \mathfrak{R}(A - \bar{\lambda}I) = \mathfrak{Q}_{\bar{\lambda}}.$$

$\mathfrak{Q}_\lambda$, ill. $\mathfrak{Q}_{\bar{\lambda}}$ ortogonális komplementumát a korábbiakhoz hasonlóan $\mathfrak{R}_\lambda$, ill. $\mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}$ fogja jelölni.

Mint hogy minden izometrikus operátor egymásra ortogonális elemeket egymásra ortogonálisakba visz át, könnyű belátni, hogy az U_λ operátor bármelyik zárt izometrikus $\tilde{U}_\lambda$ folytatását meg lehet kapni a következőképpen.

Válasszunk $\mathfrak{R}_\lambda$ -ban egy $\{\varphi_v\}_{v \in N}$, az $\mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}$ altérben pedig egy $\{\psi_v\}_{v \in N}$ ortonormális rendszert, amelyeknek ugyanaz a számossága, majd az $\mathfrak{Q}_\lambda$ altérnek és a $\{\varphi_v\}_{v \in N}$ rendszer zárt lineáris burkának az $\tilde{\mathfrak{Q}}_\lambda$ direkt összegén értelmezzük az $\tilde{U}_\lambda$ operátort az

$$(4.1) \quad \tilde{U}_\lambda \left(f + \sum_{v \in N} \xi_v \varphi_v \right) = U_\lambda f + \sum_{v \in N} \xi_v \psi_v \quad (f \in \mathfrak{Q}_\lambda)$$

képlettel, ahol ξ_v ($v \in N$) tetszés szerinti, a

$$\sum_{v \in N} |\xi_v|^2 < \infty$$

feltételnek eleget tevő számok.

Az így nyert izometrikus operátor az $\tilde{\mathfrak{Q}}_\lambda$ alteret az $\mathfrak{Q}_{\bar{\lambda}}$ altérnek és a $\{\psi_v\}_{v \in N}$ rendszer lineáris burkának az $\tilde{\mathfrak{Q}}_{\bar{\lambda}}$ direkt összegére képezi le.

Ha $\mathfrak{N}_\lambda$ és $\mathfrak{N}_\lambda$ dimenziója különböző (ez annak felel meg, hogy az

$$A = (\lambda U_\lambda - \bar{\lambda} I) (U_\lambda - I)^{-1}$$

hermitikus operátor defekt számai különbözők), akkor felvéve a kisebb dimenziójában egy teljes ortonormális bázist, a másik altérben pedig egy ugyanilyen számosságú ortonormális rendszert, az U_λ izometrikus operátort fél-unitér operátorra vagy fél-unitér operátor inverzével folytathatjuk. Az ilyen folytatásokat *maximális izometrikus folytatásoknak* hívjuk, mert nincs további izometrikus folytatásuk.

Ha az $\mathfrak{N}_\lambda$, $\mathfrak{N}_\lambda$ alterek dimenziója egyenlő (a megfelelő hermitikus operátor defekt számai egyenlők), akkor az U_λ izometrikus operátornak van unitér folytatása, és ez természetesen maximális folytatás.

Ha $\mathfrak{N}_\lambda$ és $\mathfrak{N}_\lambda$ dimenziója egyenlő és véges, akkor az U_λ operátornak az unitérekén kívül nincs más maximális izometrikus folytatása.

Ha $\mathfrak{N}_\lambda$ és $\mathfrak{N}_\lambda$ dimenziója egyenlő és végtelen, akkor az operátornak az unitérekén kívül más maximális izometrikus folytatásai is képezhetők. Ha például az U_λ operátornak egy fél-unitér $\tilde{U}_\lambda$ folytatását akarjuk megkapni, akkor az $\mathfrak{N}_\lambda$ altérben választunk egy ortonormális és *nem teljes* $\{\psi_\nu\}$ rendszert, amelynek a számossága egyenlő $\mathfrak{N}_\lambda$ dimenziójával, az $\mathfrak{N}_\lambda$ altérben pedig egy $\{\varphi_\nu\}$ teljes ortonormális rendszert, és az $\tilde{U}_\lambda$ operátort a (4.1) képlet segítségével értelmezzük.

Ahhoz, hogy egy $\tilde{U}_\lambda$ izometrikus folytatásból inverz lineáris tört transzformációval az A operátornak

$$\tilde{A} = (\lambda \tilde{U}_\lambda - \bar{\lambda} I) (\tilde{U}_\lambda - I)^{-1}$$

hermitikus folytatását nyerhessük, szükséges és elégséges, hogy az

$$\tilde{U}_\lambda \varphi - \varphi = 0 \quad (\varphi \in \mathfrak{D}(\tilde{U}_\lambda))$$

egyenlőség csak $\varphi=0$ esetén állhasson fenn.

A továbbiakban olyan $\tilde{U}_\lambda$ folytatásokat fogunk keresni, amelyek eleget tesznek ennek a feltételnek.

3. Legyen az A hermitikus operátor $\mathfrak{D}(A)$ értelmezési tartománya sűrű $\mathfrak{H}$ -ban. Ekkor az

$$U_\lambda = (A - \bar{\lambda} I) (A - \lambda I)^{-1}$$

operátor bármelyik $\tilde{U}_\lambda$ izometrikus folytatására teljesül a 4.1. lemmában szereplő feltétel.

Csakugyan, tegyük fel, hogy $\tilde{U}_\lambda$ az U_λ izometrikus operátor izometrikus folytatása és

$$(\tilde{U}_\lambda \varphi - \varphi, h) = 0 \quad (h \in \mathfrak{H}).$$

Ez az egyenlőség igaz speciálisan minden

$$h = \tilde{U}_\lambda g = U_\lambda g \quad (g \in \mathfrak{D}(U_\lambda))$$

alakú elemre:

$$(\tilde{U}_\lambda \varphi - \varphi, \tilde{U}_\lambda g) = (\varphi, g - U_\lambda g) = 0.$$

Innen a (3.5) összefüggés értelmében $(\varphi, f) = 0$ ($f \in \mathfrak{D}(A)$), minthogy pedig $\mathfrak{D}(A)$ sűrű a $\mathfrak{H}$ térben, $\varphi = 0$.

Ha mindazt, amit az U_λ izometrikus operátor folytatásairól elmondtunk, összevetjük a 3.1. és a 4.1. lemmával, megkapjuk Neumann János [11] alaptételeit.

II. TÉTEL. A $\mathfrak{H}$ térben sűrű $\mathfrak{D}(A)$ halmazon értelmezett hermitikus A operátornak akkor és csak akkor van önadjungált folytatása, ha defekt számai egyenlők.

Egy hermitikus operátort *maximálisnak* mondunk, ha nincs hermitikus folytatása.

III. TÉTEL. Ahhoz, hogy a hermitikus A operátor maximális legyen, szükséges és elégséges, hogy egyik defekt száma nulla legyen.

Minden hermitikus operátornak van maximális hermitikus folytatása.

Nyilvánvaló, hogy az $\tilde{A}$ ($\neq A$) maximális folytatás, ha létezik, nincs egyértelműen meghatározva.

4. Ha a $\mathfrak{H}$ térben sűrű $\mathfrak{D}(A)$ halmazon értelmezett A hermitikus operátor defekt számai nem egyenlők, akkor, mint megmutattuk, az A operátort a $\mathfrak{H}$ térben nem lehet önadjungálttá folytatni. Ha azonban *kilépünk* egy másik térbe, akkor lehet önadjungált folytatást találni.

A következőkben megmagyarázzuk ezt az állítást.

Két Hilbert-tér, $\mathfrak{H}$ és $\mathfrak{H}'$ direkt összegének nevezzük és a $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}'$ jellel jelöljük az $\{f, f'\}$, $f \in \mathfrak{H}$, $f' \in \mathfrak{H}'$ rendezett párok összességét, amelyben az összeadás, a skalárral való szorzás és a skaláris szorzás művelete a következőképpen van értelmezve:

$$\{f, f'\} + \{g, g'\} = \{f+g, f'+g'\}, \quad \alpha \{f, f'\} = \{\alpha f, \alpha f'\},$$

$$(\{f, f'\}, \{g, g'\}) = (f, g) + (f', g').$$

A $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}'$ direkt összeg szintén Hilbert-tér.

Az $\{f, 0\}$ és $\{0, f'\}$ alakú elemeket nem fogjuk megkülönböztetni az $f \in \mathfrak{H}$, illetve $f' \in \mathfrak{H}'$ elemektől: úgy tekintjük, hogy $\mathfrak{H}$ és $\mathfrak{H}'$ be van ágyazva a $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}'$ térbe és ott egymás ortogonális komplementumát alkotja.

Legyen A valamilyen operátor a $\mathfrak{H}$, B pedig a $\mathfrak{H}'$ térben.

Az A, B operátorok $A \oplus B$ direkt összegének fogjuk nevezni a $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}'$ térnek azt a C operátorát, amely az $\{f, f'\}$, $f \in \mathfrak{D}(A)$, $f' \in \mathfrak{D}(B)$ alakú elemek halmazán a

$$C\{f, f'\} = \{Af, Bf'\}$$

képlettel van értelmezve.

Megemlítjük a C operátor következő tulajdonságait.

Ha $\mathfrak{D}(A)$ sűrű $\mathfrak{H}$ -ban és $\mathfrak{D}(B)$ sűrű $\mathfrak{H}'$ -ben, akkor $\mathfrak{D}(C)$ sűrű a $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}'$ térben.

Ha A és B hermitikus, akkor C is az.

Ha az A operátor defekt indexe (m, n) , a B operátoré pedig (m', n') , akkor C defekt indexe $(m+m', n+n')$.

Igazoljuk a harmadik állítást. Minthogy

$$(C - \lambda I)\{f, f'\} = \{(A - \lambda I)f, (B - \lambda I)f'\} \quad (f \in \mathfrak{D}(A), f' \in \mathfrak{D}(B)),$$

azért

$$\Re(C - \lambda I) = \Re(A - \lambda I) \oplus \Re(B - \lambda I),$$

tehát

$$\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}' = \Re(C - \lambda I) \oplus \Re_\lambda \oplus \Re'_\lambda,$$

ahol

$$\Re_\lambda = \mathfrak{H} \ominus \Re(A - \lambda I), \quad \Re'_\lambda = \mathfrak{H}' \ominus \Re(B - \lambda I).$$

Legyen A hermitikus operátor a $\mathfrak{H}$ térben, a $\mathfrak{D}(A)$ értelmezési tartomány sűrű $\mathfrak{H}$ -ban, és A defekt indexe (m, n) ($m \neq n$). Ekkor található egy B hermitikus operátor, amely bizonyos $\mathfrak{H}'$ térben működik, $\mathfrak{H}'$ -ben sűrű $\mathfrak{D}(B)$ halmazon van definiálva, és defekt indexe (n, m) (például a $-A$ operátor a $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$ térben).

Így a $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}'$ tér $C = A \oplus B$ operátora hermitikus, sűrűn definiált, és defekt számai egyenlők. A II. tétel szerint a C operátornak vannak önadjungált folytatásai, és ezek az A operátornak a $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}'$ térbe kilépő önadjungált folytatásait szolgáltatják.

Hermitikus operátorok másik térbe kilépő önadjungált folytatásainak a szerepét M. A. NAJMARK ([9] a, b)) világította meg.

5. §. A momentum probléma a $(-\infty, \infty)$ intervallumban

1. Az előző paragrafusokban igazolt általános tételek alkalmazására példaként le fogjuk vezetni a *Hamburger-féle* klasszikus momentum probléma főbb eredményeit (lásd [1]a, [16]).

Kezdjük az arra vonatkozó ismert kritériummal, hogy egy $\{s_k\}_0^\infty$ számsorozat mikor állítható elő az

$$(5.1) \quad s_k = \int_{-\infty}^{\infty} t^k d\sigma(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

alakban, ahol $\sigma(t)$ ($-\infty < t < \infty$) valamilyen nem korlátos és nem-csökkenő függvény; utóbbi a

$$\int_{-\infty}^t \sigma(t) dt = 0, \quad \sigma(t-0) = \sigma(t) \quad (-\infty < t < \infty)$$

feltételekkel fogjuk normálni.

A. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az $\{s_k\}_0^\infty$ sorozat előállítható legyen az (5.1) alakban (momentum sorozat legyen), szükséges és elégséges, hogy a*

$$(5.2) \quad \sum_{j,k=0}^n s_{j+k} \xi_j \bar{\xi}_k \quad (n = 1, 2, \dots)$$

valós formák mindannyian nem-negatívak legyenek.

Bizonyítás. A feltétel szükséges volta abból következik, hogy ha az s_k ($k=0, 1, 2, \dots$) számok előállíthatók az (5.1) képlet segítségével, akkor

$$\sum_{j,k=0}^n s_{j+k} \xi_j \bar{\xi}_k = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^n \xi_j t^j \right)^2 d\sigma(t) \geq 0.$$

Most bebizonyítjuk, hogy a feltétel elégséges. Előre bocsátjuk, hogy ha az (5.2) formák valós $\xi_1, \dots, \xi_n$ értékek mellett nem-negatívak, akkor tetszés szerinti $\xi_1, \dots, \xi_n$ ($n=1, 2, \dots$) komplex számokra fennállnak a

$$(5.3) \quad \sum_{j,k=0}^n s_{j+k} \xi_j \bar{\xi}_k \geq 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

egyenlőtlenségek.

Tekintsük azt a $\mathfrak{P}$ lineáris halmazt, amely a $P(t)$ polinomokból áll, és értelmezzünk rajta egy (P, Q) hermitikus bilineáris funkcionált a következőképpen:

$$(5.4) \quad (P, Q) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m s_{j+k} \xi_j \bar{\eta}_k, \quad P(t) = \sum_{j=0}^n \xi_j t^j, \quad Q(t) = \sum_{k=0}^m \eta_k t^k.$$

Könnyű belátni, hogy

$$(tP, Q) = (P, tQ) \quad (P, Q \in \mathfrak{P}),$$

és így bármely három $P, Q, R \in \mathfrak{P}$ polinomra

$$(PR, Q) = (P, QR).$$

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor mindegyik (5.2) forma, és ennél fogva mindegyik (5.3) forma is pozitív (nem elfajuló), azaz $(P, P) > 0$ ha $P(t) \neq 0$.

Ebben az esetben a (P, Q) funkcionál rendelkezik a skaláris szorzat összes tulajdonságaival és $\mathfrak{P}$ -ben bizonyos metrikát értelmez.

A $\mathfrak{P}$ halmazt lezárva egy teljes $\mathfrak{H}$ Hilbert-teret kapunk, amelyben $\mathfrak{P}$ mindenütt sűrűn helyezkedik el.

Értelmezzünk a polinomokon egy A operátort az

$$AP = tP \quad (P \in \mathfrak{P})$$

egyenlőség segítségével.

Az A operátor $\mathfrak{H}$ -ban sűrű halmazon van definiálva és hermitikus.

Az alábbiakban az A operátor $\bar{A}$ lezárását fogjuk vizsgálni.

$\bar{A}$ defekt számai 0-val vagy 1-gyel lehetnek egyenlők, mert $\bar{A} - \lambda I$ értékkészlete tartalmazza mindazokat a polinomokat, amelyek a λ pontban a 0 értéket veszik fel, és $\bar{A} - \lambda I$ értékkészletéhez hozzáadva a konstans függvényeket a $\mathfrak{H}$ térben sűrű halmazt kapunk (lásd a 2.2. példát).

Az $\bar{A}$ operátor defekt számai egyenlők. Ha az egyik félsíkban a defekt szám nulla, az azt jelenti, hogy ezen a félsíkon választott λ esetén az $(\bar{A} - \lambda I)\mathfrak{P}$ halmaz sűrű a $\mathfrak{H}$ térben. Ekkor van olyan $P_n \in \mathfrak{P}$ ($n=1, 2, \dots$) sorozat, hogy

$$|1 - (t - \lambda)P_n| \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty.$$

Erre a sorozatra nyilván az is igaz, hogy

$$|1 - (t - \bar{\lambda})\bar{P}_n| \rightarrow 0, \quad \text{ha } n \rightarrow \infty,$$

tehát $(\bar{A} - \bar{\lambda}I)\mathfrak{P}$ sűrű $\mathfrak{H}$ -ban, és a defekt szám a másik félsíkban nulla.

Legyen H az $\bar{A}$ operátor valamilyen önadjungált folytatása a $\mathfrak{H}$ térben vagy egy másik $\mathfrak{H}' \supset \mathfrak{H}$ térben.

Legyen $E(t)$ a H operátor spektrálfüggvénye. Vezessük be a

$$\sigma(t) = (E(t)1, 1) \quad (-\infty < t < \infty)$$

jelölést. Ekkor

$$s_k = (t^k, 1) = (A^k 1, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k d(E(t)1, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k d\sigma(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

A vizsgált esetben, amikor az (5.2) formák mind pozitívak, a tételt bebizonyítottuk.

Tegyük fel, hogy az (5.2) nem-negatív formák közt van elfajuló. Ekkor ha az előbbiekhöz hasonlóan az (5.4) egyenlőség útján a polinomok $\mathfrak{P}$ halmazán egy bilineáris funkcionált definiálunk, ez rendelkezni fog a skaláris szorzat minden tulajdonságával, kivéve azt, hogy $(P, P) = 0$ esetén $P(t) \equiv 0$ volna.

Tekintsünk egy minimális p fokszámú $\Pi(t)$ polinomot, amelyre $(\Pi, \Pi) = 0$. A Schwarz-egyenlőtlenség értelmében

$$|(\Pi, Q)|^2 \leq (\Pi, \Pi) (Q, Q),$$

ennélfogva

$$(5.5) \quad (\Pi, Q) = 0 \quad (Q \in \mathfrak{P}).$$

Feltehetjük, hogy $p > 0$, mert ellenkező esetben ($p = 0$) választható $\Pi = 1$, és ekkor $s_k = (\Pi, t^k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots$), tehát az $\{s_k\}$ sorozatnak megfelel a $\sigma \equiv 0$ függvény.

Megmutatjuk, hogy a $(P, P) = 0$ összefüggésből következik, hogy $P(t)$ osztható $\Pi(t)$ -vel. Valóban, ha a $P(t)$ polinomot a $P(t) = \Pi(t)Q(t) + R(t)$ alakban írjuk fel, ahol $R(t)$ fokszáma kisebb, mint p , akkor (5.5) miatt azt kapjuk, hogy

$$(R, R) = (P - \Pi Q, P - \Pi Q) = 0,$$

és így $R(t) \equiv 0$.

A következőkben $\hat{P}$ ($P \in \mathfrak{P}$) azoknak a polinomoknak az osztályát fogja jelölni, amelyek kongruensek $P(t)$ -vel modulo $\Pi(t)$. Értelmezzünk a $\hat{P}$ osztályok által alkotott p -dimenziós $\mathfrak{S}_m$ halmazon egy $(\hat{P}, \hat{Q})$ bilineáris funkcionált a

$$(\hat{P}, \hat{Q}) = (P, Q)$$

képlet segítségével.

Ez a definíció egyértelmű, mert

$$(P + S_1 \Pi, Q + S_2 \Pi) = (P, Q).$$

A $(\hat{P}, \hat{Q})$ funkcionál a $\mathfrak{S}_m$ téren skaláris szorzatnak tekinthető.

Most vegyük észre, hogy ha $\hat{P} = 0$, vagyis $(P, P) = 0$, akkor egyben

$$(tP, tP) = (P, t^2 P) = 0,$$

azaz $t\hat{P} = 0$. Ennélfogva $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$ esetén $t\hat{P}_1 = t\hat{P}_2$.

Az utóbbi körülmény lehetővé teszi, hogy $\mathfrak{S}_m$ -ben bevezessünk egy $\hat{A}$ operátort, amelyet az

$$\hat{A}\hat{P} = t\hat{P} \quad (\hat{P} \in \mathfrak{S}_m)$$

képlet értelmez. Az $\hat{A}$ operátor önadjungált.

Legyen $E(t)$ ($-\infty < t < \infty$) az $\hat{A}$ operátor spektrálfüggvénye, továbbá

$$\sigma(t) = (E(t)\hat{1}, \hat{1}) \quad (-\infty < t < \infty);$$

akkor

$$s_k = (\hat{t}^k, \hat{1}) = (\hat{A}^k \hat{1}, \hat{1}) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k d(E(t)\hat{1}, \hat{1}) = \int_{-\infty}^{\infty} t^k d\sigma(t).$$

A tételt bebizonyítottuk.

Megmutatjuk, hogy a második esetben, amikor tehát az (5.2) formák között van elfajuló is, az (5.1) előállításban fellépő $\sigma(t)$ függvény egyértelműen meg van határozva és pontosan p számú növekedési pontja van.

Csakugyan, ebben az esetben (5.1) alapján

$$(\Pi, \Pi) = \int_{-\infty}^{\infty} |\Pi|^2 d\sigma(t) = 0,$$

tehát a $\sigma(t)$ függvénynek legfeljebb p növekedési pontja van és ezek $\Pi(t)$ zérushelyei. A növekedési pontok száma nem lehet kisebb, mint p , mert ellenkező esetben lehetne találni olyan $\Pi_1(t) \neq 0$ polinomot, amely p -nél alacsonyabb fokú és $\sigma(t)$ növekedési pontjaiban nullával egyenlő, és erre $(\Pi_1, \Pi_1) = 0$ volna, ami lehetetlen.

Legyenek $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_p$ a $\sigma(t)$ függvény növekedési pontjai (Π zérushelyei). Képezzük a

$$q_j(t) = \frac{\Pi(t)}{(t - \alpha_j)\Pi'(\alpha_j)} \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

polinomokat. Ekkor

$$(q_j, q_j) = \int_{-\infty}^{\infty} |q_j|^2 d\sigma(t) = \sigma(\alpha_j + 0) - \sigma(\alpha_j - 0) \quad (j = 1, 2, \dots, p).$$

Az állítást bebizonyítottuk.

2. Térjünk vissza az első esetre, amikor mindegyik (5.2) forma pozitív, és vizsgáljuk meg azt a V halmazt, amely az összes normált, nem-csökkenő és az (5.1) előállítást lehetővé tevő $\sigma(t)$ függvényekből áll.

Mindegyik $\sigma \in V$ függvényre vonatkozóan $\mathfrak{H}$ úgy tekinthető, mint az $\mathfrak{Q}_\sigma$ tér (lásd a 2.2. példát) bizonyos $\mathfrak{H}_\sigma$ altere, amelyet úgy nyerünk, hogy az összes polinomokból álló $\mathfrak{P}$ halmazt lezárjuk $\mathfrak{Q}_\sigma$ -ban.

Ezek szerint az összes $\mathfrak{H}_\sigma$ ($\sigma \in V$) terek izometrikusak egymással és ugyanannak a $\mathfrak{H}$ térnek a realizációi.

Minden ilyen térben $\bar{A}$ a $P(t)$ polinomok t -vel való szorzásának az operátoraként ábrázolható.

A $\{t^k\}$ sorozatot $\mathfrak{H}$ -ban ortonormálva egy valós polinomokból álló $\{D_k(t)\}$ sorozatot kapunk, amely mindegyik $\mathfrak{H}_\sigma$ ($\sigma \in V$) térben ortonormális.

Az $\bar{A}$ operátor önadjungált vagy $(1, 1)$ defekt indexű a szerint, amint a $\sum_0^\infty |D_k(\lambda)|^2$ sor nem valós λ mellett divergens vagy konvergens.

B. TÉTEL. *Ahhoz, hogy a σ függvényt az (5.1) egyenlőségek egyértelműen meghatározzák (a momentum probléma meghatározott legyen), szükséges és elégséges, hogy $\bar{A}$ önadjungált operátor legyen.*

A feltétel elégséges volta a 2.2c. példában szereplő általános állításból következik. Bebizonyítjuk a szükségességet.

Legyen B_k ($k=1, 2$) az $\bar{A}$ operátor két különböző önadjungált folytatása $\mathfrak{H}$ -ban, $E^{(k)}(t)$ ($k=1, 2$) a megfelelő spektrálfüggvények, $\sigma^{(k)}(t)$ ($k=1, 2$) pedig az (5.1) momentum probléma hozzájuk tartozó megoldásai.

Megjegyezzük, hogy ekkor

$$(R_z^{(k)} 1, 1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(E^{(k)}(t) 1, 1)}{t-z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma^{(k)}(t)}{t-z} \quad (k = 1, 2),$$

ahol $R_z^{(k)} = (B_k - zI)^{-1}$ a B_k ($k=1, 2$) operátor rezolvense.

Nyilvánvaló, hogy az $R_z^{(k)}$ rezolvens és az

$$U_z^{(k)} = (B_k - \bar{z}I) (B_k - zI)^{-1} \quad (k = 1, 2)$$

Caleyey-transzformált között fennáll az

$$R_z^{(k)} = \frac{1}{z-\bar{z}} (I - U_z^{(k)}) \quad (k = 1, 2)$$

összefüggés.

Rögzítsük a z számot. Legyen e_z az $\Omega_z = \Re(\bar{A} - zI)$ halmazra merőleges egységvektor, $e_{\bar{z}}^{(1)} = U_z^{(1)} e_z$ pedig az $\Omega_{\bar{z}} = \Re(\bar{A} - \bar{z}I)$ halmazra merőleges egységvektor. Minthogy az $U_z^{(k)}$ ($k=1, 2$) operátorok az Ω_z halmazon megegyeznek, fennáll $e_{\bar{z}}^{(2)} = U_z^{(2)} e_z = \varepsilon e_{\bar{z}}^{(1)}$, ahol $|\varepsilon|=1$.

Bontsuk fel az $1 \in \mathfrak{H}$ vektort merőleges összetevőkre:

$$1 = (1, e_z) e_z + g \quad (g \in \Omega_z).$$

Vegyük tekintetbe, hogy (lásd a 2.1. példát)

$$|(1, e_z)|^2 = |(1, e_{\bar{z}})|^2 = (\varrho(1, \Omega_{\bar{z}}))^2 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} |D_k(z)|^2} > 0.$$

Minthogy $g \in \Omega_z$, azért $U_z^{(1)} g = U_z^{(2)} g$, következésképpen

$$U_z^{(2)} 1 - U_z^{(1)} 1 = (1, e_z) (\varepsilon - 1) e_{\bar{z}}^{(1)},$$

$$R_z^{(2)} 1 - R_z^{(1)} 1 = \frac{(1, e_z)}{z-\bar{z}} (1 - \varepsilon) e_{\bar{z}}^{(1)},$$

tehát

$$(5.6) \quad (R_z^{(2)} 1, 1) - (R_z^{(1)} 1, 1) = \frac{(1, e_z) (e_{\bar{z}}^{(1)}, 1)}{2iy} (1 - \varepsilon).$$

A 4. §-ban elmondottak értelmében az $\bar{A}$ operátor B_2 önadjungált folytatását az ε ($|\varepsilon|=1$) szám határozza meg. Ha ε befutja az egységkört, akkor megkapjuk $\bar{A}$ összes önadjungált folytatásait a $\mathfrak{H}$ térben.

Ennek során, amint az (5.6) egyenlőség mutatja, a

$$w(z) = (R_z^{(2)} 1, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma^{(2)}(t)}{t-z}$$

pont egy $\Gamma(z)$ kört ír le, amelynek a sugara

$$(5.7) \quad r(z) = \frac{|(1, e_z)(1, e_z^{(1)})|}{2|y|} = \frac{1}{2|y| \sum_{k=0}^{\infty} |D_k(z)|^2}.$$

Ebből következik, hogy $\varepsilon \neq 1$ esetén $\sigma^{(2)}(t)$ nem azonos $\sigma^{(1)}(t)$ -vel.

3. Most legyen $\sigma \in V$. Tekintsük $\mathfrak{L}_\sigma$ -ban a t -vel való szorzás T operátorát azokon a $g \in \mathfrak{L}_\sigma$ függvényeken, amelyekre teljesül az

$$(5.8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |g(t)|^2 d\sigma(t) < \infty$$

feltétel. A T operátor a $\mathfrak{H}_\sigma$ térben működő $\bar{A}$ operátornak olyan önadjungált folytatása, amely $\mathfrak{H}_\sigma$ -ból kilép $\mathfrak{L}_\sigma$ -ba (ha $\mathfrak{H}_\sigma \neq \mathfrak{L}_\sigma$).

Legyen $E(t)$ ($-\infty < t < \infty$) a T operátor spektrálfüggvénye. Ekkor tetszés szerinti nem valós λ -ra

$$((T - \lambda I)^{-1} 1, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E(t) 1, 1)}{t - \lambda}.$$

Másrészt az $\mathfrak{L}_\sigma$ -beli skaláris szorzat definíciója szerint

$$((T - \lambda I)^{-1} 1, 1) = ((t - \lambda)^{-1}, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - \lambda}.$$

Látjuk, hogy

$$(5.9) \quad \sigma(t) = (E(t) 1, 1) \quad (-\infty < t < \infty).$$

Ilyenformán tetszés szerinti $\sigma \in V$ függvény az A. tétel bizonyítása során ismertett módon, vagyis az (5.9) képlet útján nyerhető, ahol $E(t)$ az A operátor valamelyik, általában egy $\mathfrak{H}' \supset \mathfrak{H}$ térbe kilépő, önadjungált folytatásának a spektrálfüggvénye.

4. Abban az esetben, amikor V sok függvényből áll (határozatlan momentum probléma), a $\sigma \in V$ függvényt *kanonikusnak* fogjuk nevezni, ha az (5.9) képlet segítségével nyerhető, ahol $E(t)$ az A operátor valamilyen $\mathfrak{H}$ -beli $\tilde{A}$ önadjungált folytatásának spektrálfüggvénye.

Riesz Marcelltól [14b] (lásd még [16]) származik a következő

C. TÉTEL. *Ahhoz, hogy az összes polinomok halmaza, $\mathfrak{P}$ sűrű legyen $\mathfrak{L}_\sigma$ -ban ($\sigma \in V$), szükséges és elégséges, hogy a következő két feltétel közül az egyik teljesüljön: vagy a momentum probléma határozott, vagy a σ függvény kanonikus.*

Bizonyítás. Valóban, ha teljesül az első feltétel, akkor az A operátor defekt indexe $(0, 0)$, és $\mathfrak{P}$ -nek $\mathfrak{L}_\sigma$ -ban sűrű volta a 2.2. példa 7°. állításából adódik.

Most tegyük fel, hogy a $\sigma(t)$ függvény nincs egyértelműen meghatározva, vagyis hogy A defekt indexe $(1, 1)$.

Ha $\mathfrak{P}$ sűrű $\mathfrak{L}_\sigma$ -ban, azaz $\mathfrak{H}_\sigma = \mathfrak{L}_\sigma$, akkor (a $\mathfrak{H}_\sigma$ teret az $\mathfrak{L}_\sigma$ térrel azonosítva) a T operátort az A operátor $\mathfrak{H}$ -beli önadjungált folytatásának lehet tekinteni, mint-hogy pedig $\sigma(t)$ a 3. pontban mondottak értelmében az (5.9) képletből nyerhető, ahol $E(t)$ a T operátor spektrálfüggvénye, azért $\sigma(t)$ kanonikus függvény.

Megfordítva, tegyük fel, tudjuk, hogy $\sigma(t)$ kanonikus függvény, vagyis az (5.9) képlet szerint számítható ki, ahol $E(t)$ az A operátor egy $\mathfrak{H}$ -beli önadjungált folytatásának, $\tilde{A}$ -nak a spektrálfüggvénye.

Tekintsük az $\tilde{A}$ operátor R_λ rezolvensét:

$$R_\lambda = (\tilde{A} - \lambda I)^{-1}.$$

Erre teljesül az

$$(R_\lambda 1, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E(t)1, 1)}{t - \lambda}$$

egyenlőség. Felhasználva a rezolvens

$$(5.10) \quad 1. \quad R_\lambda^* = R_{\bar{\lambda}},$$

$$2. \quad R_\lambda = R_\mu + (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu$$

tulajdonságait, kapjuk:

$$(R_\lambda 1, R_\lambda 1) = (R_\lambda R_\lambda 1, 1) = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} [(R_\lambda 1, 1) - (R_{\bar{\lambda}} 1, 1)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{|t - \lambda|^2}.$$

Továbbá bármilyen $P(t)$ polinomra

$$(5.11) \quad \begin{aligned} (R_\lambda 1, P) &= (R_\lambda 1, P(A)1) = (P(A)R_\lambda 1, 1) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{t - \lambda} d(E(t)1, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(t)}{t - \lambda} d\sigma(t) \quad (\text{Im } \lambda \neq 0). \end{aligned}$$

Innen már nehézség nélkül adódik, hogy

$$\begin{aligned} \|R_\lambda 1 - P\|^2 &= (R_\lambda 1, R_\lambda 1) - (R_\lambda 1, P) - (P, R_\lambda 1) - (P, P) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{t - \lambda} - P(t) \right|^2 d\sigma(t) \quad (\text{Im } \lambda \neq 0). \end{aligned}$$

Minthogy pedig az $R_\lambda 1$ ($\in \mathfrak{H}$) elem polinomok limesze a $\mathfrak{H}$ térben, azért $(t - \lambda)^{-1}$ polinomok limesze $\mathfrak{H}_\sigma$ -ban, tehát $\mathfrak{H}_\sigma = \mathfrak{L}_\sigma$.

5. Meg fogjuk mutatni, hogyan határozhatók meg analitikusan az összes $\sigma \in V$ kanonikus függvények abban az esetben, amikor a momentum probléma határozatlan (az A operátor defekt indexe $(1, 1)$).

Tekintsük az ún. másodfajú polinomokat (a D_k -hoz adjungált polinomokat); nevezetesen legyen

$$G_n(z) = \left(\frac{D_n(t) - D_n(z)}{t - z}, 1 \right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ilyen módon tetszés szerinti $\sigma \in V$ függvényre

$$(5.12) \quad G_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_n(t) - D_n(z)}{t - z} d\sigma(t) \quad (n = 0, 1, 2, \dots; G_0 = 0).$$

Most legyen $\sigma(t)$ kanonikus függvény, amely az A operátor valamilyen $\mathfrak{H}$ -beli $\tilde{A}$ önadjungált folytatásának felel meg. Ekkor az $R_\lambda = (\tilde{A} - \lambda I)^{-1}$ rezolvensre tetszés szerinti λ ($\text{Im } \lambda \neq 0$) esetén $R_\lambda 1 \in \mathfrak{H}$, és így

$$(5.13) \quad (R_\lambda 1, R_\mu 1) = \sum_{k=0}^{\infty} (R_\lambda 1, D_k) \overline{(R_\mu 1, D_k)} \quad \begin{pmatrix} \text{Im } \lambda \neq 0, \\ \text{Im } \mu \neq 0. \end{pmatrix}.$$

Az (5.11) összefüggés értelmében

$$(5.14) \quad \begin{aligned} (R_\lambda 1, D_k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_k(t)}{t - \lambda} d\sigma(t) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_k(t) - D_k(\lambda)}{t - \lambda} d\sigma + D_k(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - \lambda} = G_k(\lambda) + w_\sigma(\lambda) D_k(\lambda) \quad (k = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

ahol $w_\sigma(\lambda) = (R_\lambda 1, 1)$ a $\sigma(t)$ függvényre vonatkozó *Stieltjes*-integrál:

$$(5.15) \quad w_\sigma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t - \lambda}.$$

Másrészt (5.10) alapján

$$(R_\lambda 1, R_\mu 1) = (R_\mu R_\lambda 1, 1) = \frac{1}{\lambda - \bar{\mu}} (w_\sigma(\lambda) - w_\sigma(\bar{\mu})).$$

Ennélfogva

$$(5.16) \quad \frac{w_\sigma(\lambda) - w_\sigma(\bar{\mu})}{\lambda - \bar{\mu}} = \sum_{k=0}^{\infty} (G_k(\lambda) + w_\sigma(\lambda) D_k(\lambda)) \overline{(G_k(\mu) + w_\sigma(\mu) D_k(\mu))}.$$

Ha itt a $\mu = \lambda$ helyettesítést alkalmazzuk, meggyőződhetünk arról, hogy kanonikus σ esetén $w_\sigma(\lambda)$ a w -síkbán azon a körön helyezkedik el, amelynek az egyenlete

$$(5.17) \quad \frac{w - \bar{w}}{\lambda - \bar{\lambda}} = \sum_{k=0}^{\infty} |G_k(\lambda) + w D_k(\lambda)|^2.$$

Megkaptuk annak a $\Gamma(\lambda)$ körnek az explicit egyenletét, amelyről a 2. pontban szó volt és amelynek az $r(\lambda)$ sugara az (5.7) képlet szerint számítható ki.

Az (5.17) összefüggésben w helyébe a $w_\sigma(\lambda)$ analitikus függvényt helyettesítve (σ kanonikus), a baloldalon a nem-valós λ változó folytonos függvényét kapjuk, és minthogy az (5.17) sor minden tagja pozitív, azért *Dini* tétele szerint az (5.17) sor egyenletesen konvergens bármely korlátos, zárt, a valós tengelyt nem metsző halmazon.

Ezek után tekintve az (5.17) egyenlőséget $w = w_{\sigma_k}(\lambda)$ ($k=1, 2$) esetén, ahol $\sigma_1(t)$ és $\sigma_2(t)$ két különböző kanonikus függvény, azt kapjuk, hogy a mondott halmazokon a

$$(5.18) \quad \sum_{k=0}^{\infty} |D_k(\lambda)|^2, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |G_k(\lambda)|^2$$

sorok mindketten egyenletesen konvergensek.

De a D_k ortogonális polinomok és a G_k adjungált polinomok gyökei mindig valósak (lásd [2] vagy [16]), és ha egy $P(z) = a_0 z^n + \dots + a_n$ polinom mindegyik α_j ($j=1, 2, \dots, n$) gyöke valós, akkor a

$$|P(z)| = |a_0| \prod_{j=1}^n |z - \alpha_j|$$

mennyiség az $|y| = |\operatorname{Im} z|$ változónak nyilván növekedő függvénye. Ennélfogva az (5.18) sorok a sík bármelyik korlátos részhalmazán egyenletesen konvergensek.

Legyen λ_0 a felső félsík rögzített pontja ($\operatorname{Im} \lambda_0 > 0$) és

$$(5.19) \quad w = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta} \quad (-\infty < \tau < \infty)$$

a $\Gamma(\lambda_0)$ kör paraméteres egyenlete úgy felírva, hogy amikor τ növekszik, akkor a w pont a $\Gamma(\lambda_0)$ kört az óramutató járásával ellentétes értelemben futja be.

Végezzük el az (5.16) egyenlőségben a $\mu = \bar{\lambda}_0$ helyettesítést és oldjuk meg az egyenletet $w_{\sigma}(\lambda)$ -ra. Ekkor a következőt nyerjük:

$$w_{\sigma}(\lambda) = \frac{A(\lambda) + B(\lambda)w_{\sigma}(\lambda_0)}{C(\lambda) + D(\lambda)w_{\sigma}(\lambda_0)},$$

ahol

$$A(\lambda) = -(\lambda - \lambda_0) \sum_0^{\infty} G_k(\lambda_0) G_k(\lambda),$$

$$B(\lambda) = -1 + (\lambda - \lambda_0) \sum_0^{\infty} D_k(\lambda_0) G_k(\lambda),$$

$$C(\lambda) = -1 + (\lambda - \lambda_0) \sum_0^{\infty} G_k(\lambda_0) D_k(\lambda),$$

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_0) \sum_0^{\infty} D_k(\lambda_0) D_k(\lambda).$$

Ha $w_{\sigma}(\lambda_0)$ helyébe beírjuk a megfelelő (5.19) értéket, akkor megkapjuk a $\Gamma(\lambda)$ kör paraméteres egyenletét:

$$(5.20) \quad w_{\sigma}(\lambda) = \frac{p_0(\lambda) + \tau p_1(\lambda)}{q_0(\lambda) + \tau q_1(\lambda)} \quad (-\infty < \tau < \infty),$$

ahol

$$p_0(\lambda) = \delta A(\lambda) + \beta B(\lambda), \quad p_1(\lambda) = \gamma A(\lambda) + \alpha B(\lambda),$$

$$q_0(\lambda) = \delta C(\lambda) + \beta D(\lambda), \quad q_1(\lambda) = \gamma C(\lambda) + \alpha D(\lambda).$$

Folytonossági megfontolásokból következik, hogy τ növekedésekor a $w_\sigma(\lambda)$ ($\text{Im } \lambda > 0$) pont a $\Gamma(\lambda)$ kört az óramutató járásával ellenkező értelemben futja be (mert $\lambda = \lambda_0$ esetén ez a helyzet). Ezek szerint rögzített λ ($\text{Im } \lambda > 0$) mellett az (5.20) lineáris transzformáció a τ -sík felső felét a $\Gamma(\lambda_0)$ kör által határolt körlemezre képezi le.

Ilyen módon bebizonyítottuk, hogy a $\sigma \in V$ kanonikus függvények halmaza egy-egyértelműen megfeleltethető a végtelen τ -tengelynek (beleértve a végtelen távoli pontot), miközben tetszés szerinti λ ($\text{Im } \lambda > 0$) mellett fennáll az (5.20) összefüggés.

Minthogy $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ egész függvények, azért $p_i(\lambda)$, $q_i(\lambda)$ ($i=0, 1$) lineáris kombinációik is egész függvények, tehát kanonikus σ esetén $w_\sigma(\lambda)$ meromorf függvény. Ebből (5.15) figyelembevételével azt kapjuk, hogy σ tiszta ugrófüggvény, amelynek a szakadási helyei a $q_0(\lambda) + \tau q_1(\lambda)$ függvény gyökei. A $\sigma(\lambda)$ függvény ugrásait az (5.20) meromorf függvény reziduumaival szolgáltatják.

Minthogy a vizsgált esetben $\mathfrak{H}_\sigma = \mathfrak{L}_\sigma = \mathfrak{H}$, és a σ függvényt generáló $\tilde{A}$ önadjungált folytatás megegyezik a t -vel való szorzás T operátorával $\mathfrak{L}_\sigma$ -ban, σ ugráshelyei egyúttal $\tilde{A}$ spektrumát (sajátértékeit) adják.

Legyen ξ az $\tilde{A}$ operátor reguláris pontja (a σ függvény állandósági helye). Ekkor az $R_\lambda = (\tilde{A} - \lambda I)^{-1}$ rezolvens $\lambda = \xi$ esetén is létezik; az (5.10) és így az (5.16) összefüggésekben is lehet $\mu = \xi$. Ha ezekután az (5.16) egyenletet megoldjuk $w_\sigma(\lambda)$ -ra és alkalmazzuk a $t = w_\sigma(\xi)$ jelölést, azt találjuk, hogy

$$(5.21) \quad w_\sigma(\lambda) = \frac{p_0(\lambda; \xi) + t p_1(\lambda; \xi)}{q_0(\lambda; \xi) + t q_1(\lambda; \xi)} \quad (-\infty < t < \infty),$$

ahol már

$$(5.22) \quad \begin{cases} p_0(\lambda; \xi) = -(\lambda - \xi) \sum_{k=1}^{\infty} G_k(\xi) G_k(\lambda), \\ p_1(\lambda; \xi) = -1 + (\lambda - \xi) \sum_{k=1}^{\infty} D_k(\xi) G_k(\lambda), \\ q_0(\lambda; \xi) = -1 + (\lambda - \xi) \sum_{k=1}^{\infty} G_k(\xi) D_k(\lambda), \\ q_1(\lambda; \xi) = (\lambda - \xi) \sum_{k=1}^{\infty} D_k(\xi) D_k(\lambda). \end{cases}$$

Tehát minden $\sigma \in V$ kanonikus függvénynek, amelynek a ξ pontban nincs ugrása, megfelel egy valós t érték úgy, hogy tetszés szerinti λ mellett fennáll (5.21).

Most tegyük fel, hogy valamilyen $\sigma = \sigma_\xi(t)$ kanonikus függvénynek a ξ pontban ugrása van (ξ a megfelelő $\tilde{A}$ operátor sajátértéke).

Ekkor az (5.21) egyenlőség fennáll valamilyen $t = t'$ esetén, ha a ξ pontot egy elég közeli $\xi' \neq \xi$ ponttal helyettesítjük, amely nem tartozik $\tilde{A}$ spektrumához. Válasszunk egy $\xi_n \rightarrow \xi$ ($\xi_n \neq \xi$) sorozatot, és tegyük fel, hogy $\sigma = \sigma_{\xi_n}$ -re az (5.21) egyenlőség teljesül $\xi = \xi_n$ és $t = t_n$ ($n=1, 2, \dots$) esetén. Az általánosság megszorítása nélkül fel-

tehetjük, hogy $t_n \rightarrow t_0$, ahol t_0 a valós tengely végesben vagy végtelenben levő pontja. De ekkor behelyettesítve (5.21)-be a $\xi = \xi_n$, $t = t_n$ értékeket és kiszámítva a jobboldal határértékét azt találjuk, hogy (5.21) fennáll $\sigma = \sigma_{\xi}$ -re, ha $t = t_0$.

Mint hogy az adott esetben a $w_{\sigma}(\lambda)$ függvénynek a $\lambda = \xi$ helyen pólusa van, (5.21) és (5.22) alapján azt kapjuk, hogy $t_0 = \infty$, és így

$$(5.23) \quad w_{\sigma_{\xi}}(\lambda) = \frac{-1 + (\lambda - \xi) \sum_1^{\infty} D_k(\xi) G_k(\lambda)}{(\lambda - \xi) \sum_1^{\infty} D_k(\xi) D_k(\lambda)}.$$

Mivel a $\sigma \in V$ függvényt Stieltjes-integrálja, a $w_{\sigma}(\lambda)$ függvény egyértelműen meghatározza, azért ilyen módon bebizonyítottuk, hogy ha a ξ pontnak megfelel egy $\sigma_{\xi} \in V$ függvény, amelynek a $t = \xi$ helyen ugrása van, akkor csak egy ilyen függvény van és az (5.23) képletből nyerhető.

Minden más $\sigma \in V$ kanonikus függvényt az (5.21) képlet kell hogy értelmezzen a megfelelő $t = w_{\sigma}(\xi)$ érték mellett. Ezenkívül miközben σ befutja az összes $\sigma \in V$ kanonikus függvényeket, azalatt rögzített λ ($\text{Im } \lambda \neq 0$) mellett a $w_{\sigma}(\lambda)$ pont befutja a teljes $\Gamma(\lambda)$ kört. Ebből következik, hogy minden valós t -nek, köztük a $t = \infty$ értéknek is, megfelel egy és csak egy $\sigma \in V$ kanonikus függvény, ez az (5.21) képletből határozható meg, és ilyen módon kimerítjük a kanonikus σ függvények V összességét.

Egyidejűleg azt is bebizonyítottuk, hogy tetszés szerinti ξ pontnak ($-\infty < \xi < \infty$) *valóban megfelel egy $\sigma_{\xi} \in V$ kanonikus függvény.*

Az (5.21) összefüggésből kiszámítva a $w_{\sigma_{\xi}}(\lambda)$ függvénynek a $\lambda = \xi$ helyhez tartozó reziduumát, amely egyenlő a

$$\varrho(\xi) = \sigma_{\xi}(\xi + 0) - \sigma_{\xi}(\xi - 0)$$

ugrás (-1) -szeresével, nyerjük:

$$\varrho(\xi) = \left(\sum_0^{\infty} D_k^2(\xi) \right)^{-1}.$$

Most megmutatjuk, hogy bármely más $\sigma \in V$ függvényre

$$(5.24) \quad \sigma(\xi + 0) - \sigma(\xi - 0) \leq \varrho(\xi).$$

Csakugyan, tetszés szerinti P valós polinomra

$$P^2(\xi) (\sigma(\xi + 0) - \sigma(\xi - 0)) \leq \int_{-\infty}^{\infty} P^2(t) d\sigma(t).$$

Alkalmazva a

$$P(t) = P_n(t) = \sum_{k=0}^n D_k(\xi) D_k(t) \left/ \sum_{k=0}^n D_k^2(\xi) \right. \quad (n = 1, 2, \dots)$$

helyettesítést, kapjuk:

$$\sigma(\xi + 0) - \sigma(\xi - 0) \leq \left(\sum_{k=0}^n D_k^2(\xi) \right)^{-1} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

és ebből adódik (5.24).

Különösebb nehézség nélkül bebizonyítható, hogy az (5.24) összefüggésben egyenlőség csak $\sigma = \sigma_\xi$ esetén következik be.

6. Most már nem nehéz leírni, hogyan kaphatók meg az összes $\sigma \in V$ függvények.

Amint a 3. pontból tudjuk, tetszés szerinti $\sigma \in V$ függvény az (5.9) képlet szerint nyerhető, ahol $E(t)$ ($-\infty < t < \infty$) az A operátor valamilyen $\mathfrak{L}_\sigma \supset \mathfrak{H}$ térbe kilépő $T = \tilde{A}$ önadjungált folytatásának a spektrálfüggvénye.

Ha képezzük a megfelelő $R_\lambda = (\tilde{A} - \lambda I)^{-1}$ ($\text{Im } \lambda \neq 0$) rezolvenst, akkor már nem állíthatjuk, hogy $R_\lambda 1 \in \mathfrak{H}$. Ezért most a $w_\sigma(\lambda)$ függvényre az (5.13) egyenlőség helyett a

$$\frac{w_\sigma(\lambda) - \overline{w_\sigma(\lambda)}}{\lambda - \bar{\lambda}} = (R_\lambda 1, R_\lambda 1) \cong \sum_{k=0}^{\infty} |(R_\lambda 1, D_k)|^2$$

Bessel-féle egyenlőtlenség érvényes.

Az (5.14) összefüggés alapján azt kapjuk, hogy a $w = w_\sigma(\lambda)$ függvény eleget tesz a

$$(5.25) \quad \frac{w - \bar{w}}{\lambda - \bar{\lambda}} \cong \sum_{k=0}^{\infty} |G_k(\lambda) + w D_k(\lambda)|^2$$

egyenlőtlenségnek. De ez az egyenlőtlenség a $\Gamma(\lambda)$ által határolt körlemez³ jellemzi.

Ennélfogva tetszés szerinti λ esetén ($\text{Im } \lambda > 0$) a $w_\sigma(\lambda)$ pont a $\Gamma(\lambda)$ kör által határolt $K(\lambda)$ körlemezben helyezkedik el.

Minthogy a t változónak az (5.20) egyenlőség jobboldalán álló lineáris tört függvénye a felső félsíkot a $K(\lambda)$ körlemezre képezi le, azért e körlemez $w_\sigma(\lambda)$ pontjának megfelel a felső félsíknak az a $\tau(\lambda)$ pontja, amelyre

$$(5.26) \quad w_\sigma(\lambda) = \frac{p_0(\lambda) + \tau(\lambda) p_1(\lambda)}{q_0(\lambda) + \tau(\lambda) q_1(\lambda)} \quad (\text{Im } \lambda > 0).$$

Ha megoldjuk ezt az egyenletet $\tau(\lambda)$ -ra, azt kapjuk, hogy $\tau(\lambda)$, ugyanúgy mint a $p_i(\lambda)$, $q_i(\lambda)$ ($i=0, 1$), $w_\sigma(\lambda)$ függvények, a felső félsíkon holomorf, és fennáll

$$(5.27) \quad \text{Im } \tau(\lambda) \geq 0 \quad (\text{Im } \lambda > 0).$$

Ezzel bebizonyítottuk R. NEVANLINNA [10a] állításának az első részét.

Ezen állítás értelmében megfordítva is, minden olyan holomorf $\tau(\lambda)$ függvénynek, amelynek a képzetes része nem-negatív, az (5.26) képlet szerint megfelel az (5.1) momentum probléma valamilyen σ megoldásának a Stieltjes-integrálja, $w_\sigma(\lambda)$.

Most megjegyezzük, hogy ha egy λ_0 ($\text{Im } \lambda_0 > 0$) érték mellett a $w_\sigma(\lambda_0)$ pont a $\Gamma(\lambda_0)$ körre esik, akkor ez azt jelenti, hogy $\text{Im } \tau(\lambda_0) = 0$, mivel pedig egy harmonikus függvény csak akkor veszi fel minimumát a tartomány belsejében, ha állandó, azért $\tau(\lambda)$ azonosan egyenlő egy valós konstanssal, tehát ebben az esetben a $w_\sigma(\lambda)$ pont tetszés szerinti λ ($\text{Im } \lambda > 0$) esetén a $\Gamma(\lambda)$ körön fekszik és a σ függvény kanonikus.

R. NEVANLINNA eredménye a momentum probléma kimerítő megoldását adja, azét a problémáét, amely szerint meghatározandók mindazok a nem-fogyó σ függvények, amelyeknek a momentumai előre megadott s_k ($k=0, 1, 2, \dots$) értékek.

³ És nem a kör külsejét, mert ha w abszolút értéke elég nagy, akkor (5.25) jobboldala nagyobb, mint a bal oldal.

Nagyon kevés hiányzik ahhoz, hogy teljesen megkapjuk NEVANLINNA eredményét; azonban fel kellene használni bizonyos komplex függvénytani módszereket, amit itt nem kívánunk megtenni.

Egyébként NEVANLINNA eredménye és a momentum probléma összes többi itt ismertetett állítása igen speciális következményként adódik azokból az új vizsgálatokból, amelyeket M. G. KREJN ([6]a—d), M. A. LIVSIC [8] és M. A. NAJMARK [9d] folytatott az $(1, 1)$ defekt indexű hermitikus operátorok elmélete és az általánosított momentum probléma területén.

A momentum probléma számos tételének egy másik tárgyalásával ismerkedhet meg az olvasó N. AHUJZER [1a] cikkéből, amely ebben a folyóiratban jelent meg. Itt megtalálható annak a jelentős elégséges feltételnek a bizonyítása, amelyet CARLEMAN a momentum probléma határozottságára adott és úgy hangzik, hogy a momentum probléma határozott, ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s_{2n}}} = \infty.$$

6. §. Korlátos hermitikus operátorok normatartó folytatásai

Ebben és a két következő paragrafusban egy A korlátos hermitikus operátor $\tilde{A}$ önadjungált folytatásaival fogunk foglalkozni.

IV. TÉTEL. *Bármely $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{H}$ altéren értelmezett A korlátos hermitikus operátornak van legalább egy $\tilde{A}$ önadjungált folytatása, amelynek a normája ugyanannyi, mint A -nak.*

Bizonyítás. Minthogy az A korlátos hermitikus operátor mindegyik $\tilde{A}$ önadjungált folytatását megkaphatjuk úgy, hogy a $B = A/\|A\|$ ($\|B\| = 1$) operátor valamelyik folytatását megszorozzuk $\|A\|$ -val, azért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\|A\| = 1$.

Tetszés szerinti $f \in \mathfrak{H}$, $g \in \mathfrak{D}(A)$ elemekre

$$|(Ag, f)| \leq \|A\| \cdot |g| \cdot |f| = |g| \cdot |f|.$$

Ebből következik, hogy (Ag, f) folytonos lineáris funkcionál a $\mathfrak{D}(A)$ téren. RIESZ FRIGYES lemmája szerint minden $f \in \mathfrak{H}$ elemnek egyértelműen megfelel egy $h \in \mathfrak{D}(A)$ elem, amelyre $(Ag, f) = (g, h)$ ($g \in \mathfrak{D}(A)$).

Értelmezzünk egy A^0 operátort a

$$h = A^0 f \quad (f \in \mathfrak{H}, h \in \mathfrak{D}(A))$$

képlettel. A^0 lineáris, és

$$|A^0 f|^2 = (A^0 f, A^0 f) = (A A^0 f, f) \leq |A^0 f| \cdot |f|$$

miatt $|A^0 f| \leq |f|$ minden $f \in \mathfrak{H}$ elemre. Jelöljük P -vel a $\mathfrak{D}(A)$ -ra való merőleges vetítés operátorát; ekkor

$$(A^0 g, h) = (g, Ah) = (Ag, h) = (PAg, h) \quad (g, h \in \mathfrak{D}(A))$$

és

$$(6.1) \quad A^0 g = PAg \quad (g \in \mathfrak{D}(A)).$$

Vezessük be $\mathfrak{H}$ -ban a

$$(g, f)_1 = (g, f) - (A^0 g, A^0 f) \quad (g, f \in \mathfrak{H})$$

új „skaláris” szorzatot. A megfelelő „normát” az

$$|f|_1^2 = |f|^2 - |A^0 f|^2$$

képlet definiálja.

Az új „skaláris” szorzat eleget tesz a skaláris szorzattól megkívánt összes követelménynek, kivéve esetleg azt, hogy $|f|_1 = 0$ esetén $f = 0$. Azt fogjuk mondani, hogy a $g, f \in \mathfrak{H}$ elemek *ekvivalensek* (felírva: $g \sim f$), ha $|g - f|_1 = 0$. Osszuk fel a $\mathfrak{H}$ teret ekvivalencia-osztályokra; az ekvivalencia-reláció tranzitivitása (ha $g \sim f$ és $f \sim h$, akkor $g \sim h$) miatt, ami viszont a

$$|g - h|_1 \leq |g - f|_1 + |f - h|_1$$

egyenlőtlenségből következik, ez lehetséges. A $g \in \mathfrak{H}$ elemmel ekvivalens elemek osztályát a $\hat{g}$ jellel fogjuk jelölni (az osztálynak természetesen sokféle jelölése lehet). Könnyű megmutatni, hogy az ekvivalens elemek osztályaiból álló halmaz, általában, nem teljes Hilbert-térre válik, ha benne a $\lambda \hat{g} + \mu \hat{f} = \hat{h}$ ($h = \lambda g + \mu f$) definíciót vezetjük be és a

$$(\hat{g}, \hat{f}) = (g, f)_1$$

képlet segítségével skaláris szorzatot értelmezünk.

Megjegyezzük, hogy ekkor $|\hat{g}| = |g|_1$. Legyen $\hat{\mathfrak{H}}$ az összes ekvivalencia-osztályok halmazának a most bevezetett metrikában képezett lezárása. A $g \in \mathfrak{D}(A)$ elemekhez tartozó $\hat{g}$ osztályok halmazának a lezárása egy $\hat{\mathfrak{D}} \subset \hat{\mathfrak{H}}$ altér.

A $\mathfrak{D}(A)$ altéren értelmezve van a $B = A - A^0$ operátor, és (6.1) miatt $Bg \in \mathfrak{N}$ ($g \in \mathfrak{D}(A)$), ahol

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{D}(A).$$

Mínt hogy $|Bg|^2 = |Ag|^2 - |A^0 g|^2 \leq |g|^2 - |A^0 g|^2$, azért

$$(6.2) \quad |Bg| \leq |g|_1 \quad (g \in \mathfrak{D}(A)).$$

Az utóbbi egyenlőtlenség értelmében a $g \sim h$ ($g, h \in \mathfrak{D}(A)$) összefüggésből következik, hogy $Bg = Bh$. Ez lehetővé teszi, hogy $\hat{\mathfrak{D}}$ -nak egy sűrű részhalmazán egy B' operátort értelmezzünk a

$$B'\hat{g} = Bg \quad (g \in \mathfrak{D}(A), B'\hat{g} \in \hat{\mathfrak{N}})$$

képlet útján. Ekkor a (6.2) egyenlőtlenség az alábbiba megy át:

$$(6.3) \quad |B'\hat{g}| \leq |\hat{g}| \quad (g \in \mathfrak{D}(A)).$$

A (6.3) összefüggésből következik, hogy a

$$B'\hat{g}_n = Bg_n \quad (g_n \in \mathfrak{D}(A), n = 1, 2, \dots)$$

sorozat a $\mathfrak{H}$ térben tart az $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{H}$ altér valamelyik eleméhez, ha a $\hat{g}_n$ sorozat a $\hat{\mathfrak{H}}$ térben a $\hat{\mathfrak{D}}$ altér egy eleméhez tart. A B' operátort lezárva egy $\hat{B}$ operátort kapunk, amely az egész $\hat{\mathfrak{D}} (\subset \hat{\mathfrak{H}})$ altéren van értelmezve, értékei az $\mathfrak{N} (\subset \mathfrak{H})$ altérhez tartoznak, és (6.3) szerint fennáll

$$(6.4) \quad |\hat{B}\hat{g}| \leq |\hat{g}| \quad (\hat{g} \in \hat{\mathfrak{D}}).$$

Legyen $\hat{P}$ a $\hat{\mathfrak{D}}$ altérre való merőleges vetítés operátora a $\hat{\mathfrak{H}}$ térben. Értelmezzünk az egész $\mathfrak{H}$ téren egy operátort a

$$B^0 f = \hat{B}\hat{P}f \quad (f \in \mathfrak{H})$$

képlettel. Ekkor (6.4) alapján

$$|B^0 f| = |\hat{B}\hat{P}f| \leq |\hat{P}f| \leq |f| = |f|_1,$$

vagyis

$$(6.5) \quad |B^0 f|^2 \leq |f|^2 - |A^0 f|^2 \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

Tekintsük az $A_1 = A^0 + B^0$ operátort. A (6.5) egyenlőtlenségből következik, hogy $\|A_1\| \leq 1$, tehát $\|A_1^*\| \leq 1$.

Mínthogy $g \in \mathfrak{D}(A)$ esetén $\hat{P}\hat{g} = \hat{g}$, azért $B^0 g = Bg$ ($g \in \mathfrak{D}(A)$), és a B operátor definíciójából következik, hogy

$$A_1 g = Ag \quad (g \in \mathfrak{D}(A)).$$

Minden $f \in \mathfrak{H}$, $g \in \mathfrak{D}(A)$ elempárra

$$(A_1^* g, f) = (g, A_1 f) = (g, A^0 f + B^0 f).$$

De $B^0 f \in \mathfrak{N}$ és $(g, B^0 f) = 0$, azaz

$$(A_1^* g, f) = (g, A^0 f) = (Ag, f)$$

és így

$$A_1^* g = Ag \quad (g \in \mathfrak{D}(A)).$$

Ily módon megmutattuk, hogy A_1 és A_1^* az A operátor normatartó folytatása. Ennélfogva az

$$\tilde{A} = \frac{A_1 + A_1^*}{2}$$

önadjungált operátor is A folytatása és $\|\tilde{A}\| = 1$.

A tételt bebizonyítottuk.

7. §. Az A_μ , A_M extrémális operátorok

1. A H hermitikus operátort *pozitívnak* mondjuk ($H > 0$), ha $(Hf, f) \geq 0$ ($f \in \mathfrak{D}(H)$) és legalább egy $g \in \mathfrak{D}(H)$ elemre $(Hg, g) > 0$. Korlátos önadjungált pozitív H operátorhoz található egy és csak egy pozitív operátor, amelynek a négyzete H -val egyenlő; ennek a jele a továbbiakban $H^{1/2}$ lesz.

Ha H spektrális felbontása

$$H = \int_0^l t \, dE(t),$$

akkor

$$H^{\frac{1}{2}} = \int_0^l t^{\frac{1}{2}} \, dE(t).$$

Legyen S és T két korlátos önadjungált operátor. Azt fogjuk mondani, hogy S nagyobb mint T (jelben: $S > T$), ha $S - T$ pozitív operátor.

Legyen A korlátos hermitikus operátor, amelyre $\|A\| \leq 1$ és amelynek az értelmezési tartománya egy $\mathfrak{D}(A) \neq \mathfrak{H}$ zárt lineáris halmaz.

Jelöljük $\mathfrak{B}(A)$ -val az A operátor 1-nél nem nagyobb normájú önadjungált folytatásainak az összességét.

A $\mathfrak{B}(A)$ halmaz nem üres, ugyanis hozzá tartoznak például az A operátornak a IV. tétel értelmében létező változatlan normájú önadjungált folytatásai.

Az A operátor két tetszős szerinti önadjungált folytatásának a C különbsége olyan önadjungált operátor, amely a $\mathfrak{D}(A)$ altéren nullával egyenlő. A C operátor értékei a $\mathfrak{D}(A)$ altér ortogonális komplementumába, $\mathfrak{N}$ -be esnek, mert $(Cg, f) = 0$ ($g \in \mathfrak{D}(A)$, $f \in \mathfrak{H}$) miatt $(g, Cf) = 0$, vagyis $Cf \in \mathfrak{N}$.

Ezek szerint ha a $\mathfrak{B}(A)$ összességhez tartozó egyik operátor $\tilde{A}$, akkor minden $\mathfrak{B}(A)$ -beli operátor $\tilde{A} + C$ alakú, ahol a C operátor csak $\mathfrak{N}$ -beli értékeket vesz fel és eleget tesz az

$$|(\tilde{A}f + Cf, f)| \leq (f, f) \quad (f \in \mathfrak{H})$$

feltételnek, amely ekvivalens azzal, hogy

$$-((I + \tilde{A})f, f) \leq (Cf, f) \leq ((I - \tilde{A})f, f) \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

vagy másképpen

$$(7.1) \quad -(I + \tilde{A}) \leq C \leq I - \tilde{A}.$$

Megjegyezzük, hogy az $I - \tilde{A}$, $I + \tilde{A}$ operátorok pozitívok.

2. Ahhoz, hogy tisztázzuk a (7.1) feltételnek eleget tevő C operátorok természetét, szükségünk lesz az alábbi lemmára.

7.1. LEMMA. Legyen $\mathfrak{N}$ a $\mathfrak{H}$ tér zárt altére, H pedig egy pozitív operátor. Ekkor a

$$C \leq H, \quad \mathfrak{N}(C) \subset \mathfrak{N}$$

feltételeket teljesítő C önadjungált operátorok $\mathfrak{M}$ halmazában mindig található maximális $H_{\mathfrak{N}}$ operátor (vagyis olyan operátor, amely a halmazba tartozó bármely másik C operátornál nagyobb).

Bizonyítás⁴. Az $\mathfrak{M}$ halmaz nem üres, mert hozzá tartoznak például a 0 , $-P_{\mathfrak{N}}$ operátorok ($P_{\mathfrak{N}}$ az $\mathfrak{N}$ -re való merőleges vetítés operátora).

⁴ Az itt következő bizonyítás egyszerűbb, mint M. G. KREJN eredeti bizonyítása; szerzője I. M. GELFAND.

Az $\mathfrak{N}$ altér $\mathfrak{H}$ -ra vonatkozó ortogonális komplementumát $\mathfrak{D}$ -vel fogjuk jelölni. Ekkor $Cg=0$ ($g \in \mathfrak{D}$) és $(Cf, g)=0$ ($f \in \mathfrak{H}$, $g \in \mathfrak{D}$), tehát

$$(Cf, f) = (C(f-g), f-g).$$

A C operátor nem nagyobb, mint H , ezért

$$(Cf, f) \leq (H(f-g), f-g) = |H^{1/2}(f-g)|^2 \quad (f \in \mathfrak{H}, g \in \mathfrak{D})$$

és

$$(7.2) \quad (Cf, f) \leq \inf_{g \in \mathfrak{D}} |H^{1/2}f - H^{1/2}g|^2.$$

Legyen $\mathfrak{Q}$ azoknak a h elemeknek a halmaza, amelyek ortogonálisak a $H^{1/2}\mathfrak{D}$ halmazra, $P_{\mathfrak{Q}}$ pedig az $\mathfrak{Q}$ altérre való merőleges vetítés operátora. A (7.2) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$(7.3) \quad (Cf, f) \leq |P_{\mathfrak{Q}}H^{1/2}f|^2 = (H^{1/2}P_{\mathfrak{Q}}H^{1/2}f, f) \quad (f \in \mathfrak{H}).$$

De $h \in \mathfrak{Q}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $(h, H^{1/2}g)=0$ ($g \in \mathfrak{D}$), vagyis $(H^{1/2}h, g)=0$, és így $H^{1/2}h \in \mathfrak{N}$.

Ezek szerint a

$$(7.4) \quad H_{\mathfrak{N}} = H^{1/2}P_{\mathfrak{Q}}H^{1/2}$$

operátor benne van az $\mathfrak{M}$ halmazban és azonos a keresett maximális operátorral.

3. Visszatérve a (7.1) összefüggésekhez azt látjuk, hogy

$$(7.5) \quad -(I+\tilde{A})_{\mathfrak{N}} \leq C \leq (I-\tilde{A})_{\mathfrak{N}} \quad (\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{D}(A)),$$

és hogy A minden olyan önadjungált folytatása, amely a $\mathfrak{B}(A)$ összességhez tartozik, egy A_{μ} minimális és egy A_M maximális folytatás közé esik, ahol

$$(7.6) \quad \begin{cases} A_{\mu} = \tilde{A} - (I+\tilde{A})_{\mathfrak{N}}, \\ A_M = \tilde{A} + (I-\tilde{A})_{\mathfrak{N}}. \end{cases}$$

V. TÉTEL. Ahhoz, hogy az A_1 önadjungált operátor a $\mathfrak{B}(A)$ halmazhoz tartozzék, szükséges és elégséges, hogy teljesüljön az

$$(7.7) \quad A_{\mu} \leq A_1 \leq A_M$$

feltétel.

Bizonyítás. Hogy a (7.7) feltétel szükséges, azt már bebizonyítottuk. Be fogjuk bizonyítani, hogy elégséges is.

A (7.7) egyenlőtlenségekből következik, hogy $\|A_1\| \leq \max(\|A_{\mu}\|, \|A_M\|) \leq 1$, és hogy az $A_1 - A_{\mu}$ pozitív operátor nem nagyobb, mint $A_M - A_{\mu}$. Így

$$0 \leq ((A_1 - A_{\mu})g, g) \leq ((A_M - A_{\mu})g, g) = 0 \quad (g \in \mathfrak{D}(A)),$$

tehát

$$((A_1 - A_{\mu})g, g) = |(A_1 - A_{\mu})^{1/2}g|^2 = 0,$$

vagyis

$$A_1g = A_{\mu}g = Ag \quad (g \in \mathfrak{D}(A)).$$

A tételt bebizonyítottuk.

8. §. Az $\tilde{A} \in \mathfrak{B}(A)$ folytatás egyértelműségének kritériuma

1. Állapítsuk meg annak a feltételét, hogy az A korlátos hermitikus operátornak egyetlen olyan $\tilde{A}$ önadjungált folytatása legyen, amelynek a normája ≤ 1 .

Az előbbi paragrafusban a C operátorra (két $\mathfrak{B}(A)$ -beli önadjungált folytatás különbségére) nyert (7.5)

$$-(I + \tilde{A})_{\mathfrak{R}} \leq C \leq (I - \tilde{A})_{\mathfrak{R}}$$

egyenlőtlenségekből közvetlenül következik, hogy az A korlátos hermitikus operátor valamelyik $\tilde{A}$ önadjungált folytatása akkor és csak akkor egyetlen olyan önadjungált folytatása A -nak, amelynek a normája ≤ 1 , ha

$$(8.1) \quad (I + \tilde{A})_{\mathfrak{R}} = (I - \tilde{A})_{\mathfrak{R}} = 0.$$

2. A (8.1) feltételek tartalmának a tisztázása céljából bebizonyítunk két lemmát.

8.1. LEMMA. $H_{\mathfrak{R}} = 0$ akkor és csak akkor, ha

$$(8.2) \quad \mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}(H^{1/2}) = 0.$$

Valóban, (7.4) alapján $\mathfrak{R}(H_{\mathfrak{R}}) \subset \mathfrak{R}(H^{1/2})$. Minthogy továbbá a $H_{\mathfrak{R}}$ operátor definíciója szerint

$$\mathfrak{R}(H_{\mathfrak{R}}) \subset \mathfrak{R},$$

azért

$$\mathfrak{R}(H_{\mathfrak{R}}) \subset H^{1/2}\Omega.$$

Ennélfogva a (8.2) összefüggésből következik, hogy $H_{\mathfrak{R}} = 0$. Megfordítva, ha $H_{\mathfrak{R}} = 0$, akkor

$$(H_{\mathfrak{R}}f, f) = (H^{1/2}P_{\mathfrak{R}}H^{1/2}f, f) = 0 \quad (f \in \mathfrak{H}),$$

tehát $|P_{\mathfrak{R}}H^{1/2}f| = 0$ ($f \in \mathfrak{H}$). Ezért az Ω altér merőleges a $H^{1/2}$ operátor értékkészletére, és így benne van $H^{1/2}$ zérus-alterében.

Legyen

$$H = \int_0^{\infty} t dE(t) \quad \text{és} \quad H^{1/2} = \int_0^{\infty} t^{1/2} dE(t)$$

a H , ill. a $H^{1/2}$ operátor spektrális felbontása.

Nyilvánvaló, hogy $f \in \mathfrak{R}(H^{1/2})$ akkor és csak akkor áll fenn, ha

$$\int_0^{\infty} \frac{d(E(t)f, f)}{t} < \infty.$$

Következésképpen a 8.1. lemmából közvetlenül adódik az alábbi.

8.2. LEMMA. Ahhoz, hogy $H_{\mathfrak{R}} = 0$ legyen, szükséges és elégséges, hogy minden $h \in \mathfrak{R}$ elemre teljesüljön az

$$(8.3) \quad \int_0^{\infty} \frac{d(E(t)h, h)}{t} = \infty$$

feltétel.

3. Ha a (8.1) feltételeket a 8.2. lemmának megfelelően interpretáljuk, akkor a következő tételhez jutunk.

VI. TÉTEL. Ahhoz, hogy az A hermitikus operátor $\tilde{A}$ önadjungált folytatása ($\|\tilde{A}\| \leq 1$) A egyetlen olyan önadjungált folytatása legyen, amelynek a normája ≤ 1 , szükséges és elégséges, hogy minden $h \in \mathfrak{H}$ elemre teljesüljenek az

$$(8.4) \quad \int_{-1}^1 \frac{d(F(t)h, h)}{1+t} = \infty, \quad \int_{-1}^1 \frac{d(F(t)h, h)}{1-t} = \infty$$

feltételek, ahol $F(t)$ ($-1 \leq t \leq 1$) az $\tilde{A}$ operátor spektrálfüggvénye.

A 8.2. lemma bizonyítása során végzett megfontolások alapján világos, hogy a (8.4) alatt szereplő első, ill. második feltétel külön-külön szükséges és elégséges ahhoz, hogy az adott $\tilde{A}$ folytatás megegyezzek az A_μ minimális, ill. az A_M maximális folytatással.

4. Érdeklődésre tarthatnak számot olyan kritériumok, amelyek segítségével magáról az A korlátos hermitikus operátorról (az $\tilde{A}$ folytatás ismerete nélkül) eldönthető, hogy változatlan normájú önadjungált folytatása egyértelmű-e. Megelégszünk azzal, hogy bizonyítás nélkül idézzük a következő feltételt (lásd [6i], 6. tétel).

VII. TÉTEL. Ahhoz, hogy az A korlátos hermitikus operátornak egyetlen olyan $\tilde{A}$ önadjungált folytatása legyen, amelynek a normája ≤ 1 , szükséges és elégséges, hogy tetszés szerinti $h \in \mathfrak{H}$ elemre ($\mathfrak{H} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{D}(A)$) teljesüljön a

$$\sup_{g \in \mathfrak{D}(A)} \frac{|(Ag, h)|^2}{|g|^2 - |Ag|^2} = \infty$$

feltétel.

8.1. példa. Az operátoros momentum probléma véges intervallumban.

Legyen $\mathfrak{E}$ Hilbert-tér, amelyben két elem, x és y skaláris szorzatának a jele $[x, y]$.

Tegyük fel, hogy a (véges vagy végtelen) (a, b) zárt intervallumhoz tartozó mindegyik t értéknek megfelel egy az $\mathfrak{E}$ térben ható $F(t)$ korlátos önadjungált operátor. Azt fogjuk mondani, hogy $F(t)$ nem-csökkenő operátorfüggvény, ha

$$F(t_1) \leq F(t_2) \quad (t_1 < t_2; \quad t_1, t_2 \in (a, b)).$$

Nem-csökkenő $F(t)$ operátorfüggvényre mindig léteznek az $F(t-0)$, $F(t+0)$ limesz-operátorok abban az értelemben, hogy tetszés szerinti $x \in \mathfrak{E}$ elemre

$$F(t-0)x = \lim_{\tau \uparrow t} F(\tau)x, \quad F(t+0)x = \lim_{\tau \downarrow t} F(\tau)x.$$

A következőkben

$$(8.5) \quad J = \int_a^b \varphi(t) dF(t)$$

alakú integrálokat fogunk vizsgálni, ahol $\varphi(t)$ az (a, b) számközben folytonos függvény. Ezért nem jelent majd megszorítást, ha feltesszük, hogy

$$F(a) = 0 \quad \text{és} \quad F(t) = F(t-0) \quad (a < t < b).$$

Az (a, b) számközben folytonos $\varphi(t)$ függvény esetén tetszés szerinti $x \in \mathfrak{E}$ elemre az

$$(8.6) \quad \int_a^b \varphi(t) dF(t)x$$

integrál erősen konvergens $\mathfrak{E}$ -ben. A (8.5) egyenlőségen azt értjük, hogy bármelyik $x \in \mathfrak{E}$ elemre Jx egyenlő a (8.6) kifejezéssel. A J operátor korlátos. A (8.6) integrál konvergenciája és az $F(t)$ függvény említett tulajdonságai M. A. NAJMARK egyik általános tételéből ([9]a, b) adódnak.

Az az olvasó, aki nem ismeri ezeket a munkákat, értelmezze a (8.5) egyenlőséget úgy, hogy tetszés szerinti $x, y \in \mathfrak{E}$ elemekre

$$[Jx, y] = \int_a^b \varphi(t) d[F(t)x, y].$$

D. TÉTEL. *Ahhoz, hogy egy korlátos önadjungált operátorokból álló $S_0, S_1, \dots, S_{2n}$ sorozat előállítható legyen*

$$(8.7) \quad S_k = \int_{-1}^1 t^k dF(t) \quad (k = 0, 1, \dots, 2n)$$

alakban, szükséges és elégséges, hogy tetszés szerinti $x_i \in \mathfrak{E}$ ($i=0, 1, \dots, 2n$) elemekre teljesüljenek a következő feltételek:

$$\text{I.} \quad \sum_{j,k=0}^{n-1} [S_{j+k}x_j, x_k] \cong 0,$$

$$\text{II.} \quad \sum_{j,k=0}^{n-1} [(S_{j+k} - S_{j+k+2})x_j, x_k] \cong 0.$$

Bizonyítás. A (8.7) összefüggésből

$$\sum_{j,k=0}^n [S_{j+k}x_j, x_k] = \int_{-1}^1 \sum_{j,k=0}^n t^{j+k} d[F(t)x_j, x_k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^N [\Delta_v F(t)y_v, y_v],$$

ahol

$$\Delta_v F(t) = F(t_v) - F(t_{v-1}), \quad y_v = \sum_{j=0}^n t_v^j x_j,$$

$$t_v = -1 + \frac{2v}{N} \quad (v = 1, 2, \dots, N).$$

Innen adódik az I. feltétel szükségessége.

A II. feltétel szükségessége az analóg

$$\sum_{j,k=0}^{n-1} [(S_{j+k} - S_{j+k+2})x_j, x_k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^N (1 - t_v^2) [\Delta_v F(t)y_v, y_v]$$

egyenlőségből következik.

Be fogjuk bizonyítani, hogy az I., II. feltételek elégségesek is. Tekintsük azt a $\mathfrak{P}$ lineáris halmazt, amely a

$$P(t) = \sum_{j=0}^n t^j x_j \quad (x_j \in \mathfrak{E}; \quad j = 0, 1, \dots, n)$$

alakú $P(t)$ „polinomokból” áll. Defináljunk a $\mathfrak{P}$ halmazon egy (P, Q) hermitikus bilineáris funkcionált a

$$(P, Q) = \sum_{j,k=0}^n [S_{j+k} x_j, y_k] \quad \left(Q(t) = \sum_{k=0}^n t^k y_k; \quad y_k \in \mathfrak{E} \right)$$

egyenlőség segítségével. Az I. feltétel alapján

$$(P, P) \geq 0 \quad (P(t) \in \mathfrak{P}).$$

Először tegyük fel, hogy az I. forma nem elfajuló, azaz ha $P(t) \neq 0$ (nem mindegyik x_j „együttható” nulla), akkor $(P, P) > 0$.

Ebben az esetben a (P, Q) bilineáris funkcionál tekinthető skaláris szorzatnak $\mathfrak{P}$ -ben. Ha a $\mathfrak{P}$ halmazt erre a skaláris szorzatra nézve lezárjuk, akkor valamilyen $\mathfrak{H}$ Hilbert-teret kapunk.

Jelöljük $\mathfrak{D}$ -vel azoknak a $Q \in \mathfrak{P}$ polinomoknak az összességét, amelyek legfeljebb $(n-1)$ -edfokúak:

$$Q(t) = \sum_{j=0}^{n-1} t^j y_j \quad (y_j \in \mathfrak{E}).$$

A $\mathfrak{D}$ halmazon értelmezzünk egy A operátort az

$$AQ(t) = tQ(t) = \sum_{j=0}^{n-1} t^{j+1} y_j$$

egyenlőség segítségével.

Mintegy tetszés szerinti $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{D}$ esetén

$$(tQ_1, Q_2) = (Q_1, tQ_2),$$

azért az A operátor hermitikus.

Ezenkívül a II. feltétel értelmében

$$(8.8) \quad (AQ, AQ) = (tQ, tQ) \geq (Q, Q) \quad (Q \in \mathfrak{D}).$$

Ily módon az A operátor normája legfeljebb 1: $\|A\| \leq 1$.

A IV. tétel szerint A -nak van 1-nél nem nagyobb normájú $\tilde{A}$ önadjungált folytatása.

Legyen $\tilde{A}$ spektrálfüggvénye $E(t)$:

$$\tilde{A} = \int_{-1}^1 t dE(t).$$

Ekkor tetszés szerinti $x, y \in \mathfrak{E}$ elemekre fennáll

$$(8.9) \quad [S_{j+k}x, y] = (t^j x, t^k y) = (\tilde{A}^j x, \tilde{A}^k y) = (\tilde{A}^{j+k} x, y) = \\ = \int_{-1}^1 t^{j+k} d(E(t)x, y) \quad (j+k = 0, 1, \dots, 2n).$$

Megjegyezzük, hogy az $E(t)$ operátorok a $\mathfrak{H}$ térben hatnak és nem $\mathfrak{E}$ -ben; ennek ellenére $(E(t)x, y)$ hermitikus bilineáris funkcionál $\mathfrak{E}$ -ben, és az

$$|(E(t)x, x)| \leq (x, x) = [S_0 x, x] \leq \|S_0\| [x, x]$$

egyenlőtlenségek miatt folytonos is. RIESZ tétele szerint ennek a funkcionálnak megfelel egy az $\mathfrak{E}$ térben ható $F(t)$ korlátos önadjungált operátor úgy, hogy

$$(8.10) \quad (E(t)x, y) = [F(t)x, y] \quad (x, y \in \mathfrak{E}).$$

Minthogy tetszés szerinti $x \in \mathfrak{E}$ mellett az $(E(t)x, x)$ függvény nem-csökkenő, azért $F(t)$ nem-csökkenő operátorfüggvény.

A (8.9), (8.10) összefüggésekből következik (8.7), így arra az esetre, amikor az I. forma pozitív, a tételt bebizonyítottuk.

Abban az esetben, amikor az I. forma elfajuló, két $P, Q \in \mathfrak{P}$ polinomot ekvivalensnek fogunk tekinteni, ha

$$(P - Q, P - Q) = 0.$$

A (8.8) képlet értelmében az A operátor ekvivalens polinomokat ekvivalensekbe visz át. Ezek szerint az ekvivalens polinomokat egymással azonosítva a vizsgált eset könnyen visszavezethető az előbbire (lásd az 5. §-t).

A tételt bebizonyítottuk.

Abban az esetben, amikor az $\mathfrak{E}$ tér egydimenziós, a D tétel a hatványokra vonatkozó véges momentum probléma megoldását szolgáltatja:

Ahhoz, hogy az s_k ($k=0, 1, \dots, 2n$) számsorozat előállítható legyen

$$(8.11) \quad s_k = \int_{-1}^1 t^k d\sigma(t) \quad (k = 0, 1, \dots, 2n)$$

alakban, ahol $\sigma(t) = \sigma(t-0)$ ($\sigma(-1)=0$) valamilyen nem-csökkenő függvény, szükséges és elégséges, hogy a

$$(8.12) \quad \sum_{j,k=0}^n s_{j+k} \xi_j \xi_k, \quad \sum_{j,k=0}^{n-1} (s_{j+k} - s_{j+k+2}) \xi_j \xi_k$$

formák nem-negatívak legyenek.

Ebben az esetben a $\mathfrak{H}$ tér n -dimenziós, tehát az $E(t)$ spektrálfüggvénynek, és így a $\sigma(t) = F(t)$ függvénynek is, legfeljebb n növekedési pontja van.

Felhasználva azokat a kritériumokat, amelyek a változatlan normájú folytatás egyértelműségére vonatkoznak, meg lehet mutatni, hogy a $\sigma(t)$ függvény akkor és csak akkor van egyértelműen meghatározva, ha a (8.12) formák közül az egyik elfajuló.

Ha viszont mindkét forma pozitív, akkor a (8.11) előállítást adó $\sigma(t)$ függvények között található lesz két szélső, amelyek az A operátor minimális, ill. maximális folytatásának felelnek meg. E két függvény közül az egyiknek a $\lambda = -1$, a másiknak a $\lambda = 1$ helyen van növekedési pontja; ennek az igazolását az olvasóra bizzuk.

Ha az $\mathfrak{E}$ tér p -dimenziós, akkor a $\mathfrak{H}$ tér np -dimenziós, és $E(t)$ -nek, tehát $F(t)$ -nek és $\sigma(t)$ -nek is legfeljebb np számú növekedési pontja lehet. Ebben az esetben az $S_0, S_1, \dots, S_{2n}$ operátorok hermitikus mátrixoknak tekinthetők, és ha teljesülnek az I., II. feltételek, akkor érvényes az

$$S_k = \sum_{i=1}^m t_i^k H_i \quad (m \leq np; k = 0, 1, \dots, 2n)$$

előállítás, ahol H_i ($i=1, 2, \dots, m$) pozitív hermitikus mátrixok.

Az operátoros momentum probléma vizsgálatánál arra az esetre szorítkoztunk, amikor véges számú S_k ($k=0, 1, 2, \dots, 2n$) „momentum” van megadva, ugyanis ha mindegyik S_k ($k=0, 1, 2, \dots$) „momentum” adott, akkor a feladat megoldása lényegesen egyszerűbb.

Végül megemlítjük, hogy a hatványokra vonatkozó klasszikus momentum probléma a $(-\infty, \infty)$ végtelen alapintervallum (lásd 5. §) esetében is hasonló módon általánosítható operátorokra.

9. §. Hézaggal rendelkező operátorok folytatása

1. 9.1. LEMMA. Legyen R egy a $\mathfrak{H}$ térben sűrű $\mathfrak{D}(R)$ halmazon értelmezett hermitikus operátor, és legyen A az R operátor lineáris tört transzformáltja:

$$A = (\alpha R + \beta I)(\gamma R + \delta I)^{-1},$$

ahol $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ valós számok és $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Ekkor az A operátor tetszés szerinti $\tilde{A}$ önadjungált folytatásának megfelel R -nek egy $\tilde{R}$ önadjungált folytatása, amelyet az

$$\tilde{R} = (\delta\tilde{A} - \beta I)(-\gamma\tilde{A} + \alpha I)^{-1}$$

képlet értelmez.

A 3.1. és 4.1. lemma, továbbá a 3. § 2^o. állítása értelmében elég megmutatni, hogy $\gamma\tilde{A}f - \alpha f = 0$ esetén $f=0$. Tegyük fel, hogy $\gamma\tilde{A}f - \alpha f = 0$. Ekkor $(\gamma\tilde{A}f - \alpha f, h) = 0$ ($h \in \mathfrak{H}$). Speciálisan $(\gamma\tilde{A}f - \alpha f, \varphi) = 0$ ha $\varphi \in \mathfrak{D}(A)$. Innen $(f, \gamma\tilde{A}\varphi - \alpha\varphi) = (f, \gamma A\varphi - \alpha\varphi) = 0$, azaz $(f, g) = 0$ ($g \in \mathfrak{D}(R)$). A $\mathfrak{D}(R)$ halmaz sűrű $\mathfrak{H}$ -ban, tehát $f=0$.

2. Legyen R olyan hermitikus operátor, amelynek a $\mathfrak{D}(R)$ értelmezési tartománya sűrű $\mathfrak{H}$ -ban.

Az (a, b) véges intervallumot az R operátor hézagának fogjuk nevezni, ha

$$\left| Rf - \frac{a+b}{2}f \right| \geq \frac{b-a}{2}|f| \quad (f \in \mathfrak{D}(R)).$$

Az R operátor hézaga nyilván R -re nézve reguláris típusú pontokból áll. Következésképpen az R -re nézve reguláris típusú pontok halmaza összefüggő, és az I. tétel értelmében az R operátor defekt számai egyenlők. A II. tétel szerint R -nek van önadjungált folytatása.

Érvényes az erősebb

VIII. TÉTEL. Az (a, b) hézaggal rendelkező R hermitikus operátornak van legalább egy folytatása, amelyre nézve az (a, b) számköz regularitási intervallum.

Bizonyítás. Az R operátorról áttérve az

$$R_1 = \frac{2}{b-a} \left(R - \frac{a+b}{2} I \right)$$

operátor vizsgálatára, arra az esetre jutunk, amikor a hézag a $(-1, 1)$ számköz. Ezért az általánosság megszorítása nélkül mindjárt úgy vehetjük, hogy $a = -1$, $b = 1$, vagyis hogy az R operátor eleget tesz az

$$(9.1) \quad |Rf| \cong |f| \quad (f \in \mathfrak{D}(R))$$

feltételnek.

Tekintsük az R operátor lineáris tört transzformáltját:

$$A = R^{-1}.$$

Az A operátor a 3. § 2^o. állítása következtében hermitikus, és (9.1) miatt korlátos: $\|A\| \leq 1$. Az V. tétel szerint A -nak van legalább egy olyan $\tilde{A}$ önadjungált folytatása, amelynek a normája $\|A\|$ -val egyenlő. A 9.1. lemma szerint az

$$\tilde{R} = \tilde{A}^{-1}$$

önadjungált operátor R önadjungált folytatását szolgáltatja. Minthogy

$$|\tilde{A}g| \cong |g| \quad (g \in \mathfrak{D}(\tilde{A})),$$

azért

$$|\tilde{R}f| \cong |f| \quad (f \in \mathfrak{D}(\tilde{R})).$$

A tételt bebizonyítottuk.

10. §. Pozitív operátorok folytatása

1. Az S hermitikus operátort pozitívnak nevezik (képletben: $S > 0$), ha

$$(Sf, f) \cong 0 \quad (f \in \mathfrak{D}(S))$$

és legalább egy $f_0 \in \mathfrak{D}(S)$ elemre $(Sf_0, f_0) > 0$.

Az utóbbi feltétel azt jelenti, hogy $S \neq 0$.

Ha $S > 0$, akkor tetszés szerinti $a > 0$ számra

$$|Sf + af|^2 = |Sf|^2 + 2a(Sf, f) + a^2|f|^2 \cong a^2|f|^2.$$

Ily módon pozitív operátor összes reguláris típusú pontjainak a halmaza összefüggő (tartalmazza az összes nem valós és az összes negatív λ számokat); következésképpen defekt számai egyenlők.

Ha $\overline{\mathfrak{D}(S)} = \mathfrak{H}$, akkor S -nek vannak önadjungált folytatásai.

M. STONE [20] és később K. FRIEDRICH [17] megmutatta, hogy ezenfelül az S pozitív hermitikus operátornak ($\overline{\mathfrak{D}(S)} = \mathfrak{H}$) mindig van legalább egy pozitív önadjungált folytatása.

Az a módszer, amellyel ezt a tételt alább bebizonyítjuk, lehetővé teszi, hogy megtaláljuk az S operátor összes pozitív önadjungált folytatásait és kiválasszunk közülük két „extremális” folytatást, amelyeknek az egybeesése fogja megmutatni, hogy S -nek csak egy pozitív önadjungált folytatása van.

IX. TÉTEL. Minden a $\mathfrak{H}$ térben sűrű⁵ $\mathfrak{D}(S)$ értelmezési tartománnyal rendelkező S pozitív hermitikus operátornak van legalább egy $\tilde{S}$ pozitív önadjungált folytatása.

Bizonyítás.⁶ Tekintsük az S operátor alábbi lineáris tört transzformáltját:

$$A = (I - S)(I + S)^{-1}, \quad S = (I - A)(I + A)^{-1}.$$

Az A operátor létezik, mert $f + Sf = 0$ esetén $f = 0$, ugyanis

$$(f, f) \equiv (f, f) + (Sf, f) = (f + Sf, f) \quad (f \in \mathfrak{D}(S)).$$

Az A operátor a 3. § 2^o. állítása értelmében hermitikus.

A vizsgált esetben ($B = S$) a (3.1), (3.2) képletek a következő alakot öltik:

$$g = f + Sf, \quad Ag = f - Sf \quad (f \in \mathfrak{D}(S), g \in \mathfrak{D}(A)).$$

Az S operátor pozitivitásából nyerjük:

$$\begin{aligned} (Ag, Ag) &= (f - Sf, f - Sf) = |f|^2 - 2(Sf, f) + |Sf|^2 \equiv \\ &\equiv |f|^2 + 2(Sf, f) + |Sf|^2 = (f + Sf, f + Sf) = (g, g), \end{aligned}$$

vagyis A korlátos ($\|A\| \leq 1$).

Az V. tétel szerint az A operátornak van legalább egy olyan $\tilde{A}$ önadjungált folytatása, amelynek a normája ≤ 1 . Az előző paragrafusban bebizonyított lemma alapján az

$$(10.1) \quad \tilde{S} = (I - \tilde{A})(I + \tilde{A})^{-1}$$

önadjungált operátor az S operátor önadjungált folytatása.

⁵ Az a kikötés, hogy $\mathfrak{D}(S)$ sűrű $\mathfrak{H}$ -ban, lényeges. Legyen például $\mathfrak{H}$ a háromdimenziós tér egy e_1, e_2, e_3 ortonormális bázissal, S pedig az a pozitív operátor, amely az $ae_1 + be_2$ alakú vektorok halmazán van értelmezve az $S(ae_1 + be_2) = ae_1 + be_3$ egyenlőség útján. Ekkor S bármelyik $\tilde{S}$ önadjungált folytatását választjuk is, az nem lesz pozitív, ugyanis

ha $\varepsilon < 2/(\tilde{S}e_3, e_3)^{-1}$.

⁶ A tételre egyszerű bizonyítást adott FREUDENTHAL [18] is; ez FRIEDRICH ötletein alapszik és szintén nem teszi lehetővé pozitív operátor összes pozitív önadjungált folytatásainak a leírását.

Az $\|\tilde{A}\| \leq 1$ egyenlőtlenségből következik, hogy $\tilde{S}$ pozitív. Valóban, ha $f \in \mathfrak{D}(\tilde{S})$, akkor található olyan $g \in \mathfrak{D}(\tilde{A})$, hogy $f = g + \tilde{A}g$, $\tilde{S}f = g - \tilde{A}g$, és így

$$(\tilde{S}f, f) = (g - \tilde{A}g, g + \tilde{A}g) = |g|^2 - |\tilde{A}g|^2 \geq 0.$$

A tételt bebizonyítottuk.

2. Legyen A_μ és A_M az A operátor minimális, illetve maximális folytatása. Az

$$S_\mu = (I - A_\mu)(I + A_\mu)^{-1}, \quad S_M = (I - A_M)(I + A_M)^{-1}$$

operátorokat *S durva*, ill. *finom* folytatásának fogjuk nevezni.

Az (10.1) összefüggés ekvivalens a következővel:

$$\tilde{A} = (I - \tilde{S})(I + \tilde{S})^{-1} = 2(I + \tilde{S})^{-1} - I.$$

Így $A_\mu \leq \tilde{A} \leq A_M$ miatt

$$(10.2) \quad (S_\mu + I)^{-1} \leq (\tilde{S} + I)^{-1} \leq (S_M + I)^{-1}.$$

Meg lehet mutatni (lásd [6i], 11. tétel), hogy tetszés szerinti $a > 0$ mellett

$$(10.3) \quad (S_\mu + aI)^{-1} \leq (\tilde{S} + aI)^{-1} \leq (S_M + aI)^{-1}.$$

Minthogy az S operátor mindegyik $\tilde{S}$ pozitív önadjungált folytatásának megfelel A -nak egy $\tilde{A}$ önadjungált folytatása, amelynek a normája ≤ 1 , azért az $\tilde{S}$ folytatás akkor és csak akkor lesz az S operátor egyetlen pozitív önadjungált folytatása, ha az S_μ durva és az S_M finom folytatás egybeesik, vagy ami ugyanaz, ha az A operátor A_μ minimális és A_M maximális folytatása egybeesik.

A VI. tételből egyszerű átalakítások útján adódik a következő.

X. TÉTEL. Legyen $\mathfrak{R}_1$ az

$$(10.4) \quad S^* \varphi + \varphi = 0$$

egyenlet összes megoldásainak a halmaza, és

$$(10.5) \quad \tilde{S} = \int_0^\infty t dE(t)$$

az S pozitív operátor $\tilde{S}$ pozitív önadjungált folytatásának a spektrális felbontása. Ekkor ahhoz, hogy $\tilde{S}$ az S operátor egyetlen pozitív önadjungált folytatása legyen, szükséges és elégséges, hogy minden $\varphi \in \mathfrak{R}_1$ elemre fennálljon

$$(10.6) \quad \int_0^\infty t d(E(t)\varphi, \varphi) = \int_0^\infty \frac{1}{t} d(E(t)\varphi, \varphi) = \infty.$$

Bizonyítás. Tekintsük az $\tilde{A} = (I - \tilde{S})(I + \tilde{S})^{-1}$ operátort. A (10.5) képlet értelmében

$$\tilde{A} = \int_0^\infty \frac{1-t}{1+t} dE(t) = \int_{-1}^1 u dF(u) \quad \left(u = \frac{t-1}{t+1}; F(u) = E(t) \right).$$

Az $A = (I - S)(I + S)^{-1}$ operátor értelmezési tartománya a

$$g = Sf + f \quad (f \in \mathfrak{D}(S))$$

alakú g elemekből áll.

Ennélfogva ha egy $\varphi \in \mathfrak{H}$ elem ortogonális $\mathfrak{D}(A)$ -ra, akkor $(\varphi, Sf + f) = (S^*\varphi + \varphi, f) = 0$ ($f \in \mathfrak{D}(S)$), és minthogy $\mathfrak{D}(S)$ sűrű $\mathfrak{H}$ -ban, azért

$$S^*\varphi + \varphi = 0.$$

Nyilvánvaló, hogy fordítva is: ha φ a (10.4) egyenlet megoldása, akkor φ ortogonális $\mathfrak{D}(A)$ -ra. Következésképpen $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{D}(A)$.

Így a VI. tétel szerint $\tilde{A}$ akkor és csak akkor lesz az A operátor egyetlen olyan önadjungált folytatása, amelynek a normája $\|A\|$ -val egyenlő, ha

$$\int_{-1}^1 \frac{d(F(u)\varphi, \varphi)}{1-u} = \infty \quad \text{és} \quad \int_{-1}^1 \frac{d(F(u)\varphi, \varphi)}{1+u} = \infty$$

minden $\varphi \in \mathfrak{N}_1$ elemre.

Minthogy az $F(u) = E(t)$ ($u = (t-1)/(t+1)$) egyenlőség alapján

$$\int_{-1}^1 \frac{d(F(u)\varphi, \varphi)}{1 \pm u} = \frac{1}{2}(\varphi, \varphi) + \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\mp 1} d(E(t)\varphi, \varphi),$$

a tételt bebizonyítottuk.

3. A következő kritériumnak (lásd [6], 9. tétel) az az érdekessége, hogy nem kívánja meg az S operátor egyetlen $\tilde{S}$ pozitív önadjungált folytatásának az ismeretét sem.

XI. TÉTEL. Ahhoz, hogy az S pozitív hermitikus operátornak $(\overline{\mathfrak{D}(S)} = \mathfrak{H})$ egyetlen pozitív önadjungált folytatása legyen, szükséges és elégséges, hogy

$$\inf_{f \in \mathfrak{D}(S)} \frac{(Sf, f)}{|(f, \varphi)|^2} = 0$$

legyen az $S^*\varphi + \varphi = 0$ egyenlet bármelyik φ megoldására.

A XI. tétel a VII. tételből egyszerű átalakítások útján adódik. Ezt nem mutatjuk meg, mert a VII. tétel bizonyítását is elhagytuk.

4. A T hermitikus operátort *alulról félig korláatosnak* nevezzük, ha

$$m(T) = \inf_{f \in \mathfrak{D}(T)} \frac{(Tf, f)}{(f, f)} > -\infty.$$

Legyen $\tilde{S}$ az $S = T - m(T)I$ pozitív operátor valamilyen pozitív önadjungált folytatása, és legyen $\tilde{T} = \tilde{S} + m(T)I$. Ekkor $m(\tilde{T}) = m(T)$. Ebből következik a

XII. TÉTEL. Minden a $\mathfrak{H}$ térben sűrű értelmezési tartománnyal rendelkező T félig korláatos hermitikus operátornak van legalább egy $\tilde{T}$ félig korláatos önadjungált folytatása, amelyre $m(\tilde{T}) = m(T)$.

Ha az $S (\neq S^*)$ pozitív operátor $m(S)$ alsó határa nagyobb, mint nulla, akkor a pozitív folytatás nyilván nem lesz egyértelműen meghatározva. Azonban az $m(S)=0$ feltétel nem elégséges ahhoz, hogy az S operátornak csak egy pozitív önadjungált folytatása legyen. Reducibilis S hermitikus operátorokra (olyan operátorokra, amelyek előállíthatók $\mathfrak{H}$ két egymásra ortogonális alterében ható két hermitikus operátor direkt összegeként) ez nyilvánvaló.

Legyen H nem korlátos pozitív önadjungált operátor, amelynek a folytonos spektruma tartalmazza a 0 pontot, és legyen H spektrális felbontása

$$H = \int_0^\infty t dE(t).$$

Vegyük egy $\varphi \in \mathfrak{H}$ ($|\varphi|=1$) elemet, amelyre

$$(10.7) \quad \int_0^\infty t d(E(t)\varphi, \varphi) = \infty, \quad \int_0^\infty \frac{1}{t} d(E(t)\varphi, \varphi) < \infty.$$

Jelölje $\mathfrak{D}(S)$ azoknak az $f \in \mathfrak{D}(H)$ elemeknek a halmazát, amelyekre

$$(10.8) \quad (f + Hf, \varphi) = 0,$$

és értelmezzünk a $\mathfrak{D}(S)$ halmazon egy S operátort:

$$Sf = Hf \quad (f \in \mathfrak{D}(S)).$$

A $\mathfrak{D}(S)$ halmaz sűrű $\mathfrak{H}$ -ban. Csakugyan, ha a $h \in \mathfrak{H}$ elem ortogonális $\mathfrak{D}(S)$ -re, akkor a h elemet $h = H\psi + \psi$ ($\psi \in \mathfrak{D}(H)$) alakban előállítva azt kapjuk, hogy ψ ortogonális a $(H+I)\mathfrak{D}(S)$ halmazra, vagyis $\psi = c\varphi \in \mathfrak{D}(H)$. Minthogy a (10.7) alatt szereplő első feltétel értelmében $\varphi \notin \mathfrak{D}(H)$, azért $c=0$, $\psi=0$ és $h=0$.

Most megmutatjuk, hogy $m(S)=0$. Minthogy a 0 pont a H operátor folytonos spektrumához tartozik, tetszés szerinti $\varepsilon > 0$ esetén található két lineárisan független $f_k \in \mathfrak{D}(H)$ ($k=1, 2$) elem úgy, hogy

$$(10.9) \quad E(t)f_k = f_k \quad \text{ha} \quad t > \varepsilon \quad (k=1, 2).$$

Valamilyen α mellett az $f=f_1 \cos \alpha + f_2 \sin \alpha$ elem kielégíti a (10.8) feltételt, azaz $f \in \mathfrak{D}(S)$. A (10.9) képlet alapján

$$(Sf, f) = (Hf, f) = \int_0^\varepsilon t d(E(t)f, f) \leq \varepsilon(f, f),$$

és innen $m(S)=0$.

Az így megszerkesztett S operátornak a (10.7) alatt feltüntetett második feltétel következtében végtelen sok pozitív önadjungált folytatása van.

Ha ezenkívül a H operátornak egyszerű spektruma⁷ van, a φ elemet pedig úgy választjuk, hogy az $E(t)\varphi$ elemek zárt lineáris burka az egész $\mathfrak{H}$ tér legyen, akkor, mint könnyen látható, az S operátor is irreducibilis lesz.

5. 10.1. példa. *A Stieltjes-integrálokra vonatkozó operátoros momentum probléma.*

⁷ Az egyszerű spektrumú operátorok definícióját lásd a [19] munkában.

Itt $F(t)$ nem-csökkenő operátorfüggvényeket kell majd vizsgálnunk (lásd a 8.1. példát, ahonnan számos jelölést is átveszünk) egy végtelen intervallumban ($0 \leq t < \infty$).

Legyen $\varphi(t)$ ($0 \leq t < \infty$) valamilyen folytonos függvény. Ebben a példában a

$$J = \int_0^{\infty} \varphi(t) dF(t)$$

egyenlőségen azt fogjuk érteni, hogy

$$[Jx, y] = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \varphi(t) d[F(t)x, y] \quad (x, y \in \mathfrak{E}).$$

E. TÉTEL. Ahhoz, hogy a korlátos⁸ önadjungált operátorokból álló $S_0, S_1, \dots$ sorozat előállítható legyen

$$(10.10) \quad S_k = \int_0^{\infty} t^k dF(t) \quad (k = 0, 1, \dots)$$

alakban, ahol $F(t)$ ($0 \leq t < \infty$) nem-csökkenő operátorfüggvény, szükséges és elégséges, hogy tetszés szerinti $x_j \in \mathfrak{E}$ ($j=0, 1, \dots$) elemekre teljesüljenek az

$$(10.11) \quad \text{I.} \quad \sum_{j,k=0}^n [S_{j+k}x_j, x_k] \geq 0 \quad (n = 0, 1, \dots),$$

$$(10.12) \quad \text{II.} \quad \sum_{j,k=0}^n [S_{j+k+1}x_j, x_k] \geq 0 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

feltételek.

Bizonyítás. Az I., II. feltételek szükségességét ugyanúgy lehet bebizonyítani, mint a 8.1. példában. Valóban, a (10.10) összefüggésből következik, hogy

$$\sum_{j,k=0}^n [S_{j+k}x_j, x_k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^p [\Delta_v F(t)y_v, y_v],$$

$$\sum_{j,k=0}^n [S_{j+k+1}x_j, x_k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{v=1}^p t_v [\Delta_v F(t)y_v, y_v],$$

ahol

$$t_v = \frac{vN}{p}, \quad y_v = \sum_{j=0}^n t_v^j x_j, \quad \Delta_v F(t) = F(t_{v+1}) - F(t_v) \quad (v = 1, 2, \dots, p).$$

Mutassuk meg, hogy az I., II. feltételek elégségesek abban az esetben, amikor a (10.11) formák nem elfajulók $\left(\sum_{j=1}^n [S_{j+k}x_j, x_k] = 0 \right.$ esetén $x_j = 0; j=0, 1, \dots, n$). Ilyenkor (lásd a 8.1. példát) képezzük azt a $\mathfrak{P}$ halmazt, amely a

$$P(t) = \sum_{j=0}^n t^j x_j \quad (x_j \in \mathfrak{E}; n = 0, 1, \dots)$$

⁸ Ha a tétel megfogalmazását kissé módosítjuk, az operátorok korlátosságára vonatkozó feltételtől meg lehet szabadulni.

alakú $P(t)$ „polinomokból” áll, értelmezzük rajta a

$$(10.13) \quad (P, Q) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m [S_{j+k} x_j, y_k] \quad (Q(t) = \sum_{k=0}^m t^k y_k; \quad y_k \in \mathfrak{E})$$

skaláris szorzatot, és tekintjük a $\mathfrak{H}$ Hilbert-teret, $\mathfrak{P}$ teljes burkát ($\mathfrak{P} = \mathfrak{H}$).

Értelmezzünk a $\mathfrak{P}$ halmazon egy H operátort a

$$HP(t) = tP(t) = \sum_{j=0}^n t^{j+1} x_j$$

egyenlőséggel.

A H operátor, ugyanúgy mint a 8.1. példában, hermitikus.

A II. feltételből következik, hogy H pozitív, ugyanis

$$(HP, P) = (tP, P) = \sum_{j,k=0}^n [S_{j+k} x_j, x_k].$$

A IX. tétel szerint H -nak van $\tilde{H}$ pozitív önadjungált folytatása. Legyen a $\tilde{H}$ operátor spektrálfüggvénye $E(t)$:

$$\tilde{H} = \int_0^{\infty} t dE(t).$$

Ekkor tetszés szerinti $x, y \in \mathfrak{E}$ elemekre fennáll (vö. a 8.1. példával):

$$(10.14) \quad [S_k x, y] = (H^k x, y) = \int_0^{\infty} t^k d(E(t)x, y) \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Az $E(t)$ operátorok a $\mathfrak{H}$ térben hatnak, de $(E(t)x, y)$ hermitikus bilineáris funkcionál $\mathfrak{E}$ -ben, és folytonos is, mert

$$0 \leq (E(t)x, x) \leq (x, x) = [S_0 x, x] \leq \|S_0\| [x, x].$$

RIESZ tétele szerint található olyan az $\mathfrak{E}$ térben ható $F(t)$ korlátos önadjungált operátor, amelyre

$$(10.15) \quad (E(t)x, y) = [F(t)x, y] \quad (x, y \in \mathfrak{E}).$$

Az $F(t)$ operátorfüggvény nem-csökkenő. Ennélfogva a (10.14), (10.15) összefüggésekből következik (10.10).

Abban az esetben, amikor a (10.11) formák között vannak elfajulók is, két $P, Q \in \mathfrak{P}$ polinomot ekvivalensnek fogunk tekinteni, ha

$$(P - Q, P - Q) = 0,$$

ahol (P, Q) a (10.13) egyenlőséggel értelmezett bilineáris funkcionál.

A t -vel való szorzás H operátora ekvivalens polinomokat ekvivalensekbe visz át. Ahhoz, hogy erről meggyőződjünk, elég megmutatni, hogy ha $(P, P) = 0$, akkor $(tP, tP) = 0$. Ez viszont abból következik, hogy

$$(tP, tP)^2 = (P, t^2 P)^2 \leq (P, P) (t^2 P, t^2 P).$$

Az ekvivalens polinomokat azonosítva a vizsgált esetet visszavezethetjük az előzőre.

Mint tudjuk, a H pozitív hermitikus operátornak van két szélső pozitív önadjungált folytatása, H_μ és H_M , és bármely más $\tilde{H}$ pozitív önadjungált folytatásra tetszés szerinti $a > 0$ esetén

$$(H_\mu + aI)^{-1} \equiv (\tilde{H} + aI)^{-1} \equiv (H_M + aI)^{-1}.$$

Ennek megfelelően a H_μ , H_M folytatások az operátoros momentum probléma két olyan $F_\mu(t)$, $F_M(t)$ extremális megoldását generálják, hogy az operátoros momentum probléma bármilyen $F(t)$ megoldására

$$\int_0^\infty \frac{dF_\mu(t)}{t+a} \equiv \int_0^\infty \frac{dF(t)}{t+a} \equiv \int_0^\infty \frac{dF_M(t)}{t+a}.$$

Ha $F_\mu(t)$ és $F_M(t)$ megegyezik, és csak ebben az esetben, a Stieltjes-féle operátoros momentum probléma megoldása egyértelmű.

A számokra vonatkozó momentum probléma ($\mathfrak{E}$ egydimenziós) esetére két ilyen extremális megoldás létezését Stieltjes [15] állapította meg.

Az olvasóra hagyjuk annak a bebizonyítását, hogy ha $m(S_0) > 0$, akkor a (10.10) alatti integrálok erős értelemben is konvergálnak.

IRODALOM

- [1] Н. И. Ахиезер, а) Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов, *Успехи математических наук*, № 9 (1941), 126—156; б) *Введение в теорию линейных операторов в пространстве Гильберта*, ч. I и II. Литоргафированный курс лекций, Харьков, 1940; lásd még: Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Москва, 1966.
- [2] Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн, *О некоторых вопросах теории моментов*, Харьков, 1938.
- [3] H. HAMBURGER, Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems, *Mathematische Annalen*, **82** (1921), 168—187.
- [4] T. CARLEMAN, а) *Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique*, Uppsala, 1923; б) *Les fonctions quasi analytiques*, Paris, 1926.
- [5] А. Н. Колмогоров, Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, *Бюллетень Московского государственного университета*, Математика, **2**, № 6 (1941).
- [6] М. Г. Крейн, а) Об эрмитовых операторах с дефект-индексами, равными единице. I, II, *Доклады Академии наук СССР*, **43** (1944) 323—326; **44** (1944), 131—134; б) Об одном замечательном классе эрмитовых операторов, *Доклады Академии наук СССР*, **44** (1944), 175—179; в) Об обобщенной проблеме моментов, *Доклады Академии наук СССР*, **44** (1944), 219—222; д) О логарифме безгранично разложимой эрмитово-положительной функции, *Доклады Академии наук СССР*, **45** (1944), 91—94; е) О проблеме продолжения винтовых линий в гильбертовом пространстве, *Доклады Академии наук СССР*, **45** (1944), 139—142; ф) Об одном обобщении исследований G. Szegő, В. И. Смирнова и А. Н. Колмогорова, *Доклады Академии наук СССР*, **46** (1945), 91—94; г) О самосопряженных расширениях ограниченных и полуограниченных эрмитовых операторов, *Доклады Академии наук СССР*, **48** (1945), 303—306; h) Об одном общем методе разложения эрмитово-положительных ядер на элементарные произведения, *Доклады Академии наук СССР*, **53** (1946) 3—6; i) Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения, *Математический сборник*, **20** (1947), 431—495; magyar fordítása: *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok Osztályának Közleményei*, **18** (1968), 273—314. és **19** (1969), 131—188.

- [7] М. А. Красносельский, О дефектных числах замкнутого оператора, *Доклады Академии наук СССР*, **56** (1947), 559—561.
- [8] М. С. Лившиц, а) Об одном применении теории эрмитовых операторов к обобщенной проблеме моментов, *Доклады Академии наук СССР*, **44** (1944), 3—7; б) О некоторых вопросах, связанных с определенностью проблемы моментов Hamburger'a, *Математический сборник*, **6** (1939), 293—306.
- [9] М. А. Наймарк, а) Спектральные функции симметрического оператора, *Известия Академии наук СССР, серия математическая*, **4** (1940), 277—318; б) О представлении аддитивных операторных функций множеств, *Доклады Академии наук СССР*, **41** (1943), 359—361; в) Об экстремальных спектральных функциях симметрического оператора, *Доклады Академии наук СССР*, **54** (1946), 7—9; д) О спектральных функциях симметрического оператора, *Известия Академии наук СССР, серия математическая*, **7** (1943), 285—296.
- [10] R. NEVANLINNA, а) Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltjesche Momentenproblem, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae, ser. A*, **18**, No. 5 (1922); б) Über beschränkte analytische Funktionen, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae, ser. A*, **32**, No. 7 (1929).
- [11] J. von NEUMANN, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Mathematische Annalen*, **102** (1929), 49—131.
- [12] А. И. Плеснер, а) Спектральная теория линейных операторов, I. *Успехи математических наук*, № 9 (1941), 3—125; б) Основные понятия спектральной теории эрмитовых операторов, *Успехи математических наук*, **1**, № 1 (1946), 192—216; lásd még: *Спектральная теория линейных операторов*, Москва, 1965.
- [13] И. И. Привалов, *Граничные свойства однозначных аналитических функций*, Москва, 1941; átdolgozott és bővített német fordítása: I. I. PRIWALOW, *Randeigenschaften analytischer Funktionen*, Berlin, 1956.
- [14] M. RIESZ, а) Sur le problème des moments I, II, III, *Arkiv för Matematik, Astronomie och Fysik*, **16**, No. 12 (1922); **16**, No. 19 (1922); **17**, No. 16 (1923); б) Sur le problème des moments et le théorème de Parseval correspondant, *Acta Litterarum ac Scientiarum (Szeged)*, sectio sci. math., **1** (1922—1923), 209—225.
- [15] Т. И. Стильтьес, *Исследования о непрерывных дробях*, Харьков, 1936.
- [16] J. A. SHOHAT, I. D. TAMARKIN, *The problem of moments*, New York, 1943.
- [17] K. FRIEDRICHS, Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, *Mathematische Annalen*, **109** (1934), 465—487.
- [18] H. FREUDENTHAL, Über die Friedrichssche Fortsetzung halbbeschränkter Hermitescher Operatoren, *Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam*, **39** (1936), 832—833.
- [19] А. И. Плеснер, В. А. Рохлин, Спектральная теория линейных операторов, II, *Успехи математических наук*, **1**, № 1 (1946), 71—191.
- [20] M. H. STONE, *Linear transformations in Hilbert space*, New York, 1932.

Fordította: Bognár János