ELLENTMONDÓ FELTÉTELRENDSZEREK KEZELÉSÉRŐL, II.*

Írta: POGÁNY CSABA

3. Feltételrendszer értelmezése és megoldása

Feltétel megadása — általánosan — kijelentés formájában történhet. (Kijelentésnek tekinthetők az egyenletek, egyenlőtlenségek és általában a relációk is.) Ha egy objektumra egy kijelentés igaz, akkor ez az objektum per definitionem kielégíti a kijelentés által reprezentált feltételt.

Feltételrendszeren a gyakorlat egyidejűleg kielégítendő feltételek halmazát (rendszerét) szokta érteni. Más szóval: az egyes kijelentésekből logikai „ÉS" művelettel képzett *egyetlen* kijelentés fennállásának megköveteléséről van szó. (Ez, mint valamiféle „normálforma" a gyakorlatban egyeduralkodóvá is vált.) Nem nehéz azonban a feltételek (kijelentések) más logikai műveletekkel történő összekapcsolásának értelmezése sem, amint ez a következő példákból is látható.

Legyen adva a következő három feltétel:

$$K_1(x) = (f_1(x) = 0),$$
$$K_2(x) = (f_2(x) = 0),$$
$$K_3(x) = (f_3(x) = 0).$$

A K_1 & K_2 & K_3 feltétel klasszikus formája és neve közismert: az egyenletek felsorolása mellett, „egyenletrendszer" a nevük.

K_1 & K_2 & K_3 azonban így is megadható

$$|f_1(x)|+|f_2(x)|+|f_3(x)| = 0,$$

vagy

$$(f_1(x))^2+(f_2(x))^2+(f_3(x))^2 = 0$$

stb.

$(K_1 \vee K_2)$ & K_3 megadható például

$$|f_1(x) \cdot f_2(x)|+|f_3(x)| = 0,$$

vagy

$$(f_1(x) \cdot f_2(x))^2+(f_3(x))^2 = 0,$$

vagy

$$|f_1(x) \cdot f_2(x)|+(f_3(x))^4 = 0$$

stb. módon is.

* E dolgozat a [7] cikk folytatása, ezért a fejezetszámozás is folytatólagos, tartalmilag a szerzőnek a [7]-ben említett kollokviumon tartott előadása részletesebb kifejtésével foglalkozik.

$\overline{K}_1 \vee (K_2 \,\&\, K_3)$ megadása történhet a

$$\left(|\mathrm{sg}\left(f_1(x)\right)|-1\right)\cdot\left(|f_2(x)|+|f_3(x)|\right)=0$$

relációval és számos más fomában is.

Látható a példákból az is, hogy egy feltételrendszer feltételeinek számával (számosságával) kapcsolatban indokolt az óvatosság. (Sajnos az „*n* egyenlet, *n* ismeretlen" kezdetű varázsszövegek és ökölszabályok máig is szilárdan tartják magukat a köztudatban és — sajnos — számos tankönyvben is.)

Az előző példákban a „feltételek száma csökkent". Egyszerűen adhatók azonban példák — a megoldhatóság változatlanul hagyása mellett — feltételek számának növelésére is.

Legyen adva még egy, például a

$$K_4(x)=\left(f_4(x)=0\right)$$

feltétel! Klasszikus szóhasználattal az

$$f_1(x)=0,$$
$$f_2(x)=0,$$
$$f_3(x)=0$$

három egyenletből álló egyenletrendszer „egyenértékű" a következő

$$f_1(x)=0,$$
$$f_2(x)=0,$$
$$f_3(x)=0,$$
$$f_4(x)\cdot\left(\mathrm{sg}\left(f_4(x)\right)+1\right)\cdot\left(\mathrm{sg}\left(f_4(x)\right)-1\right)=0$$

négy egyeletből álló egyenletrendszerrel, vagy az

$$f_1(x)=0,$$
$$f_2(x)=0,$$
$$f_3(x)=0,$$
$$\left(f_1(x)\right)^2+\left(f_2(x)\right)^4=0,$$
$$\left(f_2(x)\right)^6+\left(f_3(x)\right)^8=0$$

öt egyenletből álló egyenletrendszerrel stb.

Mint ismeretes, az egyes feltételek közötti függőség, illetve függetlenség fogalma elvileg számos nehézséget képes kiküszöbölni; ezek tárgyalása azonban nem képezi e cikk célját. Érdemes azonban megjegyezni, hogy míg a legutolsó példából rögtön látszik, hogy elég vagy csak a három első egyenlettel vagy csak a két utolsóval foglalkozni, a gyakorlatban egészen más a helyzet. Meggyőző példát szolgáltat erre az az eset, amelyben $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ rendre például másod-, harmad-, illetve negyedfokú polinom, a negyedik és ötödik egyenlet bal oldala pedig nem faktorizált, hatványsor formában van megadva.

Geometriai interpretációban a helyzet *lényegesen áttekinthetőbb.* Így minden feltétel (kijelentés) valamilyen (esetleg üres) halmaz egy indikátora (lásd [7]), és ez a kijelentés úgy is felfogható mint amely a szóban forgó halmazt *generálja.* Így tehát az egész problémakör az egyes feltételek (kijelentések) által generált halmazokkal végzett műveletekre (illetve a kijelentéskalkulusra) vezethető vissza.

Feltételrendszerek (pontosabban feltételek) megoldásának folyamata a feltétel (úgynevezett „megengedett") átalakításokkal történő átalakításaiból áll. Ezek az átalakítási műveletek feltételekből feltételeket (illetve kijelentésekből kijelentéseket) képeznek. A „megoldás" valamilyen értelemben a kiinduló (egyenletnél, relációnál) feltételnél, kijelentésnél *előnyösebb, használhatóbb, egyszerűbb.* (Természetesen hasonló a helyzet több megoldás létezése esetében is.)

4. Ellentmondó feltételek kezelése

Mint már szó volt róla, feltételrendszerek helyett helyesebb feltételt mondani, és ésszerű, és sokszor szükséges is, a feltételrendszert alkotó feltételeket összekapcsoló „ÉS" művelet helyett más műveletek szerepeltetését is megengedni. Mivel az itteni tárgyalás bevezető és illusztratív célú, a következőkben — egyszerűség kedvéért — csak a klasszikus „ÉS" művelettel összekapcsolt feltételekből álló eset szerepel, és feltételrendszeren is ilyent kell érteni.

Ellentmondó feltételrendszerek a gyakorlatban két, egymás határesetének tekinthető módon szoktak felmerülni. Az egyik esetben statisztikailag kezelhető véletlen tömegjelenségekkel, a másikban egyedi helyzetekkel kapcsolatban jelentkezik „megoldandó" ellentmondásos feltételrendszer. (A sztochasztikus modellek tárgyalása külön tanulmányt igényel, ezért a következőkben csak egyedi, determinisztikus esetek szerepelnek. Ezek az esetek speciális valószínűségeloszlásoknak felelnek meg.)

Az itt következő felsorolás az eljáráscsaládoknak csak rövid, általános jellemzését tűzi ki célul, részletes bemutatásuk, összehasonlító és kritikai elemzésük külön dolgozat feladata.

Hangsúlyozni kell, hogy az említésre kerülő eljárások — habár lineáris esetben a legegyszerűbbek — nemcsak lineáris egyenletrendszerek esetében alkalmazhatók.

1. eljáráscsalád

A kielégítendő feltételek halmazából valamilyen szabály szerint képzett részhalmaz valamilyen értelemben vett megoldása lesz az eredeti feltételrendszer (egy) „megoldása".

2. eljáráscsalád

A kielégítendő feltételek halmazából valamilyen szabály szerint képzett részhalmazok (részhalmaz) valamilyen értelemben képzett megoldásaira (megoldására) támaszkodva, valamilyen eljárással (például átlagolással) képezhető az eredeti feltételrendszer (egy) „megoldása".

3. eljáráscsalád

A feltételrendszer megoldását a megoldáshoz konvergáló sorozat fomájában előállító eljárások közül sok (lineáris esetekben lásd például [4], [5] és [6]) olyan, hogy az eljárások által szolgáltatott sorozat ellentmondó feltételrendszer esetében is képezhető. Ilyen esetekben, ha a szóban forgó sorozat konvergens, ennek határértéke lesz az ellentmondó feltételrendszer „megoldása". Ha az említett sorozat nem konvergens, akkor e sorozatra támaszkodó valamilyen eljárás eredménye definiálja az eredeti ellentmondó rendszer (egy) „megoldását". (Természetesen az ilyen eljárások között kitüntetett szerepe van a különböző határértékképzési módszereknek. Ezekre vonatkozóan lásd például [3] és [10].)

4.a. eljáráscsalád

Ha a feltételrendszer egyes elemei külön-külön mind kielégíthetők, akkor az egyes feltételek (kijelentések) által generált halmazok mindegyikében felvehető egy-egy elem (pont). Ezeknek az elemeknek a halmaza jellemezhető olyan szempontból, hogy az elemek mennyire *zsúfoltan,* mennyire *tömören* helyezkednek el. (Elhelyezési tömörség értelmezésére vonatkozóan lásd [1], [2], [8] és [9].) Az egyes feltételek által generált halmazból úgy választva ki egy-egy elemet, hogy az ezekből az elemekből álló halmaz maximális tömörségű legyen, egy így keletkező (vagy az összes vagy bizonyos így keletkező) halmaz felhasználható az eredeti ellentmondó feltételrendszer „megoldásának" definiálására. Néhány lehetséges mód a következő.

Legyen a tömörség a GINI-féle mérőszámmal jellemezve! Legyen egy „megoldás" egy minimális GINI-féle szóródási értékű elemrendszer súlypontja.

Legyen a tömörség a kiválasztott elemrendszer legszűkebb konvex burka térfogatával jellemezve! Definiáljon egy „megoldást" egy minimális térfogatot szolgáltató elemrendszer súlypontja.

Legyen a tömörség a kiválasztott elemrendszer köré írható legszűkebb gömb, a „külgömb" sugarával jellemezve! Az eredeti rendszer (egy) „megoldását" értelmezi e gömb középpontja.

4.b. eljáráscsalád

Feltételrendszerek megoldására szolgáló eljárások egy része a feltételrendszerből származtatott valamilyen szélsőértékfeladatot old meg. Az említett szélsőértékkereső eljárások nagy része ellentmondó feltételrendszerek esetében is alkalmazható, és a kapott eredmény segítségével definiálhatók különböző „megoldások".

5. eljáráscsalád

Feltételek és feltételrendszerek esetében számos esetben többféleképp is definiálható ezek közötti eltérés, pszeudoszemimetrika, pszeudometrika, szemimetrika, metrika vagy valamilyen hasonló, metrika jellegű, azok *„távolságával"* szorosabb kapcsolatban levő jellemző. Ha ily módon definiálható az ellentmondó feltételrendszerhez egy valamilyen értelemben legközelebbi, nem ellentmondó rendszer (vagy rendszerek), ez utóbbi nem ellentmondó rendszer (vagy rendszerek) megoldása (vagy megoldásai) segítségével értelmezhető az eredeti ellentmondó rendszer egy megoldása (megoldásai). (A képződő távolságok pedig legtöbbször valamilyen módon alkalmazhatók az ellentmondásosság mértékének jellemzésére.)

Ellentmondó feltételrendszer egyes feltételei által generált halmazok meghatározott sugarú környezeteit véve, a sugárértékeket olyan alkalmas módon változtatva, hogy a környezethalmazoknak legyen nem üres közös része, az előzőkkel szoros kapcsolatban levő „megoldások" definiálhatók.

Megjegyzések

1. Gyakorlati alkalmazások szempontjából nagyon fontos annak állandó figyelemmel kísérése és ellenőrzése, hogy az egyes általunk végzett átalakítások a valóságban értelmezhetők-e, megengedettek-e, illetve a végeredményt *hogyan kell helyesen értelmezni*. Sokszor előnyös a megoldási folyamatnak megfelelő gyakorlati folyamatok — ha ilyenek vannak — felderítésére törekedni.

2. Nem konvergens sorozatokból konvergens sorozatok képzése sokszor már egészen egyszerűen, például csúszó (mozgó) közepeléssel vagy különböző simító eljárásokkal (egyszerű digitális szűrők alkalmazásával) is kielégítően elvégezhető. (Hasonló a helyzet a lefedési és a kitöltési stb. sűrűségek egzakt értelmezésénél is.)

3. A feltételrendszer minden egyes feltételének külön-külön megoldható volta sokszor súlyos megkötés, amit különböző eljárásokkal fel lehet oldani — ha a feladat gyakorlati természete szempontjából ez megengedhető. Egy ilyen „önmagával is ellentmondó" feltétel valamilyen eljárással pótolható például két egyenként kielégíthető, de együttesen kielégíthetetlen feltétellel. (E feltételek által generált halmazok metszete tehát üres lesz.)

(Az önmagukban ellentmondó feltételek fellépése esetében gyakran célszerűbb az egész feltételrendszert egységes egészként felfogva új megfelelő rendszerrel pótolni az előzőt az egyes kielégíthetetlen feltételeknek a többitől független úton történő kicserélése helyett.)

4. Egy ellentmondó feltételrendszer ellentmondásosságának, kielégíthetetlenségének mérése a geometriai interpretációban nagyon egyszerűen elvégezhető tömörségi mérőszámokkal is.

Ha a feltételrendszer elemei által generált halmazokat vesszük, ezek bizonyos elhelyezkedési tömörségi mérőszáma is alkalmas alapot ad az ellentmondásosság, kielégíthetetlenség mérésére.

5. A 4.b. eljáráscsalád a 4.a. eljáráscsaládnál bővebb.

A tömörségi mérőszámok felhasználásával definiált megoldások megkeresése nyilván szélsőértékprobléma (problémák) megoldását igényli (igénylik).

Érdemes még megemlíteni azt a gyakorlatilag hasznosítható tényt, hogy bizonyos feltételekkel, szélsőértékkereső eljárások birtokában, gyökök meghatározása, gyökmeghatározó eljárások birtokában pedig szélsőértékkeresési feladatok oldhatók meg.

6. Néhány példa az 5. eljáráscsaládnál említett távolságjellemzőre:

Ha a feltételrendszer lineáris egyenletekből áll, ezek egyenként egy-egy vektorral jellemezhetők. E vektorok valamilyen távolságaival definiálhatók feltételek távolságai is.

Az előzőhöz hasonló módon definiálhatók távolságok polinomok esetében is.

A feltételek által generált halmazok szimmetrikus differenciájának (és még több más származék halmazának) valamilyen mértéke (ha ilyen definiálható) alkalmas lehet a feltételek közötti különböző jellegű „távolságok" mérésére.

Ilyen vizsgálatoknál előnyösen használhatók nemcsak objektumpárok, hanem objektumhármasok, objektumnégyesek stb. egymástól való eltérését jellemző függvények is.

7. Azoknál a módszereknél, amelyeknél a feltételrendszer minden egyes feltételének külön-külön kielégíthetőnek kell lennie, jogosult lehet egy-egy kielégíthetetlen feltételt (egy) őhozzá legközelebbi kielégíthetővel helyettesíteni.

8. Néhány utalástól eltekintve az itteni vizsgálatokban nem szerepelt a „megoldások" halmazának számossága. Ilyen általános tárgyalásnál erre nincs is mód. Sok esetben az eljárások csak egy lehetséges megoldást szolgáltatnak.

9. A feltételek különböző módon származtatott rendszereivel, valamint a feltételek számával (egyáltalán az egzisztenciájával) kapcsolatos megjegyzések szó szerint alkalmazhatók feltételes szélsőértékfeladatok esetében is.

10. Az olyan esetekre, amelyeknél a logikai „ÉS" műveleten kívül más műveletek (például „VAGY", „NEM" stb.) is szerepelnek, az egyes feltételeket összekötő műveletként, az itt elmondottak nem mindig vihetők át minden változtatás nélkül; ennek oka főleg a szimmetria-tulajdonságok hiányában van. Ahol szimmetria jellegű tulajdonság, például dualitás jelentkezik, a hasonlóság is nagyobb mértékű.

IRODALOM

[1] Benedikti István: Halmazrendszerek extremális tömörségű elrendezéseivel kapcsolatos problémák, I. *MTA III. Oszt. Közl.* **19** (1969), 359—374.

[2] Benedikti István: Halmazrendszerek tömörségéről, *MTA III. Oszt. Közl.* **20** (1971), 329—340.

[3] Hardy, G. H.: *Divergent Series*, Clarendon Press, Oxford 1956.

[4] Pogány Csaba: Geometriai approximációs módszerek el nem tűnő determinánsú lineáris egyenletrendszerek megoldására. *Gépek és programok* 5. kötet 1963. 81—102. old.

[5] Pogány Csaba: Megjegyzések lineáris egyenletrendszerek geometriai megoldási módszereiről, *Gépek és Programok* 6—7. kötet 1963. 33—35. old.

[6] Pogány Csaba: Lineáris egyenletrendszerek megoldása geometriai közelítő módszerekkel, *MTA III. Oszt. Közl.* **17** (1967), 151—160.

[7] Pogány Csaba: Ellentmondó feltételrendszerek kezeléséről, I. *MTA III. Oszt. Közl.* **19** (1969), 383—386.

[8] Tölgyesi László: Egy elhelyezési problémakörről, I. *MTA III. Oszt. Közl.* **19** (1969), 333—344.

[9] Ruda Mihály: Alakzatrendszerek tömörségével kapcsolatos vizsgálatok, *MTA III. Oszt. Közl.* **23** (1974), 203—237.

[10] Zeller, Karl: *Theorie der Limitierungsverfahren.* Springer Berlin—Göttingen—Heidelberg 1958.

(Beérkezett: 1973. XI. 5.)