ALAKZATRENDSZEREK TÖMÖRSÉGÉVEL KAPCSOLATOS VIZSGÁLATOK

Írta: RUDA MIHÁLY

1. Bevezetés

Ez a dolgozat olyan geometriai kérdésekkel foglalkozik, amelyek valamilyen kapcsolatban állnak alakzatok elhelyezésének tömörségével. A szereplő témák széles területet ölelnek fel, így ennek a cikknek fő célja nem részletes elemzés, hanem az utóbbi időben ezen a területen felmerült kérdések és a velük kapcsolatos fogalmak összefoglalása. Így a közölt tételeket itt nem bizonyítjuk, és a gyakorlati, illetve elméleti alkalmazásokat sem részletezzük. Hasonlóan, az egyes fogalmak és állítások összes kézenfekvő általánosítását sem tárgyaljuk, hanem általában a legegyszerűbb modelleket alkalmazzuk. (Néhány esetben azonban jelezzük az általánosítás lehetőségeit is.) Következő dolgozatok feladata lesz a vizsgált területek részletes feldolgozása.

Az itt tárgyalt kérdések nemcsak elméleti szempontból, hanem gyakorlati feladatokhoz, például fizikai, kémiai problémákhoz való kapcsolódásuk miatt is érdeklődésre tarthatnak számot. (Közvetlenül kapcsolódó fizikai kérdésként anyagszerkezeti, kristálykémiai problémákat említhetünk, erről l. például a [8] könyvet.) Többek között ennek, az utóbb említett fizikai, kristálykémiai kapcsolatnak is tulajdonítható, hogy az általunk vizsgált elhelyezési problémáknál általában nem kerül előtérbe az egyes elhelyezett elemek alakjának fontossága, — például egyszerűen pontelhelyezéseket vizsgálunk, vagy csupán gömb alakú elemek esetére szorítkozunk — hanem egymáshoz viszonyított elhelyezkedésüket tekintjük elsősorban. Ezen belül főleg azt vizsgáljuk, hogy az egyes elrendezések elemei valamilyen adott szempont szerint mennyire tömören, illetve mennyire lazán helyezkednek el. A tömörség (lazaság) mértékét az elhelyezéseken értelmezett függvények értékeivel jellemezzük.

A következőkben elsősorban olyan elrendezésekkel foglalkozunk, melyek elemszáma végtelen. Itt két esetet különböztethetünk meg. Állhat egy elrendezés eleve (megszámlálható) végtelen sok elemből, például akkor, amikor a teljes sík egy négyzetrácsának minden csúcspontjába elemként egy egységkört helyezünk. Hasonlóképpen végtelen sok elemű elrendezéshez juthatunk egy véges elemszámú elrendezésből kiindulva úgy, hogy egy eljárást adunk, melynek segítségével egy n elemű elrendezésből egy $n+k$ elemű elrendezésbe juthatunk, tetszőlegesen nagy n értékekre is. Az utóbbi esetben még két lehetőség van. Vagy változatlanul hagyjuk a kiindulásként adott n elemet, és csak a k új elemet kell megadni, vagy az eredeti n elem közül is megváltoztatjuk néhánynak a helyzetét, nagyságát, alakját. Ennek a megkülönböztetésnek elsősorban az egyes problémák megfogalmazásakor van jelentősége.

Az általunk vizsgált tömörségi függvények (véges elemszámú elrendezéseknél) nagyrészt szerepelnek BENEDIKTI [1], [2], TAKÁCSY [12], TÖLGYESI [13] dolgozatában. Az itt tárgyalt általános problémákra — kiemelve az eloszlásokkal kapcsolatos vizsgálatok fontosságát — POGÁNY CSABA hívta fel a szerző figyelmét, ez a dolgozatban szereplő speciális kérdések jelentős részére is vonatkozik.

Bár halmazelrendezések kitöltési, lefedési sűrűsége az adott elrendezés tömörségének egy jellemzője, most itt nem utalunk a széles körben vizsgált kitöltési és lefedési problémák gazdag irodalmára.

A következő szakaszokban a tárgyalt kérdéseket a szereplő tömörségfüggvények tulajdonságai szerint csoportosítjuk.

2. Távolságösszeg mérőszám

Halmazelrendezések tömörségének jellemzésére kézenfekvő az egyes elemek között mérhető távolságokat felhasználni. Távolságként például a szokásos halmaztávolságokat vehetjük. Ugyanilyen módon jellemezte például C. GINI statisztikai vizsgálatoknál diszkrét pontrendszerek szóródását, az egyes pontpárok távolságának összegével (l. például [14]). Diszkrét pontrendszerek távolságösszeg minimumát vizsgálja az [5] dolgozat, hét pontból álló rendszer esetére. A távolságösszeg függvénnyel, mint halmazrendszerek tömörségének mértékét kifejező értékkel foglalkozik [1], [12], [13] dolgozat.

Cikkünkben egységesen a következő jelölést használjuk. Ha ettől eltérünk, külön jelezzük.

Jelölés: Legyenek a h_i elemek $(i=1, 2, \ldots)$ egy síkon elhelyezett zárt körlemezek, melyeknek legfeljebb határpontjaik közösek. Ezeknek a körlemezeknek különféle elrendezésével különféle H halmazokat képezünk. Egy-egy ilyen H elrendezésen értelmezünk különféle $s_j(H)$ $(j=1, 2, \ldots)$ tömörségfüggvényeket.

Elempárok távolságösszege

1. DEFINÍCIÓ. Rendeljünk egy H elrendezés minden egyes h_i eleméhez kölcsönösen egyértelműen egy-egy p_i pontot. Legyen.

$$s_1(H) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \delta(p_i, p_j),$$

ahol $\delta(p_i, p_j)$ a p_i és p_j pont távolsága.

MEGJEGYZÉSEK. 1. Pontok közti távolságok helyett tekinthetünk közvetlenül a h_i elemeken értelmezett távolságokat, például a $\delta(h_i, h_j)$ távolság lehet a két elem halmaztávolsága, halmazeltérése vagy az $\frac{1}{2}\int_{g_{i,j}} \delta(p_i, p_j)\, df$ integrál (ahol $p_i \in h_i$, $p_j \in h_j$, $\delta(p_i, p_j)$ a p_i, p_j pontok távolsága, $g_{i,j}$ a h_i és h_j elem *Descartes*-szorzata) stb.

2. A fenti definícióban szereplő p_i pontok megválasztása különféleképpen történhet. A p_i pontot rögzíthetjük a h_i-hez annak belsejében vagy egy külső pontban. A rögzítést feloldva bizonyos tartományokon, például h_i belsejében vagy egy adott környezetében, tetszőlegesen helyezhető el p_i. Ilyenkor, ha extremalitásra törekszünk, a p_i pontok helyzete függ az egész H elrendezéstől valamint a többi p_j, $j \neq i$ pont helyzetétől, és fordítva.

Az [1], [12] és [13] dolgozatban is szerepel a következő meghatározás.

2. DEFINÍCIÓ. Az eddigi jelöléseket használva, a h_i elemekhez rögzített p_i pontot „fix mérőpontnak”, a mozgathatót „lebegő mérőpontnak” nevezzük. A megfelelő extremális elrendezéseket és a hozzájuk tartozó tömörségfüggvény értékeket fix, illetve lebegő mérőpontos extremumoknak hívjuk.

MEGJEGYZÉS. A fix és a lebegő mérőpont fogalma nemcsak az $s_1(H)$ (távolságösszeg) függvénynél, hanem minden olyan tömörségfüggvénynél is értelmezhető, ahol a tömörséget (lazaságot) egyes pontok helyzetével jellemezzük. Ugyanígy beszélhetünk fix, illetve lebegő részhalmazokról is.

Az [1] dolgozatban szerepel a következő

1. Kérdés. Milyen különbségek, kapcsolatok vannak a fix és a lebegő mérőpontos extrémumok között? Milyen kapcsolat, illetve különbség van egy adott H elrendezés fix, illetve lebegő mérőpontos tömörségértéke között? Adott H elhelyezésnél mi lesz a lebegő mérőpontok extremális tömörségértéket szolgáltató elhelyezkedése?

Egy speciális tétel kimondható arra az esetre, amikor a h_i elemek nemcsak körök, hanem tetszőleges dimenziós gömbök is lehetnek.

1. TÉTEL. *Legyen a H elrendezés r sugarú kongruens gömbök n elemű halmaza. Rögzítsük a p_i pontokat a h_i elemek (gömbök) középpontjába. Jelölje ekkor T az $s_1(H)$ értékét. Jelölje továbbá T' a lebegő mérőpontos távolságösszeg minimumát ugyanarra a H elrendezésre, feltéve, hogy $p_i \in h_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Ekkor $T' > T - \frac{n^2}{2} \cdot r$.*

Az 1. tétel különféle általánosításait, illetve specializálását tartalmazza a

2. TÉTEL. *Megtartva az 1. tétel jelöléseit:*

a) *Egydimenziós esetben (amikor a gömbök intervallumok),*

ha n páros, $T' = T - \frac{n^2}{4} r$,

ha n páratlan, $T' = T - \frac{n^2-1}{4} r$.

b) *Ugyancsak egydimenziós esetben, ha intervallumoknak egy sorozatát tekintjük, melyre a h_i intervallumok a_i átmérőinek összege korlátos: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = d$, és a H elrendezés olyan, hogy a h_i elemeknek egyetlen torlódási pontja van, akkor* $\lim_{n\to\infty} \frac{T'}{T - \frac{1}{2} d \cdot n} = 1$, *(ahol n az elemek száma).*

c) *Tetszőleges h_i tartományokból álló megszámlálható H elrendezésekre igaz a $T' \leqq T$ reláció, melyben nem véges elemszámú elrendezésekre az egyenlőség is felléphet.*

Lebegő mérőpontos extrémumok vizsgálata már aránylag egyszerű H elrendezések esetén is bonyolult diszkussziót igényel. Ilyen vizsgálatok szerepelnek az [1], [12] és [13] dolgozatokban.

A továbbiakban fix mérőpontos tömörségfüggvényeket tekintünk.

Egydimenziós elrendezések

Sok érdekes probléma merül fel már egy egyenesen elhelyezett intervallumsorozatra vonatkozó $s_1(H)$ függvény vizsgálatakor is. Tekintsünk most ilyen kérdéseket! Általában az $s_1(H)$ minimumát keressük, tehát a H elrendezés feltétlenül összefüggő. (A h_i zárt intervallumok végpontjaikban érintkeznek.) Elegendő tehát egy szakasz — például egységszakasz — különböző véges vagy végtelen felbontásait vizsgálni.

Végtelen sok elemből álló felosztást (mint ahogy a bevezetésben említettük) kétféleképpen is nyerhetünk. Vagy úgy osztjuk fel az intervallumot, hogy az egyes részintervallumok hossza egy előre adott a_i sorozat: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$, például $a_i = \frac{1}{2^i}$, vagy egy olyan eljárást alkalmazunk, mely egy minden határon túl növekvő elemszámú felbontás sorozatot határoz meg, például az i-edik lépésben i egyenlő részre osztjuk az egységszakaszt.

3. Definíció. Az első esetben azt mondjuk, hogy a h_i elemeket „sorozatban" adjuk meg, míg a másodikban „iterált" megadási módról beszélünk.

Minden határon túl növekvő elemszámú felosztásnál az $s_1(H)$ érték nem maradhat korlátos. Ilyenkor csak a végtelenhez tartó n felosztásszámhoz viszonyított nagyságrendet figyeljük. A következőkben főleg az utóbbi problémával foglalkozunk, bár speciális esetekben véges elemszámú elrendezésekre is meghatározzuk az $s_1(H)$ függvény értékét.

3. Tétel. *Legyenek adva az egységintervallum H_n n elemű felosztásai. Annak, hogy a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1(H_n)}{\alpha\cdot n} \leqq 1 \tag{1}$$

egyenlőtlenség teljesüljön, ahol α alkalmasan választott rögzített, korlátos, pozitív érték, szükséges és elégséges feltétele a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i\cdot a_{i,n} = c$$

egyenlőség teljesülése, ahol c korlátos, $a_{i,n}$ a H_n elrendezés i-edik eleme. Ha a h_i elemek nagyság szerint monoton csökkenő sorrendben követik egymást, akkor az (1) *egyenlőtlenségben ha $\alpha = c - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ $\left(\text{egységszakasz felbontásánál } \alpha = c - \frac{1}{2}\right)$ az egyenlőség teljesül.*

Megjegyzések. 1. Nem korlátos intervallumnak a felosztásánál az (1) egyenlőtlenség nyilván nem teljesülhet.

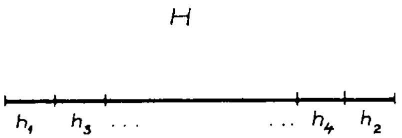
2. A 3. tételben adott feltétel teljesülésének szükséges feltétele, hogy a h_i részintervallumoknak egyetlen torlódási pontja legyen — ez azonban nem elégséges feltétel. Egy olyan sorozatra, melyre teljesül a 3. tétel feltétele, példa az a h_i sorozat, melynek elemhosszai: $a_i = (1-q)q^{i-1}$ mértani sorozat $\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1,\ 0<q<1\right)$. Ekkor $\alpha = \frac{1+q}{1-q}$. Olyan elemsorozatra, mely az egységszakaszt tölti ki, egyetlen torlódási

pontja van, melyre azonban az $s_1(H)$ érték mégsem arányos az elrendezés n elemszámával, példa az olyan h_i elemekből álló felbontás, ahol a h_i elemek a_i hosszára $a_i = \frac{1}{i^2} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, hiszen van olyan pozitív c érték, melyre ekkor $\lim_{n\to\infty} s_1(H_n)/\log(n) \cdot n > c$.

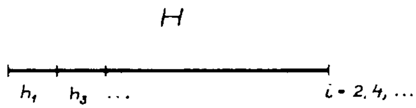
Érdemes megvizsgálni, hogy egy H elrendezés elemeinek megváltoztatásával hogyan változik H tömörsége, például $s_1(H)$. Ilyen kérdésekkel foglalkozik a [2] dolgozat is. Általában az egyes H elrendezéseken, illetve a h_i elemsorozatokon értelmezett műveleteket vizsgálunk a következő szakaszban.

Műveletek a H elrendezéseken

Egy intervallum végtelen sok részintervallumra való felbontásánál, ha a részintervallumoknak egyetlen torlódási pontja van, a következő két módon indexezhetjük a h_i elemeket: 1. ha a torlódási pont a H szakasz belsejében van, vagy a H véges elemszámú, a h_i elemeket (i = 1, 2, ...) a H szakasz két szélétől indulva, befelé haladva egyesével váltogatva indexezzük, (1. ábra),



1. ábra



2. ábra

2. ha a h_i elemek torlódási pontja a H egyik végpontjában van, akkor a másik végpontból indulva kettesével indexezzük az egymás után következő részintervallumokat. Az ellenkező paritású indexeket a torlódási ponthoz rendeljük (2. ábra).

Ez az indexezési eljárás a következő kérdések és állítások megfogalmazását könnyíti. Több torlódási pont esetén az elemek indexezése bonyolultabb.

3. DEFINÍCIÓ. A H intervallumfelbontásokon a következő műveleteket vizsgáljuk:

a) Felcseréljük a h_i és h_j elemeket úgy, hogy az indexezést meghagyjuk, vagy úgy, hogy az indexeket is felcseréljük.

b) Egy vagy több intervallum hosszának növelése mellett más részintervallumok hosszát csökkentjük.

c) Speciálisan, két szomszédos h_i, h_{i+2} intervallum közös határpontját mozgatjuk a h_i és h_{i+2} egyesítésén belül.

MEGJEGYZÉS. A h_i részintervallumokat mindig úgy változtatjuk, hogy a teljes H szakasz változatlan marad.

4. TÉTEL. *Ha egy H_1 és egy H_2 felbontás azonos elemszámú, vagy végtelen sok elemű, de mindkét rendszer egyetlen torlódási ponttal rendelkezik, akkor a* 3. *definícióban adott* a) *és* c) *műveletek ismételt alkalmazásával H_1-ből H_2-be juthatunk (és fordítva). Ugyanezt elérhetjük a* b) *művelet ismételt alkalmazásával is.*

Ez utóbbi állítás véges elemszámú H felbontásoknál, vagy ha megengedjük, hogy egy lépésben megszámlálhatóan végtelen sok elemet is megváltoztassunk, triviálisan igaz.

5. TÉTEL. *A szakasz elején leírt indexelési módot alkalmazva (legfeljebb egy torlódási pontot tartalmazó H elrendezésekre) a következő műveletek növelik az $s_1(H)$ értékét:*

a) *Felcserélünk két olyan h_i és h_j részintervallumot, melyekre, ha j páros, $j>i+1$, ha j páratlan, $j \geqq i+1$ és h_j hosszab mint h_i.*

b) *Egy vagy több h_j elemet növelünk, és a H szakasz hosszának változatlanul hagyásával olyan i indexű h_i részintervallumokat csökkentünk, hogy* $\min(j) > \max(i)+1$, *illetve ha* $\min(j)$ *páratlan, akkor* $\min(j) > \max(i)$.

c) *A* b) *pont állítása speciálisan, szomszédos részintervallumok közös határpontjának mozgatására is igaz.*

A fenti pontoknak megfelelően megadhatók azok a feltételek is, melyek az $s_1(H)$ értékének csökkenését vagy változatlanul maradását biztosítják az egyes h_i elemek cseréje vagy másfajta változtatása közben.

4. DEFINÍCIÓ. A szakaszcsere (l. 3. definíció a) pont) ismétlésével — de közvetlenül is — megadhatjuk a H elrendezések különféle átrendezéseit. Ilyenkor a h_i elemek változatlanok, csak indexezésük (sorrendjük a H elrendezésben) változik meg.

Az 5. tétel következménye a következő

6. TÉTEL. *Egy adott h_i elemekből álló intervallumfelosztás különböző átrendezései közül minimális $s_1(H)$ függvényértéket ad, vagyis „legtömörebb" elrendezésű az, melyben a szakasz elején leírt indexezést alkalmazva $h_i \geqq h_j$, ha $j>i+1$, illetve ha j páratlan, akkor $j=i+1$ esetén is. Ilyen elrendezéshez úgy jutunk, hogy a H intervallum két végpontjából indulva nagyság szerint monoton csökkenő sorrendben egyesével váltogatva helyezzük el az intervallumfelbontás h_i elemeit. A leglazább felbontást (H összefüggő), vagyis amikor $s_1(H)$ maximális, az az elrendezés adja, melyben $h_i \leqq h_j$, ha $j>i+1$, ha j páratlan, akkor $j=i+1$ esetén is.*

Az előző két tétel után azonnal látható, hogy adott h_i elemek mellett legtömörebb, leglazább, illetve tetszőleges rögzített tömörségű intervallumfelosztást különféle elrendezések is adhatnak.

5. DEFINÍCIÓ. Egy H szakasz felbontását szimmetrikusnak nevezünk, ha minden páratlan i indexre a h_i és h_{i+1} elemek hossza egyenlő. Azt mondjuk, hogy szimmetrizálunk egy felosztást, ha minden páratlan i indexre a h_i és h_{i+1} elemeket olyan részintervallumokkal helyettesítjük, melyek hossza az előző kettő hosszának számtani közepe.

7. TÉTEL. *Tetszőleges H intervallumfelosztás szimmetrizálása változatlanul hagyja $s_1(H)$ értékét.*

8. TÉTEL. *Megszámlálható végtelen sok elemű, egyik végpontjában egyetlen torlódási ponttal rendelkező H intervallumfelbontás szimmetrizáltja az eredeti elrendezés 1/2 arányú kicsinyítésének és a kicsinyített példánynak a torlódási pontra való tükrözésének egyesítése.*

Egy irányban monoton fogyó hosszúságú h_i elemekből álló H elrendezés — nevezzük ezt röviden monoton rendezésűnek — szimmetrizáltja olyan, hogy az őt alkotó h_j részintervallumok egy legtömörebb elrendezését adja, az $s_1(H)$ mérőszámra vonatkozóan (l. a 6. tételt). Érdekes összehasonlítás adódik egy h_i szakaszsorozat legtömörebb rendezésére és monoton rendezettjének szimmetrizáltjára adódó $s_1(H)$ érték között.

Különböző H intervallumfelosztások szimmetrizáltja is lehet azonos. A 8. tétel következményeként kimondható azonban a következő

9. TÉTEL. *Minden határon túl növekvő elemszámú, azonos szimmetrizáltat adó rendszerek monoton rendezésű határhelyzete egyértelmű.*

2. Kérdés. Hogyan adható meg nem egyetlen torlódási ponttal rendelkező végtelen sok elemű rendszerek szimmetrizáltja? Hogyan határozható meg „iterált" megadási móddal (3. definíció) nyert rendszerek szimmetrizáltja? Ez utóbbi kérdés általánosabb formában is felmerül, mivel az elrendezés egyes elemeit csak mint határhelyzetet ismerjük, ezért a velük való bármely operáció definíciós problémákat vet fel.

10. TÉTEL. *Legyen adott a H_n elrendezések egy olyan sorozata, melynek létezik egy H határhelyzete. Ekkor a H_n elrendezések szimmetrizáltjainak sorozata rendelkezik határelrendezéssel, mely éppen a H szimmetrizáltja.*

6. DEFINÍCIÓ. Egy H elrendezésen belüli átlagolásnak nevezzük azt a műveletet, amikor — a szakasz elején leírt indexezési módot alkalmazva — a szomszédos h_i, h_{i+2} elemeket, melyek hossza a_i, illetve a_{i+2}, az $a_i-\alpha\cdot\Delta$ és $a_{i+2}+\alpha\cdot\Delta$ hosszúságú elemekkel helyettesítjük, ahol $\Delta=a_i-a_{i+2}$, α rögzített érték, melyre $0<\alpha<1$. Az α értékét az átlagolás súlyának nevezzük.

7. DEFINÍCIÓ. n különböző H_i $(i=1,2,\dots,n)$ elrendezés α_i súlyokkal vett átlagának nevezzük az $a_j=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_{i,j}$ hosszúságú elemekből álló elrendezést, ahol $a_{i,j}$ a H_i elrendezés $h_{i,j}$ elemének hossza, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ és az elemek sorrendjét a j index határozza meg.

A következő tételben az előző definíciókkal kapcsolatos néhány egyszerű állítást sorolunk fel.

11. TÉTEL. a) *Monoton sorozaton belüli átlagolás megtartja a monotonitást.*

b) *Véges elemszámú intervallumfelbontáson az átlagolást minden szomszédos elempárra tetszőlegesen sokszor ismételten alkalmazva, intervallumfelosztások egyenlőközű felosztáshoz tartó sorozatát kapjuk.*

c) *Különböző, monoton rendezésű intervallumfelosztások átlaga megtartja a monotonitást.*

3. Kérdés. A tétel b) állítása általánosítható-e (és ha igen, akkor hogyan) végtelen sok elemű intervallumfelbontás esetére?

A következőkben a különböző intervallumfelosztások geometriai tulajdonságai és a rajtuk értelmezett $s_1(H)$ tömörségérték közti kapcsolatokkal foglalkozunk.

Az $s_1(H)$ függvényérték nagyságrendjének vizsgálata

Tekintsük egységintervallumok különféle felbontásait.

12. TÉTEL. *Azoknak az n elemű h_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ részintervallum sorozatoknak, melyekre teljesül a 3. tétel feltétele (a h_i elemek számával arányos nagyságrendű $s_1(H)$ függvényértéket szolgáltató elrendezés állítható elő belőlük), legtömörebb H_n elrendezéseire* (1. a 6. tétel) *igaz a*

$$\lim_{n\to\infty} s_1(H_n)/\alpha \cdot n = 1$$

reláció, ahol $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty}\left(i-\frac{1}{2}\right)(a_{2i-1}+a_{2i})$, *($a_i$ a h_i elem hossza, az indexezés az előző szakaszban adott módon történik).*

Speciálisan, ha például a h_i elemek a_i hossza: $a_i=(1-q)q^{i-1}$, akkor $\alpha= =\frac{1+q^2}{2(1-q^2)}$ $(0<q<1)$. Ez az érték mindig kisebb, mint a monoton rendezésű intervallumfelosztásra adódó $\alpha=\frac{1+q}{1-q}$ érték. A leglazább elrendezésben (1. 6. tétel) viszont $\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot s_1(H_n)}{n^2}=1$.

13. TÉTEL. *Az egységintervallum tetszőleges n elemű H_n felbontásaira*

$$\frac{4\cdot s_1(H_n)}{n^2} \leqq 1 \leqq \frac{2\cdot s_1(H_n)}{n}.$$

A jobboldali egyenlőtlenségben az $a_1=1$, $a_i=0$ $(i=2, 3, \ldots)$ elfajult elemsorozat legtömörebb elrendezésére, illetve az $n=2$ esetre teljesül az egyenlőség. A baloldali egyenlőtlenségben az egyenlőség minden „sorozatban” megadott (ld. 3. definíció) *végtelen elemszámú h_i elemsorozat leglazább elrendezésére teljesül.*

Többdimenziós elrendezéseknél, ha a p_i mérőpontok konvex burka egységátmérőjű, $s_1(H_n)\leqq c\cdot n^2$, ahol c a dimenziószám függvénye.

4. Kérdés. A c érték monoton csökkenő függvénye a dimenziószámnak, vagy sem? Adott dimenziószám esetén milyen korlát adható c értékére?

5. Kérdés. Milyen közbeeső $s_1(H_n)$ értékek realizálódhatnak a 13. tételben adott határok között? Milyen elrendezések tartoznak ezekhez a közbeeső értékekhez?

14. TÉTEL. *Az egységintervallumon minden „sorozatban” adott, végtelenhez tartó elemszámú felbontásból bármely $c\cdot n^2$ $\left(0<c<\frac{1}{4}\right)$ nagyságrend elérhető egy megfelelő átrendezéssel. Ennél kisebb nagyságrend érték nem mindig érhető el* (erről l. még a 15. tételt). *A* 3. *tétel feltételét kielégítő h_i elemsorozatokra viszont mindig van olyan elrendezés, melyre $\lim_{n\to\infty}\frac{s_1(H_n)}{n\cdot f(n)}=1$, ahol $f(n)$ bármely olyan függvény lehet, melyre $\lim_{n\to\infty} f(n)=\infty$, de $f(n)<n$ és $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{f(n+k)}=1$ minden rögzített pozitív egész*

k-ra. Ez utóbbi feltétel, a fent adott kikötések mellett, szükséges és elégséges a $\lim_{n\to\infty} \frac{s_1(H_n)}{n \cdot f(n)} = 1$ *teljesüléséhez.*

Az $s_1(H_n)$ függvény nagyságrendjének egy másfajta változtatására ad példát a következő tétel.

15. TÉTEL. *Legyen a h_i elemek a_i hossza $a_i=(1-q)q^{i-1}$ ($i=1, 2, \ldots$ mértani sorozat). Ekkor, ha a h_i elemeket monoton csökkenő sorrendben helyezzük el, a q ($0<q<1$) függvényében tetszőleges, az előző tételben leírt $f(n)$ függvényt megadhatunk úgy, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1(H_n)}{n \cdot f(n)} = 1,$$

ha $\frac{1}{2}<f(n)<\frac{1}{6}n$. *Az* $f(n)=\frac{1}{6}n$, *illetve az* $f(n)=\frac{1}{2}$ *határeset a* $q=1$, *illetve a* $q=0$ *határesetben lép fel. Ha q értékével tartunk az 1 felé, akkor egy „iteráltan" megadható intervallumfelosztáshoz tartunk.*

Tekintsünk most „iteráltan" megadott elrendezéseket!

16. TÉTEL. *Legyen H_n az egységintervallum n elemű egyenlőközű felosztása. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{6 \cdot s_1(H_n)}{n^2} = 1. \tag{2}$$

Ha a H_n elrendezés h_i elemeinek a_i átmérői számtani sorozatot alkotnak, vagyis megfelelőn választott a_0 és d értékre $a_i=a_0+(i-1)\,d$ ($i=1, 2, \ldots, n$), akkor monoton rendezésben teljesül a (2) egyenlőség. Legtömörebb elrendezésben

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8 \cdot s_1(H_n)}{n^2} = 1,$$

leglazább elrendezésnél (H összefüggő)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{24 \cdot s_1(H_n)}{5 \cdot n^2} = 1.$$

MEGJEGYZÉSEK. 1. Véges n-re a mértani sorozat, számtani sorozat és egyenlőközű felosztás esetén az $s_1(H_n)$ érték pontosan ismert. (Ezeket a képleteket itt nem közöljük.)

2. Érdekes, hogy az egyenletes felosztás és a monoton rendezésű számtani sorozat esetén $s_1(H_n)$ asszimptotikusan azonos.

3. Véges sok, véges indexű h_i elem cseréje monoton rendezésű felosztásoknál a $\lim_{n\to\infty} s_1(H_n)$ értéket nem változtatja meg.

6. Kérdés. Melyek azok az n elemű intervallumfelosztások, amelyekre $\lim_{n\to\infty} s_1(H_n)$ mindenfajta átrendezéssel szemben invariáns? Triviális példaként az egyenlőközű felosztás adható.

17. TÉTEL. *Ha monoton rendezésű, n elemű H_n elrendezések sorozatára*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1(H_n)}{c\cdot n^2} = 1, \tag{3}$$

ahol c egy tetszőleges, korlátos pozitív érték, akkor a H_n felosztások minden átrendezésére teljesül a (3) egyenlőség, természetesen a c értéke közben megváltozhat.

Különböző intervallumfelosztások átlagával (1. 7. definíció) kapcsolatban mondjuk ki a következő tételt.

18. TÉTEL. *Legyenek adva H_i elrendezések $(i=1, 2, \dots, n)$ $h_{i,j}$ $(j=1, 2, \dots)$ elemei. Ezeknek az elrendezéseknek α_i súllyal vett H átlagában a h_k és h_l elemek távolsága (a középpontok távolsága) egyenlő a $h_{i,k}$ és $h_{i,l}$ $(i=1, \dots, n)$ elempárok távolságainak α_i súlyú átlagával. Következésképpen, intervallumfelosztások átlagán nyert $s_1(H)$ függvény az egyes felosztások $s_1(H_i)$ függvényeinek α_i súlyú átlagával egyenlő.*

MEGJEGYZÉS. Megszámlálhatóan végtelen sok elrendezés átlaga is értelmezhető, ekkor azonban kérdéses az átlagelrendezés egyes elemeinek létezése.

Távolságeloszlás függvények

8. DEFINÍCIÓ. Egy tetszőleges H elrendezés h_i elemeihez rendelt p_i „mérőpontok" között mért távolságok összességét a H elrendezésen értelmezett távolságeloszlásnak nevezzük.

7. *Kérdés.* Milyen távolságeloszlásokhoz található megfelelő H elrendezés?

Ez a kérdés általánosabb esetekben is felvethető. Tekinthetünk például tetszőleges metrikus teret. A háromszög egyenlőtlenség még ebben az esetben is bizonyos megkötéseket ad a távolságeloszlásra, kettőnél több pont esetén. Euklideszi-térben levő n elemű pontelrendezést egybevágóság erejéig egyértelműen meghatározza az $\binom{n}{2}$ távolság.

Egydimenziós elrendezéseknél maradva, a távolságeloszlás fogalma további általánosítást is kínál. Megszámlálható elemszámú elrendezéseken túl vizsgálhatjuk, hogy egy szakasz valamennyi pontpárján értelmezett folytonos távolságeloszlás milyen. Ebből a távolságeloszlásból integrálással nyerhetünk az $s_1(H)$-hoz hasonló tömörségfüggvényeket.

9. DEFINÍCIÓ. Az egyenes egy d átmérőjű H tartományán értelmezett $f(r)$ távolságeloszlás függvény legyen

$$f(r) = \int_R dx,$$

ahol $0 \leqq r \leqq d$, R pedig olyan x pontoknak a halmaza, melyekre x és $x+r$ is pontja a H-nak.

Például, ha H az egységintervallum, akkor $f(r) = 1 - r$.

MEGJEGYZÉS. Ez és a következő definíció közvetlenül általánosítható magasabb dimenziós terekre.

Súlyfüggvények alkalmazásával a távolságeloszlás általánosabb formában is megadható.

10. DEFINÍCIÓ. Az egydimenziós H tartományon értelmezett $f(r)$ távolságeloszlás legyen

$$f(r)=\int_H s(x+r)\cdot s(x)dx,$$

ahol $s(x)$ a H-n értelmezett pontsűrűség függvény, melyre $s(x)=0$, ha $x\notin H$. A 9. definícióban $s(x)$ a H karakterisztikus függvénye.

8. Kérdés. Véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok elemű H elrendezésekhez hasonlóan folytonos távolságeloszlás esetén is kérdés: mikor létezik egy $f(r)$ függvényhez egy H elrendezés és egy azon értelmezett nem negatív $s(x)$ pontsűrűség.

A továbbiakban folytonos pontelhelyezés kérdéseivel — például azzal, hogy hogyan valósítható meg diszkrét, asszimptotikusan végtelen elemszámú elrendezésekről folytonos rendszerekre való áttérés — itt nem foglalkozunk.

Az eddigiekhez hasonlóan a továbbiakban is elsősorban egydimenziós elrendezéseket vizsgálunk.

Intervallumfelosztások tulajdonságai és tömörségük kapcsolata

A következő tételben néhány egyszerű állítást foglalunk össze.

19. TÉTEL. a) *Az egységintervallum n elemű felosztásai közül a monoton rendezésűek, az $s_1(H)$ függvény szerint tömörebbek, mint az egyenlőközű felosztás.*

b) *Ha két azonos elemszámú felosztás közül monoton rendezésben az egyik tömörebb mint a másik, akkor ezeknek egy legtömörebb, illetve leglazább átrendezésében* (1. 6. tétel) *is ugyanaz az elrendezés lesz tömörebb, illetve lazább. A fordított állítás is igaz, legtömörebb elrendezések tömörségértéke közti egyenlőtlenség monoton rendezésben megmarad, a leglazább elrendezésben megfordul.*

c) *A tétel* a) *állítása általánosabb formában is kimondható. Ha két n elemű, monoton rendezésű H_1 és H_2 felosztás $h_{1,i}$ és $h_{2,i}$ elemeinek $a_{1,i}$ és $a_{2,i}$ hosszára teljesül a*

$$\sum_{i=j}^{n} a_{1,i} < \sum_{i=j}^{n} a_{2,i} \tag{4}$$

egyenlőtlenség minden j-re, $(j=2, 3, \ldots, n)$, *akkor* $s_1(H_1)<s_1(H_2)$.

A b) állítás alapján ugyanígy kapunk egyenlőtlenségeket a H_1 és H_2 legtömörebb, illetve leglazább elrendezésein fellépő $s_1(H)$ függvényértékek között. Ha az n elemszám minden határon túl növekszik, akkor a (4) egyenlőtlenség teljesülését elegendő egy tetszőleges véges j érték felett megkövetelni.

11. DEFINÍCIÓ. a) Egy intervallum egy H felosztását alulról konvexnek nevezzük, ha a felosztásban szomszédos h_i elemek δ_i differenciája, $\delta_i=h_{i+1}-h_i$ (az indexezéssel most egy irányban haladunk!) monoton növekszik. Ez a feltétel végtelen

sok elemű felosztásnál a differencia sorozat abszolút értékének és a h_i elemek hosszának monoton csökkenését jelenti. Végtelen sorozat tehát csak akkor lehet konvex, ha monoton rendezésű, de ez nem elégséges feltétel.

b) Egy véges h_i sorozatot alulról konkávnak mondunk, ha a δ_i sorozat monoton fogy. Ilyen felosztás nem lehet tetszőlegesen növekvő elemszámú, „sorozatban" adott elrendezés, hanem csak „iteráltan" megadott (l. 3. definíció) végtelen sorozat.

12. DEFINÍCIÓ. A konvex és konkáv sorozatokat monoton differenciasorozatú felosztásoknak nevezzük.

20. TÉTEL. *Konvex intervallumfelosztások az $s_1(H)$ függvény szerint mindig tömörebbek mint az azonos elemszámú egyenlőközű felosztás, a konkáv elrendezések viszont lazábbak mint az egyenlőközű.*

21. TÉTEL. *A szimmetrizálás* (5. definíció) *meghagyja a konvexitást és konkávitást.*

Ez utóbbi tétel alapján a monoton differenciasorozatú elrendezések osztályokba sorolhatók. Egy osztályba soroljuk a közös szimmetrizálttal rendelkező felosztásokat. Az egyes osztályokat éppen a közös szimmetrizált reprezentálhatja.

A szimmetrizálás folytonos halmazokon is értelmezhető. Legyen az $[a, b]$ intervallumon értelmezett $f(x)$ függvénynek az $[a, b]$ intervallumra vonatkozó szimmetrizáltja az a $g(x)$ függvény, melyre $g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(b-x+a))$. Ilyen módon folytonos pontsűrűség függvényeket is szimmetrizálhatunk. A szimmetrizálás megtartja a folytonosságot, konvexitást, konkávitást, integrálhatóságot és integrálható függvényekre teljesül az $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$ egyenlőség.

Többdimenziós vizsgálatok

Az $s_1(H)$ függvény (1. 1. definíció) bármely olyan elrendezésen értelmezhető, melynek elemei között valamilyen távolságérték van adva. A távolságérték például az elempárokon értelmezett tetszőleges valós függvény is lehet (l. az 1. definíció utáni megjegyzést). Így az egyenesen elhelyezkedő elrendezések vizsgálata után most másfajta térben adott halmazokat is tekintünk.

Elsősorban olyan H elrendezésekkel foglalkozunk, melyekben a h_i elemekhez rendelt p_i pontok egy euklideszi tér egy rácsának csúcspontjai. Különféle rácsokban elhelyezett rendszerek kapcsolatáról mondható ki a

22. TÉTEL. *Affinitással egymásba vihető $\{p_i\}$, illetve $\{r_i\}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ pontrendszereken adott s_1 függvényre $s_1(\{p_i\})=c\cdot s_1(\{r_i\})$, ahol c az adott affinitástól függő, n-től független korlátok közé esik, $1/K<c<K$. Következésképpen, különböző, de egymásba affinitással átvihető asszimptotikusan végtelen elemszámú pontrendszereken adódó s_1 függvényértékek csak konstans szorzóban térhetnek el egymástól. (Még akkor is, ha az elrendezések nem korlátosak.) Rácsosan elhelyezkedő elemek elrendezésein adódó $s_1(H)$ értékek nagyságrendi vizsgálatát elegendő tehát egyfajta rácson, például négyzetrácson (kockarácson) elvégezni.*

Jelölje $G(n, d)$ a d dimenziós euklideszi tér egy (egységélű) kockarácsának n különböző csúcsába helyezett $\{p_i\}$ $(i=1, 2, ..., n)$ pontrendszeren az $s_1(\{p_i\})$ függvény minimumát a $\{p_i\}$ rendszer különböző elhelyezésein. $G(n, d)$ tehát a legtömörebb n elemű kockarácsos elrendezés tömörségértéke.

23. TÉTEL. *Tetszőleges n-re $(n=1, 2, ...)$ és tetszőleges d dimenzióértékre $(d=1, 2, ...)$*

$$\frac{n(n-1)}{2} \leqq G(n, d) \leqq \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

A baloldali egyenlőtlenségben egyenlőség csak az $n \leqq 2$ esetben, a jobboldalon a $d=1$ dimenzióban teljesül.

Bonyolultabb meggondolásokkal egy nagyságrendben pontos becslés is adható.

24. TÉTEL.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(d+1)G(n, d)}{d\sqrt{d}\, n^{2+(1/d)}} \leqq 1 \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{4(d+1)G(n, d)}{d \cdot n^{2+(1/d)}}.$$

A d dimenziószám növekedésével a $G(n, d)$-re a fenti egyenlőtlenséggel adott korlátok nagyon eltávolodnak egymástól.

Az alsó korlát tovább élesíthető.

25. TÉTEL.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(d+1)\sqrt{\pi}\, G(n, d)}{\sqrt[d]{(d/2)!}\, n^{2+(1/d)}} \geqq 1.$$

A d értékével is végtelenhez tartva (a Stirling formulát alkalmazva),

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{d\to\infty} \frac{\sqrt{e\pi}\, G(n, d)}{\sqrt{2d}\, n^{2+(1/d)}} \right) \geqq 1.$$

Az előző két (24., 25.) tétel nem csak rácsos, hanem általában egyenletes sűrűséggel elhelyezkedő pontrendszerekre is alkalmazható. Természetesen előbb definiálni kell egy pontelrendezés egyenletességét. A későbbiekben, az 5. szakaszban ilyen kérdésekről lesz még szó.

Az előzőkben adott becslések a d dimenziószám szigorúan monoton csökkenő függvényei. Maga $G(n, d)$ nyilvánvalóan szigorúan monoton fogyó függvénye d-nek (adott n érték mellett).

Nem csak rácsos elrendezéseknél, hanem általában többdimenziós halmazok esetén merül fel a

9. Kérdés. Milyen alaki tulajdonságokkal rendelkeznek az $s_1(H)$ függvény szerint extremális elrendezések? Speciálisan, négyzetrácsban milyenek a legtömörebb (leglazább) p_i pontelhelyezések?

A kérdés utóbbi része és a következő 10. kérdés az [1] dolgozatban szerepel, egy hasonló formában.

Legyenek a H elrendezés h_i elemei d dimenziós egységkockák. A p_i mérőpontok, melyek a kockák középpontjai, legyenek egy egységélű kockarács csúcspontjai.

10. Kérdés. Az ilyen elrendezésekben, ha adott n elemszámra $s_1(H_n)$ minimális,

a) H_n egyszeresen összefüggő-e (a kockák határpontjait is H_n-hez számítjuk),

b) H_n konvex burkán belül elhelyezhető-e egy újabb $n+1$-edik egységkocka (amelynek p_{n+1} középpontja rácspont),

c) igaz-e, hogy a legtömörebb elrendezés, az n elemszám minden határon túl való növekedésével, gömb alakhoz tart?

Az a) pontot összefüggőségi, a b)-t lyukmentességi, a c)-t kikerekedési (kigömbölyödési) problémának nevezzük.

MEGJEGYZÉSEK. 1. A *Steiner*-féle szimmetrizálás alkalmazásával LÜKŐ GÁBOR mutatta meg, hogy az a) és c) pontra igenlő felelet adható. A kikerekedés feltételének teljesüléséből asszimptotikusan végtelen elemszámú elrendezéseknél becslés is adható $G(n, d)$ értékére. A 23—25. tételben adott becslések ettől abban különböznek, hogy véges elemszám esetén is érvényesek.

2. Véges elemszám esetén különféleképpen jellemezhetjük egy elrendezésnek gömbhöz való legjobb közelítését. Jellemző lehet az $s_1(H)$ függvény minimalitása (1. az előző megjegyzést), esetleg más, a következőkben definiált $s_i(H)$ függvény extremalitása. Figyelembe vehetjük a kikerekedés jellemzésekor a $\varrho(p_i, p_j)$ távolságok eloszlásának valamilyen speciális tulajdonságát, például a maximális távolság (az átmérő) minimalitását.

A 10. kérdéshez hasonlóan, speciálisan felvethető a következő probléma.

11. Kérdés. Téglatestbe rendezett egységkockák n elemű H_n rendszere — melyben a p_i pontok négyzetrácsot alkotnak — adott n elemszám mellett akkor szolgáltatja-e a minimális $s_1(H_n)$ értéket, ha a téglatest kocka, és a különböző téglatestek közül a kockához közelebb álló téglatesten lesz-e $s_1(H_n)$ kisebb?

Négyzetrácsos elrendezések tömörségének vizsgálatával kapcsolatban elsősorban az [1] dolgozatra hívjuk fel a figyelmet.

Egyéb, távolságösszeg típusú tömörségfüggvények

13. DEFINÍCIÓ. Jelölje $s_2(H)$ a H elrendezés h_i elemeihez rendelt p_i pontoknak a H súlypontjától vett távolságainak összegét. H súlypontját különféleképpen definiálhatjuk. Vehetjük a p_i pontok súlypontját, a h_i elemek (vagyis H) szokásos értelemben vett súlypontját, vagy valamilyen más súlyozott átlagként adódó súlypontot.

Súlypont helyett tekinthetünk valamilyen más szempontból kitüntetett pontot is.

14. DEFINÍCIÓ

$$s_3(H_n) = \inf_x \sum_{i=1}^{n} \varrho(x, p_i),$$

ahol x a H elrendezést tartalmazó tér egy kijelölt pontja, ϱ az adott térben értelmezett távolság, p_i az n elemű H_n elrendezés h_i eleméhez rendelt mérőpont. Az $s_3(H)$ értékét a H elrendezés x pontra vonatkozó tömörségének nevezzük.

Természetesen, az x pont elhelyezkedésével kapcsolatban különféle megkötéseket is tehetünk.

Ugyanezeket a jelöléseket alkalmazva:

15. Definíció.

$$s_4(H_n) = \sum_{i=1}^{n} \min_{j \neq i} \varrho(p_i, p_j),$$

a legközelebbi mérőponttól vett távolságok összege.

16. Definíció.

$$s_5(H_n) = \sum_{i=1}^{n} \max_{j} \varrho(p_i, p_j),$$

a legtávolabbi mérőponttól vett távolságok összege.

12. Kérdés. Adott H elrendezésekre milyen összefüggések találhatók az $s_1(H), \ldots, s_5(H)$ függvények között?

26. Tétel. *Ha egy H elrendezés h_i elemei szigorúan konvex (diszkjunkt, legfeljebb határukon közös ponttal rendelkező) zárt tartományok, akkor a $p_i \in h_i$ feltétel mellett a „lebegő mérőpontos"* (1. 2. definíció) $s_2(H), \ldots, s_5(H)$ *függvények minimumát szolgáltató p_i pontok elhelyezkedése mind a négy függvény esetén egyértelmű.*

Az $s_1(H)$ függvényhez adható olyan elrendezés, ahol a minimális függvényértéket (lebegő mérőpontoknál) nem egyértelmű p_i pontrendszer adja — még szigorúan konvex h_i elemek esetén is.

Az $s_1(H), \ldots, s_5(H)$ függvényekkel kapcsolatban még elmondhatjuk a következőket: Az $s_5(H)$ érték az n elemű H elrendezés átmérőjének n-szeresével arányos. $s_4(H)$ tetszőlegesen nagy elemszám esetén is korlátos marad, ha H korlátos. Ha az x vonatkoztatási pont a H elrendezés konvex burkának belsejében van, akkor $s_3(H)$ is az elrendezés átmérőjének n-szeresével arányos.

A 23., 24., 25. tételben adott becslésekhez hasonlóan általában nem rácsos elrendezésekre is adhatók korlátok az $s_j(H)$ $(j=1, \ldots, 5)$ függvényekre. Ha az n elemű H_n elrendezés h_i elemei r_i sugarú, d dimenziós gömbök, akkor egy triviális alsó becslést ad az

$$s_1(H) \geqq \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (r_i + r_j), \quad i \neq j$$

egyenlőtlenség. Az egyenlőtlenség esetenként éles, ugyanis az n elemszámot, a d dimenziószámot és az r_i értékeket megfelelően kiválasztva egyenlőség is felléphet, például, ha $d=2$ és $n=3$.

Általában az $s_1(H), \ldots, s_5(H)$ értékek függnek a h_i elemsorozattól, illetve az elemek elhelyezésétől, így szoros kapcsolatban állnak az elrendezések más tömörségi jellemzőivel, például a kitöltési sűrűséggel.

Alaki kérdések

Olyan halmazelrendezéseknél, melyekre a szokásos alakjellemző tulajdonságok, például konvexitás, összefüggőség nem értelmezhetők, mivel például diszjunkt elemekből állnak, felmerülhet az igény az elrendezés alakjának valamilyen jellemzésére. Ilyenkor közvetett módszereket alkalmazhatunk. Jellemzi egy halmazelrendezés alaki tulajdonságait az elrendezés elempárjain értelmezett távolságeloszlás.

27. TÉTEL. *Euklideszi térben összefüggő T tartomány pontpárjain értelmezett távolságeloszlás* (l. 9., 10. definíció) *folytonos és pozitív a* $[0, d)$ *intervallumon, ahol d a T tartomány átmérője.*

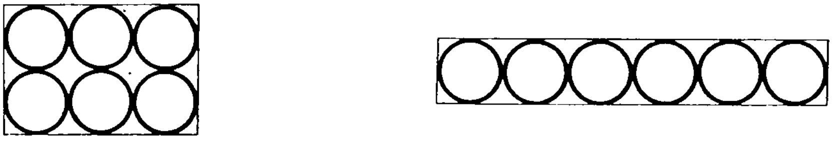
A folytonosság és pozitivitás elég közeli komponensekből álló, nem összefüggő tartományokon is megmarad.

3. Halmazrendszerek elhelyezési sűrűségének vizsgálata

Legsűrűbb körelhelyezések

Alakzatok legsűrűbb kitöltést szolgáltató elhelyezése, illetve a legritkább lefedés problémája, ma már klasszikus feladatkörnek számít. Adott alakzat, például a sík, egy gömbfelület, a tér egy rétege stb. kitöltésénél általánosabb kérdés az, ha a kitöltendő alakzatnak csak a típusát rögzítjük — például csak azt követeljük meg, hogy téglalap legyen —, és az adott típusú, de különböző alakú tartományok legsűrűbb kitöltését vizsgáljuk. Ilyen feladat megoldására példa a következő tétel is.

28. TÉTEL. *Téglalap n ($n \leqq 10$) kongruens körrel akkor tölthető ki a legsűrűbben (adott n esetén), ha a kitöltő körök négyzetrácsos elrendezést alkotnak úgy, hogy a téglalap belsejébe eső minden rácspont körközéppont* ($n=6$-ra l. pl. a 3. ábrát). *Természetesen a téglalap mindig a köröket tartalmazó legszűkebb téglalap. A kitöltési sűrűség ekkor $\pi/4$.*



3. ábra

29. TÉTEL. $n=11$ *vagy* $n \geqq 14$ *esetén a legsűrűbb kitöltést nem négyzetrácsos elrendezések adják.*

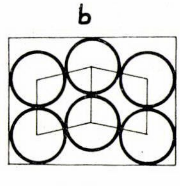
A 28. és 29. tételről l. a [11] dolgozatot.

13. Kérdés. $n=12$ és $n=13$ esetén a négyzetrácsos rendszerek adják-e a legsűrűbb kitöltést, vagy sem?

14. Kérdés. Mely elrendezések lesznek extremálisak, ha $n>10$?

15. Kérdés. Az olyan téglalapokon, melyek nem tölthetők ki a legsűrűbben egy négyzetrácsot adó, n kongruens elemből álló körelrendezéssel, mi lesz a legsűrűbb kitöltést adó körelhelyezés? (Ha $n \leqq 10$, akkor az n függvényében nyilván nem itt lesz a sűrűség maximuma, l. a 28. tételt.)

MEGJEGYZÉS. A 15. kérdésre néhány esetben ismert a válasz (l. [11]). Például, ha $n=6$ és a téglalap a és b oldalainak aránya olyan, hogy $\frac{2}{3} \leqq \frac{a}{b} \leqq \frac{5}{2+2\sqrt{3}}$, akkor a legsűrűbb kitöltést a 4. ábrán látható elrendezés adja.

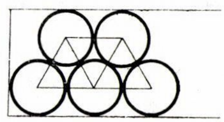


4. ábra

Hasonlóan igaz a következő tétel is (l. [11]).

30. TÉTEL. *Ha $n \geqq 14$ és a téglalap rövidebbik a oldala olyan, hogy $2r \leqq a \leqq (2+\sqrt{3})r$, ahol r a kitöltő körök sugara, akkor a legsűrűbb kitöltést szabályos háromszögrácsos elhelyezés adja* (l. 5. ábra), *vagyis ha $a=(2+\sqrt{3})r$.*

A 30. tétel következménye: Végtelenbe nyúló s szélességű síkbeli sávok r sugarú körökkel való kitöltésénél, ha $2r \leqq s \leqq (2+\sqrt{3})r$, a legsűrűbb elhelyezés az $s=(2+\sqrt{3})r$ értéknél adódik (l. 5. ábra).



5. ábra

16. Kérdés. Mi lesz az extremális elrendezés, ha $s > (2+\sqrt{3})r$? Speciálisan, térbeli gömbkitöltések vizsgálatánál, érdekes a $(2+\sqrt{3})r < s < 4r$ eset.

Téglalapok körökkel való kitöltéséhez hasonlóan más, egy vagy több paramétertől függő alakzatok kitöltését is vizsgálhatjuk. Ilyenkor a kitöltési sűrűség elérhető maximuma ezektől a paraméterektől is függ.

Ilyen feladat például egy csonkakúp palást (speciálisan: henger, kúp, körgyűrű) kongruens körökkel történő legritkább lefedése. Ennek megoldása már 3—4 lefedő kör esetén is elég bonyolult, sőt egy vagy két kör elhelyezésére is igen változatos megoldások adódnak a kúpfelület alakjának függvényében. Ez utóbbi említett, speciálisnak tűnő kérdéskörnek gyakorlati, például méréstechnikai szempontból van nagy jelentősége.

Természetesen nem csak a tartalmazó alakzat változhat egy vagy több paraméter függvényében, hanem a kitöltő (lefedő) alakzatok is.

17. Kérdés. Melyek azok a téglalapok, amelyek n (nem feltétlenül kongruens) körrel legsűrűbben kitölthetők? Hogyan kell ehhez a legsűrűbb kitöltéshez a körök sugárarányát megválasztani?

18. Kérdés. Hogyan kell megválasztani n kör sugarát (legalább az egyik sugárérték határozottan pozitív), hogy a legkisebb tartalmazó téglalapon belüli kitöltési sűrűség az adott n-re minimális legyen? Létezik-e a minimum?

Az elhelyezett alakzatok megválasztási lehetőségét korlátozva, kiköthetjük például azt, hogy az alakzatokat egy előre adott készletből választjuk ki.

A feladat egy további általánosítása az, amikor nem adunk meg előre egy tartalmazó alakzatot (alakzat típust). Az elhelyezés a síkon (a térben) tetszőlegesen történhet. A kitöltési sűrűséget az elhelyezés által meghatározott tartományra vonatkoztatjuk, vagy általában valamilyen, az elhelyezésen értelmezett függvénnyel (tömörségfüggvény) jellemezzük az adott elhelyezés sűrűségét. Ilyen függvények szerepeltek az előző, 2. szakaszban is $(s_1(H), \ldots, s_5(H))$.

A következőkben ilyen típusú kérdésekkel foglalkozunk. Az egyszerűség kedvéért általában csak körök vagy pontok elhelyezéseit vizsgáljuk. Az elhelyezési sűrűséget a továbbiakban egy újabb tömörségi jellemzőnek tekintjük.

Kitöltési sűrűséggel kapcsolatos tömörségfüggvények

Először néhány definíciót adunk meg, melyek korlátos elrendezések kitöltési sűrűségét jellemző tömörségfüggvényeit írják le. A szereplő H elrendezések h_i körök (pontok) síkbeli korlátos halmazai.

17. DEFINÍCIÓ. $s_6(H)$ a H konvex burkának területe.

18. DEFINÍCIÓ. $s_7(H)$ a H konvex burkának kerülete.

19. DEFINÍCIÓ. $s_8(H)$ a H köré írható legkisebb kör, azaz a körülírt kör (külkör) területe.

20. DEFINÍCIÓ. $s_9(H)$ a H körülírt körének kerülete.

21. DEFINÍCIÓ. $s_{10}(H)$ a H-nak saját konvex burkára vonatkozó kitöltési sűrűsége.

22. DEFINÍCIÓ. $s_{11}(H)$ a H körülírt körére vonatkozó kitöltési sűrűség.

23. DEFINÍCIÓ. $s_{12}(H)$ a H átmérőjének hossza.

Az $s_{12}(H)$ érték nyilván egyenlő a konvex burok átmérőjének hosszával. A körülírt kör átmérője azonban hosszabb is lehet. Így egy új függvényt ad a

24. DEFINÍCIÓ. $s_{13}(H)$ a H külkörének átmérőhossza.

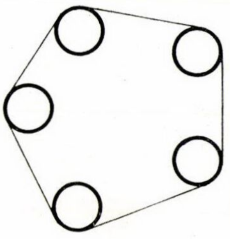
Természetesen s_{13}, s_8, s_9 egymással arányos értékek: $s_9 = s_{13}\pi$, $s_8 = (s_9/2)^2\pi$. A H halmaz szerkezetével szorosabb kapcsolatban áll a

25. DEFINÍCIÓ. $s_{14}(H)$ a H halmaznak súlypontjától való eltérése (vagyis a súlypont és a tőle legmesszebb eső pont távolsága).

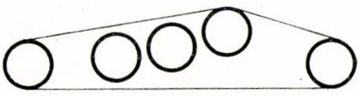
A súlyponttal kapcsolatban a 13. definíciónál tett megjegyzések itt is értelmezhetők. Súlypont helyett más, kitüntetett pontját is tekinthetjük a H-nak.

A 17—25. definíciók közül a 17., 18., 21., 23., 24. és 25. definícióhoz hasonló meghatározások szerepelnek a [2] dolgozatban.

A konvex burok területének nagysága, a konvex burokra vonatkozó kitöltési sűrűség sokszor nem eléggé jellemző az illető elrendezés tömörségére. Például, a 6. ábrán látható körrendszer legalább olyan tömörnek — ha nem tömörebbnek — tekinthető, mint a 7. ábra szerinti elrendezés. A konvex burok területe az utóbbi esetben mégis lényegesen kisebb. Indokolt tehát kimondani a következő definíciót.



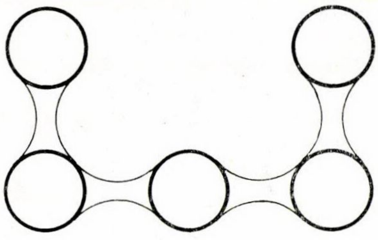
6. ábra



7. ábra

26. DEFINÍCIÓ. Jelölje $s_{15}(H)$ a H elrendezés ϱ körkonvex burkának területét. A ϱ esetenként egy rögzített pozitív érték. (1. 8. ábra.)

A ϱ körkonvexitás fogalmával a [7] dolgozat foglalkozik. A ϱ körkonvex burok helyett más, a H elrendezéshez hasonlóan jól illeszkedő tartomány is szerepeltethető. Ilyen tartományokkal a későbbiekben, az 5. szakaszban, foglalkozunk még.



8. ábra

27. DEFINÍCIÓ. Jelölje $s_{16}(H)$ a $H\ \varrho$ körkonvex burkának kerületét!

28. DEFINÍCIÓ. Jelölje $s_{17}(H)$ a $H\ \varrho$ körkonvex burkára vonatkozó kitöltési sűrűséget!

MEGJEGYZÉS. Egy elrendezés annál tömörebbnek tekinthető, minél nagyobb egy adott ϱ értékre vonatkozó körkonvex burka.

31. TÉTEL. *Egy adott H elrendezésre az $s_6(H), \dots, s_{17}(H)$ függvényértékek között a következő egyenlőtlenségek érvényesek:*

(1) $s_{15} \leqq s_6 \leqq s_8$, *tehát* $s_{11} \leqq s_{10} \leqq s_{17}$,

(2) $s_{12} \leqq s_{13} \leqq 2s_{14}$,

(3) $s_7 \leqq s_{16}$ *és* $s_7 \leqq s_9$.

Ha H véges sok h elemből áll, de nem egyetlen kör, akkor

(4) $s_6 < s_8$, $s_7 < s_9$, $s_{11} < s_{10}$ *és* $s_{12} < s_{13}$.

Ha a H ϱ körkonvex burka nem egy összefüggő konvex halmaz, akkor

(5) $s_{15} < s_6$, $s_{10} < s_{17}$, $s_7 < s_{16}$.

Az elhelyezési sűrűséget jellemzi a tömörségfüggvények következő két csoportja ($s_{18}, \ldots, s_{20}$ és $s_{21}, \ldots, s_{23}$) is. Jelölje $\delta(H, x)$ a sík (a tér) egy x pontjának a H halmaztól mért távolságát!

29. DEFINÍCIÓ.

$$s_{18}(H) = \int_M \delta(H, x)\,df,$$

ahol M-mel a H konvex burkát jelöljük.

30. DEFINÍCIÓ.

$$s_{19}(H) = \int_R \delta(H, x)\,df,$$

ahol R a H ϱ körkonvex burka.

31. DEFINÍCIÓ.

$$s_{20}(H) = \int_K \delta(H, x)\,df,$$

ahol K a H-hoz tartozó külkör.

Rendeljünk a H elrendezés minden egyes h_i eleméhez egy-egy p_i pontot! Jelölje $\lambda(x, h_i)$ az x pontnak a h_i elemtől vett távolságfüggvény értékét a p_i pontra vonatkozóan. $\lambda(x, h_i)$ infimuma azoknak a λ_p értékeknek, amelyekre $\lambda_p(p-p_i)=x$, ha $p \in h_i$. A λ távolságfüggvényről részletesebben l. [6].

Jelölje $\lambda(x, H)$ az $\inf_i \lambda(x, h_i)$ értéket!

32. DEFINÍCIÓ.

$$s_{21}(H) = \int_M \lambda(x, H)\,df.$$

33. DEFINÍCIÓ.

$$s_{22}(H) = \int_R \lambda(x, H)\,df.$$

34. DEFINÍCIÓ.

$$s_{23}(H) = \int_K \lambda(x, H)\,df.$$

Az előzőkhöz hasonlóan igazak a következő egyenlőtlenségek:

32. TÉTEL.

(1) $s_{19} \leqq s_{18} \leqq s_{20}$, $s_{22} \leqq s_{21} \leqq s_{23}$,

ha H véges elemszámú, de nem egyetlen kör, akkor

(2) $s_{18} < s_{20}$ *és* $s_{21} < s_{23}$,

ha pedig H ϱ körkonvex burka nem egyezik a H konvex burkával,

(3) $s_{19} < s_{18}$ *és* $s_{22} < s_{21}$.

A fenti egyenlőtlenségek egy adott H rendszerre vonatkoznak. Különböző H elrendezéseknél az $s_6(H), \ldots, s_{23}(H)$ függvények (az $s_1(H), \ldots, s_5(H)$ függvényekhez hasonlóan) igen változatos módon viselkednek, így ezeknek a függvényeknek pontos és részletes leírása általában igen nehéz feladat. Itt most először néhány általános tulajdonságot vizsgálunk, melyek inkább közös vonásokat és nem annyira különbségeket emelnek ki.

Korlátossági kérdések

Az $s_6(H), \ldots, s_{23}(H)$ függvényértékek korlátosság szempontjából nem mutatnak lényeges eltérést, a következő értelemben.

33. TÉTEL. *Egy adott H elrendezésnél az $s_6(H), \ldots, s_9(H)$, $s_{12}(H), \ldots, s_{16}(H)$ függvények korlátosságának szükséges és elégséges feltétele ezek bármelyikének korlátossága. Ha magának a H rendszernek a területe (térfogata) korlátos, akkor $s_{10}(H)$, $s_{11}(H)$ és $s_{17}(H)$ nullától való különbözősége és az $s_{18}(H), \ldots, s_{23}(H)$ korlátossága is ekvivalens a fenti kilenc függvény korlátosságával.*

Ezután az $s_6(H), \ldots, s_{23}(H)$ függvények közül csak a kitöltési sűrűséget közvetlenül jellemző függvényekkel foglalkozunk. (Ez a fenti tétel alapján jogosnak mondható. Továbbra is síkbeli körelrendezéseket vizsgálunk.)

Korlátos összterületű H rendszer esetén a sűrűség pozitivitását az elrendezés korlátossága biztosítja. Természetesen véges elemszámú rendszereknél, ha a h_i elemek korlátosak, automatikusan teljesül a korlátosság.

34. TÉTEL. *Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy egy megszámlálhatóan végtelen elemszámú H elrendezés korlátos lehessen, a $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ korlátossága, vagyis a H összterületének korlátossága. Az a_i a h_i kör átmérőjének hosszát jelöli. A feltétel teljesülésekor a körülírt kör sugárhosszának R minimumára teljesül az $R < \frac{a}{2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}$ egyenlőtlenség,* ahol $a = \max a_i$, $i = 1, 2, \ldots$.

MEGJEGYZÉSEK. 1. A tétel állítása nem triviális. Megadható olyan korlátos területösszegű H elrendezés (mely természetesen nem körökből áll), amely egyetlen elrendezésében sem korlátos (a H h_i elemei diszjunktak). Létezik viszont síkbeli konvex tartományoknak olyan rendszere is, melyben a h_i elemek a_i átmérőinek négyzetösszege nem korlátos, de maga a H elrendezés véges.

2. A tétel nem csak körökből álló H elrendezésekre igaz, hanem tetszőleges olyan H-ra is, amelynek h_i elemeire az a_i átmérők korlátosak és h_i területe arányos a_i^2-tel. Ugyanígy tetszőleges véges dimenziós euklideszi térben is $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^d$ szükséges és elégséges feltétele a H korlátosságának (a_i a h_i d dimenziós gömb átmérője).

A 34. tétel konstrukcióval bizonyítható, melyből a következő, többet mondó tétel is nyerhető.

35. TÉTEL. *Korlátos területösszegű körök végtelen sorozata elhelyezhető egy korlátos sugarú körön belül úgy, hogy a körközéppontok halmazának egyetlen torlódási pontja van. Előállítható olyan elrendezés is, amikor ez a torlódási pont a legszűkebb tartalmazó kör középpontja.*

19. Kérdés. Milyen más, meghatározott típusú korlátos elrendezés állítható elő? Például előállítható-e két vagy több (esetleg megszámlálható), a körülírt kör adott pontjaiban levő torlódási pontot tartalmazó elrendezés? Hogyan változik a különböző konstrukciókban H átmérője?

Az előbb említett konstrukcióból egy felső korlát adható a H köré írt legszűkebb kör sugarára. Ez egy alsó becslést ad a külkörben elérhető kitöltési sűrűségre.

36. TÉTEL. *Korlátos területösszegű* $H=\{h_i\}$ *megszámlálható körrendszer elhelyezhető úgy, hogy*

$$s_{12}(H) > \frac{1}{4+\frac{a^2}{\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2}+\frac{4a}{\sqrt{\sum a_i^2}}}.$$

MEGJEGYZÉSEK. 1. Ez a korlát lényegesen javítható, ha figyelembe vesszük az $a_1, \dots, a_n, \dots$ átmérősorozat sajátosságait.

2. n-féle körrel konvex, illetve ϱ körkonvex tartományon elérhető kitöltési sűrűségre ismertek felső korlátok. Ilyen eredmények találhatók a [7] dolgozatban.

3. Az elrendezés átmérőjére adott korlátokkal az előző szakaszban szereplő $s_1(H), \dots, s_5(H)$ függvények értékeit is jellemezzük.

Különféle sűrűségű rendszerek

Korlátos területösszegű H elrendezéseknél az átmérő korlátossága a kitöltési sűrűség (például $s_{10}(H)$, $s_{11}(H)$, $s_{17}(H)$) pozitivitását biztosítja csak. Ezen belül lehetnek közel nulla sűrűségű elhelyezések is, de konstruálhatók olyan rendszerek is, melyekben a kitöltési sűrűség 1-hez konvergál. (Továbbra is körelhelyezéseket vizsgálunk.)

20. Kérdés. Különböző a_i átmérősorozatokhoz milyen $s_{10}(H)$, $s_{11}(H)$, $s_{17}(H)$ értéket adó H elrendezések konstruálhatók?

21. Kérdés. Milyen körsorozatokból építhető olyan elrendezés, melynek sűrűsége az elemszám növekedésével 1-hez konvergál? Mi a konvergencia sebessége?

Jelölje H_m $(m=1, 2, \dots)$ az $\bigcup\limits_{i=1}^{m}\bigcup\limits_{j=1}^{n_i} h_{i,j}$ körrendszert. A $h_{i,j}$ körsorozat elemszámát lépésenként egyszerre n_i-vel növeljük. A H_m sorozat $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{n_i} h_{i,j}$ határhelyzetét jelöljük H-val.

37. TÉTEL. *Legyen egy, az előzőkben leirt* H_m *sorozat olyan, hogy* $\lim\limits_{m\to\infty} s_{10}(H_m)=$ $=s_{10}(H)=1$, *és* $H-H_m=\bigcup\limits_{i=m}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{n_i} h_{i,j}$ *sűrűsége a H külkörére vonatkoztatva legyen* a^m*-nel arányos* (az a egy rögzített érték, $0<a<1$), *akkor* $\limsup\limits_{i\to\infty} n_i=\infty$. *Ha tehát* n_i *újabb kör elhelyezésével a H külkörére vonatkozó kitöltési sűrűség exponenciális sebességgel tart* 1*-hez, akkor ez tetszőlegesen sok kör elhelyezése után már csak úgy érhető el, hogy az m-medik lépésben elhelyezett körök számának* lim *superiorja végtelen.*

KÖVETKEZMÉNY. Egy kör (körökkel való) egységsűrűségű kitöltéséhez exponenciális sebességgel konvergáló rendszer lépéseként véges sok újabb kitöltő kör elhelyezésével, például egyenkénti elhelyezéssel, nem építhető fel.

38. TÉTEL. *Egy K kör kitölthető egy minden határon túl növekvő elemszámú körrendszerrel úgy, hogy található olyan a és b pozitív, korlátos konstans, melyre a K körben az m-edik lépésben elért kitöltési sűrűség, az előző tétel jelöléseit alkalmazva, olyan, hogy a körök egyenkénti elhelyezésekor* (a 37. tétel jelölésével $n_i=1$)

$$\frac{t(H-H_m)}{t(K)}<\frac{b}{m^a}, \quad 0<a<1,$$

ahol $t(H-H_m)$, illetve $t(K)$ a $H-H_m$ halmaz, illetve a K kör területét jelöli. Ugyanakkor bármely kitöltéshez adható olyan (korlátos) pozitív c konstans, hogy

$$\frac{t(H-H_m)}{t(K)}>\frac{c}{m^a}.$$

Az egységsűrűségű, illetve más, adott sűrűségű kitöltés (kitöltési sűrűség alatt például az $s_{10}(H)$ értékét értjük) elérésének elégséges feltételeit általában nehéz megadni, hiszen nem csak egy elemsorozatot, hanem az elemek egy megfelelő elhelyezését is meg kell adni. Szükséges feltételek könnyen nyerhetők. A 38. tétel következménye a

39. TÉTEL. *A $\lim\limits_{m\to\infty} s_{10}(H_m)=s_{10}(H)=1$ egyenlőség teljesülésének szükséges feltétele $\left(H=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} h_i\right)$, hogy minden m-re $(m=1, 2, \ldots)$ teljesüljön a $\frac{b}{m^a}\cdot t(H)\leqq \leqq \sum\limits_{i=m}^{\infty} t(h_i)$ egyenlőtlenség, ahol a és b alkalmasan választott rögzített pozitív érték* $(0<a<1$; t a területet jelöli).

A 38. tétel alapján egy felső korlát is adható m kör által elérhető maximális $s_{10}(H_m)$ kitöltési sűrűségre.

40. TÉTEL. *Tetszőleges m elemű H_m körelrendezéshez található olyan pozitív a és b érték, $(0<a<1)$, hogy $s_{10}(H_m)\leqq\left(1-\frac{b}{m^a}\right)$.*

MEGJEGYZÉS. Ha m végtelenhez tart, akkor ez a korlát élesebb, mint az m-féle körrel elérhető kitöltési sűrűségre ismert $1-c^m$ korlát.

22. Kérdés. Adott h_i körsorozatnál milyen a, b és c értékek adhatók a fenti tételekben.

23. Kérdés. Milyen elégséges feltételek adhatók az $s_{10}(H)=\delta$, $0<\delta\leqq 1$ reláció teljesülésére (adott δ értékre)?

Egységsűrűség, illetve bizonyos δ, $0<\delta\leqq 1$ sűrűségek elérésére konstrukciók könnyen adhatók. Egy elégséges feltételt ad a következő tétel.

41. TÉTEL. *Ha a h_i elemeket egy divergens területösszegű, monoton nullához tartó h_j sorozatból válogatjuk, akkor az $s_{10}(H)$ függvény tetszőleges δ értéket $(0<\delta\leqq 1)$ felvehet. (Ugyanez elmondható a többi, kitöltési sűrűséget jellemző mérőszámról is.)*

Ilyen sorozatból ugyanis tetszőleges sorösszegű konvergens sor válogatható ki, még akkor is, ha az n-edikként választott elem nagyságára az előző $n-1$ elem függvényében felső korlátot adunk.

24. Kérdés. Adott δ kitöltési sűrűséghez $(0<\delta\leqq 1)$ van-e olyan nem divergens területösszegű körsorozat, melyből szintén válogatható δ sűrűséget adó h_i sorozat? Ha van, akkor milyen tulajdonságokkal rendelkezik?

Általában kérdéses, hogy mely tulajdonságaikkal jellemezzük a h_i sorozatokat. Milyen tulajdonságokat hozzunk kapcsolatba az elérhető maximális tömörségértékkel — nem csak a kitöltési sűrűség, de más tömörségfüggvények esetén is. Egy ilyen jól használható tulajdonság az $\bigcup\limits_{i=m}^{\infty} h_i$ maradék sorozat területösszegének tulajdonsága (l. például a 37. tételt). Ugyanezt fejezheti ki — a h_i elemek nagyság szerint monoton rendezésében — a szomszédos elemek területaránya is. Általában megmarad azonban a

25. Kérdés. A h_i sorozat mely jellemzői állnak kapcsolatban az elérhető maximális tömörséggel — például a kitöltési sűrűséggel? Nevezetes átmérősorozatok esetén, például, ha a h_i elemek területei mértani sorozatot alkotnak, milyen tömörségek érhetők el?

A legegyszerűbb eset az, ha véges sok féle h_i elem adott.

26. Kérdés. n-féle körrel milyen tömörségű elrendezések állíthatók elő? Hogyan függ az elérhető tömörség (például a kitöltési sűrűség maximuma) a sugárhosszak arányaitól és az n-féle kör darabszám arányaitól?

A maximális kitöltési sűrűség felső korlátja n-féle körre ismert. Ld. [7]. Ez a korlát végtelenhez tartó elemszám esetén pontos.

Különféle elhelyezési eljárások realizálásakor, illetve adott, konkrét elhelyezések vizsgálatakor, probléma adódhat az egyes elemek nagyságának és helyének pontos meghatározásánál. Ilyen kérdések általában minden numerikus feladatnál felmerülnek.

27. Kérdés. Milyen pontossággal becsülhető egy adott H körelrendezésen egy tömörségi mérőszám — például $s_{10}(H)$ — vagy bármely más, a H halmazon értelmezett függvény, ha a H körelhelyezésben a sugárértékek és a középpontok koordinátái korlátozott pontossággal adhatók meg? Hogyan változik egy h_i körsorozattal elérhető maximális kitöltési sűrűség, például $s_{10}(H)$ maximuma, ha a h_i körök r_i sugarait Δ_i értékekkel megváltoztatjuk?

Különféle lehetőségek vannak: Véges sok fajta körnél minden sugárértéket egy Δ $(\Delta>0)$ értékkel növeljük vagy csökkentjük (az utóbbi esetben $\Delta<\min\limits_i(r_i)$). Tetszőlegesen változtatjuk a sugarakat az eredeti érték körüli Δ sugarú intervallumban. Az r_i sugarakat egy i-től függő Δ_i értékkel változtatjuk.

Egy adott tartományra vonatkozó kitöltési sűrűség, például $s_{10}(H)$, változására adható egy becslés.

42. TÉTEL. *Ha egy H, maximális tömörségű elrendezésben a körök sugara r_i ($r_i \in [a, b]$) és a kitöltési sűrűség értéke δ, akkor ha a sugárértékeket egy Δ ($\Delta < a$) értékkel növeljük, és az $r_i + \Delta$ sugarú körökkel elérhető maximális kitöltési sűrűséget δ'-vel jelöljük, akkor*

$$\frac{\delta'}{\delta} > \frac{1}{1+2x+x^2},$$

ahol $x = \frac{\Delta}{a}$. Ha a sugárértékeket Δ-val csökkentjük, akkor

$$\frac{\delta'}{\delta} > 1-2x+x^2.$$

A tétel bizonyítása egyszerű nagyítás, illetve kicsinyítés felhasználásával nyerhető. Valamivel bonyolultabb módon egy élesebb becslés is adható. Az előző tétel jelöléseit alkalmazva:

43. TÉTEL. *Ha Δ-val növeljük az eredeti sugarakat, akkor*

$$\frac{\delta'}{\delta} > \frac{1+y+y^2}{1+x+x^2},$$

ha csökkentjük, akkor

$$\frac{\delta'}{\delta} > \frac{1-2x+x^2}{1-2y+y^2},$$

ahol $y = \frac{\Delta}{b}$.

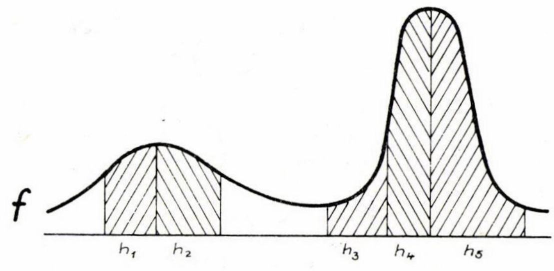
Egyéb elhelyezés sűrűségi vizsgálatok

Az elhelyezési tömörséget jellemző kitöltési sűrűség vizsgálatakor különféle általánosítások is adhatók.

28. Kérdés. Mi lesz adott köröknek síkbeli legtömörebb (leglazább) elhelyezése, ha a körök területösszege helyett egy a síkon értelmezett függvénynek (súlyfüggvénynek) a körökre vonatkozó integráljainak összegét tekintjük, vagy például a körközéppontokon vett függvényértékek összegét, és ezek maximumát (minimumát) keressük.

29. Kérdés. A súlyfüggvény tulajdonságai hogyan befolyásolják az elhelyezés tulajdonságait, ha extremalitásra törekszünk? Például, szimmetrikus súlyfüggvény esetén milyen szimmetria tulajdonságokkal rendelkeznek az extremális elrendezések?

Egy példa: olyan súlyfüggvénynél, melynek több lokális maximuma is van, nem feltétlenül összefüggők a „legsűrűbb" elrendezések, még olyankor is, ha ez egyébként természetes lenne. A 9. ábrán egydimenziós h intervallumoknak egy f súlyfüggvény alatti legsűrűbb, nem összefüggő elrendezése látható.



9. ábra

30. Kérdés. Hogyan határozzuk meg az extremális elrendezéseket, ha az elhelyezett elemek tulajdonságai attól is függnek, hogy hová helyezzük őket. Például, az elhelyezett körök sugara a körközéppont koordinátáinak is függvénye.

4. Érintkező halmazpárok

Halmazelrendezések érintkező elempárjainak száma

A következő problémakör, bár csak euklideszi terekben elhelyezkedő halmazok vizsgálatával foglalkozunk, természeténél fogva általánosabb, például topologiai tulajdonságokra épül.

35. Definíció. Legyen a H elrendezés minden h_i eleme páronként közös belső ponttal nem rendelkező összefüggő tartomány. Jelölje $s_{24}(H)$ azoknak a h_i, h_j, $i \neq j$ elempároknak a számát, melyek halmaza kölcsönösen és egyértelműen megfeleltethető közös határpontjaikból kiválasztott $p_{i,j}$ ponthalmaznak. $s_{24}(H)$ értékét nevezzük az „érintkező halmazpárok számának".

Az $s_{24}(H)$ tömörségfüggvény az elhelyezési sűrűséget jellemző függvények egy részéhez hasonlóan (l. az előző szakaszt) csak lokálisan jellemzi a H elrendezést. Az $s_{24}(H)$ értékét nem az egymástól távoleső elemek viszonya és nem az egész elrendezés alakja befolyásolja, hanem az egymáshoz közel eső elemek kölcsönös elhelyezkedése. Ez azzal a ténnyel áll kapcsolatban, hogy $s_{24}(H)$ értékét elsősorban topológiai jellegű tulajdonságok határozzák meg. Természetesen egy adott h_i elemkészlet és egy adott tér $s_{24}(H)$ lehetséges értékeit korlátozza.

31. Kérdés. d dimenziós euklideszi térben adott n elemű h_i sorozattal milyen $s_{24}(H)$ értékeket nyerhetünk? Melyek lesznek az extremális elrendezések?

44. Tétel. *Egy d dimenziós euklideszi térben levő tetszőleges n elemű, páronként diszjunkt, összefüggő tartományokból álló H elrendezéshez hozzárendelhető egy ugyanabban a térben levő n szögpontú gráf. A gráf csúcsai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők a H h_i elemeinek, élei pedig a $p_{i,j}$ közös határpontoknak. A csúcsok a h_i elemek belsejében vannak. Két csúcsot akkor és csak akkor kötünk össze, ha az őket tartalmazó h_i, h_j elemekhez tartozik $p_{i,j}$ közös határpont* (a 35. definíció jelölésével).

Két csúcsot tehát csak egy él köt össze, az élek nem metszik egymást. Az utóbbi feltétel teljesülése kétdimenziós térben lényeges. A megfordított állítás is igaz. *Bármely n szögpontú gráfhoz (euklideszi térben) hozzárendelhető h_i tartományrendszer a fent leírt módon.*

Ha az élek és csúcsok rendszerére semmiféle metrikus kikötést nem teszünk, akkor az előzőkben leírt gráfban az élek száma nyilván elérheti az $\binom{n}{2}$ értéket, ha $d \geqq 3$. A $d<3$ esetben már maga a dimenziószám is megkötést ad (ha $n>2$, illetve $n>4$).

A 44. tételben szereplő gráffal kapcsolatban adjuk meg a következő definíciót.

36. DEFINÍCIÓ. A h_i elemrendszerhez rendelt gráfot „érintkezési gráfnak", a gráf által adott relációk (érintkezések) rendszerét „érintkezési rendszernek" nevezzük.

32. Kérdés. Milyen feltételek korlátozzák három vagy annál magasabb dimenziós euklideszi térben az $s_{24}(H)$ függvény maximális értékét? Kétdimenziós euklideszi térben milyen $s_{24}(H)$ értékek érhetők el?

A következőkben elsősorban asszimptotikusan végtelen elemszámú elrendezésekkel foglalkozunk.

45. TÉTEL. *Ha csak azt kötjük ki, hogy a H elrendezés h_i elemei konvex tartományok legyenek, akkor ezzel nem csökken az adott térben maximálisan elérhető $s_{24}(H)$ érték.* (Megadható maximális érintkezési számú konvex elemekből álló rendszer.)

37. DEFINÍCIÓ. Egy h_i konvex tartománysorozatot nem elfajulónak nevezünk, ha a h_i elemek köré írt körök R_i és a maximális beírható körök r_i sugarainak arányához található olyan K korlát, hogy $\frac{R_i}{r_i}<K$ minden i-re. Ha $\limsup_{i\to\infty} \frac{R_i}{r_i}=\infty$, a sorozat elfajuló.

46. TÉTEL. *A d-dimenziós euklideszi-térben, ha egy konvex h_i elemekből álló n elemszámú $H_n=\{h_i\}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ elrendezésre $\limsup_{n\to\infty} s_{24}(H_n)=f(n)\cdot n$, ahol $f(n)$ olyan függvény melyre $\limsup_{n\to\infty} f(n)=\infty$, akkor a h_i elemek sorozata elfajuló.*

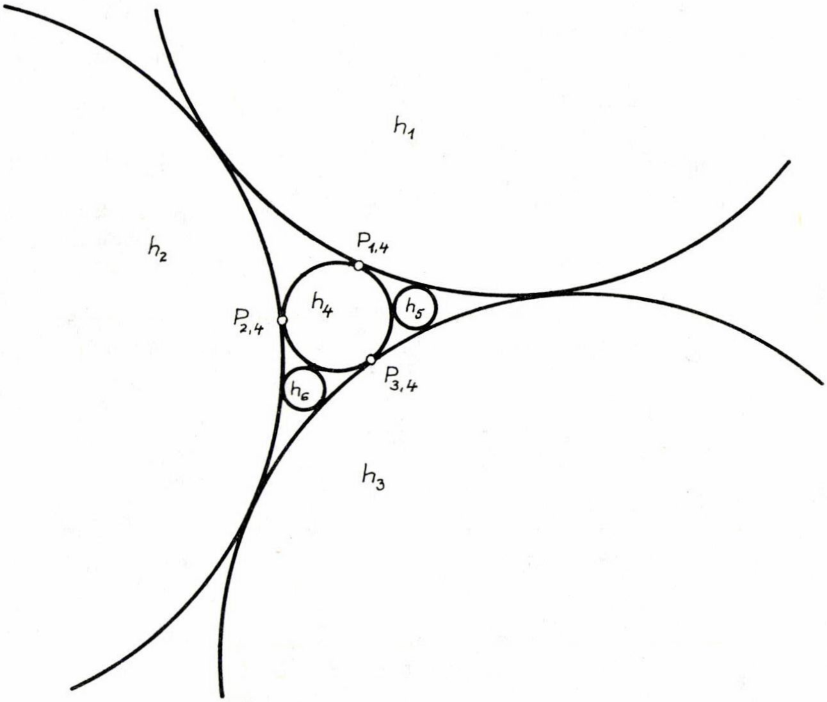
A 46. tétel egy következménye a

47. TÉTEL. *El nem fajuló h_i elemsorozatból álló H elrendezés esetén a H n elemű H_n részrendszereire*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_{24}(H_n)}{c\cdot n} \leqq 1,$$

ahol c a h_i elemsorozattól, illetve a dimenziószámtól függő korlátos pozitív érték.

48. TÉTEL. *Kétdimenziós euklideszi-térben minden n elemű H_n tartományrendszerre $s_{24}(H_n) \leqq 3 \cdot n - 6$, ha $n > 2$. Az egyenlőség is elérhető, speciálisan körökkel is* ($n=6$ esetén l. pl. a 10. ábrát).



10. ábra

Minden határon túl növekvő elemszámú elrendezésekre a $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{s_{24}(H_n)}{3 \cdot n} = 1$ egyenlőség teljesülése különféle konstrukciókkal elérhető, például kongruens körök szabályos háromszögrácsos elhelyezésével. Elérhető még az egyenlőség teljesülése a 10. ábrán adotthoz hasonló konstrukciókkal is (monoton csökkenő vagy monoton növekvő sugársorozatokat képező h_i elemekkel). Különféle konstrukciók adhatók olyan elrendezésekre is, melyekre $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{s_{24}(H_n)}{f(n)} = 1$, ahol $f(n) < 3 \cdot n$ és $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{f(n)}{f(n+k)} = 1$ minden pozitív egész k-ra.

49. TÉTEL. *Tetszőleges, síkbeli konvex tartományokból álló n elemű H_n elemsorozat elrendezhető úgy, hogy $s_{24}(H_n) \geqq 2 \cdot n - 3$.*

33. Kérdés. Speciálisan körelhelyezéseket tekintve, milyen h_i körsorozatokkal építhetők olyan elrendezések, melyekre $3 \cdot n \geqq s_{24}(H_n) \geqq 2 \cdot n$?

50. TÉTEL. *Ha a h_i körök r_i sugarainak sorozata túl gyorsan csökken, nevezetesen, ha egy minden határon túl növekvő elemszámú körelrendezés elemeinek r_i sugaraira legfeljebb véges sok i index kivételével*

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} < \frac{2}{\sqrt{3}} - 1, \tag{5}$$

akkor nem érhető el a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_{24}(H_n)}{2n} > 1$ *egyenlőtlenség teljesülése. Ha* (5) *minden i indexre teljesül, akkor egyetlen véges n-re sem lehet* $s_{24}(H_n) > 2 \cdot n$.

MEGJEGYZÉSEK. 1. Hasonló tételek mondhatók ki másfajta konvex elemekből álló h_i elemsorozatokra is.

2. Figyelemre méltó ennek a tételnek és a 39. tételnek a kapcsolata. Mindkét esetben a túlságosan gyorsan csökkenő nagyságú h_i elemsorozatokkal nem érhető el a tömörség $(s_{10}(H)$, illetve $s_{24}(H))$ egy maximális értéke. Ezzel szemben megadható azonban olyan körrendszer is, melyre $s_{10}(H)$ értéke közel 1, de $s_{24}(H)=0$.

51. TÉTEL. *Ha n elemű H_n elrendezések egy sorozatára* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_{24}(H_n)}{\alpha n} = 1$ (α egy rögzített érték), *akkor az ilyen elrendezések elemeiből bármely β* $(0<\beta<\alpha)$ *értékre alkotható olyan elrendezéssorozat, melyre* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_{24}(H_n)}{\beta \cdot n} = 1$.

A következő tétel már magasabb dimenziós elrendezésekkel kapcsolatos.

52. TÉTEL. *A d-dimenziós euklideszi-tér konvex, (nem elfajuló sorozatot adó) h_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ tartományaiból előállítható olyan H_n elrendezés, melyre* $s_{24}(H_n) \geqq n \cdot d - \frac{d \cdot (d+1)}{2}$ (a 49. tétel ennek speciális esete).

Egy példa: Kongruens gömbök végtelen elemszámú H sorozatával elérhető a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{s_{24}(H_n)}{5 \cdot n} = 1$ egyenlőség teljesülése $\left(H = \lim\limits_{n\to\infty} H_n\right)$.

Néhány hasonló jellegű függvény

Az $s_{24}(H)$ tömörségértékhez hasonló függvényeket nem csak euklideszi-térben, hanem tetszőleges olyan térben értelmezhetünk, ahol definiálni tudjuk diszjunkt halmazok érintkezését. Például vizsgálhatjuk, hogy valós függvények valahány osztályából hány olyan osztálypárt választhatunk ki, melyek rendelkeznek közös elemmel. Ilyen két érintkező osztály lehet az $y = c \cdot x$ és az $y = x^c$, $-\infty < c < \infty$ függvénysokaság, melyek a $c = 1$ pontban érintkeznek.

A tartalmazó tér különféle megválasztása mellett különféleképpen definiálhatjuk az érintkezés mértékét is.

38. DEFINÍCIÓ. Egy d-dimenziós euklideszi-tér h_i tartományaiból álló H halmazára $(H = \{h_i\})$ jelölje $s_{25}(H)$ a h_i tartományok közös határpontjai halmazának $d-1$ dimenziós mértékét.

34. Kérdés. Mely elrendezésekre létezik $s_{25}(H)$, és hogyan függ értéke az elrendezés tulajdonságaitól?

MEGJEGYZÉSEK. 1. Konvex h_i elemek esetén $s_{25}(H)$ mindig létezik. Ha a h_i elemek szigorúan konvexek $s_{25}(H)=0$ (ha $d>1$).

2. Egy dimenzióban $s_{24}(H) \leqq s_{25}(H)$, és intervallumokból álló n elemű elrendezéseknél $s_{24}(H)=s_{25}(H)=n-1$.

3. Az érintkezés mértékét ugyanígy definiálhatjuk a h_i elemek közös határpontjaiból alkotott halmaz komponenseinek számával. Szigorúan konvex tartományoknál ez az érték is egyenlő $s_{24}(H)$-val.

4. Egy hasonló definíció szerepel [2]-ben és [12]-ben. A tömörség (lazaság) mértékét ezek a dolgozatok általában az elempárokon értelmezett függvényekkel definiálják.

Ismert fogalom a „szoliditás" (l. pl. [3]). Egy síkbeli körkitöltést szolídnak nevezünk, ha elemei nem mozgathatók úgy, hogy egy másik elemet részben át ne fedjenek. Ez a kikötés szigorúbb mint az érintkezés feltétele. Ennek ellenére adható olyan H szolíd tartományelrendezés, melyben $s_{24}(H)$ közel sem maximális.

39. DEFINÍCIÓ. $s_{26}(H)$ az n elemű H elrendezés rögzített elemeinek száma.

Kis elemszámú rendszereknél, vagy ha megengedjük, hogy az egyes elemek átfedjék egymást, a korlátos H elrendezés lazaságát jellemezheti a közös belső vagy határponttal nem rendelkező elempárok száma.

40. DEFINÍCIÓ. $s_{27}(H)$ az n elemű H elrendezés olyan h_i, h_j $(i \neq j)$ elempárjainak a száma, amelyek egy $d_{i,j}$ távolságnál közelebb vannak egymáshoz. A $d_{i,j}$ lehet konstans, vagy az i és j függvénye.

Ez a definíció már nem topológiai jellegű, mint $s_{24}(H)$, hiszen távolságértékeket is figyelembe vesz. Lényeges tulajdonsága az $s_{27}(H)$ függvénynek, hogy a H elrendezés egy elég kicsiny megváltozásával szemben invariáns. A $d_{i,j}$ távolság mérésekor is tehetünk általánosításokat. Távolságként használhatjuk például a λ távolságfüggvényt is (l. a 32. definíció előtt).

Ugyancsak halmazelrendezések elemeinek különállóságát, lazaságát fejezi ki a „szeparálhatóság" fogalma (erről l. pl. [3]).

5. Egyéb mérőszámok, általános kérdések

Az előző pontokban többször szerepeltek különféle távolságfogalmak. Érdemes ezek közül részletesebben foglalkozni a 32. definíció előtt bevezetett λ távolságfüggvénnyel.

A $\lambda(x)$ távolságfüggvény

A λ távolságfüggvény bevezetésével többféle általánosításra nyílik lehetőség. Előfordulhat, hogy diszkrét rendszereket olyan tulajdonságokkal kívánunk jellemezni, melyek eredetileg folytonos halmazokra vonatkoztak (l. például a 11. kérdést vagy a 27. tételt).

41. DEFINÍCIÓ. Diszkrét tartományokból álló H rendszert λ összefüggőnek nevezzük, ha

a) egy λ távolságú párhuzamos tartományrendszere (paralleltartománya) összefüggő ($\lambda \geqq 0$),

b) ha minden h_i elemen belül van olyan p_i pont melyből a megfelelő h_i elemek λ-szoros nagyításainak egyesítése összefüggő ($\lambda \geqq 1$).

MEGJEGYZÉSEK. 1. A 41. definíció a) és b) pontjában adott meghatározások nem ekvivalensek — néhány kivételtől eltekintve, például amikor a h_i elemek körök, a p_i pontok a körközéppontok.

2. Az egyszeres összefüggést ugyanígy definiálhatjuk.

3. A p_i pontok (nagyítási centrumok) a H elrendezés nevezetes pontjai is lehetnek, a különböző p_i pontok helyett egyetlen vetítési centrumot is kijelölhetünk.

4. Mozaikoknál a $\lambda=0$, illetve a $\lambda=1$ érték is elég az egyszeres összefüggőség teljesüléséhez. Lefedést adó rendszereknél a $\lambda<0$, illetve a $\lambda<1$ értékekre is lehet λ összefüggő az elrendezés.

42. DEFINÍCIÓ. Egy H tartományrendszer λ konvex, ha

a) λ távolságú paralleltartománya, vagy

b) λ mértékű nagyítása (egy vagy több centrumból) tartalmazza a H konvex burkát.

MEGJEGYZÉSEK. 1. Bármely korlátos tartományrendszerhez található olyan λ érték, hogy az λ összefüggő (egyszeresen összefüggő), λ konvex legyen (mindkét előbb definiált értelemben).

2. Érdekes a ϱ körkonvexitás és a λ konvexitás összehasonlítása. Az első a konkávitás mértékét korlátozza lokálisan, míg a második a konvex buroktól való halmazeltérés maximumát szorítja egy érték alá.

3. A 42. definícióban a konvex burok helyett gyengébb feltételnek eleget tevő halmazokat is választhatunk, például a ϱ körkonvex burkot, vagy speciálisabb alakzatokat, például a H külkörét. Ennek megfelelőn egy tágabb értelemben vett ϱ konvexitásról, illetve kör alakról beszélhetünk.

A λ távolságfüggvény fogalmát, mely eredetileg konvex tartományokon értelmezett, nem konvex halmazokra is kiterjeszthetjük.

43. DEFINÍCIÓ. Egy adott T tartományra és egy adott σ pontra, a tér egy x pontjának a T halmazra és a σ origóra vonatkozó λ_A távolságfüggvénye:

$$\lambda_A(T, \sigma, x) = \inf \lambda,$$

ahol λ olyan, hogy létezik y pont ($y \in T$), melyre $\lambda \cdot (y-\sigma)=x$, de $\lambda \geqq 1$, ha $x \notin T$.

Ugyanígy kapjuk a következő definíciókat.

44. DEFINÍCIÓ. Az előző definíció feltételeivel,

$$\lambda_B(T, \sigma, x) = \inf \lambda,$$

de most λ értéke minden esetben kisebb lehet 1-nél.

Ha a σ pontot nem rögzítjük;

45. DEFINÍCIÓ.

$$\lambda_C(T, x) = \inf_{\sigma \in T} \lambda_A .$$

46. DEFINÍCIÓ.

$$\lambda_D(T, x) = \inf_{\sigma \in T} \lambda_B .$$

Természetesen (a 45., 46. definícióban) más korlátos tartományt is kijelölhetnénk σ mozgásteréül, nem csak magát a T tartományt.

53. TÉTEL. *Legyen σ a T tartomány belső pontja, és T legyen a σ-ra nézve konvex. Ekkor $\lambda_A(T, \sigma, x) = \lambda_B(T, \sigma, x)$. Jelöljük ezt a közös értéket most $\lambda(T, x)$-szel. Ilyen feltétel mellett teljesül a*

$$\int_{x \in T} \lambda(T, x)\, \mathrm{d}f = \frac{d}{d+1} \mu(T) \tag{6}$$

egyenlőség, ahol $\mu(T)$ a T térfogata, d a T tartományt tartalmazó euklideszi-tér dimenziószáma. Ha T bármely belső pontjából nézve konvex, akkor a (6) *egyenlőség a $\lambda_C(T, x)$ és $\lambda_D(T, x)$ függvényekre is igaz.* (*Konvex T tartományokra $\lambda_C(T, x) = \lambda_D(T, x)$.*)

54. TÉTEL. *Ha egy d dimenziós T tartomány egy σ pontjára nézve nem konvex, akkor az ilyen σ pontokra az $\alpha \cdot \mu(T) = \int_{x \in T} \lambda_A(T, \sigma, x)\, \mathrm{d}f$ egyenletben az α érték olyan, hogy $\frac{d}{d+1} < \alpha < \infty$. Ha az egyenletben a λ_B függvényt szerepeltetjük, akkor $0 < \alpha < \infty$. Ha a σ pont nem tartozik a T-hez, akkor $\int_T \lambda_A(T, \sigma, x)\, \mathrm{d}f > \frac{d}{d+1}$ és $\int_T \lambda_B(T, \sigma, x)\, \mathrm{d}f > \frac{d}{d+1}$.*

MEGJEGYZÉS. A fent definiált λ függvények, ha sem σ, sem x nem eleme T-nek, csak olyan x, σ pontpárra léteznek, melyhez található u és v valós szám $(u+v=1)$, hogy az $y = u \cdot x + v \cdot \sigma$ pont eleme T-nek.

Árnyékoltság és tömörség

A fenti megjegyzéshez kapcsolódva, ha a T tartomány elválasztja a σ pontot az x pontok egy halmazától, más szóval, T árnyékolja a σ pontot, akkor a λ függvények az adott x pontok halmazán értelmezhetők.

Vizsgálhatjuk, hogy egy pontot milyen szögben árnyékol egy T tartomány, mekkora hányadát árnyékolja a térnek egy T tartomány (végtelen tartományrendszer). Milyenek azok a tartományrendszerek amelyek egy adott R távolságon belül elhomályosulnak: a tér bármely x pontjából, bármely irányba húzott R hosszúságú szakasz tartalmaz a T-hez tartozó pontot. Végtelen rendszereknél van értelme önmagát árnyékoló, illetve egymást külcsönösen árnyékoló halmazokról beszélni. Megvizsgálhatjuk például, hogy melyek a leglazább (legkisebb kitöltési sűrűséget adó), R távolságon belül elhomályosuló körrendszerek.

Egyenletesség

Megfigyelhető, hogy bizonyos alakzatok legtömörebb elhelyezéseinél szabályosságok mutatkoznak. Ez tapasztalható például az ismert, legsűrűbb gömbfelületkitöltést adó kongruens elemű körrendszereknél, vagy az extremális téglalapkitöltést adó kongruens elemű körrendszereknél is (l. 28. tétel). Az esetenként fellépő, különböző jellegű szabályosságoknál általánosabb tulajdonság egy elhelyezés egyenletessége. Az előzőkből, de egyes műszaki problémákból kiindulva is felmerül az igény, hogy egy pont- vagy más alakzatrendszert a lehető legegyenletesebben helyezzünk el.

47. DEFINÍCIÓ. Egy T tartományon elhelyezett n elemű pontrendszerre akkor mondjuk, hogy a legegyenletesebb elhelyezkedésű, ha (az adott T-re és az adott n pontszám mellett) a pontrendszer és a T halmazeltérése a minimális.

48. DEFINÍCIÓ. Egy konvex T tartományon elhelyezett véges elemszámú pontrendszert akkor mondunk legegyenletesebbnek, ha a pontok közt mért távolságoknak a minimuma maximális. (l. például a klasszikus gömbfelület kitöltési problémát, [3].)

Egy dimenzióban a 47. és 48. definíció ekvivalens, (magasabb dimenzióban azonban már nem). A 47. definíció nem csak pontrendszerekre, de más tartományrendszerekre is átvihető.

Jellemezheti egy elrendezés egyenletességét az elhelyezett pontokhoz, illetve tartományokhoz rendelt függvények, például a karakterisztikus függvények, összegeként nyert függvény egyenletessége (konstans értékhez való közelsége) is (l. [4]).

34. Kérdés. Van-e kapcsolat egy H elrendezésnek az előzőkben definiált valamelyik egyenletességi mértéke és az előző szakaszokban szereplő $s_i(H)$ függvények értékei között?

Halmazelrendezéseken értelmezett eljárások

Az előző szakaszokban a H elrendezéseken értelmezett transzformációkat, műveleteket vizsgáltunk (l. pl. az 5., 6., 7. definíciót). Ilyen kérdésekre térünk most vissza.

35. Kérdés. Milyen hatással van az egyes $s_i(H)$ tömörségfüggvényekre a H elrendezés elemeinek (meghatározott módon történő) aprítása, bizonyos alakváltozása, például lapítása? Mely $s_i(H)$ függvények invariánsok adott transzformációkkal szemben? Például a konvex burokra vonatkozó kitöltési sűrűség affin invariáns. Nem mondható el ugyanez például a ϱ körkonvex burokra vonatkozó kitöltési sűrűségről.

Eljárások iterált alkalmazásakor mindig kérdéses az eljárás konvergenciája. Ilyen kérdésekkel foglalkozik például a [10] dolgozat is.

Kapcsolatok, különbségek a tömörségfüggvények között, legtömörebben továbbépített rendszerek, láncok

Az $s_i(H)$ tömörségfüggvények közti kapcsolatok vizsgálata számos új problémát vet fel. Ilyen kérdések szerepeltek a 31., 32. tételben is. Hasonlóan, bizonyos tömörségfüggvények közti különbözőségeket mutat ki a [2] dolgozat.

Az extremális tömörségű halmazrendszereken kívül beszélhetünk legtömörebben továbbépített elrendezésekről is. Ennek meghatározása az [1] dolgozatban található. Legtömörebben továbbépítettnek nevezünk egy n elemű elrendezést akkor, ha i-edik elemei (a továbbépítési sorrendet tekintve) az első $i-1$ elemből álló rendszert az adott $s_j(H)$ függvényre vonatkozóan extremálisan egészítik ki, minden i-re ($i=1, 2, \ldots, n$). Ez a meghatározás bármely $s_j(H)$ tömörségfüggvényre értelmezhető.

49. DEFINÍCIÓ. Nevezzünk egy H elrendezést „láncnak", ha az elrendezés h_i elemeinek van olyan indexezése, hogy a h_i és h_{i+1} elemek minden i-re érintkeznek (vagy általánosabban, valamilyen más, például geometriai reláció teljesül köztük).

Vizsgálható egy adott h_i elemkészletre és egy adott $s_j(H)$ tömörségfüggvényre a legtömörebb, a legtömörebben továbbépített és a legtömörebb láncot adó elrendezések közti kapcsolat.

Egyéb általános megjegyzések

Az előző szakaszokban elsősorban a legegyszerűbb modelleket (pont vagy körelhelyezéseket) vizsgáltunk. A tárgyalt kérdéseknek egyrészt magasabb dimenziós, illetve nem euklideszi térre, másrészt körelhelyezéseken túl más alakzattípusokra való általánosítása jöhet elsősorban szóba (néhány ilyen általánosításra az előzőkben már sor került).

Az elért eredmények kiterjesztésekor a tömörségfüggvények értelmezése okozhat problémát. Kitöltési sűrűséggel kapcsolatos vizsgálataink például korlátos elrendezésekre vonatkoznak. Kérdéses, hogy például a korlátos elrendezéseken értelmezett tömörségfüggvények közül melyek terjeszthetők ki közvetlenül nem korlátos elrendezésekre. Most nem térünk ki a sűrűség fogalmával kapcsolatos értelmezhetőségi nehézségekre ([9]). Véges esetekben ezek a problémák megkerülhetők.

Különböző elemekből álló alakzatrendszerek tömörségét elsősorban az elrendezést alkotó elemek eloszlása befolyásolja. Az, hogy melyik fajta elemből (például körelhelyezéseknél a kisebb vagy nagyobb körökből) van több vagy kevesebb, dönti el az elérhető tömörség mértékét.

Tömörségfüggvények vizsgálatakor tehát elsődleges szerepet játszik az alakzatrendszer — melyen a vizsgált tömörségfüggvényt értelmezzük — és az alakzatrendszer elemei geometriai jellemzőinek (pl. átmérő) eloszlása. Az ilyen eloszlások, az alakzatrendszer lehetséges geometriai elhelyezései és ezeken az elhelyezéseken értelmezett tömörségfüggvények értékei közötti kapcsolat jól jellemzi a vizsgált alakzatrendszert.

Egyes tartományok elhelyezésén túl adott szerkezetű tartománycsoportokból álló elrendezéseket is vizsgálhatunk. (Például érintkező körhármasok elrendezéseit.) Továbblépve, valamilyen szerkezet szerint, többszörösen egymásra épülő tartományszerkezetek felépítése is lehetséges. Egybevágó elemekből építhető nem homeomorf rendszereket vizsgál a [13] dolgozat.

MEGJEGYZÉS A KORREKTÚRÁNÁL. Az árnyékolással kapcsolatban (ld. 234. old.) értelmezhető az egyes (pl. rádióaktív) sugaraknak az egyes árnyékoló tartományok belsejébe eső darabjainak S összhosszúsága. Az árnyékolt tartomány pontjain áthaladó sugarakhoz tartozó S értékek infimuma jellemzi az árnyékolás „jóságát". Az árnyékolás mértékének ilyen módon történő értelmezésével az árnyékoló halmazok elrendezésének egyfajta (az árnyékolt halmazra vonatkozó) tömörségét is definiálhatjuk.

A kitöltési és lefedési feladatokkal kapcsolatban (ld. pl. 204. old.) megjegyezhető, hogy ezek a kitöltő és lefedő tartományok karakterisztikus függvényeinek összegével történő alsó, illetve felső approximációt jelentenek ([9]).

IRODALOM

[1] BENEDIKTI ISTVÁN (1969), Halmazrendszerek extremális tömörségű elrendezéseivel kapcsolatos problémák, I., *MTA III. Osztály közleményei*, **19**, 359—374.

[2] — (1971), Halmazrendszerek tömörségéről, *MTA III. Osztály közleményei*, **20**, 329—340.

[3] FEJES TÓTH L. (1972), *Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum* (második kiadás), Springer Verlag, Berlin, Heidelberg—New York.

[4] HEPPES ALADÁR (1963), Egy egydimenziós probléma, *Mat. Lapok*, XIV., 134—137.

[5] HORVÁTH JENŐ (1969), Távolságok összegére vonatkozó egy minimum problémáról, *Mat. Lapok*, XX., 25—37.

[6] LEKKERKERKER, C. G. (1969), *Geometry of numbers*, Woltes—Noordhoff, Groningen.

[7] MOLNÁR JÓZSEF (1962), Körelhelyezések állandó görbületű felületeken, *MTA III. Osztály közleményei*, **12**, 224—263.

[8] NÁRAY-SZABÓ ISTVÁN (1965), *Kristálykémia*, Akadémiai Kiadó, Budapest.

[9] POGÁNY CSABA (1971), Szemináriumi előadás.

[10] RUDA MIHÁLY (1968), Relaxációs pontelhelyezési eljárások, *MTA III. Osztály közleményei*, **18**, 253—268.

[11] — (1969), Körelhelyezések téglalapokon, *MTA III. Osztály közleményei*, **19**, 73—87.

[12] TAKÁCSY ILDIKÓ (1971), Egy elhelyezési problémakörről. Szakdolgozat, Budapest.

[13] TÖLGYESI LÁSZLÓ (1969), Egy elhelyezési problémakörről, I., *MTA III. Osztály közleményei*, **19**, 333—344.

[14] YULE—KENDALL (1964), *Bevezetés a statisztika általános elméletébe*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest.

(Beérkezett: 1973. XI. 10.)