STABIL INTERPOLÁCIÓRÓL*

Írta: JOÓ ISTVÁN

Bevezetés

A természeti jelenségeket leíró függvényeket általában nem ismerjük, legtöbb esetben a függvényértékeket csak diszkrét pontokban tudjuk meghatározni, ill. mérni. A diszkrét pontokban nyert függvényérték segítségével különböző típusú interpolációs polinomokat szerkesztünk (pl. LAGRANGE, HERMITE, HERMITE—FEJÉR, stb.), és ezen interpolációs polinomok konvergenciáját vizsgáljuk, feltéve hogy a jelenséget pl. folytonos függvény írja le. Ennek a kérdéskörnek igen nagy irodalma van, és ma is sok matematikus foglalkozik különböző interpolációs eljárások konvergencia-vizsgálatával.

Nyilvánvaló, hogy ugyanazon mérési alappontokban (vagy másképpen interpolációs alappontokban) különböző mérési adatok (függvényértékek) esetén más és más interpolációs polinomokat kapunk ugyanazon interpolációs eljárás esetén. Fontos kérdés annak vizsgálata, hogy ha ugyanazon interpolációs eljárás esetén két különböző mérési adatsor kevéssé tér el egymástól, akkor az ezek segítségével megkonstruált két interpolációs polinom is kevéssé tér-e el egymástól, nemcsak az alappontokban, hanem az interpoláció intervallumának bármely pontjában. Ha egy interpolációs eljárás rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, akkor stabilnak nevezzük.

Régen bizonyított tény, hogy nem minden interpolációs eljárás stabil. Például a *Lagrange*-féle eljárás semilyen alappontrendszer esetén sem stabil. A *Hermite—Fejér*-féle pedig bizonyos alappontrendszerek esetén stabil (normális alappontrendszerek esete) mások esetén nem.

Ilyen stabilitási vizsgálatokkal foglalkoztak FABER, FEJÉR, EGERVÁRY, TURÁN, BALÁZS és sokan mások.

Jelen dolgozat szintén stabil interpolációs eljárások meghatározásával foglalkozik, továbbá ezen vizsgálatokkal kapcsolatban EGERVÁRY és TURÁN által (l. [3], [4]) felvetett gondolatok néhány approximációelméleti alkalmazását mutatja be.

Az utóbbi vizsgálatok alapvető eszköze a következő lemma, amelyet az 1. §-ban fogunk igazolni.

LEMMA: (A. A. MARKOV—T. J. STIELTJES) *Legyen* (a, b) *véges vagy végtelen intervallum, és*

$$a \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqq b$$

* A dolgozat megegyezik a szerző egyetemi doktori disszertációjával.

n tetszőleges pont, $f(x)$ pedig az (a, b)-ben definiált valós függvény, továbbá $P_{2n-1}(x)$ olyan legfeljebb $2n-1$-edfokú polinom, amelyekre teljesülnek a következők:

$$f^{(2n)}(x) > 0 \quad (a < x < b),\; f(x_k) = P_{2n-1}(x_k),\; f'(x_k) = P'_{2n-1}(x_k) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Ekkor

$$f(x) \geqq P_{2n-1}(x) \qquad (a < x < b)$$

feltéve, hogy valamely $x_0 \in (a, b)$-re $f(x_0) > P_{2n-1}(x_0)$.

Röviden szólva a dolgozat tulajdonképpen ezen lemma[1] néhány alkalmazását mutatja be. Az alkalmazás lehetőségeit természetesen ezzel távolról sem merítettük ki. A 2., 3. és 4. §-ok az általam elért eredményeket tartalmazzák, az 5. §-ban pedig BALÁZS és TURÁN egy érdekes tételét ismertetjük. A dolgozatot a Megjegyzések a további alkalmazásokról című résszel zárjuk.

1. §. Az alaplemma bizonyítása. Néhány összefüggés a Jacobi, Laguerre és Hermite polinomokra

Először röviden összefoglalunk néhány interpolációelméleti alapfogalmat. Legyen (a, b) véges vagy végtelen intervallum és

$$a \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqq b \tag{1.1}$$

n tetszőleges pont, továbbá

$$\begin{matrix} y_1, y'_1, \ldots, y_1^{(\alpha_1-1)} \\ y_2, y'_2, \ldots, y_2^{(\alpha_2-1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n, y'_n, \ldots, y_n^{(\alpha_n-1)} \end{matrix} \tag{1.2}$$

tetszőlegesen adott számok. Megszerkesztendő az a legalacsonyabb fokú $H(x)$ polinom, amelyre

$$H^{(i)}(x_k) = y_k^{(i)} \quad (k = 1, \ldots, n;\; i = 0, 1, \ldots, \alpha_k - 1). \tag{1.3}$$

Az interpolációnak ezt a módját először HERMITE vizsgálta. Ismeretes (l. NATANSZON [18]), hogy ennek a feladatnak van megoldása és csak egy van. Ez $\alpha_k = 1$ $(k = 1, \ldots, n)$ esetben

$$H(x) = L(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)} = \sum_{k=1}^{k} y_k l_k(x), \tag{1.4}$$

ahol

$$\omega(x) \overset{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{n} (x - x_k). \tag{1.5}$$

[1] A lemmához hasonló gondolatot először MARKOV és STIELTJES használták (l. FREUD [10], 26. o.).

Ez az ún. *Lagrange*-féle interpoláció. Könnyű belátni, hogy

$$l_k'(x_k) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}. \tag{1.6}$$

Az $a_k=2$ esetben pedig $(k=1, \ldots, n)$

$$H(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k\left[1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right] l_k^2(x)+\sum_{k=1}^{n} y_k'(x-x_k)l_k^2(x). \tag{1.7}$$

Ez az ún. *Hermite*-féle interpoláció, amit $y_k'=0$ $(k=1, \ldots, n)$ esetben *Hermite—Fejér*-féle eljárásnak neveznek. Ha

$$1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k) \geqq 0 \quad (a \leqq x \leqq b;\ k=1, \ldots, n),$$

akkor FEJÉR után az (1.1) alappontrendszert normálisnak nevezzük. Ekkor az *Hermite—Fejér*-féle eljárás a következő érdekes stabilitási tulajdonsággal bír:

$$\min_k (y_k-y_k^*) \leqq \sum_{k=1}^{n} y_k h_k(x)-\sum_{k=1}^{n} y_k^* h_k(x) \leqq \max_k (y_k-y_k^*), \tag{1.8}$$

figyelembe véve a könnyen látható

$$\sum_{k=1}^{n} h_k(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n}\left[1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right] l_k^2(x) \equiv 1 \tag{1.9}$$

azonosságot. Hasonlóképpen közismert, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} l_k(x) \equiv 1. \tag{1.10}$$

Egy, az $[a, b]$ intervallumban definiált folytonos $f(x)$ függvény folytonossági modulusán az

$$\omega(f;\, a, b;\, \delta) \overset{\text{def}}{=} \sup_{\substack{|x-y|\leqq\delta\\ x,y\in[a,b]}} \{|f(x)-f(y)|\}$$

függvényt értjük. Jól ismert, hogy bármely pozitív λ-ra

$$\omega(f;\, a, b;\, \lambda\delta) \leqq (\lambda+1)\,\omega(f;\, a, b;\, \delta), \tag{1.11}$$

$$\|f\|_{[a,b]} \overset{\text{def}}{=} \max_{a\leqq x\leqq b} |f(x)| \tag{1.12}$$

az $[a, b]$-ben folytonos $f(x)$ függvény normája.

Rátérünk lemmánk igazolására. Két bizonyítást fogunk adni. Az első bizonyítási gondolatot már STIELTJES és MARKOV ismerték és felhasználták nevezetes egyenlőtlenségük igazolására (l. FREUD [10], 26. o.). Ennek alapján lemmánkat indirekt igazoljuk. Nyilván a $V(x)=f(x)-P_{2n-1}(x)$-re $V(x_k)=V'(x_k)=0$ $(k=1, \ldots, n)$. Ha volna olyan $\xi\in(a, b)$ melyre $V(\xi)<0$, akkor feltevéseink alapján $V(x)$-nek multiplicitással számolva legalább $2n+1$ gyöke volna (a, b)-ben, azonban ez $V^{(2n)}(x)=f^{(2n)}(x)>0$ $(a<x<b)$ miatt lehetetlen. Az ellentmondás igazolja lemmánkat.

Újabb bizonyításhoz jutunk, ha figyelembe vesszük, hogy a lemmabeli $P_{2n-1}(x)$ az $f(x)$ függvény x_k $(k=1, \dots, n)$ alappontokra vonatkozó *Hermite*-féle interpolációs polinomja. A maradéktagos *Hermite*-féle interpolációs formula alapján (l.[18], 377. o.) lemmánknál általánosabb állítást közvetlenül kapunk. E formula szerint

$$f(x)=P_{2n-1}(x)+\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\left\{\prod_{k=1}^{n}(x-x_k)\right\}^2 \quad (x \neq x_k;\ a<\xi<b)$$

amiből következik, hogy lemmánk állítása akkor is igaz, ha csak a $f^{(2n)}(x)\geqq 0$ $(a<x<b)$ kikötés szerepel, és nem tesszük fel olyan $x_0\in(a, b)$ létezését, ahol $f(x_0)>P_{2n-1}(x_0)$. Ennek ellenére az első bizonyítás gondolata használható gyümölcsözőbben, amint azt látni fogjuk, mivel az szemléletesebb.

Szükségünk lesz SZEGŐ [21] könyvében található következő összefüggésekre.

$$(1.13)\qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\{(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\}^{(n)}$$
$$(\alpha, \beta>-1;\ n=0, 1, \dots)$$

polinomokat *Jacobi*-polinomoknak nevezzük. Jól ismert, hogy ezek ortogonális rendszert alkotnak $(-1, 1)$-ben az $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ súlyfüggvényre nézve, továbbá $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ gyökei egyszeresek, valósak, $(-1, 1)$-be esnek. Könnyen látható, hogy (1.13)-nak tetszőleges komplex α, β számok esetén is van értelme, így jutunk az általánosított *Jacobi*-polinomokhoz.

Az $y_n(x)=P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ polinomok kielégítik (l. [21], (4.2.1)) az

$$(1.14)\qquad (1-x^2)y_n''(x)+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y_n'(x)+n(n+\alpha+\beta+1)y_n(x)=0$$

differenciálegyenletet, továbbá

$$(1.15)\qquad \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\max_{0\leqq x\leqq 1}|g_n(x)|=\text{const}\left(\alpha\geqq-\frac{1}{2}\right)\quad \text{(l. [21], 169. o.),}$$

ahol

$$g_n(x)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{2^{\frac{\alpha+\beta+1}{2}}}(1-x)^{\frac{2\alpha+1}{4}}(1+x)^{\frac{2\beta+1}{4}}P_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

$$(1.16)\qquad \max_{0\leqq x\leqq 1}|P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|\leqq c(\alpha,\beta)n^{-\frac{1}{2}}\left(\alpha<-\frac{1}{2}\right)\quad \text{(l. [21], 168. o.).}$$

$$(1.17)\qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(-1)^nP_n^{(\beta,\alpha)}(-x)\quad \text{(l. [21], (4.1.3)).}$$

Az

$$(1.18)\qquad L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{n!}(e^{-x}x^{n+\alpha})^{(n)}e^x x^{-\alpha}\quad (\alpha>-1,\ n=0, 1, \dots)$$

polinomokat *Laguerre*-polinomoknak nevezzük. Jól ismert, hogy ezek ortogonális rendszert alkotnak $(0, \infty)$-en az $x^\alpha e^{-x}$ súlyfüggvényre nézve, továbbá $L_n^{(\alpha)}(x)$ gyökei egyszeresek, valósak, pozitívok.

Az $y_n(x)=L_n^{(\alpha)}(x)$ polinomok kielégítik (l. [21], (5.1.2)) az

(1.19) $$xy_n''(x)+(\alpha+1-x)y_n'(x)+ny_n(x)=0$$

differenciálegyenletet, továbbá

(1.20) $$L_n^{(\alpha)}(0)=\binom{n+\alpha}{n} \quad \text{(l. [21], (5.1.7))},$$

(1.21) $$\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x)=-L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x) \quad \text{(l. [21], (5.1.14))},$$

(1.22) $$\sum_{k=1}^{n} x_k^{m-1}\{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)\}^{-2}=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} \quad \text{(l. [21], (14.7.5))},$$

ahol x_k $(k=1, \dots, n)$ $L_n^{(\alpha)}(x)$ gyökeit jelöli és m olyan egész szám, amelyre $0\leqq m\leqq$ $\leqq 2n-1$.

(1.23) $$\int_0^\infty l_k(x)x^\alpha e^{-x}\,dx=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}x_k^{-1}\{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)\}^{-2} \quad \text{(l. [21], (15.3.5))}.$$

(1.24) $$\lim_{n\to\infty} n^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}M_n=\text{const.} \quad \text{(l. [21], 7.6.5 tétel)},$$

ahol

$$M_n\overset{\text{def}}{=}\max_{0<x\leqq d} e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}|L_n^{(\alpha)}(x)|, \quad \alpha\geqq-\frac{1}{2}.$$

(1.25) $$L_n^{(\alpha)}(x)=O(n^a)\left(a=\max\left(\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4},\ \alpha\right);\ 0\leqq x\leqq d\right) \quad \text{(l. [21], (7.6.11))}.$$

A

(1.26) $$H_n(x)=(-1)^n(e^{-x^2})^{(n)}e^{x^2} \quad (n=0, 1, \dots)$$

polinomokat *Hermite*-féle polinomoknak nevezik. Jól ismert, hogy ezek ortogonális rendszert alkotnak $(-\infty, +\infty)$-en az e^{-x^2} súlyfüggvényre nézve, továbbá $H_n(x)$ gyökei egyszeresek és valósak.

A *Jacobi-*, *Laguerre-* és *Hermite*-polinomok alkotják az ún. klasszikus ortogonális polinomokat. Ezeket számos szerző jellemezte különféle kitüntetett tulajdonságaikkal, azaz igazoltak olyan tételeket, melyek szerint bizonyos dolgok teljesülnek akkor és csak akkor, ha a klasszikus ortogonális polinomokról van szó. A következő paragrafusban egy interpolációelméleti jellemzését adjuk meg a klasszikus ortogonális polinomoknak, és látni fogjuk, hogy ez hogyan függ össze a stabil interpolációval.

2. §. A stabil interpoláció definíciója. A klasszikus ortogonális polinomok interpolációelméleti jellemzése

Az (1.8) alapján, ha pl. végtelen intervallumon stabil interpolációs eljáráshoz akarunk jutni, kézenfekvő gondolat végtelen intervallumon normális alappontrendszert keresni. Azonban könnyű belátni, hogy ilyen a végtelen intervallumon nem létezik. Tehát célszerű stabil interpolációt más módon keresni. A legújabb ilyen vizsgálatoknál a stabilitás fogalmát definiálják alkalmas módon, és ezután keresik ezen definíció szerint stabil interpolációkat.

Általánosan fogjuk definiálni a stabil interpoláció fogalmát oly módon, hogy ezáltal az eddigi eredményeket könnyen át tudjuk tekinteni. Legyen (a, b) véges vagy végtelen intervallum és

$$a \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqq b \tag{2.1}$$

n tetszőleges véges szám $[a, b]$-ben, továbbá az interpoláció alappolinomjai

$$r_1(x), r_2(x), \ldots, r_n(x), \tag{2.2}$$

azaz amelyekre

$$r_k(x_i) = \delta_{k,i} \quad (k, i = 1, \ldots, n). \tag{2.3}$$

Legyenek y_k $(k=1, \ldots, n)$ tetszőleges valós számok, akkor

$$R_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} y_k r_k(x) \tag{2.4}$$

interpolációs polinom az adott x_k $(k=1, \ldots, n)$ alappontokon, azaz

$$R_n(x_k) = y_k \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{2.5}$$

DEFINÍCIÓ. A (2.4) interpolációs eljárást stabilnak nevezzük (a, b)-ben, az itt definiált $\varrho(x)$ súlyfüggvényre nézve, ha fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$0 \leqq \varrho(x) \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_k^*) \cdot r_k(x) \leqq \max_k (y_k - y_k^*) \cdot \varrho(x_k) \tag{2.6}$$

$$(a < x < b;\ y_k \geqq y_k^*,\ k = 1, \ldots, n).$$

Arra fogunk törekedni, hogy a (2.4) eljárásra

$$\text{Grad } R_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \text{grad } r_k(x) = \text{minimális} \tag{2.7}$$

legyen. Ez a feltétel az eljárás gazdaságosságát jelenti.

A. Az $a=-1$, $b=1$, $\varrho(x) \equiv 1$ esetre EGERVÁRY és TURÁN (l. [3]) igazolták, hogy (2.6) és (2.7) egyidejűen akkor és csak akkor teljesül, ha $x_1=-1$, $x_n=1$, $P_{n-2}^{(0,0)}(x_k)=0$ $(k=2, \ldots, n-1)$. Megadták erre az esetre az egyértelműen meghatározott (2.4) eljárást, igazolták, hogy $[-1, 1]$-ben folytonos $f(x)$ esetén $R_n(f, x) \to f(x)$ egyenletesen $[-1, 1]$-ben, ahol

$$R_n(f, x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot r_k(x). \tag{2.8}$$

Eljárásukat összehasonlították a $P_{n-2}^{(0,0)}(x)$ gyökeihez tartozó *Hermite—Fejér* eljárással, s az *Egerváry—Turán*-féle, a konvergencia és fokszám szempontjából is előnyösebbnek mutatkozott.

B. Az $a=0$, $b=\infty$, $\varrho(x)=e^{-x}$ esetre szintén EGERVÁRY és TURÁN (l. [4]) igazolták, hogy (2.6) és (2.7) egyidejűen akkor és csak akkor teljesül, ha $x_1=0$, $L_{n-1}^{(0)}(x_k)=0$ $(k=2, \ldots, n)$. A kapott eljárásra BALÁZS és TURÁN (l. [5]) bizonyított konvergenciatételt.

C. Az $a=-\infty$, $b=\infty$, $\varrho(x)=e^{-x^2}$ esetre EGERVÁRY és TURÁN igazolták (l. [4]), hogy (2.6) és (2.7) egyidejűen akkor és csak akkor teljesül, ha $H_n(x_k)=0$ $(k=1, \ldots, n)$ és a következő eljáráshoz jutottak:

$$R_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \left(\frac{H_n(x)}{H_n'(x_k)(x-x_k)} \right)^2. \tag{2.9}$$

D. BALÁZS (l. [1]) ezen vizsgálatokhoz kapcsolódva az $a=-1<x_1$, $x_n<b=1$, $\varrho(x)=(1-x^2)^{\alpha+1}$ $(\alpha>-1)$ esetre igazolta, hogy (2.6) és (2.7) egyidejűen akkor és csak akkor teljesül, ha $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x_k)=0$ $(k=1, \ldots, n)$ és

$$R_n^{(\alpha,\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \left(\frac{P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)}{P_n^{(\alpha,\alpha)\prime}(x_k)(x-x_k)} \right)^2. \tag{2.10}$$

A kapott eljárásra $\alpha \geqq 0$ esetben konvergenciatételt is bizonyított.

Az ismertetett vizsgálatokat egészítik ki a következő eredményeim.

I. TÉTEL (l. [14]). *$a=-1<x_1$, $x_n<b=1$, $\varrho(x)=(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}$ $(\alpha, \beta>-1$ rögzítettek) esetén (2.6) és (2.7) egyidejűen akkor és csak akkor teljesülnek, ha a (2.1) alappontokra $P_n^{(\alpha,\beta)}(x_k)=0$ $(k=1, \ldots, n)$ és*

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \left(\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_k)(x-x_k)} \right)^2. \tag{2.11}$$

II. TÉTEL (l. [14]). *$a=0<x_1$, $b=+\infty$, $\varrho(x)=x^{\alpha+1}e^{-x}$ $(\alpha>-1$ rögzített) esetén (2.6) és (2.7) egyidejűen akkor és csak akkor teljesülnek, ha a (2.1) alappontokra $L_n^{(\alpha)}(x_k)=0$ $(k=1, \ldots, n)$ és*

$$R_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \left(\frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)(x-x_k)} \right)^2. \tag{2.12}$$

Megjegyezzük, hogy EGERVÁRY és TURÁN **B.** alatti eredménye tetszőleges paraméterű *Laguerre*-polinom esetére nem látszott általánosíthatónak, s a II. tétel ennek nem általánosítása. Tételünkben ugyanis a $0<x_1$ feltevés is szerepel. Az I. tétel viszont általánosítása BALÁZS **D.** alatti eredményének.

A **C.** alatti eredmény, valamint az I. és II. tételek a klasszikus ortogonális polinomok egységes interpoláció-elméleti jellemzését adják. Az egységes jelző jogossága a bizonyításból ki fog derülni.

Az imént említett három tétel bizonyítása egyszerre végezhető. Ehhez szükséges a következő

2.1. SEGÉDTÉTEL. *Fennállnak a következő egyenlőtlenségek*

$$\{(1-x)^{-\alpha-1}\cdot(1+x)^{-\beta-1}\}^{(2n)}>0 \quad (\alpha,\beta>-1;\ -1<x<1;\ n=0,1,2,\ldots), \tag{2.13}$$

$$(x^{-\alpha-1}e^{x})^{(2n)}>0 \quad (\alpha>-1;\ x\geqq 0;\ n=0,1,2,\ldots), \tag{2.14}$$

$$(e^{x^2})^{(2n)}>0 \quad (-\infty<x<\infty;\ n=0,1,2,\ldots). \tag{2.15}$$

Bizonyítás. Először (2.13)-at igazoljuk. Az (1.13) alapján

$$\{(1-x)^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta-1}\}^{(n)}= \tag{2.16}$$

$$=(-1)^n 2^n n!(1-x)^{-n-\alpha-1}\cdot(1+x)^{-n-\beta-1}P_n^{(-n-\alpha-1,\,-n-\beta-1)}(x).$$

SZEGŐ [21] 6.72. tétele szerint a

$$E(u)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}0 & \text{ha} \quad u\leqq 0\\ [u] & \text{ha} \quad u>0 \quad \text{és nem egész,}\\ u-1 & \text{ha} \quad u=1,2,3,\ldots\end{cases} \tag{2.17}$$

$$X(\alpha,\beta)\overset{\text{def}}{=}E\left\{\frac{1}{2}(|2n+\alpha+\beta+1|-|\alpha|-|\beta|+1)\right\}, \tag{2.18}$$

$$N_1(\alpha,\beta)\overset{\text{def}}{=}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\text{-nek } (-1,1)\text{-be eső gyökeinek a száma,} \tag{2.19}$$

jelölésekkel, ha $\alpha\neq-1,-2,-3,\ldots;\ \beta\neq-1,-2,-3,\ldots;\ n+\alpha+\beta\neq-1,-2,-3,\ldots,$ akkor

$$N_1(\alpha,\beta)=\begin{cases}2[(x(\alpha,\beta)+1)/2] & \text{ha} \quad (-1)^n\binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\beta}{n}>0\\[2ex] 2[x(\alpha,\beta)/2]+1 & \text{ha} \quad (-1)^n\binom{n+\alpha}{n}\binom{n+\beta}{n}<0.\end{cases} \tag{2.20}$$

Jelen esetben ezt $P_n^{(-n-\alpha-1,\,-n-\beta-1)}(x)$-re alkalmazzuk. A (2.16) alapján elég megmutatni, hogy $P_n^{(-n-\alpha-1,\,-n-\beta-1)}(x)$-nek páros n-re $(-1,1)$-ben nincs gyöke, és ezen intervallum valamely pontjában pozitív. A

$$(\alpha)_k\overset{\text{def}}{=}\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1), \quad (\alpha)_0\overset{\text{def}}{=}=1 \quad \text{ha} \quad \alpha\neq 0, \tag{2.21}$$

$$\Gamma(n+1)=n!, \tag{2.22}$$

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{k!\Gamma(\alpha-k+1)}=\frac{(\alpha-k+1)_k}{k!}, \tag{2.23}$$

$$\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-k)}=(a-k)_k, \quad \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a+k-n)}=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)}\frac{(a)_k}{(a-n)_k}, \tag{2.24}$$

$$_pF_q(a_i;\,b_j;\,x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\cdot\ldots\cdot(a_p)_k}{(b_1)_k\cdot\ldots\cdot(b_q)_k}\frac{x^k}{k!}, \tag{2.25}$$

összefüggések közül az első négy felhasználásával kapjuk páros n-re

$$(2.26)\qquad (-1)^n\binom{-\alpha-1}{n}\binom{-\beta-1}{n}=(-1)^n\frac{(-n-\alpha)_n}{n!}\frac{(-n-\beta)_n}{n!}=$$

$$=(-1)^n\frac{\Gamma(-\alpha)\Gamma(-\beta)}{(n!)^2\Gamma(-n-\alpha)\Gamma(-n-\beta)}=(-1)^n\frac{(\alpha+1)_n(\beta+1)_n}{(n!)^2}>0.$$

A (2.18) alapján

$$(2.27)\quad X(-n-\alpha-1,\ -n-\beta-1)=E\left(\frac{1}{2}\{|-\alpha-\beta-1|-|n+\alpha+1|-|n+\beta+1|+1\}\right)=$$

$$=\begin{cases}E\left(\frac{1}{2}\{\alpha+\beta+1-n-\alpha-1-n-\beta-1+1\}\right) & \text{ha}\quad \alpha+\beta>-1\\ E\left(\frac{1}{2}\{-\alpha-\beta-1-n-\alpha-1-n-\beta-1+1\}\right) & \text{ha}\quad -2<\alpha+\beta<-1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}E\left(\frac{1}{2}(-2n)\right)=0 & \text{ha}\quad \alpha+\beta>-1\\ E\left(\frac{1}{2}(-2-2\alpha-2\beta-2n)\right)=0 & \text{ha}\quad -2<\alpha+\beta<-1,\end{cases}$$

és így (2.20) alapján kapjuk páros n-re

$$(2.28)\qquad N_1(-n-\alpha-1,\ -n-\beta-1)=0$$

$$(\alpha,\beta>-1;\ \alpha,\beta\neq-1,-2,\ldots;\ n+\alpha+\beta\neq-1,-2,\ldots).$$

Másrészt

$$(2.29)\qquad P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\binom{n+\alpha}{n}\quad \text{(l. [20], (4.1.1))},$$

amiből (2.21), ..., (2.24) és (2.26) alapján az $\alpha,\beta\neq-1,\ -2,\ldots;\ \alpha+\beta+n\neq-1,\ -2,\ldots$ feltevések miatt kapjuk

$$(2.30)\qquad P_n^{(-n-\alpha-1,\ -n-\beta-1)}(1)=\binom{-\alpha-1}{n}=\frac{(\alpha+1)_n}{n!}>0.$$

A (2.28) és (2.30) kiadja (2.13)-at az $\alpha,\beta>-1,\ \alpha,\beta\neq-1,\ -2,\ -3,\ldots,\ n+\alpha+\beta\neq-1,\ -2,\ -3,\ldots$ esetre. Ebből a $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ polinomok gyökeinek az α,β paraméterektől való folytonos függése (l. [21]) alapján közvetlenül adódik (2.13) az általános esetre.

A (2.14) bizonyításához nem használható közvetlenül (1.18). Komplex függvénytan felhasználásával azonban belátható, hogy az előző esethez teljesen hasonlóan járhatunk el, azaz (1.18)-ból megkapható a (2.16)-hoz analóg összefüggés a mostani esetre is. Most egy más utat mutatunk a (2.16)-hoz analóg összefüggés igazolására. A

$$(2.31)\qquad {}_1F_1(a,b;x)=e^x{}_1F_1(b-a,b;-x)\quad \text{(l. Snow [23], 393. o.)}$$

és

$$(2.32)\qquad L_n^{(\alpha)}(x)=\binom{n+\alpha}{n}{}_1F_1(-n,\alpha+1;x)\quad \text{(l. [21], (5.3.3))}$$

felhasználásával kapjuk, hogy

(2.33)

$$\left(\frac{e^x}{x^{\alpha+1}}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(x^{k-\alpha-1})^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(k-\alpha-1)(k-\alpha-2)\dots(k-\alpha-n)x^{k-n-\alpha-1} =$$

$$=\frac{1}{x^{n+\alpha+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(k-\alpha-1)(k-\alpha-2)\dots(k-\alpha-n)x^k = \frac{1}{x^{n+\alpha+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k-\alpha-n)}x^k =$$

$$=\frac{1}{x^{n+\alpha+1}}\frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(-\alpha-n)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\alpha)_k}{(-\alpha-n)_k}\frac{x^k}{k!} = \frac{(\alpha+1)_n}{x^{n+\alpha+1}}(-1)^n {}_1F_1(-\alpha,\ -\alpha-n,\ x) =$$

$$=\frac{(\alpha+1)_n}{x^{n+\alpha+1}}e^x(-1)^n {}_1F_1(-n,\ -\alpha-n;\, -x) = (\alpha+1)_n\frac{e^x}{x^{n+\alpha+1}}(-1)^n\frac{L_n^{(-n-\alpha-1)}(-x)}{L_n^{(-n-\alpha-1)}(0)}.$$

A (2.33) összefüggés felhasználásával a bizonyítás az előzőhöz teljesen hasonló számolással fejezhető be, csak most SZEGŐ [21] 6.73 tételére kell hivatkozni.

A (2.15) összefüggés nyilvánvaló. Ezzel a 2.1. segédtétel bizonyítását befejeztük.

Megjegyezzük, hogy a (2.13) és (2.14)-re két másik bizonyítást is sikerült adni, amelyekben nem kell hivatkozni SZEGŐ tételeire. Egyik a *Cauchy*-féle integrálformulán alapul, a másik pedig valósban maradva igazolja (2.13) és (2.14)-et. Azért az itteni bizonyítást közöltük, mert tanulságosabbnak tartjuk ezt. Az itt közölt bizonyítások a feladat nehézségét a *Jacobi*- és *Laguerre*-polinomok gyökeinek eloszlására vezetik vissza, s ez a mód máskor is alkalmazható esetleg.

2.2. SEGÉDTÉTEL. *Fennállnak a következő egyenlőtlenségek*

(2.34) $$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1-x_k)^{\alpha+1}(1+x_k)^{\beta+1}}\left(\frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_k)(x-x_k)}\right)^2 \geqq 0$$

$$(-1<x<1;\ \alpha,\beta>-1),$$

(2.35) $$\frac{e^x}{x^{\alpha+1}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{x_k}}{x_k^{\alpha+1}}\left(\frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)(x-x_k)}\right)^2 \geqq 0 \quad (x\geqq 0;\ \alpha>-1),$$

(2.36) $$e^{x^2} - \sum_{k=1}^{n}e^{x_k^2}\left(\frac{H_n(x)}{H_n'(x_k)(x-x_k)}\right)^2 \geqq 0 \quad (-\infty<x<\infty),$$

ahol x_k $(k=1,\dots,n)$ *rendre a* $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $L_n^{(\alpha)}(x)$, $H_n(x)$ *polinomok gyökeit jelölik.*

Bizonyítás. Közvetlenül adódnak a Bevezetésben kimondott alaplemmát rendre az $\big(a=-1,\ b=1,\ f(x)=(1-x)^{-\alpha-1}(1+x)^{-\beta-1},\ P_n^{(\alpha,\beta)}(x_k)=0\ (k=1,\dots,n)\big)$; $\big(a=0,\ b=\infty, f(x)=(x^{\alpha+1}e^{-x})^{-1},\ L_n^{(\alpha)}(x_k)=0\ (k=1,\dots,n)\big)$; $\big(a=-\infty,\ b=\infty,\ f(x)=e^{x^2},\ H_n(x_k)=0\ (k=1,\dots,n)\big)$ esetekre alkalmazva s közben figyelembe véve a 2.1. segédtételt.

A továbbiakban csak a II. tétel *bizonyítását* részletezzük, mivel az I. tételé (és a **C.** pontban idézett tételé is) teljesen hasonló.

Először tegyük fel, hogy létezik egy, a (2.6) és (2.7)-nek eleget tevő legfeljebb $2n-2$-edfokú interpolációs eljárás (hogy ilyen létezik, azt látni fogjuk a bizonyítás második részében). Legyen $1 \leqq k \leqq n$, és alkalmazzuk a mostani esetre (2.6)-ot az

$$y_k^* = 0, \quad y_i = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad (i, k = 1, \dots, n)$$

választással. Ekkor kapjuk, hogy

$$0 \leqq \frac{e^{x_k}}{e^x} \frac{x^{\alpha+1}}{x_k^{\alpha+1}} r_k(x) \leqq 1 \quad (x \geqq 0;\ k = 1, \dots, n). \tag{2.37}$$

A (2.3) és (2.37) alapján

$$r_k(x_i) = r_k'(x_i) = 0 \quad (k, i = 1, \dots, n) \tag{2.38}$$

azaz $r_k(x)$ osztható $\left(\dfrac{\omega(x)}{x-x_k}\right)^2$-nek $k=1, \dots, n$ esetén, ahol

$$\omega(x) \overset{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^{n} (x-x_k). \tag{2.39}$$

Figyelembe véve (2.7)-et is azt kapjuk, hogy

$$r_k(x) = \left(\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\right)^2 \quad (k = 1, \dots, n). \tag{2.40}$$

A (2.3) alapján

$$\left(\frac{e^{x_k}}{e^x} \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{x_k^{\alpha+1}} r_k(x)\right)_{x=x_k} = 1 \quad (k = 1, \dots, n),$$

azaz

$$r_k'(x_k) + \frac{\alpha+1}{x_k} - 1 = 0.$$

Tekintettel (1.6) és (2.40)-re ez azt jelenti, hogy

$$\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} + \frac{\alpha+1}{x_k} - 1 = 0,$$

azaz

$$X_k \omega''(x_k) + (\alpha+1-x_k)\omega'(x_k) = 0 \quad (k = 1, \dots, n),$$

tehát

$$X\omega''(x) + (\alpha+1-x)\omega'(x) + C\omega(x) = 0$$

alkalmas C állandóval. Tekintettel (1.19)-re ez azt jelenti, hogy

$$\omega(x) = C_1 L_n^{(\alpha)}(x)$$

alkalmas C_1 állandóval, amint ez jól ismert. Azt kaptuk tehát, hogy a II. tétel feltételeiből

$$R_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \left(\frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)(x-x_k)}\right)^2$$

következik. Az, hogy a kapott $R_n(x)$-re valóban fennáll (2.6) a $\varrho(x)=x^{\alpha+1}e^{-x}$ választással, egyszerűen adódik (2.35)-öt a következő alakjában használva

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{x_k}}{e^x}\cdot\frac{x^{\alpha+1}}{x_k^{\alpha+1}}\,l_k^2(x)\leqq 1 \quad (x\geqq 0;\ \alpha>-1;\ n=0,1,2,\ldots),$$

felhasználva a következő azonosságot

$$0\leqq x^{\alpha+1}e^{-x}\sum_{k=1}^{n}(y_k-y_k^*)r_k(x)=\sum_{k=1}^{n}[(y_k-y_k^*)x_k^{\alpha+1}e^{-x_k}]\cdot\left[\frac{e^{x_k}}{e^x}\cdot\frac{x^{\alpha+1}}{x_k^{\alpha+1}}\cdot r_k(x)\right].$$

Ezzel a II. tétel bizonyítását befejeztük.

Néhány megjegyzést fűzünk az eddigiekhez. Érdekes volna az eddigieket általános $\varrho(x)$ esetére vizsgálni, azaz $\varrho(x)$-ről csupán bizonyos tulajdonságokat feltéve. A II. tétel bizonyításából látható, hogy a bizonyítás menete elvezet bennünket egy, a $\varrho(x)$-ből egyszerűen adódó súlyfüggvényre ortogonális polinomrendszer differenciálegyenletéhez. Ez pedig egy más, régi probléma szempontjából is fontos lehet. A régi probléma az, hogy adjunk meg súlyfüggvényeknek egy lehetőleg tág osztályát, amelyekre ortogonális polinomoknak van differenciálegyenlete, azaz e polinomok kielégítenek egy másodrendű differenciálegyenletet. Természetesen n-től független együtthatókkal rendelkező differenciálegyenletről van szó, hasonlóan (1.14) és (1.19)-hez.

Nem várható még jó $\varrho(x)$-ek esetében sem, hogy mindig létezik olyan x_k $(k=1,\ldots,n)$ alappontrendszer, amelyen van (2.6) és (2.7)-nek egyidejűen eleget tevő interpolációs eljárás.

A következőkben, az I. és II. tételekben nyert stabil interpolációs eljárásokra konvergenciatételeket fogunk bizonyítani. Amint azt már említettük a (2.9) és (2.10) eljárásokra Balázs és Turán (l. [1], [5]) igazoltak konvergenciatételeket.

Az 1. § jelölései mellett tekintsük a következő interpolációs eljárást:

$$R_n(f,x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\cdot l_k^2(x). \tag{2.41}$$

Látható, hogy (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) ennek speciális esetei. Röviden összefoglaljuk, hogy milyen eredmények ismertek eddig a (2.41) eljárásra.

E. Az $a=-1$, $b=1$, $(1-x_k^2)P_{n-2}^{(0,0)}(x_k)=0$ $(k=1,\ldots,n)$ esetre Fejér (l. [9]) igazolta, hogy $[-1,1]$-ben folytonos $f(x)$ függvény esetén $R_n(f,x)\to f(x)$ egyenletesen $[-1,1]$-ben. Ugyanebben a dolgozatában a $P_n^{(\alpha,\beta)}(x_k)=0$ $(k=1,\ldots,n)$ $(-1<\alpha,\beta<0)$ esetet is vizsgálta és bizonyította a következő limeszrelációkat:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}l_k^2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{-\alpha} & \text{ha}\quad x=1\\ 1 & \text{ha}\quad -1<x<1\\ \dfrac{1}{-\beta} & \text{ha}\quad x=-1\end{cases}\quad(-1<\alpha,\beta<0),$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}l_k^2(x)=\begin{cases}1 & \text{ha}\quad -1<x<1\\ +\infty & \text{ha}\quad x=\pm 1\end{cases}\qquad(\alpha=\beta=0).$$

F. Tetszőleges normális alappontrendszerre GRÜNWALD (l. [8]) igazolta, hogy $[-1, 1]$-ben folytonos $f(x)$ esetén $R_n(f, x) \to f(x)$ egyenletesen $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban. Megjegyezte, hogy a ± 1 pontokban általában nincs konvergencia, amit az **E.**-ben először felírt limeszreláció mutat (ugyanis könnyen belátható, hogy $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ gyökei $-1<\alpha, \beta<0$ esetben normális pontrendszert alkotnak $[-1, 1]$-ben). GRÜNWALD tételéből következik, hogy $[-1, 1]$-ben normális pontrendszer esetén is

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} l_k^2(x) \equiv 1 \quad (-1 < x < 1).$$

Ugyanez a limeszreláció következik BALÁZS (l. [1]) tételéből a $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x_k) = 0$ $(k=1, \ldots, n)$ $(\alpha \geqq 0)$ esetre is, amikor már ezen alappontrendszer nem normális (könnyen belátható). BALÁZS és TURÁN egy konvergenciatételéből (l. [5]) következik az említett limeszreláció a $H_n(x_k)=0$ $(k=1, \ldots, n)$ $(-\infty<x<+\infty)$ esetre is.

A következőkben a most ismertetett eredményeket kiegészítjük. Megjegyezzük, hogy a (2.41) eljárásra a konvergencia általános feltételei nincsenek tisztázva úgy, mint ahogy megvizsgálták e kérdést a *Lagrange*- vagy a *Hermite—Fejér*-interpolációnál. Hasonlóan ahhoz, ahogy BALÁZS és TURÁN tették, a 2.2. segédtételben nyert egyenlőtlenségeket lényegesen kihasználjuk a konvergenciatételeink bizonyításában, s ez lehetővé teszi, hogy a JACOBI, LAGUERRE és HERMITE polinomokra vonatkozó legegyszerűbb összefüggéseket használjuk csupán. Nem lesz szükségünk mélyen fekvő asszimptotikus formulákra.

A következőkben mindenütt C-vel x-től és n-től független konstansot fogunk jelölni, indexet nem használunk. Ugyanazon formulán belül is különbözhet két C. Ez a jelölés egyszerűsít. A következő tételeket fogjuk igazolni.

III. TÉTEL (l. [12]). *Ha* $\alpha, \beta > -1, f(x)$ *a* $[-1, 1]$*-ben folytonos függvény, akkor a* (2.11) *eljárásra*

$$|R_n^{(\alpha,\beta)}(f, x) - f(x)| \leqq C\|f\|_{[-1,1]} \cdot n^{-1/2} + C\omega(f; -1, 1; n^{-1/2})$$

$$(-1+\varepsilon \leqq x \leqq 1-\varepsilon, \varepsilon > 0)$$

becslés igaz, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} l_k^2(l) = \begin{cases} \dfrac{1}{-\alpha} & \text{ha} \quad -1 < \alpha < 0, \beta > -1 \\ +\infty & \text{ha} \quad \alpha \geqq 0, \beta > -1. \end{cases}$$

KÖVETKEZMÉNYEK. 1. A III. tétel feltételei mellett $R_n^{(\alpha,\beta)}(f, x) \to f(x)$ egyenletesen $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban $(\alpha, \beta > -1, \varepsilon > 0)$.

2. Fennáll a következő limeszreláció:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} l_k^2(x) = 1 \quad (\alpha, \beta > -1, \; -1 < x < 1).$$

Ez a konvergencia egyenletes $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$-ban, tehát

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{-\alpha} & \text{ha } x=1,\ -1<\alpha<0,\ \beta>-1\\ +\infty & \text{ha } x=1,\ \alpha\geqq 0,\ \beta>-1\\ 1 & \text{ha } -1<x<1;\ \alpha,\beta>-1\\ \dfrac{1}{-\beta} & \text{ha } x=-1,\ -1<\beta<0,\ \alpha>-1\\ +\infty & \text{ha } x=-1,\ \beta\geqq 0,\ \alpha>-1.\end{cases} \tag{2.42}$$

Ebből látszik, hogy ± 1-ben általában nincs konvergencia.

IV. TÉTEL (l. [15]). *Ha* $\alpha>-1, f(x)$ *folytonos* $[0,\infty)$*-en,* $f(x)=0(e^x x^{-\alpha-\varepsilon})$ $(x\geqq 1, x\to\infty; \varepsilon>0)$, *akkor a* (2.12) *eljárásra fennáll az*

$$|R_n^{(\alpha)}(f,x)-f(x)|\leqq C(\|f\|_{[0,d]}+\|f\|^*)n^{-1/4}+C\omega(f;0,2d;n^{-1/4})$$

$$(0<\varepsilon'\leqq x\leqq d,\ d>1)$$

becslés, ahol

$$\|f\|^*=2\sup_{1\leqq x<\infty}\left(|f(x)|/e^x x^{-\alpha-\varepsilon}\right),$$

továbbá

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k^2(0)=\begin{cases}\dfrac{1}{-\alpha} & \text{ha } -1<\alpha<0\\ +\infty & \text{ha } \alpha\geqq 0,\end{cases}$$

KÖVETKEZMÉNYEK. 1. A IV. tétel feltételei mellett $R_n^{(\alpha)}(f,x)\to f(x)$ egyenletesen $[\varepsilon', d]$-ben.

2. Fennáll a következő limeszreláció:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)=1 \quad (x>0,\ \alpha>-1).$$

Ez a konvergencia egyenletes $[\varepsilon', d]$-ben, tehát

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{-\alpha} & \text{ha } x=0,\ -1<\alpha<0\\ +\infty & \text{ha } x=0,\ \alpha\geqq 0\\ 1 & \text{ha } x>0,\ \alpha>-1.\end{cases} \tag{2.43}$$

Ebből látszik, hogy 0-ban általában nincs konvergencia. A III. tétel bizonyításához szükséges néhány segédtétel.

2.3. SEGÉDTÉTEL.

$$\left|1-\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)\right|\leqq C\cdot n^{-1/2} \quad (-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon;\ \alpha,\beta>-1). \tag{2.44}$$

Bizonyítás. (1.9) és (1.14)-ből a közismert

$$\sum_{k=1}^{n}\left[1+\frac{\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x_k}{1-x_k^2}(x-x_k)\right]l_k^2(x)\equiv 1 \tag{2.45}$$

azonosság adódik, amiből

$$\left|1-\sum_{k=1}^{n}l_k^2(x)\right|\leqq C\sum_{k=1}^{n}\frac{|x-x_k|}{1-x_k^2}l_k^2(x)=C\Big\{\sum_{|x-x_k|\leqq n^{-1/2}}{}_k+\sum_{|x-x_k|>n^{-1/2}}{}_k\Big\}= \tag{2.46}$$

$$=C\{A+B\}.$$

A (2.34) egyenlőtlenséget a

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1-x}{1-x_k}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{1+x}{1+x_k}\right)^{\beta+1}l_k^2(x)\leqq 1\quad(\alpha,\beta>-1;\ -1\leqq x\leqq 1) \tag{2.47}$$

alakban használva, kapjuk, hogy

$$A\leqq Cn^{-1/2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1-x}{1-x_k}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{1+x}{1+x_k}\right)^{\beta+1}l_k^2(x)\leqq Cn^{-1/2}\quad(-1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon). \tag{2.48}$$

Másrészt nyilvánvalóan

$$B\leqq Cn^{1/2}\left[\frac{1}{2^{(\alpha+\beta+1)/2}}(1-x)^{(2\alpha+1)/4}(1+x)^{(2\beta+1)/4}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2\times \tag{2.49}$$

$$\times\sum_{k=1}^{n}(1-x_k^2)^{-1}\{P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_k)\}^{-2}.$$

SZEGŐ ([21] (15.1.6) és (15.3.1)) alapján

$$\sum_{k=1}^{n}(1-x_k^2)^{-1}\{P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_k)\}^{-2}= \tag{2.50}$$

$$=\frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx\leqq C,$$

s így (2.49)-ből (1.15), (1.16), (1.17) alapján

$$B\leqq Cn^{-1/2}. \tag{2.51}$$

(2.46), (2.48) és (2.51) éppen (2.44)-et adja.

2.4. SEGÉDTÉTEL.

$$\sum_{k=1}^{n}|x-x_k|l_k^2(x)\leqq Cn^{-1/2}\quad(\alpha,\beta>-1;\ -1+\varepsilon\leqq x\leqq 1-\varepsilon). \tag{2.52}$$

Bizonyítás. (2.52) közvetlenül adódik az előző segédtételben végzett becslések alapján a

$$\sum_{k=1}^{n} |x-x_k| l_k^2(x) = \sum_{|x-x_k|\le n^{-1/2}}{}_k + \sum_{|x-x_k|>n^{-1/2}}{}_k \le C n^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} l_k^2(x) +$$

$$+ C n^{1/2} \left[\frac{1}{2^{(\alpha+\beta+1)/2}} (1-x)^{(2\alpha+1)/4} (1+x)^{(2\beta+1)/4} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2 \sum_{k=1}^{n} (1-x_k^2)^{-1} \{P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_k)\}^{-2}$$

egyenlőtlenségből.

A III. tétel *bizonyítására* térve, nyilvánvalóan

$$|R_n^{(\alpha,\beta)}(f,x)-f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} (f(x)-f(x_k))\, l_k^2(x) + f(x)\left(1-\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} |f(x)-f(x_k)| l_k^2(x) + |f(x)|\cdot\left|1-\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)\right|,$$

másrészt a folytonossági modulus (1.11) tulajdonsága alapján

$$|f(x)-f(x_k)| \le \omega(f;\, -1,1;\, |x-x_k|) \le \omega(f;\, -1,1;\, n^{-1/2})\{n^{1/2}|x-x_k|+1\},$$

s így (2.44) és (2.52) miatt

$$|R_n^{(\alpha,\beta)}(f,x)-f(x)| \le \omega(f;\, -1,1;\, n^{-1/2})\left\{n^{1/2}\sum_{k=1}^{n} |x-x_k| l_k^2(x) + \sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)\right\} +$$

$$+ C\|f\|_{[-1,1]} n^{-1/2} \le C\|f\|_{[-1,1]}\cdot n^{-1/2} + C\omega(f;\, -1,1;\, n^{-1/2}).$$

Ezzel a III. tétel első részét bebizonyítottuk. Ez hasonló volt ahhoz, ahogy BALÁZS (l. [1]) $\alpha=\beta\ge 0$ esetre igazolta ugyanezt. Megjegyezzük, hogy [12]-ben élesebb becslést igazoltunk mint ami a II. tételben szerepel, azonban aszimptotikus formulákat használtunk, s a bizonyítás bonyolultabb. Ekkor ugyanis a (2.47) egyenlőtlenséget nem sikerült igazolni. A III. tételbeli limeszreláció $\alpha\ne 0$ esetben azonnal következik az alábbi, (2.45) és (2.50)-ből rögtön adódó

$$\sum_{k=1}^{n} l_k^2(1) = \frac{1}{-\alpha}\left\{1-(1+\beta)\binom{n+\alpha}{n}^2 \sum_{k=1}^{n} (1-x_k^2)^{-1}\{P_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_k)\}^{-2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{-\alpha}\left\{1-\binom{n+\alpha}{n}^2 \frac{1+\beta}{2^{\alpha+\beta+1}} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \int_{-1}^{1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta\, dx\right\}$$

összefüggésből.

Az $\alpha=0$ eset bizonyítására tekintsük a megfelelő kvadratura-eljárást az

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad -1 \le x < 0 \\ \dfrac{1}{2^{\beta+1}}\cdot\dfrac{1+x}{1-x} & \text{ha} \quad 0 \le x \le 1-\varepsilon \quad (\varepsilon > 0) \\ 0 & \text{ha} \quad 1-\varepsilon \le x \le 1 \end{cases}$$

függvényre, azaz

$$Q_n(f)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\lambda_k=\sum_{0\le x_k\le 1-\varepsilon}{}_k\,(1-x_k)^{-2}\{P_n^{(0,\beta)\prime}(x_k)\}^{-2}\leqq\sum_{k=1}^{n} l_k^2(1),$$

ahol

$$\lambda_k=2^{\beta+1}(1-x_k^2)^{-1}\{P_n^{(0,\beta)\prime}(x_k)\}^{-2}\quad (\text{l. [21], (15.3.1)})$$

a *Cotes* számai a kvadratura-eljárásnak az $\alpha=0$, $\beta>-1$ esetre. Mivel SZEGŐ ([21] 15.2.3) tétele alapján

$$Q_n(f)\to\int_0^{1-\varepsilon}\frac{1}{2^{\beta+1}}\frac{1+x}{1-x}(1+x)^\beta\,dx>c\cdot|\log\varepsilon|,$$

ezért azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} l_k^2(1)=+\infty\quad (\alpha=0,\beta>-1).$$

Ezzel a III. tétel bizonyítását befejeztük. Megjegyezzük, hogy FEJÉR (l. [9]) a (2.42)-nek $-1<\alpha$, $\beta<0$ speciális esetét az ittenitől eltérő módon igazolta, míg az $\alpha=0$-nál ugyanezt tettük amit FEJÉR az utóbbi határérték $\alpha=0$, $\beta=0$ speciális esetének bizonyításánál.

A IV. tétel bizonyításához szükséges néhány segédtétel.

2.5. SEGÉDTÉTEL. *Fennáll a*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{x_k}}{(x_k+1)^{1+\alpha+\varepsilon}}\cdot\frac{1}{x_kL_n^{(\alpha)\prime}(x_k)^2}\leqq \tag{2.53}$$

$$\leqq\left(\int_0^\infty\frac{x^\alpha}{(x+1)^{1+\alpha+\varepsilon}}dx\right)\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\quad(\alpha>-1,\varepsilon>0)$$

egyenlőtlenség, ahol x_k $(k=1,\dots,n)$ $L_n^{(\alpha)}(x)$ *gyökeit jelöli ezután.*

Bizonyítás. A Bevezetésben kimondott lemmát $f(x)=e^x/(x+1)^{1+\alpha+\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$, $L_n^{(\alpha)}(x_k)=0$ $(k=1,\dots,n)$ esetre alkalmazva, (2.13)-alapján

$$\frac{e^x}{(x+1)^{1+\alpha+\varepsilon}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{x_k}}{(x_k+1)^{1+\alpha+\varepsilon}}l_k(x)-\sum_{k=1}^{n}s(x_k)(x-x_k)l_k^2(x)\geqq 0$$

$$(x\geqq 0,\alpha>-1,\varepsilon>0),$$

adódik, ahol

$$s(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{(x+1)^{1+\alpha+\varepsilon}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{x_k}}{(x_k+1)^{1+\alpha+\varepsilon}}l_k(x)\right).$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát $x^\alpha e^{-x}$-szel szorozva, integrálva, az $L_n^{(\alpha)}(x)$-ek ortogonalitása és (1.23)-alapján nyerjük (2.53)-at.

Megjegyezzük, hogy ugyanilyen gondolatmenettel nyerhető a

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{m-1} e^{\beta x_k} \{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)\}^{-2} \leqq \left(\frac{1}{1-\beta}\right)^{m+\alpha+1} \cdot \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m+\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}$$

$$(\alpha > -1,\ \beta < 1,\ m \geqq 0 \text{ egész}),$$

egyenlőtlenség is, amely $\beta = 0$, $0 \leqq m \leqq 2n-1$ esetben az (1.22) azonosságba megy át. Az utóbbi gondolatmenetettel először BALÁZS és TURÁN ([6]) dolgozatában találkozunk.

2.6. SEGÉDTÉTEL.

$$(2.54)\qquad \left|1 - \sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)\right| \leqq C \cdot n^{-1/4} \quad (0 < \varepsilon \leqq x \leqq d,\ \alpha > -1).$$

Bizonyítás. (1.9) és (1.19)-ből a közismert

$$(2.55)\qquad \sum_{k=1}^{n} \left[1 - \frac{x_k - \alpha - 1}{x_k}(x - x_k)\right] l_k^2(x) \equiv 1$$

azonosság adódik, amiből

$$(2.56)\qquad \left|\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x) - 1\right| \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k + |\alpha+1|}{x_k} |x - x_k| l_k^2(x) = \sum_{|x-x_k| \leqq n^{-1/4}}{}_k + \sum_{|x-x_k| > n^{-1/4}}{}_k = A + B.$$

A (2.35)-öt a

$$(2.57)\qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{x_k}}{e^x} \frac{x^{\alpha+1}}{x_k^{\alpha+1}} l_k^2(x) \leqq 1 \quad (x \geqq 0;\ \alpha > -1)$$

alakban használva, kapjuk, hogy

$$(2.58)\qquad A \leqq Cn^{-1/4} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{x_k}}{e^x} \frac{x^{\alpha+1}}{x_k^{\alpha+1}} l_k^2(x) \leqq Cn^{-1/4} \quad (0 < \varepsilon \leqq x \leqq d).$$

Másrészt (1.22), (1.24) és (1.25) alapján nyilvánvaló, hogy

$$(2.59)\qquad B \leqq n^{1/4} L_n^{(\alpha)}(x)^2 \left\{\sum_{k=1}^{n} (L_n^{(\alpha)\prime}(x_k))^{-2} + |\alpha+1| \sum_{k=1}^{n} x_k^{-1} (L_n^{(\alpha)\prime}(x_k))^{-2}\right\} \leqq Cn^{-1/4}.$$

Az utóbbi két egyenlőtlenség kiadja (2.54)-et, sőt igazolást nyert a

$$(2.60)\qquad \sum_{k=1}^{n} |x - x_k| l_k^2(x) \leqq C \cdot n^{-1/4} \quad (0 < \varepsilon' \leqq x \leqq d,\ \alpha > -1)$$

becslés is.

2.7. SEGÉDTÉTEL.

$$(2.61)\qquad \sum_{x_k > 2d}{}_k\, e^{x_k} x_k^{-\alpha-\varepsilon} \cdot l_k^2(x) \leqq C \cdot n^{-1/2} \quad (0 < \varepsilon' \leqq x \leqq d,\ \alpha > -1).$$

Bizonyítás. (2.61) közvetlenül adódik (1.24), (1.25) és (2.53) felhasználásával a nyilvánvaló

$$\sum_{x_k>2d} e^{x_k} x_k^{-\alpha-\varepsilon} l_k^2(x) = L_n^{(\alpha)}(x)^2 \sum_{x_k>2d} \frac{e^{x_k}}{x_k^{2+\alpha+\varepsilon}} \left(\frac{x_k}{x-x_k}\right)^2 \{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)\}^{-2} \leqq$$

$$\leqq 4L_n^{(\alpha)}(x)^2 \sum_{x_k>2d} \frac{e^{x_k}}{x_k^{2+\alpha+\varepsilon}} \frac{1}{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)^2}$$

egyenlőtlenségből.

A IV. tétel *bizonyítására* térve, nyilvánvalóan

$$|R_n^{(\alpha)}(f, x)-f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} [f(x)-f(x_k)]\, l_k^2(x) + f(x)\left[1-\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)\right]\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{x_k\leqq 2d} |f(x)-f(x_k)|\, l_k^2(x) + \sum_{x_k>2d} |f(x)|+|f(x_k)|\, l_k^2(x) + |f(x)|\cdot\left|1-\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)\right|,$$

másrészt a folytonossági modulus (1.11) tulajdonsága alapján

$$(2.62)\qquad |f(x)-f(x_k)| \leqq \omega(f; 0, 2d; |x-x_k|) \leqq$$

$$\leqq \omega(f; 0, 2d; n^{-1/4})\{n^{1/4}\cdot|x-x_k|+1\},$$

s így (2.54), (2.60), (2.61) miatt a

$$|R_n^{(\alpha)}(f, x)-f(x)| \leqq \omega(f; 0, 2d; n^{-1/4})\left\{n^{1/4}\sum_{k=1}^{n} |x-x_k|\, l_k^2(x) + \sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)\right\} +$$

$$+\|f\|^* \sum_{x_k>2d} e^{x_k} x_k^{-\alpha-\varepsilon} l_k^2(x) + \|f\|_{[0,d]}\cdot\left|1-\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)\right|$$

egyenlőtlenségből következik a IV. tétel első fele. A IV. tételbeli limeszreláció $\alpha\neq 0$ esetben azonnal következik az alábbi, (1.22) és (2.55)-ből rögtön adódó

$$\sum_{k=1}^{n} l_k^2(0) = \frac{1}{-\alpha}\left\{1-\binom{n+\alpha}{n}^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^{-1}(L_n^{(\alpha)\prime}(x_k))^{-2}\right\} = \frac{1}{-\alpha}\left\{1-\binom{n+\alpha}{n}\right\}$$

összefüggésből. Az $\alpha=0$ eset bizonyítására tekintsük a megfelelő kvadratura-eljárást az

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad 0\leqq x<\varepsilon \\ \dfrac{1}{x} & \text{ha} \quad \varepsilon\leqq x\leqq 1 \\ 0 & \text{ha} \quad x>1 \end{cases}$$

függvényre, azaz

$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\lambda_k = \sum_{\varepsilon\leqq x_k\leqq 1} x_k^{-2}\{L_n^{(0)\prime}(x_k)\}^{-2} \leqq \sum_{k=1}^{n} l_k^2(0),$$

ahol

$$\lambda_k = x_k^{-1}\{L_n^{(0)\prime}(x_k)\}^{-2} \quad \text{(l. [21], (15.3.5))}$$

a *Cotes* számai a kvadratura-eljárásnak az $\alpha=0$ esetre. Most FREUD ([10] III.1.6(a)) tétele alapján

$$Q_n(f) \to \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} e^{-x}\, dx > C|\log \varepsilon|,$$

s ezért

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} l_k^2(0) = +\infty \quad (\alpha = 0).$$

Ezzel a IV. tétel bizonyítását befejeztük.

A bizonyított limeszreláció most is azt mutatja, hogy az interpoláció intervallumának végpontjában, most a 0-ban, általában nincs konvergencia.

Néhány megjegyzést fűzünk eddigi eredményeinkhez. SZABADOS (l. [19], [20]) a *Jacobi-* és *Laguerre*-gyökökön készített *Hermite—Fejér*-interpolációt vizsgálta. Az $f(x)$ függvényre tett alkalmas feltevések mellett konvergenciát bizonyított az interpoláció intervallumának végpontjaiban is, sőt egyenletes konvergenciát az egész intervallumon. Megadta ennek az $f(x)$-re vonatkozó szükséges és elégséges feltételeit. Amint ezt SZABADOS [19] megjegyezte, az ő vizsgálatának gyökerei FEJÉR-hez és a [3] dolgozat eredményeihez nyúlnak vissza. Ezen vizsgálatok kezdeményezője, úgy tudom, FREUD GÉZA volt újabban.

SZABADOS módszere alkalmazható a III. és IV. tételek finomítására. Például (2.42) és (2.43) felhasználásával ugyanezeket a következőképpen általánosíthatjuk:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, l_k^2(1) = \frac{1}{-\alpha} f(1) \quad (-1 < \alpha < 0, \beta > -1),$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, l_k^2(0) = \frac{1}{-\alpha} f(0) \quad (-1 < \alpha < 0),$$

feltéve, hogy $f(x)$ folytonos $[-1, 1]$-ben, ill. $[0, \infty)$-en, és az utóbbi esetben $f(x)= =O(e^{\gamma x})$ $(x\to\infty, \gamma<1)$. Az első összefüggés pl. azt mutatja, hogy $-1<\alpha<0$ esetén az 1 pontban a konvergenciának szükséges és elégséges feltétele az, hogy $f(1)=0$ teljesüljön. Érdekes, hogy az utóbbi feltétel teljesülése esetén többet is állíthatunk, ti. egyenletes konvergencia bizonyítható tetszőleges $-1<a\leqq 1$ esetén $[a, 1]$-ben. Sőt ez az utóbbi is általánosítható, igaz GRÜNVALD [8] utolsó tételének következő kiegészítése: tetszőleges $[-1, 1]$-ben $\varrho(>0)$ normális alappontrendszer esetén, ha a $[-1, 1]$-ben folytonos $f(x)$ függvényre $f(\pm 1)=0$, akkor a (2.41) alatti $R_n(f; x)\to \to f(x)$ egyenletesen $[-1, 1]$-ben. Ennek az állításnak a bizonyítása a [15] dolgozatban található.

Megjegyzem, hogy (2.42) és (2.43) $\alpha=0$ esetének bizonyításánál kvadraturaeljárást használtunk, és ennek konvergenciájára hivatkoztunk. Ezek közvetlenül is megkaphatók korábbi azonosságainkból, figyelembe véve azt, hogy a $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ és $L_n^{(\alpha)}(x)$ gyökei a paramétereknek nagyon „jó" függvényei (l. [21]).

Végül egy jogos kérdés a következő. Az eddigiekből látjuk, hogy a klasszikus ortogonális polinomok gyökeit, vagy egy tetszőleges normális pontrendszert véve alapul, a megfelelő intervallum minden belső pontjában

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} l_k^2(x) = 1.$$

Vajon egy tetszőleges súlyra ortogonális polinomok gyökeit tekintve szintén igaz ugyanez? Ha nem, akkor a súlyfüggvényre nézve mi ennek pl. egy elég általános elégséges feltétele? Felhasználva FREUD GÉZA

$$\frac{\omega''(x)}{\omega'(x)} = -\frac{\lambda_n'(\mathrm{w}, x)}{\lambda_n(\mathrm{w}, x)} \quad \left(\omega(x) = \prod_{k=1}^{n} (x-x_k);\ \omega(x) \text{ a súlyfüggvény}\right)$$

összefüggését, lehetőség van ennek a kérdésnek a tanulmányozására, ugyanis a baloldal méri az alappontrendszer normális voltát (l. [8]), viszont a jobboldalra már igen jó becslések ismertek nagyon általános súlyfüggvények esetén is.

Végül megjegyzem, hogy a (2.41) eljárásnak a tanulmányozását a *Hermite—Fejér*-interpoláció vizsgálatánál betöltött fontos szerepe is indokolttá teszi, amint erre GRÜNWALD [8] is rámutatott.

3. §. Stabil interpoláció a negatív paraméterű Laguerre polinomok gyökein

Tekintsük az

$$R_n^{(\alpha)}(f, x) = f(0)\frac{L_n^{(\alpha)}(x)^2}{\binom{n+\alpha}{n}} + \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left(\frac{1+\alpha}{x_k}x - \alpha\right) l_k^2(x) = \tag{3.1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot r_k(x) \quad (-1 < \alpha \leqq 0)$$

interpolációs eljárást, ahol $L_n^{(\alpha)}(x_k)=0$ $(k=1, \ldots, n)$. Nyilvánvalóan

$$R_n^{(\alpha)}(f, x_k) = f(x_k) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Ezt az eljárást az $\alpha=0$ esetre EGERVÁRY és TURÁN vezették be, s erről már a 2. § **B.** pontjában szóltunk. Itt azt is említettük, hogy erre az esetre (ti. $\alpha=0$) BALÁZS és TURÁN igazolt konvergenciatételt.

A (3.1) eljárásra igazolni fogjuk a következő stabilitási tulajdonságot.

V. TÉTEL. (l. [13]).

(3.2)

$$0 \leqq e^{-x} \sum_{k=0}^{n} (y_k - y_k^*)\cdot r_k(x) \leqq \max_k (y_k - y_k^*)\cdot e^{-x_k} \quad (y_0 = y_0^*,\ y_k \geqq y_k^*,\ k = 1, \ldots, n).$$

Bizonyítani fogjuk a (3.1) eljárásra a következő konvergenciatételt.

VI. TÉTEL. (l. [13]). *Ha* $-1<\alpha\leqq 0, f(x)$ *folytonos* $[0, \infty)$*-en*, $f(x)=0(e^x)$ $(x\to\infty)$, *akkor a* (3.1) *eljárásra fennáll a*

$$|R_n^{(\alpha)}(f, x)-f(x)| \leqq \tag{3.3}$$

$$\leqq \begin{cases} C(\|f\|_{[0,d]}+\|f\|^*)n^{-1/4}+C\omega(f; 0, 2d; n^{-1/4}), & \text{ha } -1<\alpha\leqq -\frac{1}{2} \ (0\leqq x\leqq d) \\ C\|f\|_{[0,d]}\cdot n^{-1/4}+C\|f\|^*\{n^{-1/2}+|\alpha|n^{\alpha}\}+C\omega(f; 0, 2d; n^{-1/4}+|\alpha|n^{\alpha}), & \text{ha } -\frac{1}{2}\leqq\alpha\leqq 0 \end{cases}$$

$$\|f\|^* = 2 \sup_{0\leqq x<\infty} |f(x)|e^{-x}$$

becslés.

KÖVETKEZMÉNY. A IV. tétel feltételei mellett $R_n^{(\alpha)}(f, x)\to f(x)$ egyenletesen $[\varepsilon, d]$-ben.

Megjegyezzük, hogy SHARMA (l. [24]) szintén általánosította EGERVÁRY és TURÁN eljárását, azonban negatív α értékekre SHARMA alappolinomjai nem minden $x\geqq 0$-ra pozitívok, s így nem rendelkezik eljárása ilyenkor a (3.2)-höz hasonló stabilitással.

A (3.1) eljárást nem sikerült úgy karakterizálni, mint ahogy bizonyos eljárásokat jellemeznek az előző § I. és II. tételei. Csupán a (3.2) tulajdonságot sikerült verifikálni.*

Röviden ismertetjük tételeink bizonyítása előtt, hogy milyen meggondolással jutottunk a (3.1) eljáráshoz. A Bevezetés-ben mondott lemma 1. §-beli első bizonyításához hasonlóan igazolható a

$$V(x) = e^x - \left(1+\alpha\sum_{k=1}^{n} e^{x_k} l_k^2(0)\right)\frac{L_n^{(\alpha)}(x)^2}{\binom{n+\alpha}{n}^2} - \sum_{k=1}^{n} e^{x_k}\cdot\left(\frac{1+\alpha}{x_k}x-\alpha\right) l_k^2(x) \geqq 0$$

$$(x\geqq 0;\ -1<\alpha\leqq 0)$$

egyenlőtlenség, figyelembe véve a könnyen ellenőrizhető $V(\infty)=\infty$, $V(0)=V(x_k)=$ $=V'(x_k)=0$ $(k=1, \dots, n)$ összefüggéseket. Ez az egyenlőtlenség $\alpha=0$ esetben az *Egerváry—Turán*-féle (l. [4]) egyenlőtlenségbe megy át, amely lényeges szerepet játszott a *Balázs—Turán*-féle (l. [5]) konvergenciatétel bizonyításában. Valójában ez az egyenlőtlenség motiválta a (3.1) alappolinomok választását, mivel ha ebben elhagyjuk e^{x_k}-t mindenütt, akkor a baloldali kifejezés $e^x-\sum_{k=1}^{n} r_k(x)$-re redukálódik, és ez volt a helyzet az $\alpha=0$ esetben is.

Végül megjegyzzük, hogy BALÁZS és TURÁN konvergenciatétele $[0, \infty)$-en folytonos és korlátos függvényekre vonatkozott, s így a VI. tétel ezt ilyen irányban is általánosítja.

*MEGJEGYZÉS A KORREKTURA OLVASÁSAKOR:
A [13] dolgozat, amely eredetileg jelen cikk 3. §-ának eredményeit tartalmazta, átírás után időközben megjelent. Ebben a cikkben ez a kérdés is tisztázva van, és jelen dolgozat tárgyát új megvilágításba helyezi.

Az V. tétel *bizonyításához* alkalmazzuk a Bevezetés-ben kimondott lemmát $f(x)=e^x$, $L_n^{(\alpha)}(x_k)=0$ $(k=1, \ldots, n)$ választással. Ekkor kapjuk a

$$e^x-\sum_{k=1}^{n} e^{x_k}\left(\frac{1+\alpha}{x_k}x-\alpha\right) l_k^2(x) \geqq 0 \quad (x \geqq 0,\ -1<\alpha \leqq 0)$$

egyenlőtlenséget, amit

$$e^{-x}\sum_{k=1}^{n} e^{x_k} r_k(x) \leqq 1 \quad (x \geqq 0,\ -1<\alpha \leqq 0) \tag{3.4}$$

alakban használva kapjuk az V. tételt a

$$e^{-x}\sum_{k=1}^{n}(y_k-y_k^*)r_k(x)=e^{-x}\sum_{k=1}^{n}[(y_k-y_k^*)e^{-x_k}][e^{x_k}r_k(x)]$$

azonosság alapján.

Az V. tétel $\alpha=0$ esetét EGERVÁRY és TURÁN a következő élesebb formában igazolták:

$$0 \leqq e^{-x}\sum_{k=0}^{n}(y_k-y_k^*)r_k(x) \leqq \max_k (y_k-y_k^*)e^{-x_k} \quad (y_k \geqq y_k^*,\ k=0,1,\ldots,n),$$

ugyanis ilyenkor

$$e^x-L_n^{(0)}(x)^2-\sum_{k=1}^{n} e^{x_k}\frac{x}{x_k} l_k^2(x)=e^x-\sum_{k=0}^{n} e^{x_k} r_k(x) \geqq 0 \quad (x \geqq 0;\ x_0 \overset{\text{def}}{=} 0) \tag{3.5}$$

is igaz. Nálunk viszont szerepel az $y_0=y_0^*$ kikötés. Ettől meg lehetne szabadulni a

$$e^{-x}\frac{L_n^{(\alpha)}(x)^2}{\binom{n+\alpha}{n}} \leqq 1 \quad (x \geqq 0,\ -1<\alpha<0)$$

egyenlőtlenség bizonyításával, mivel ebből és (3.4)-ből

$$0 \leqq e^{-x}\sum_{k=0}^{n}(y_k-y_k^*)r_k(x) \leqq \max_k (y_k-y_k^*)e^{-x_k} \quad (y_k \geqq y_k^*,\ k=0,1,\ldots,n;\ -1<\alpha \leqq 0)$$

következnék. De ezt nem tudom igazolni. Megjegyzem az előbbi egyenlőtlenséggel kapcsolatban, hogy SZEGŐ (l. [22]) komplex függvénytani eszközökkel igazolta a

$$|L_n^{(0)}(x)| \leqq e^{x/2} \quad (x \geqq 0)$$

egyenlőtlenséget, amiből már nagyon egyszerűen következett az általánosabb

$$|L_n^{(\alpha)}(x)| \leqq \binom{n+\alpha}{n} e^{x/2} \quad (x \geqq 0,\ \alpha \geqq 0) \tag{3.6}$$

egyenlőtlenség. EGERVÁRY és TURÁN (3.5) egyenlőtlenségéből azonban rögtön adódik az $\alpha=0$ eset, amint ezt [4]-ben meg is jegyezték. Viszont negatív α értékekre tudomásom szerint semmilyen becslés sem ismert. Megjegyzem, hogy SHARMA (l. [24]) egy egyenlőtlenségéből közvetlenül adódik a

$$|L_n^{(\alpha)}(x)| \leqq \binom{n+\alpha}{n} e^{x/2} \quad (0 \leqq x \leqq x_1;\ -1 < \alpha < 0)$$

egyenlőtlenség, ahol x_1 az $L_n^{(\alpha)}(x)$ legkisebb gyöke.

A VI. tétel bizonyításához szükséges néhány segédtétel.

3.1. SEGÉDTÉTEL.

$$\left|1-\sum_{k=1}^{n} r_k(x)\right| \leqq C \cdot n^{-1/4} \quad (0 \leqq x \leqq d,\ -1 < \alpha \leqq 0). \tag{3.7}$$

Bizonyítás. A $G(x)=1-\sum_{k=1}^{n} r_k(x)$ függvényre (3.1), (1.6), (1.19), (1.20) alapján

$$G(0) = G(x_k) = 0 \quad (k = 1, \dots, n),$$

s így

$$G(x) = x \cdot L_n^{(\alpha)}(x) \cdot g_{n-1}(x), \tag{3.8}$$

ahol $g_{n-1}(x)$ olyan legfeljebb $n-1$ edfokú polinom, amelyre az x_k $(k=1, \dots, n)$ alappontokban (3.1) és (3.8) alapján

$$G'(x_k) = -\frac{1+\alpha}{x_k} - 2l_k'(x_k) = -\frac{1+\alpha}{x_k} - \frac{x_k-\alpha-1}{x_k} = -1 = x_k L_n^{(\alpha)\prime}(x_k) g_{n-1}(x_k)$$

teljesül, amiből

$$G(x) = xL_n^{(\alpha)}(x) \sum_{k=1}^{n} g_{n-1}(x_k) l_k(x) = xL_n^{(\alpha)}(x) \sum_{k=1}^{n} -(x_k)^{-1}\{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)\}^{-1} l_k(x) = \tag{3.9}$$

$$= xL_n^{(\alpha)}(x) \Big\{ \sum_{|x-x_k| \leqq n^{-1/4}}{}_k + \sum_{|x-x_k| > n^{-1/4}}{}_k \Big\} = xL_n^{(\alpha)}(x)\{A+B\}.$$

A (3.4) alapján nyilván

$$|xL_n^{(\alpha)}(x)A| \leqq \sum_{|x-x_k| \leqq n^{-1/4}}{}_k |x-x_k| \frac{x}{x_k} l_k^2(x) \leqq n^{-1/4} \frac{1}{1+\alpha} \sum_{k=1}^{n} r_k(x) \leqq \frac{e^d}{1+\alpha} n^{-1/4}, \tag{3.10}$$

$$(0 \leqq x \leqq d;\ -1 < \alpha \leqq 0).$$

Másrészt (1.22), (1.24), (1.25) alapján

$$|x \cdot L_n^{(\alpha)}(x) \cdot B| \leqq n^{1/4} \cdot x \cdot L_n^{(\alpha)}(x)^2 \sum_{|x-x_k| > n^{-1/4}}{}_k x_k^{-1} \{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)\}^{-2} \leqq \tag{3.11}$$

$$\leqq n^{1/4} \cdot x \cdot L_n^{(\alpha)}(x)^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^{-1} \{L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)\}^{-2} \leqq C \cdot n^{-1/4} \quad (0 \leqq x \leqq d,\ -1 < \alpha \leqq 0).$$

A (3.10) és (3.11) kiadja (3.7)-et.

Megjegyezzük, hogy az $\alpha=0$ esetre ezt a segédtételt BALÁZS és TURÁN (l. [5]) igazolták, de bonyolult módon, s ez a mód nem látszott általánosíthatónak.

3.2. SEGÉDTÉTEL.

$$(3.12)\qquad \sum_{k=0}^{n}|x-x_k|r_k(x)\leqq\begin{cases}Cn^{-1/4} & \text{ha}\quad -1<\alpha\leqq-\dfrac{1}{2}\\ Cn^{-1/4}+C(|\alpha|)^{1/2}n^{\alpha/2} & \text{ha}\quad -\dfrac{1}{2}\leqq\alpha\leqq 0\end{cases}\qquad (0\leqq x\leqq d).$$

Bizonyítás. (1.24), (1.25), (1.22), (3.4) alapján, a *Schwarz*-egyenlőtlenségből adódó

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(|x-x_k|\sqrt{r_k(x)}\right)\sqrt{r_k(x)}\right\}^2\leqq\left\{\sum_{k=1}^{n}r_k(x)\right\}\left\{(1+\alpha)xL_n^{(\alpha)}(x)^2\sum_{k=1}^{n}x_k^{-1}\cdot\left(L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)\right)^{-2}+\right.$$

$$\left.+|\alpha|L_n^{(\alpha)}(x)^2\sum_{k=1}^{n}\left(L_n^{(\alpha)\prime}(x_k)\right)^{-2}\right\}$$

egyenlőtlenség és

$$x\frac{L_n^{(\alpha)}(x)^2}{\binom{n+\alpha}{n}}\leqq Cn^{-1/2}\qquad (0\leqq x\leqq d;\ -1<\alpha\leqq 0)$$

éppen (3.12)-t adja.

3.3. SEGÉDTÉTEL.

$$(3.13)\qquad \sum_{x_k>2d}{}_k\, e^{x_k}r_k(x)\leqq\begin{cases}Cn^{-1/2} & \text{ha}\quad -1<\alpha\leqq-\dfrac{1}{2}\\ Cn^{-1/2}+C|\alpha|n^{\alpha} & \text{ha}\quad -\dfrac{1}{2}\leqq\alpha\leqq 0\end{cases}\qquad (0\leqq x\leqq d).$$

Bizonyítás. $-1<\alpha<0$ esetben (3.13) rögtön következik (2.61)-ből a nyilvánvaló

$$0\leqq\frac{1+\alpha}{x_k}x-\alpha\leqq 1\qquad(-1<\alpha<0,\ x_k>2d,\ 0\leqq x\leqq d)$$

egyenlőtlenség felhasználásával. Az $\alpha=0$ esetben ez következik (1.24) alapján, (2.53)-at $\varepsilon=1$-nél használva a

$$\sum_{x_k>2d}{}_k\, e^{x_k}\frac{x}{x_k}l_k^2(x)=xL_n^{(0)}(x)^2\sum_{x_k>2d}{}_k\frac{e^{x_k}}{x_k^3}\left(\frac{x_k}{x-x_k}\right)^2\{L_n^{(0)\prime}(x_k)\}^{-2}\leqq$$

$$\leqq 4xL_n^{(0)}(x)^2\sum_{x_k>2d}{}_k\frac{e^{x_k}}{x_k^3}\frac{1}{L_n^{(0)\prime}(x_k)^2}$$

egyenlőtlenségből.

A VI. tétel *bizonyítására* térve, nyilvánvalóan

$$|R_n^{(\alpha)}(f,x)-f(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}[f(x)-f(x_k)]r_k(x)+f(x)\left[1-\sum_{k=1}^{n}r_k(x)\right]\right|\leqq$$

$$\leqq\sum_{x_k\leqq 2d}{}_k|f(x)-f(x_k)|r_k(x)+\sum_{x_k>2d}{}_k|f(x)|+|f(x_k)|r_k(x)+|f(x)|\cdot\left|1-\sum_{k=1}^{n}r_k(x)\right|,$$

másrészt a folytonossági modulus (1.11) tulajdonsága alapján

$$|f(x)-f(x_k)| \leqq \omega(f; 0, 2d; |x-x_k|) \leqq \omega(f; 0, 2d; n^{-\delta})\{n^\delta |x-x_k|+1\},$$

s így (3.7), (3.12), (3.13) miatt a

$$|R_n^{(\alpha)}(f, x)-f(x)| \leqq \omega(f; 0, 2d; n^{-\delta})\left\{n^\delta \sum_{k=1}^{n} |x-x_k| r_k(x)+\sum_{k=1}^{n} r_k(x)\right\}+$$

$$+\|f\|^* \sum_{x_k>2d} e^{x_k} r_k(x)+\|f\|_{[0,d]}\left|1-\sum_{k=1}^{n} r_k(x)\right|$$

egyenlőtlenségből következik a VI. tétel, a δ alkalmas választásával.

4. §. Stabil interpoláció egy pontban előírt deriváltértékkel

Most olyan stabil interpolációs eljárást fogunk megadni $[0, \infty)$-en, amely a függvény deriváltját megadja a 0 pontban. A kapott eljárásra konvergenciatételt is bizonyítunk.

Legyenek

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < +\infty \tag{4.1}$$

az interpoláció alappontjai, az ezekhez tartozó elsőfajú alappolinomok

$$r_0(x), r_1(x), \ldots, r_n(x), \tag{4.2}$$

amelyekre

$$r_k(x_i) = \delta_{k,i} \quad (k, i = 0, \ldots, n) \tag{4.3}$$

és deriváltjukra

$$r_k'(0) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{4.4}$$

Bevezetünk egy $\sigma(x)$ ún. másodfajú alappolinomot, amelyre

$$\sigma(x_k) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{4.5}$$

és deriváltjára

$$\sigma'(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad k \neq 0 \\ 1 & \text{ha} \quad k = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Nyilvánvalóan, ha y_k $(k=0, 1, \ldots, n)$ és y' tetszőleges valós számok, akkor

$$R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k r_k(x)+y'\sigma(x) \tag{4.7}$$

interpolációs eljárás, amelyre

$$R_n(x_k) = y_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{4.8}$$

és deriváltjára

(4.9) $$R_n'(x_0) = R_n'(0) = y'.$$

Keressük azt a (4.7) interpolációs eljárást, amelyre egyrészt

(4.10)
$$0 \leqq e^{-x}\left\{\sum_{k=0}^{n}(y_k-y_k^*)r_k(x)+(y'-y^{*\prime})\sigma(x)\right\} \leqq \max\left\{\max_k (y_k-y_k^*)e^{-x_k};\ y'-y^{*\prime}\right\}$$
$$(x \geqq 0;\ y_k \geqq y_k^*\ (k=0,1,\dots,n);\ y' \geqq y^{*\prime})$$

egyenlőtlenség teljesül, azaz stabil az e^{-x} súlyra nézve, másrészt

(4.11) $$\operatorname{Grad} R_n(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} \operatorname{grad} r_k(x)+\operatorname{grad}\sigma(x)$$

minimális. Igazolni fogjuk a következő tételeket.

VII. TÉTEL. (l. [11]). *(4.10) és (4.11) egyidejűen akkor és csak akkor teljesülnek a (4.7) eljárásra, ha a (4.1) alappontokra* $L_n^{(1)}(x_k)=0$ $(k=1,\dots,n)$ *és*

(4.12) $$r_0(x)=(1+nx)\left(\frac{L_n^{(1)}(x)}{n+1}\right)^2, \quad r_k(x)=\frac{x^2}{x_k^2}\left(\frac{L_n^{(1)}(x)}{L_n^{(1)\prime}(x_k)(x-x_k)}\right)^2 \quad (k=1,\dots,n),$$

(4.13) $$\sigma(x)=x\left(\frac{L_n^{(1)}(x)}{n+1}\right)^2.$$

Legyen $f(x)$ a $[0,\infty)$-en folytonos függvény és $y'=y_n$ tetszőleges valós számok, akkor

(4.14) $$R_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot r_k(x)+y_n\sigma(x)$$

az $f(x)$-hez tartozó interpolációs polinom; speciálisan $y_n=f'(0)$ is lehet, ha ez létezik.

A VII. tétel azt mutatja, hogy csupán egy alappontban előírva a deriváltértéket is, egészen más alappontrendszer esetén valósul meg a stabil és gazdaságos interpolációs eljárás, mint enélkül (vö. 2. § **B.** pontjával).

VIII. TÉTEL. (l. [11]). *Ha* $f(x)$ *folytonos* $[0,\infty)$*-en, továbbá* $f(x)=O(e^x)$ $(x\to\infty)$, *akkor az előző tételben nyert eljárásra*

(4.15) $$|R_n(f,x)-f(x)| \leqq C(\|f\|_{[0,d]}+\|f\|^*)n^{-1/4}+C\omega(f;0,2d;n^{-1/4})+y_n\cdot Cn^{-1/2}$$
$$(0\leqq x\leqq d),\quad \|f\|^*=2\sup_{0\leqq x<\infty}|f(x)|/e^x.$$

KÖVETKEZMÉNY. A VIII. tétel feltételei mellett $y_n=o(n^{1/2})$ esetén $R_n(f,x)\underset{n\to\infty}{\to} f(x)$ egyenletesen $[0,d]$-ben $(d>0)$.

Rátérünk a VII. tétel *bizonyítására.* Először tegyük fel, hogy létezik a (4.10) és (4.11)-nek eleget tevő legfeljebb $2n+1$-edfokú polinom. A bizonyítás második részéből kiderül, hogy ilyen van. Alkalmazzuk (4.10)-et az $y_0=1$, $y_k=y_k^*=0$ $(k=1, \dots, n)$, $y_0^*=y'=y^{*\prime}=0$ választással, ekkor kapjuk

$$0 \leqq e^{-x} \cdot r_0(x) \leqq 1 \quad (x \geqq 0). \tag{4.16}$$

Legyen

$$\omega(x) = \prod_{k=1}^{n} (x-x_k),$$

ekkor (4.3), (4.4), (4.11), (4.16) alapján $r_0(x)$ ilyen alakú

$$r_0(x) = (ax+b)\,\omega(x)^2, \tag{4.17}$$

amiből (4.3) és (4.4) alapján egyszerű számolással adódik, hogy

$$r_0(x) = \left(1-2\frac{\omega'(0)}{\omega(0)}x\right)\omega(x)^2. \tag{4.18}$$

Most alkalmazzuk (4.10)-et $y'=y^{*\prime}=0$, $y_k=1$, $y_k^*=0$, $y_i=y_i^*=0$ $(i\neq k,\ i=0, 1, \dots, n)$ választással, ekkor kapjuk, hogy

$$0 \leqq e^{-x+x_k} r_k(x) \leqq 1 \quad (x \geqq 0,\ k=1, \dots, n). \tag{4.19}$$

Figyelembe véve (4.3), (4.4), (4.11), (4.19)-et azt kapjuk, hogy egyrészt

$$r_k(x) = \frac{x^2}{x_k^2}\left(\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\right)^2 = \frac{x^2}{x_k^2} l_k^2(x), \tag{4.20}$$

másrészt (4.3) és (4.4) alapján

$$\left(e^{-x+x_k} \cdot r_k(x)\right)_{x=x_k} = 1,$$

és így

$$\left(e^{-x+x_k} \cdot r_k(x)\right)'_{x=x_k} = 0,$$

azaz (4.20) alapján

$$x_k\,\omega''(x_k)+(2-x_k)\,\omega'(x_k) = 0 \quad (k=1, \dots, n).$$

Mivel $\omega(x)$ n-edfokú polinom, ezért

$$x\omega''(x)+(2-x)\,\omega'(x) = C\omega(x)$$

alkalmas C állandóval, amiből együttható-összehasonlítással $C=-n$, és így (1.19) alapján, amint az jól ismert,

$$\omega(x) = (-1)^n \cdot n!\, L_n^{(1)}(x)$$

következik, amiből az adódik (4.18), (4.20) alapján, hogy a kívánt interpolációs polinom csak a tételbeli lehet.

Most igazoljuk, hogy a tételbeli interpolációs polinomra valóban teljesül a (4.10) stabilitási tulajdonság. Ehhez szükséges a következő

4.1. SEGÉDTÉTEL.

$$V(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^x - (1+nx)\left(\frac{L_n^{(1)}(x)}{n+1}\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} e^{x_k} l_k^2(x) - x\left(\frac{L_n^{(1)}(x)}{n+1}\right)^2 \geqq 0 \tag{4.21}$$

$$(x \geqq 0;\ n = 0, 1, \ldots),$$

ahol $L_n^{(1)}(x_k) = 0$ $(k=1, \ldots, n)$.

Bizonyítás. A 4.1 Segédtétel bizonyítása teljesen hasonló a Bevezetés-ben kimondott lemma 1. §-beli első bizonyításához, figyelembe véve az (1.6), (1.19) alapján könnyen ellenőrizhető $V(0) = V'(0) = V(x_k) = V'(x_k) = 0$ $(k=1, \ldots, n)$, $V(\infty) = \infty$ összefüggéseket, ezért nem részletezzük.

A (4.21)-ből azonnal adódnak az alábbi *következmények*, amelyek lényeges szerepet fognak játszani a VIII. tétel bizonyításában is.

$$e^{-x}\left\{\sum_{k=0}^{n} e^{x_k} r_k(x) + \sigma(x)\right\} \leqq 1 \quad (x \geqq 0;\ n = 0, 1, \ldots;\ x_0 = 0), \tag{4.22}$$

$$|L_n^{(1)}(x)| \leqq \frac{n+1}{\sqrt{1+(n+1)x}} e^{x/2} \quad (x \geqq 0;\ L_n^{(1)}(0) = n+1). \tag{4.23}$$

A (4.10) azonnal adódik (4.22)-ből az

$$e^{-x}\left\{\sum_{k=0}^{n} (y_k - y_k^*) r_k(x) + (y' - y^*)' \sigma(x)\right\} \equiv$$

$$\equiv e^{-x}\left\{\sum_{k=0}^{n} [(y_k - y_k^*) e^{-x_k}][e^{x_k} r_k(x)] + (y' - y^*)' \sigma(x)\right\}$$

azonosság alapján. Ezzel a VII. tételt bebizonyítottuk.

A VIII. tétel bizonyításához szükséges néhány segédtétel.

4.2. SEGÉDTÉTEL.

$$0 \leqq \sigma(x) \leqq C \cdot n^{-1/2} \quad (0 \leqq x \leqq d,\ n = 0, 1, \ldots,). \tag{4.24}$$

Bizonyítás. A (4.13), (4.23) alapján $0 \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ esetben

$$\sigma(x) \leqq x \frac{e^x}{1+(n+1)x} \leqq \frac{1}{\sqrt{n+1}} e^x,$$

az $x > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ esetben pedig

$$\sigma(x) \leqq x \frac{e^x}{1+(n+1)x} \leqq \frac{x}{\sqrt{n+1}} e^x$$

adódik, amelyek éppen (4.24)-et adják.

4.3. SEGÉDTÉTEL.

$$(4.25)\qquad \left|1-\sum_{k=0}^{n} r_k(x)\right| \leqq C\cdot n^{-1/4} \quad (0\leqq x\leqq d,\ n=0,1,\ldots)$$

Bizonyítás. Hasonló a 3.1. segédtételéhez. A $G(x)=1-\sum_{k=0}^{n} r_k(x)$ függvényre (4.12), (1.6), (1.19), (1.20) alapján

$$G(0)=G'(0)=G(x_k)=0 \quad (k=1,\ldots,n),$$

s így

$$(4.26)\qquad G(x)=x^2L_n^{(1)}(x)\cdot g_{n-1}(x),$$

ahol $g_{n-1}(x)$ olyan legfeljebb $n-1$-edfokú polinom, amelyre az x_k $(k=1,\ldots,n)$ alappontokban (4.12) és (4.26) alapján

$$G'(x_k)=-\frac{2}{x_k}-2l_k'(x_k)=-\frac{2}{x_k}-\frac{x_k-2}{x_k}=-1=x_k^2L_n^{(1)\prime}(x_k)g_{n-1}(x_k),$$

teljesül, amiből

$$(4.27)\quad G(x)=x^2L_n^{(1)}(x)\sum_{k=1}^{n} g_{n-1}(x_k)\,l_k(x)=x^2L_n^{(1)}(x)\sum_{k=1}^{n}-(x_k)^{-2}\{L_n^{(1)\prime}(x_k)\}^{-1}l_k(x)=$$

$$=x^2L_n^{(1)}(x)\Big\{\sum_{|x-x_k|\leqq n^{-1/4}}{}_k+\sum_{|x-x_k|>n^{-1/4}}{}_k\Big\}=x^2L_n^{(1)}(x)\{A+B\}.$$

A (4.22) alapján nyilván

$$(4.28)\quad |x^2L_n^{(1)}(x)\cdot A|\leqq \sum_{|x-x_k|\leqq n^{-1/4}}{}_k |x-x_k|\frac{x^2}{x_k^2}l_k^2(x)\leqq n^{-1/4}\sum_{k=1}^{n} r_k(x)\leqq e^d n^{-1/4}.$$

$$(0\leqq x\leqq d,\ n=0,1,\ldots).$$

A $\sum_{k=1}^{n} e_k^2(o)=\frac{1}{-\alpha}\left\{1-\binom{n+\alpha}{n}\right\}$ formulából

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k^2L_n^{(1)\prime}(x_k)^2}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}$$

adódik, amit felhasználva, (1.24) alapján

$$(4.29)\qquad |x^2L_n^{(1)}(x)\cdot B|\leqq n^{1/4}x^2L_n^{(1)}(x)^2\sum_{|x-x_k|>n^{-1/4}}{}_k (x_k)^{-2}\{L_n^{(1)\prime}(x_k)\}^{-2}\leqq$$

$$\leqq n^{1/4}x^{1/2}e^x\{x^{3/2}\cdot e^{-x}L_n^{(1)}(x)^2\}\left\{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}\leqq C\cdot n^{-1/4}\quad (0\leqq x\leqq d).$$

A (4.28) és (4.29) a (4.25)-öt adja.

4.4. SEGÉDTÉTEL.

$$(4.30)\qquad \sum_{k=0}^{n}|x-x_k|r_k(x)\leqq C\cdot n^{-1/4}\quad (0\leqq x\leqq d,\ n=0,1,\ldots).$$

Bizonyítás. (4.30) bizonyítása az (1.24), (4.12), (4.13), (4.28), (4.29) összefüggések felhasználásával a

$$\sum_{k=0}^{n}|x-x_k|r_k(x) = (1+nx)x\left(\frac{L_n^{(1)}(x)}{n+1}\right)^2 + \sum_{\substack{k>0\\ |x-x_k|\leqq n^{-1/4}}}|x-x_k|\frac{x^2}{x_k^2}l_k^2(x)+$$

$$+\sum_{\substack{k>0\\ |x-x_k|>n^{-1/4}}} n^{1/4}\frac{x^2L_n^{(1)}(x)^2}{x_k^2L_n^{(1)\prime}(x_k)^2} \leqq x\left(\frac{L_n^{(1)}(x)}{n+1}\right)^2 + \frac{x^2L_n^{(1)}(x)^2}{n+1}+Cn^{-1/4}$$

egyenlőtlenségből következik.

4.5. SEGÉDTÉTEL.

$$\sum_{x_k>2d} e^{x_k}r_k(x) \leqq Cn^{-1/2} \quad (0\leqq x\leqq d,\ n=0,1,\dots). \tag{4.31}$$

Bizonyítás. A (4.31) egyenlőtlenség (1.24) alapján, (2.53)-at $\varepsilon=1$-re használva, a

$$\sum_{x_k>2d} e^{x_k}\frac{x^2}{x_k^2}l_k^2(x) = x^2L_n^{(1)}(x)^2\sum_{x_k>2d} e^{x_k}\frac{1}{x_k^4}\left(\frac{x_k}{x-x_k}\right)^2\{L_n^{(1)\prime}(x_k)\}^{-2}\leqq$$

$$\leqq 4x^2L_n^{(1)}(x)^2\sum_{x_k>2d}\frac{e^{x_k}}{x_k^4}\frac{1}{L_n^{(1)\prime}(x_k)^2}$$

egyenlőtlenségből rögtön adódik.

A VIII. tétel *bizonyítására* térve, nyilvánvalóan

$$|R_n(f,x)-f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n}[f(x)-f(x_k)]r_k(x)+f(x)\left[1-\sum_{k=1}^{n}r_k(x)\right]+y_n\sigma(x)\right|\leqq$$

$$\leqq \sum_{x_k\leqq 2d}|f(x)-f(x_k)|\cdot r_k(x)+\sum_{x_k>2d}|f(x)|+|f(x_k)|r_k(x)+|f(x)|\cdot\left|1-\sum_{k=1}^{n}r_k(x)\right|+$$

$$+|y_n\sigma(x)|,$$

másrészt a folytonossági modulus (1.11) tulajdonsága miatt

$$|f(x)-f(x_k)|\leqq\omega(f;0,2d;|x-x_k|)\leqq\omega(f;0,2d;n^{-1/4})\quad\{n^{1/4}|x-x_k|+1\},$$

s így (4.24), (4.25), (4.30), (4.31) alapján a VIII. tétel az

$$|R_n(f,x)-f(x)|\leqq\omega(f;0,2d;n^{-1/4})\left\{n^{1/4}\sum_{k=0}^{n}|x-x_k|r_k(x)+\sum_{k=0}^{n}r_k(x)\right\}+$$

$$+\|f\|^*\sum_{x_k>2d}e^{x_k}r_k(x)+\|f\|_{[0,d]}\cdot\left|1-\sum_{k=0}^{n}r_k(x)\right|+y_nCn^{-1/2}$$

egyenlőtlenségből következik.

A következő §-okban ismertetünk néhány olyan eredményt, amelyek bizonyításában alapvető szerepet játszik a Bevezetés-ben kimondott lemma, vagy annak az 1.§-ban adott első bizonyításának a gondolata.

5. §. A Lagrange-interpoláció átlagkonvergenciája végtelen intervallumon

Legyen $p(x)$ egy súlyfüggvény a véges (a, b) intervallumon, azaz legyen LEBESQUE szerint integrálható és m.m. pozitív. Tekintsük a $p(x)$-re ortogonális, normált, pozitív főegyütthatós polinomok $\{\omega_n(x)\}_0^\infty$ rendszerét. Mint ismeretes ezek egyértelműen meg vannak határozva, $\omega_n(x)$ gyökei egyszeresek, valósak, (a, b)-be esnek. Legyenek $\omega_n(x)$ gyökei

$$a < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} < b. \tag{5.1}$$

(Tulajdonképpen eddig is két indexet kellett volna használni, de ennek elmulasztása nem okozott félreértést.) Az ezekhez tartozó *Lagrange*-féle alappolinomok

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})(x-x_k^{(n)})} \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{5.2}$$

továbbá az $[a, b]$-ben folytonos $f(x)$ függvény *Lagrange*-féle interpolációs polinomja

$$L_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) l_k^{(n)}(x). \tag{5.3}$$

ERDŐS és TURÁN 1937-ben publikálták a következő érdekes tételt.

TÉTEL (ERDŐS—TURÁN). *Bármely* $[a, b]$*-ben folytonos* $f(x)$*-re*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b p(x)\{L_n(f, x)-f(x)\}^2\, dx = 0. \tag{5.4}$$

(L. pl. NATANSZON [18] 410. o.) Közismert az a szoros kapcsolat, amely a *Fourier*-sorok és a *Lagrange*-interpolációk között fennáll. Minthogy a *Fourier*-sorokra az analóg tétel közismert, valószínű, hogy ez vezette a szerzőket az (5.4) felismerésére. Az (5.4) megfelelője végtelen intervallumon sokáig ismeretlen volt, egészen 1961-ig, amikor BALÁZS és TURÁN (l. [6]) közölték a következő tételt.

TÉTEL (BALÁZS—TURÁN). *Legyen* $p(x)=h(x)/g(x)$ *olyan súlyfüggvény a számegyenesen, amelyre* $h(x)\geqq 0$ *és*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, dx < \infty, \tag{5.5}$$

továbbá $g^{(2n)}(x)>0$ $(-\infty<x<\infty, n=0, 1, \ldots)$ *és* $x>0$*-ra* $\log g(x)$ *a* $\log x$*-nek konvex függvénye, valamint*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log g(x)}{x^2}\, dx = +\infty. \tag{5.6}$$

Ekkor, ha $f(x)$ *az egész számegyenesen folytonos függvény, amelyre*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} = 0, \tag{5.7}$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\{f(x)-L_n(f,x)\}^2\cdot p(x)\,dx=0. \tag{5.8}$$

KÖVETKEZMÉNYEK. 1. Könnyen látható, hogy $p(x)=e^{-x^2}=e^{-2\varepsilon x^2}/e^{(1-2\varepsilon)x^2}=h/g$ eleget tesz a tétel követelményeinek ha $0<\varepsilon<\frac{1}{3}$, s így kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\{f(x)-L_n(f,x)\}^2e^{-x^2}\,dx=0. \tag{5.9}$$

2. A tételből a *Schwarz*-egyenlőtlenséggel rögtön kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)-L_n(f,x)|\frac{h(x)}{\sqrt{g(x)}}\,dx=0. \tag{5.10}$$

3. A tétel felhasználásával, a $p(x)$-re ortogonális polinomok gyökeire könnyen bizonyíthatók az alábbi limeszrelációk:

$$\lim_{n\to\infty}\max_{j=1,2,\dots,n}|x_j^{(n)}|=\infty, \tag{5.11}$$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{k\in A}(x_{k+1}^{(n)}-x_k^{(n)})=0 \quad (A=\{k:\ -d\leqq x_k^{(n)}<x_{k+1}^{(n)}\leqq d\},\ d>0). \tag{5.12}$$

Általában előfordulhat az, hogy $x_k^{(n)}>-K$ $(k=1,\dots,n;\ n=1,2,\dots)$ valamely n-től független K-val.

Bizonyítás. A $g(x)$-re és $f(x)$-re tett feltevésekből BERNSTEIN és MANDELBROJT [6]-ban idézett tétele szerint minden $\varepsilon>0$-hoz van olyan $P_{\bar{k}}(x)$ polinom, amelyre

$$\frac{|f(x)-P_{\bar{k}}(x)|}{\sqrt{g(x)}}<\varepsilon \quad (-\infty<x<\infty). \tag{5.13}$$

($P_{\bar{k}}(x)$ azt jelöli, hogy pontosan $\bar{k}$-adfokú a polinom.)

A Bevezetés-ben kimondott lemmát $g(x)$-re és a $p(x)$ súlyra ortogonális polinomok gyökeire alkalmazva kapjuk a

$$V(x)=g(x)-\sum_{k=1}^{n}g(x_k^{(n)})\left\{1-\frac{\omega_n''(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})}(x-x_k^{(n)})\right\}l_k^2(x)-\sum_{k=1}^{n}g'(x_k^{(n)})(x-x_k^{(n)})l_k^2(x)\geqq 0$$

$$\left(\omega_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k^{(n)}),\ -\infty<x<\infty\right)$$

egyenlőtlenséget, amelynek mindkét oldalát $p(x)$-szel szorozva és integrálva, figyelembe véve az $\omega_n(x)$-ek ortogonalitását,

$$\sum_{k=1}^{n}g(x_k)\int_{-\infty}^{+\infty}l_k^2(x)p(x)\,dx\leqq\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)\,dx \tag{5.14}$$

adódik.

Rátérünk (5.8) bal oldalának becslésére. Válasszunk egy $\varepsilon > 0$ számot tetszőlegesen, de rögzítsük. Ehhez (5.13) alapján válasszuk meg $P_{\tilde{k}}(x)$ polinomot, majd rögzítsünk egy olyan nagy n-et, melyre $n > \tilde{k}+1$. Ekkor, amint ez jól ismert

$$L_n(P_{\tilde{k}}, x) = P_{\tilde{k}}(x).$$

Ezt felhasználva, nyilvánvalóan

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{f(x)-P_{\tilde{k}}(x)+P_{\tilde{k}}(x)-L_n(f,x)\}^2 p(x)\,dx \leqq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(x)-P_{\tilde{k}}(x)\}^2 p(x)dx +$$

$$+2 \int_{-\infty}^{+\infty} L_n(P_{\tilde{k}}-f, x)^2 \cdot p(x)\,dx.$$

Az (5.13) összefüggés alapján

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} \{f(x)-P_{\tilde{k}}(x)\}^2 p(x)\,dx = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{f(x)-P_{\tilde{k}}(x)\}^2}{g(x)} h(x)\,dx \leqq 2\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx,$$

viszont az $\omega_n(x)$-ek ortogonalitása és (5.14) miatt

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} L_n(P_{\tilde{k}}-f, x)^2 p(x)\,dx = 2 \sum_{k=1}^{n} \{P_{\tilde{k}}(x_k)-f(x_k)\}^2 \cdot \frac{g(x_k)}{g(x_k)} \int_{-\infty}^{+\infty} l_k^2(x)p(x)dx \leqq$$

$$\leqq 2\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{n} g(x_k) \int_{-\infty}^{\infty} l_k^2(x)p(x)\,dx \leqq 2\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx.$$

Becsléseinket összefoglalva:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \{f(x)-L_n(f,x)\}^2 p(x)\,dx \leqq 4\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx,$$

ami éppen a tétel állítását igazolja.

6. §. Megjegyzések a további alkalmazásokról

Amint azt a Bevezetésben említettük, a lemma gondolata a kvadratúra-eljárások konvergenciájának vizsgálatánál vetődött fel talán először. Azóta is számos eredmény született ezzel kapcsolatban a lemma alkalmazásával. Erről FREUD [10] könyvének III. fejezetében több igen általános eredmény található, továbbá BALÁZS—TURÁN [7]-ben is. Jelen dolgozat IV. Tételének bizonyításánál hivatkoztunk egy ilyen tételre.

NÉVAI [17] dolgozatában lényegesen kihasználta BALÁZS és TURÁN 5. §-ban ismertetett eredményeit, s így tulajdonképpen ismét a lemmát alkalmazta.

Végül megemlítem, hogy a 2. § eredményeit felhasználva, sikerült [16]-ban általánosítanom BALÁZS [2] eredményeit tetszőleges paraméterű *Jacobi*-polinomok esetére.

SZÁSZ PÁL felhasználva EGERVÁRY és TURÁN [3] eredményeit általánosította az *Hermite—Fejér*-interpolációt, és bevezette az ún. quasi—*Hermite—Fejér*-interpolációt, továbbá általánosította a normális és szigorúan normális alappontrendszer fogalmát is. Eredményeire azóta sokan hivatkoztak (pl. SHARMA [24]), és sok eredmény született ezzel kapcsolatban.

IRODALOMJEGYZÉK

[1] BALÁZS J.: Megjegyzések a stabil interpolációról, *Matematikai Lapok* **11** (1960) 280—293.
[2] BALÁZS J.: Súlyozott (0, 2) interpoláció ultraszférikus polinomok gyökein, *MTA III. Oszt. Közl.* **11** (1961) 305—338.
[3] EGERVÁRY, E.—TURÁN, P.: Notes on interpolation V, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **9** (1958) 259—267.
[4] EGERVÁRY, E.—TURÁN, P.: Notes on interpolation VI, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **10** (1959) 55—62.
[5] BALÁZS, J.—TURÁN, P.: Notes on interpolation VII, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **10** (1959) 63—68.
[6] BALÁZS, J.—TURÁN, P.: Notes on interpolation VIII, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **12** (1961) 469—474.
[7] BALÁZS, J.—TURÁN, P.: Notes on interpolation IX, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **16** (1965) 215—220.
[8] GRÜNWALD, G.: On the theory of interpolation, *Acta Math. (Sweden)* **75** (1941) 219—245.
[9] FEJÉR, L.: Bestimmung derjenigen Abscissen eines Intervalles, für welche die Quadratsumme der Grundfunktionen der Lagrangeschen Interpolation im Intervalle ein möglichst kleines Maximum besitzt, *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa* (1932) 3—16.
[10] FREUD, G.: *Orthogonal Polynomials*, Akadémiai Kiadó (Budapest), 1971.
[11] JOÓ, I.: Stable interpolation on an infinite interval, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **25** (1974) 147—157.
[12] JOÓ, I.: Interpolation on the roots of Jacobi polynomials, *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Math.* **17** (1974) 119—124.
[13] JOÓ, I.: On positive linear interpolation operators, *Analysis Mathematica* **1** (1975), 273—281.
[14] JOÓ, I.: An interpolation-theoretical characterization of classical orthogonal polynomials, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **26** (1975) 163—169.
[15] JOÓ, I.: Interpolation on the roots of Laguerre polynomials, *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Math.* **17** (1974) 183—188.
[16] JOÓ, I.: On weighted (0, 2)-interpolation (kézirat).
[17] NÉVAI, G. P.: A Laguerre polinomok gyökein alapuló Lagrange-féle interpolációról, *Matematikai Lapok* **22** (1971) 149—164.
[18] NATANSZON, I. P.: *Konstruktiv függvénytan*, Akadémiai Kiadó (Budapest), 1952.
[19] SZABADOS, J.: On Hermite-Fejér interpolation for the Jacobi abscissas, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **23** (1972) 449—464.
[20] SZABADOS, J.: On the convergence of Hermite—Fejér interpolation for the Laguerre abscissas, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **24** (1973) 243—250.
[21] SZEGŐ, G.: *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. (New York, 1959).
[22] SZEGŐ, G.: Ein Beitrag zur Theorie der Polynome von Laguerre und Jacobi, *Mathematische Zeitschrift* vol. **1** (1918) 341—356.
[23] SNOW, CH.: *Hypergeometric and Legendre Functions with Applications to Integral Equations of Potential Theory*, Washington, N. B. of Standards 1952.
[24] SHARMA, A.: Remarks on quasi Hermite Fejér interpolation, *Canad. Math. Bull.* **7** (1964) 101—119.
[25] SZÁSZ, P.: On quasi—Hermite—Fejér interpolation, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **11** (1960) 413—439.

(Beérkezett: 1974. I. 4.)

ON STABLBE INTERPOLATION

By I. Joó

Summary

In this paper the author's results published in [11], [12], [13], [14], [15] are summarized. Some theorems are proved in more general form than in the mentioned papers.