A NEM-EGÉSZRENDŰ DIFFERENCIÁL- ÉS INTEGRÁLOPERÁTOROK ELMÉLETÉNEK ÚJABB FEJLŐDÉSE*

Írta: MIKOLÁS MIKLÓS

1. Bevezetés

Ismeretes, hogy az ún. törtrendű integráloknak és deriváltaknak az analízisbe való bevezetése ABEL, LIOUVILLE és RIEMANN egyes munkáiban már a múlt század első felében megtörtént, de az általánosított differenciál- és integráloperátorok használata csak nem sokkal a századforduló előtt kezdett elterjedni a *Heaviside*-féle „szimbolikus kalkulus" nyomán, hogy aztán századunkban olyan matematikusok eredményei révén nyerjen „polgárjogot", mint HADAMARD, HARDY és LITTLEWOOD, RIESZ MARCELL és H. WEYL. E referátum fő célja a témakörben az utolsó évtizedek alatt bekövetkezett fejlődés áttekintése, amihez mindenekelőtt az elmélet alapproblémájával kell foglalkoznunk: „megadandó a differenciálás és az integrálás műveletének legegyszerűbb közös általánosítása a deriválási, ill. integrálási rendszámra (indexre) vonatkozó interpoláció segítségével". A szóban forgó kérdést többféle módon lehet megközelíteni.

Induljunk ki most egy klasszikus *Cauchy*-féle formulából, amely egy $[x_0, x]$ intervallumban folytonos f függvény m-edik iterált integrálját egyszeres integrál alakjában fejezi ki, s egyúttal az

$$y^{(m)}(x) = f(x); \quad y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(m-1)}(x_0) = 0$$

kezdetiérték-feladat legegyszerűbb megoldását szolgáltatja:

$$\int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{t_1} \cdots \int_{x_0}^{t_{m-1}} f(t_m)\, dt_m \ldots dt_2\, dt_1 = \frac{1}{(m-1)!} \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{m-1}\, dt.$$

Itt az m rendszámra vonatkozó interpoláció közvetlenül végrehajtható azáltal, hogy m-et egy folytonos $\nu > 0$ paraméterrel, $(m-1)!$-t pedig ennek megfelelően $\Gamma(\nu)$-vel pótoljuk; kapjuk a ν-edrendű („törtrendű") integrál LIOUVILLEtól és RIEMANNtól eredő definícióját:

$$(1) \qquad {}_{x_0}I_x^{\nu} f = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{\nu-1}\, dt.$$

Az f függvényre vonatkozó feltétel természetesen enyhíthető: bármely *Lebesgue*-integrálható f és rögzített $\nu > 0$ esetében az (1) integrál létezése majdnem minden

* A tárgykörről New Havenben (Conn., USA) 1974 júniusában tartott nemzetközi kongresszus összefoglaló referátumának magyar nyelvű változata. Angolul megjelent a kongresszus Proceedingsében a "Lectures Notes in Mathematics" sorozat 457. kötetében (Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1975, edited by Prof. B. Ross, p. 357—375), "On the trends in the development, theory and applications of fractional calculus" címmel.

x-re biztosítva van; ha f-ről még azt is kikötjük, hogy $[x_0, x]$-ben korlátos legyen, akkor (1) minden $\nu>0$ rendszámra létezik, továbbá az ${}_{x_0}I_x$ operátor kielégíti az ún. indextörvényt, melyet félcsoport-tulajdonságnak is szokás nevezni:

$$(2)\qquad {}_{x_0}I_x^{\nu_1}({}_{x_0}I_t^{\nu_2}) = {}_{x_0}I_x^{\nu_2}({}_{x_0}I_t^{\nu_1}) = {}_{x_0}I_x^{\nu_1+\nu_2} \quad (\nu_1>0,\ \nu_2>0;\ x_0<t\leqq x).$$

Megjegyzendő, hogy mindez érvényes tetszőleges olyan komplex ν-re is, melyre Re $\nu>0$; ekkor az (1) *Riemann—Liouville*-féle integrál ν-nek analitikus függvénye.

(1) kiterjesztése ν negatív értékeire, azaz „törtrendű derivált":

$$(3)\qquad {}_{x_0}D_x^{-\nu}f = {}_{x_0}I_x^{\nu}f \quad (\nu<0)$$

előállítása történhetik például törtrendű integrálok megfelelő számú közönséges deriválásával, nevezetesen egy Riemann-féle formula alapján:[1]

$$(4)\qquad {}_{x_0}D_x^{\mu}f = \frac{d^m}{dx^m}\,{}_{x_0}I_x^{m-\mu}f \quad (\mu\geqq 0),$$

ahol m a legkisebb μ-nél nagyobb egész számot jelöli. Sajnos azonban, (4) nem tekinthető az $f^{(p)}(x)$ $(p=0, 1, 2, \dots)$ közönséges deriváltak „igazi" általánosításának, mivel $f^{(p)}(x)$ puszta létezéséből még nem következik az ${}_{x_0}D_x^p f = f^{(p)}(x)$ reláció; ehhez a konklúzióhoz további feltételre van szükségünk: $f^{(p)}$ folytonosságára az x helyen. Így érthető, hogy sok olyan probléma van, mellyel kapcsolatban a törtrendű derivált (4) értelmezése nem megfelelő és finomabb definícióval helyettesítendő. Az alábbiakban három szóba jövő értelmezési lehetőséget veszünk számba.[2]

I. Gyakran célravezető a következő gondolat: tekintjük az f alapfüggvénynek egy elemi sor-alakját, és formálisan *tagról-tagra* képezzük e sor törtrendű deriváltját, feltéve, hogy az egyes tagok általánosított deriváltja direkt interpolációval nyerhető. Analitikus f függvény esetében például az *Hadamard*-féle definíció adódik, melyet ő 1892-ben, a *Taylor*-sorra vonatkozó mély aszimptotikus vizsgálataiban eredményesen alkalmazott:

$$(5)\qquad {}_0D_x^{\mu}f = \sum_{x=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{\Gamma(n-\mu+1)}x^{n-\mu} \quad (\mu \text{ tetszőleges}).$$

Kiemeljük, hogy a jobboldali általánosított hatványsor konvergenciatartománya lényegében azonos f *Maclaurin*-soráéval.

A *Fourier*-sorok elméletében a törtrendű integrál *Weyl*-féle definíciója (1917) használatos, amely egy 1-periódusú f függvény $\nu>0$ rendű integrálját $\int_0^1 f(t)\,dt=0$ esetén a következő alakban szolgáltatja:

$$(6)\qquad \begin{gathered} {}_{-\infty}I_x^{\nu}f = 2\sum_{n=1}^{\infty}(2n\pi)^{-\nu}\left[\alpha_n\cos\left(2n\pi x-\frac{\pi\nu}{2}\right)+\beta_n\sin\left(2n\pi x-\frac{\pi\nu}{2}\right)\right] \\ \alpha_n = \int_0^1 f(t)\cos 2n\pi t\,dt, \quad \beta_n = \int_0^1 f(t)\sin 2n\pi t\,dt. \end{gathered}$$

[1] (4)-et nyilván motiválja (2) és (3).

[2] Megemlítjük, hogy törtrendű deriváltak divergens *Riemann—Liouville*-integrálokból *Hadamard*-féle értelemben vett „véges rész"-képzéssel is származtathatók. (MARCHAUD, 1927).

Innen az adjungált törtrendű deriváltakat a klasszikus szummációs eljárások valamelyikével származtathatjuk, amint a szerző először 1958-ban az edinburghi nemzetközi matematikai kongresszuson tartott előadásában, majd nem sokkal később több dolgozatában is megmutatta.[3]

Az (5)—(6) alatti sorok „zárt alakja" szintén figyelemre méltó. Ami (5)-öt illeti, egy *Hankel*-típusú kontúrintegrál-előállításra jutunk, amely úgy fogható fel, mint a *Cauchy*-féle (komplex) integrálformulák közös általánosítása.[4] (6)-ból pedig egy (1)-típusú integrál-alak vezethető le, melyben az x_0 integrációs kezdőpont (paraméter) $-\infty$; az utóbbi könnyen $(0, 1)$ intervallumra vonatkozó integrállá transzformálható, melynek magfüggvényében a $\zeta(s, u)$ ún. *Hurwitz*-féle zetafüggvény lép fel, vö.[3]. ($\zeta(s, u)$-t tudvalevőleg $\mathrm{Re}\, s > 1, 0 < u \leqq 1$ mellett a $\sum_{k=0}^{\infty} (k+u)^{-s}$ sor összegeként értelmezzük.)

II. Emlékeztetünk arra a tényre, hogy az (1) integrál a ν rendszámnak mint komplex változónak holomorf függvénye. Ezen az alapon RIESZ MARCELL és több tanítványa 1933 és 1949 között egy elegáns és hatékony eljárást épített ki a törtrendű differenciálás elméletében, nevezetesen a *Riemann—Liouville*-integrálnak a rendszámra vonatkozó *analitikus folytatását*. A módszer bizonyos értelemben átvihető többváltozós függvényekre, pontosabban az euklideszi és más, a magfizikában használt metrikus terek pontfüggvényeire is, ti. bevezethetők (1)-nek megfelelő kiterjesztései, az un. „*Riesz*-potenciálok". E lehetőség azon múlik, hogy az $x-t$ különbséget az integrációs tartomány két pontjának az illető tér metrikája szerinti távolságával pótoljuk.[5]

A *Riesz*-féle vizsgálatok szinte kizárólag valós deriválási rendszámok és folytonos alapfüggvények esetére vonatkoztak. A szerző 1958—60-ban tárgyalta a legáltalánosabb esetet is, azaz a komplex s-rendű deriváltak és integrálok egyesített elméletét tetszőleges *Lebesgue*-integrálható függvényekre, mégpedig a törtrendű integrálás *Weyl*-féle koncepciójára építve. (A periodicitás nyilván nem jelenti az általánosság tényleges korlátozását.) Az analitikus folytatás bizonyos mélyebb — MITTAG—LEFFLERtől és RIESZ MARCELLtől eredő — módszerei segítségével sikerült többek között a kapott törtrendű derivált s-re vonatkozó egzisztencia-tartományának lényegében teljes jellemzése; a (6)-ról mondottaknak megfelelően az eredmények szoros kapcsolatban vannak a zetafüggvények elméletével. (Vö. [3, 6].)

III. Van még egy harmadik, meglehetősen elemi út is tetszőleges nem-egészrendű deriváltak előállítására, amely — paradox módon — bizonyos értelemben a legújabb keletű. A következőkről van szó: több korábbi kísérlet után (pl. GRÜNWALD 1867, POST 1930) csak az utolsó két évtizedben sikerült teljesen kielégítő, szabatos

[3] Vö. pl. Abstracts of communications, *ICM Edinburgh*, 1958, p. 60; továbbá M. MIKOLÁS, „Differentiation and integration of complex order of functions represented by trigonometric series and generalized zeta-functions", *Acta Mathematica Acad. Sci. Hung.*, **10** (1959), 77—124.

[4] L. M. BLUMENTHAL, "Note on fractional operators and the theory of composition", *American Journal of Mathematics*, **53** (1931), 483—492.

[5] M. RIESZ, «L'intégrale de Riemann—Liouville et le problème de Cauchy», *Acta Mathematica*, **81** (1949), 1—223.

[6] *Riemann—Liouville*-integrálokra a $\mathrm{Re}\, s = 0$ eset részletes diszkussziója található a következő dolgozatban: E. R. LOVE, "Fractional derivatives of imaginary order", *Journal of the London Mathematical Society* (II), 3 (1971), 241—259.

formában megadni ${}_{x_0}D_x^\mu f$-nek egy olyan *explicit limesz-előállítását,* amely speciális esetként tartalmazza mind az $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ Riemann-integrálnak (x_0, x) ekvidisztans felosztására kimondott definícióját, mind $f^{(p)}(x)$ kifejezését az

$$ {}_{x_0}\Delta_x^{p,n} f(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f\left(x - k\frac{x-x_0}{n}\right) $$

„p-edik differencia" segítségével, ahol p valamely nem-negatív egész szám.

Az (x_0, x)-re vonatkozó tetszőleges μ-rendű derivált definíciója a következőképpen írható: [7]

$$ (7) \qquad {}_{x_0}D_x^\mu f = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x-x_0}{n}\right)^{-\mu} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{\mu}{k} f\left(x - k\frac{x-x_0}{n}\right). $$

Világos, hogy ${}_{x_0}D_x^0 f = f(x)$ és

$$ (8) \qquad {}_{x_0}D_x^p f = f^{(p)}(x) \quad (p > 0,\ \text{egész}), $$

ha $f(t)$ p-szer differenciálható a $t = x$ pontban; másrészt belátható, hogy

$$ (9) \qquad {}_{x_0}D_x^{-\nu} f = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{\nu-1}\,dt \quad (\nu > 0), $$

feltéve, hogy a jobboldali integrál *Riemann*-féle értelemben létezik. (Vö. (1).) Vegyük észre, hogy ${}_{x_0}D_x^\mu f$ akkor és csak akkor független az x_0 paramétertől, ha μ nemnegatív egész szám. A (7) limesz számára valóban kínálkozik az *integroderivált* elnevezés, mivel ez μ egész értékei esetén iterált integrálok és deriváltak közös általánosítását valósítja meg. (Vö.[7])

Megemlítjük, hogy a (7) előállítás lehetővé teszi a

$$ (10) \qquad {}_{x_0}D_x^{\mu_1}({}_{x_0}D_t^{\mu_2}) = {}_{x_0}D_x^{\mu_1+\mu_2} $$

kiterjesztett félcsoport-tulajdonság (vö. (2)) érvényességének beható vizsgálatát is, s hogy a törtrendű deriváltak bevezetésére szolgáló összes tárgyalt módszerek ekvivalensek az analitikus függvények osztályában.

Mit mondhatunk a fenti ideák és aspektusok *alkalmazásairól* az újabb szakirodalomban?

[7] K. F. MOPPERT, »Über einen verallgemeinerten Ableitungsoperator«, *Commentarii Mathematici Helvetici,* **27** (1953), 140—150. — L. továbbá: M. MIKOLÁS, "Generalized Euler sums and the semigroup property of integro-differential operators", *Annales Univ. Sci. Budapest,* Sectio Mathematica, **6** (1963), 89—101; valamint «Sur la propriété principale des opérateurs différentiels généralisés», *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris,* **258** (1964), 5315—5317. — Az $x_0 = \infty$, $x < x_0$ speciális esetet illetően vö. még N. STULOFF, »Die Differentiation beliebiger reeller Ordnung«, *Mathematische Annalen,* **122** (1951), 400—410.

2. Függvénytan, integráltranszformációk

A III. típusú általánosított differenciál- és integráloperátorok segítségével erősen ki lehet terjeszteni a klasszikus infinitezimális számítás formula-apparátusát, mégpedig oly módon, hogy az elemi függvények differenciálására és integrálására vonatkozó legfontosabb szabályok páronként „összeolvadnak" általánosabb szabályokká. Bizonyos új relációk is adódnak egyes transzcendens függvények között; így a $\log \Gamma(x)$ vagy a $\operatorname{ctg} x$ függvény törtrendű deriváltjai kapcsolatba kerülnek a *Hurwitz*-féle zetafüggvénnyel. Néhány konkrét példa:

$$(11)\qquad {}_{x_0}D_x^\mu 1 = \Gamma(1-\mu)^{-1}(x-x_0)^{-\mu} \quad (x > x_0,\ \mu \text{ tetszőleges})$$

$$(12)\qquad {}_{-\infty}D_x^\mu 1 = 0 \quad (\mu > 0)$$

$$(13)\qquad {}_0D_x^\mu x^\omega = \frac{\Gamma(\omega+1)}{\Gamma(\omega-\mu+1)} x^{\omega-\mu} \quad (x > 0;\ \omega \neq -1, -2, \ldots;\ \mu \text{ tetszőleges})$$

$$\left.\begin{aligned} &(14)\qquad {}_{-\infty}D_x^\mu e^x = e^x \\ &(15)\qquad {}_{-\infty}D_x^\mu \sin x = \sin\left(x+\mu\frac{\pi}{2}\right) \\ &(16)\qquad {}_{-\infty}D_x^\mu \cos x = \cos\left(x+\mu\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (x \text{ és } \mu \text{ tetszőleges})$$

(11)—(16) mindegyike „komplexben" általánosabb feltételek mellett is érvényes. (Megfelelő értelemben általánosítható a *Leibniz*-szabály, a parciális integrálás módszere és az összetett függvény differenciálási szabálya.) Említésre érdemes, hogy az (5)—(6) alatti *Hadamard-*, ill. *Weyl*-definíció implicite függ (13)-tól, ill. (15)-től és (16)-tól.

Ha komplex paraméterek és meromorf $f(x)$ függvény esetén alkalmazzuk az

$$(17)\qquad {}_{x_0}D_x^\mu f = \frac{\Gamma(\mu+1)}{2\pi i} \int_{x_0}^{(x+)} f(w)(w-x)^{-(\mu+1)}\, dw$$

kontúrintegrál-előállítást, ahol az integrációs út az x_0 pontból indul ki, pozitív értelemben megkerüli az x pontot és nem tartalmazza f-nek egyetlen szingularitását sem, továbbá a jobboldali komplex kitevőjű hatványnak a főértéke veendő, akkor ${}_{x_0}D_x^\mu f$ értéke meghatározható a $\operatorname{Re} \mu > \mu_0$ félsíkbeli μ-értékekre reziduumszámítás segítségével, feltéve, hogy $|f|$ nem növekszik túlságosan gyorsan, mikor $|x| \to \infty$. Mellékeredményként adódik, hogy számos, a matematikai fizikában nagy jelentőségű speciális függvény (*Legendre-*, *Bessel-*, hipergeometrikus függvények stb.) törtrendű deriváltként fogható fel, ami új támpontot nyújt e függvények diszkussziója számára. [8] További eredményeket talált nemrég a szóban forgó irányban OSLER, erősen

[8] M. MIKOLÁS, »Über die Begründung eines einheitlichen und erweiterten Infinitesimalkalküls im Komplexen«, *Annales Univ. Sci. Budapest*, Sectio Mathematica, **5** (1962), 69—78. — Az egész függvények elméletének felhasználását illetően vö. M. GAER—L. A. RUBEL, "The fractional derivative via entire functions", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **34** (1971), 289—301.

általánosítva a *Cauchy—Taylor*-féle kifejtési tételt és a *Leibniz*-szabályt. Például fennáll az

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma(\vartheta n+\gamma+1)^{-1}{}_{x_0}D_x^{\vartheta n+\gamma} f(x)|_{x=a}(x-a)^{\vartheta n+\gamma}\vartheta \tag{18}$$

formula, ahol γ tetszőleges komplex szám és $0<\vartheta\leqq 1$. $\vartheta\to 0$ határátmenetre térve az említett soroknak bizonyos integrál-analogonjaihoz jutunk, amelyek a speciális függvények tanulmányozásának hasznos segédeszközei.[9]

Az a tény, hogy a (9) integrál $w=x-t$ helyettesítés után úgy tekinthető, mint az

$$M_\nu[f] = \int_0^\infty f(w)w^{\nu-1}\,dw \tag{19}$$

Mellin-transzformáltnak speciális esete, az ún. inverziós formula révén a *Laurent*-féle kifejtésnek egy érdekes integrálpendantjára vezet. (L. a [8] lábjegyzetet.) Más integráltranszformációk elméletével is fontos kapcsolat áll fenn: ERDÉLYI és KOBER 1940-ben felfedezte, hogy (9)-nek megfelelően kiterjesztett variánsai hasznosak a *Hankel*-, a hipergeometrikus és *Laplace*-transzformáltak vizsgálatában, minthogy a kérdéses törtrendű operátorok fontos leképezéseket létesítenek a felsorolt transzformációs osztályok között. Többek között kiderült, hogy a *Hankel*-transzformáció teljes elmélete levezethető ily módon a *Fourier*-transzformáció klasszikus elméletéből.[10]

3. Approximáció- és szummációelmélet

I. típusú törtrendű integrálok és deriváltak struktúrális és aszimptotikus sajátságait először HARDY és LITTLEWOOD vizsgálta, akiknek idevágó munkái mély függvénytani segédeszközökre épülnek.[11] A *Weyl*-féle elméletet illetően ALEXITS és KRÁLIK folytatta az említett kutatási irányt, felhasználva bizonyos új sorelméleti módszereket. Ezen az úton a *Hardy—Littlewood*-féle approximációs tételek egyszerűbben nyerhetők és egyúttal általánosíthatók is.[12]

[9] Vö. T. J. OSLER, "Taylor's series generalized for fractional derivatives and applications", *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **2** (1971), 37—48; valamint "An integral analogue of Taylor's series and its use in computing Fourier transforms", *Mathematics of Computation*, **26** (1972), 449—460 és "The integral analogue of the Leibniz rule", ibid., 903—915.

[10] A. ERDÉLYI—H. KOBER, "Some remarks on Hankel transforms", *Quarterly Journal of Mathematics* (Oxford), **11** (1940), 212—221. Továbbá A. ERDÉLYI, "A class of hypergeometric transforms", *Journal of the London Mathematical Society*, **15** (1940), 209—212; valamint "On some functional transforms", *Rendiconti del Seminario Matematico di Torino*, **10** (1950—51), 217—234. — Újabb idevágó eredmények: T. P. HIGGINS, "An inversion integral for a Gegenbauer transformation", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **11** (1963), 886—893; s ua. szerzőtől: "A hypergeometric transform", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **12** (1964), 601—612.

[11] G. H. HARDY—J. E. LITTLEWOOD, "Some properties of fractional integrals I.—II.", *Mathematische Zeitschrift*, **27** (1928), 565—606 és ibid. **34** (1932), 403—439.

[12] D. KRÁLIK, »Untersuchung der Integrale und Derivierten gebrochener Ordnung mit den Methoden der konstruktiven Funktionentheorie«, *Acta Mathematica Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), 48—64. — Továbbá G. ALEXITS—D. KRÁLIK, »Über die Approximationen mit den arithmetischen Mitteln allgemeiner Orthogonalreihen«, *Acta Mathematica Acad. Sci. Hung.*, **11** (1960), 387—399.

Ha az euklideszi terekre vonatkozó *Riesz*-potenciálok legegyszerűbb speciális esetével, vagyis az ún. *Riesz*-féle törtrendű integrállal foglalkozunk (vö. II.):

$$(20)\qquad {}_{-\infty}I_{\infty}^{\nu}f(x)=\left[2\Gamma(\nu)\cos\frac{\pi\nu}{2}\right]^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)|x-t|^{\nu-1}\,dt\qquad(\nu>0),$$

akkor a

$$(21)\qquad H_0[f]=\frac{1}{\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{f(t)}{x-t}\,dt$$

alakú *Hilbert*-transzformáltak elmélete kitüntetett szerepet játszik.[13] Ezen az alapon BUTZER és munkatársai a közelmúltban tüzetesen tanulmányozták a törtrendű integrálok, deriváltak és bizonyos klasszikus függvényosztályok (C_r, L_p, Lip α, ...) kapcsolatát, és messzemenő eredményeket találtak, melyeknek alkalmazásaik vannak a matematikai fizikában. E kutatások szorosan összefonódnak a konstruktív függvénytan és a harmonikus analízis modern módszereivel.[14]

A hatvanas években a törtrendű integrálásnak még egy alkalmazási területét találta a szerző: a szummációelméletet. Legyen $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, ...)$ egy (x_0, x_1) intervallumban korlátos, integrálható függvényekből álló sorozat, és tegyük fel, hogy $\sum {}_{x_0}I_x^{\nu}\varphi_n$ valamely $x\in(x_0, x_1)$ pontban minden pozitív ν-re konvergens. Akkor a

$$(22)\qquad {}^{(W)}\sum\varphi_n(x)=\lim_{\nu\to+0}\sum {}_{x_0}I_x^{\nu}\varphi_n$$

limeszt a $\sum\varphi_n$ sor (W)-szummájának nevezzük, és (22) létezése esetén $\sum\varphi_n$-et (W)-szummábilisnek mondjuk az x helyen. Ez az új szummációs eljárás éles eredményeket szolgáltat például *Fourier*- és *Dirichlet*-féle sorokra. Speciálisan $x_0=-\infty$ mellett a *Hurwitz*-féle zetafüggvény bizonyos tulajdonságainak felhasználásával (vö. I.) egyszerű, mégpedig szükséges és elegendő szummabilitási kritérium nyerhető trigonometrikus *Fourier*-sorokra; továbbá azt találjuk, hogy a (W)-módszer lokális

[13] M. RIESZ idézett dolgozatában (vö. [5]) a (20) integrál előtti tényező részint a félcsoport-tulajdonságból, részint a $(d^2/dx^2)\,{}_{-\infty}I_{\infty}^{\nu+2}f(x)=-{}_{-\infty}I_{\infty}^{\nu}f(x)$ relációból ered. Megjegyezzük, hogy (20)-nak egy lényeges kiterjesztését alkalmazza W. FELLER egyik cikkében: "On a generalization of Marcel Riesz' potentials and the semigroups generated by them", *Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.*, 1952, kieg. kötet, 72—81.

[14] P. L. BUTZER—W. TREBELS, *Hilberttransformation, gebrochene Integration und Differentation*, Köln—Opladen: Westdeutscher Verlag, 1968, 81. pp. és P. L. BUTZER—R. J. NESSEL, *Fourier analysis with approximation*, New York: Academic Press, 1971, 400—403. — Továbbá: H. KOBER, "A modification of Hilbert transforms, the Weyl integral and functional equations", *Journal of the London Mathematical Society*, **42** (1967), 42—50; valamint R. J. NESSEL—W. TREBELS, »Gebrochene Differentiation und Integration und Charakterisierungen von Favard—Klassen«, *Proceedings of the Conf. on Constructive Theory of Functions* (1969), Budapest: Akad. Kiadó, 1972, 331—341.

„hatékonysága" a klasszikus, *Cesàro-*, *Hölder-*, *Abel-* stb. féle összegezési módszerek mindegyikénél nagyobb.[15] Új adalékok remélhetők hatványsorok kerületi aszimptotikájának *Hadamard*-féle problémakörében, nevezetesen az ismert eredmények javítása, ill. lokalizációja.

4. Differenciál- és integrálegyenletek, operátorelmélet

Ez tekinthető a legtradícionálisabb alkalmazási területnek. Az első idevágó példa a híres *Abel*-féle integrálegyenlet (1823), melyet ma ilyen alakban írhatunk:

$$ {}_{x_0}D_x^{-\mu} f = \Phi(x) \quad (0 < \mu < 1), \tag{23} $$

előírt függvénnyel a jobb oldalon. HEAVISIDE *"Electromagnetic Theory"* c. művének megjelenése óta (1893—1912) általánosan ismeretes, hogy a $D = d/dt$ operátorral való formális számolás számos, a praxisban előforduló lineáris parciális differenciálegyenlet esetében D-nek nem-egész kitevőjű hatványaira vagy éppen transzcendens függvényeire vezet, ami könnyű motivációt jelent nem-egészrendű integrálok és deriváltak definiálására. A *Laplace*-transzformáció elméletére vagy a közelmúltban talált más szigorú operátormódszerekre támaszkodva természetesen tágabb aspektusban is vizsgálhatjuk a törtrendű differenciálás és integrálás egzakt megalapozásának problémáját.[16]

(23) explicit megoldása azonnal előállítható az ${}_{x_0}D_x^{\mu}$ inverz operátornak az egyenlet mindkét oldalára való alkalmazása útján, amennyiben az

$$ {}_{x_0}D_x^{\mu}({}_{x_0}D_t^{-\mu}) = {}_{x_0}D_x^{0} $$

operátoregyenlet érvényességi feltételeit előzetesen tisztáztuk (vö. (10)). Az utolsó 30—40 évben törtrendű operátorok segítségével tárgyaltak a szakirodalomban sok olyan speciális differenciál- és integrálegyenletet is, amelyekre a szóban forgó kalkulus felhasználása már nem ennyire kézenfekvő. Számos potenciálelméleti, elektrodinamikai, hidro- és aerodinamikai, kémiai kinetikai stb. példán kívül[17] kiemeljük

[15] L. a szerző következő dolgozatait: I) «Sur la sommation des séries de Fourier au moyen de l'intégration d'ordre fractionnaire», *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris,* **251** (1960), 837—839. — II) «Application d'une nouvelle méthode de sommation aux séries trigonométriques et de Dirichlet» *Acta Mathematica Acad. Sci. Hung.*, **11** (1960), 317—334. — III) »Über die Dirichlet-Summation Fourierscher Reihen«, *Annales Univ. Sci. Budapest,* Sectio Mathematica, **3—4** (1960—61), 189—195. — IV) «Procédés de sommation (A, λ_m) dans l'analyse de Fourier», *Communications CIM Nice,* 1970, 132.

[16] Vö. pl. H. T. DAVIS, *The theory of linear operators,* Bloomington (Ind.): The Principle Press, 1936, p. 64—75 és 276—292.

[17] L. pl. S. BOCHNER, "Diffusion equation and stochastic processes", *Proceedings of the National Acad. Sci., U.S.A.*, **35** (1949), 368—370. — J. L. LIONS, «Sur l'existence de solutions des équations de Navier-Stokes», *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris,* **248** (1959), 2837—2849. — A. ERDÉLYI, "An integral equation involving Legendre functions", *SIAM Journal on Applied Mathematics,* **12** (1964), 15—30. — E. R. LOVE, "Some integral equations involving hypergeometric functions", *Proceedings of the Edinburgh Math. Soc.* (II), **15** (1967), 169—198. —
K. B. OLDHAM—J. SPANIER, "The replacement of Fick's laws by a formulation involving semi-differentiation", *Journal of Electroanalytical Chemistry,* **26** (1970), 331—341; továbbá "A general solution of the diffusion equation for semiinfinite geometries", *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **39** (1972), 655—669. —
M. SHINBROT, "Fractional derivatives of solutions of Navier-Stokes equations", *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* **40** (1971), 139—154.

RIESZ MARCELLnek az m-dimenziós hullámegyenletre vonatkozó fundamentális eredményeit (vö. [5]), valamint ERDÉLYI és SNEDDON mély vizsgálatait ún. axiálisan szimmetrikus potenciálokról és duális integrálegyenletekről.[18] E munkákban a nem-egészrendű operátorok használata nemcsak mintegy „gyorsírási" módszerként jelenik meg, melynek segítségével bizonyos analitikus eljárások, ill. matematikai levezetések tömörebb és világosabb módon rögzíthetők, hanem ez az apparátus egyúttal bizonyos lényeges összefüggések fennállását is sugallja, miáltal a fejlődés fontos „katalizátorává" válik.

Az éppen tárgyalt probléma természetének megfelelően gyakran van szükség a legegyszerűbb törtrendű operátorok kisebb-nagyobb mérvű általánosítására. RIESZ MARCELL például a *Cauchy*-probléma megoldását az m-dimenziós *Lorentz—Minkowski*-térben (speciálisan a relativisztikus „téridőben") a következő *Riemann—Liouville*-típusú integrál segítségével adta meg:

$$I^{\nu}f(P) = \pi^{1-\frac{m}{2}} 2^{1-\nu}\left[\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-m}{2}\right)\right]^{-1}\int_{S_p} f(Q)\, r_{PQ}^{\nu-m}\, dQ, \tag{24}$$

ahol $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$ és $Q(t_1, t_2, \dots, t_m)$ a térnek egy fix, ill. változó pontja, r_{PQ} ezeknek távolsága a megfelelő metrika szerint, tehát az

$$[(x_1-t_1)^2 - \sum_{k=2}^{m}(x_k - t_k)^2]^{1/2}$$

kifejezést jelenti, dQ rövidítés $dt_1 dt_2 \dots dt_m$ helyett, végül az S_p integrációs tartományt az $t_1 < x_1$ egyenlőtlenség határozza meg.[19]

Más az igény az „általánosított axiálisan szimmetrikus potenciálok" *Erdélyi—Weinstein*-féle elméletben, mely a $(2\nu+3)$-dimenziós térbeli ϱ, z hengerkoordinátákra felírt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{2\nu+1}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (u = u(\varrho, z))$$

parciális differenciálegyenletből indul ki. Ez utóbbinak vizsgálatához (1)-nek ilyen alakú kiterjesztését célszerű bevezetni:

$$I_{\Psi}^{\nu}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_{x_0}^{x} f(t)[\Psi(x)-\Psi(t)]^{\nu-1}\Psi'(t)\, dt, \tag{25}$$

[18] A. ERDÉLYI—I. N. SNEDDON, "Fractional integration and dual integral equations", *Canadian Journal of Mathematics*, **14** (1962), 685—693. —
I. N. SNEDDON, *Mixed boundary value problems in potential theory*, New York: Wiley and Sons, 1966, 46—52. —
L. továbbá A. ERDÉLYI következő dolgozatait: I) "Some applications of fractional integration", *Mathematical Notes* No. 316, *Boeing Scientific Research Laboratories*, 1963, 23 pp. — II) "Axially symmetric potentials and fractional integration", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **13** (1965), 216—228. — III) "An application of fractional integrals", *Journal d'Analyse Mathématique*, **14** (1965), 113—126.

[19] Ha $m=1$, célszerű r_{PQ} értékét $|x_1-t_1|$-nek vennünk. Ez esetben (24) a $\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) = 2^{1-\nu}\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)$ reláció folytán (1)-be megy át $x_0 = -\infty$ mellett, ami nem más, mint a *Weyl*-integrál. Különben RIESZ MARCELL felhasználta (24)-nek egy *Riemann*-terekre vonatkozó elég erős kiterjesztését is, mégpedig változó együtthatójú lineáris hiperbolikus egyenletek vizsgálatával kapcsolatban.

ahol $\Psi(t)$-ről feltesszük, hogy szigorúan monoton növekedő és folytonosan differenciálható. (Nyilván a $\Psi(t)=t^{\alpha}$ $(\alpha>0)$ speciális esetnek van legnagyobb jelentősége.)

Az a tény, hogy törtrendű deriváltakat bizonyos integrálegyenletek invertálásával is definiálhatunk, eltérő jellegű alkalmazási lehetőségekre vezet; ily módon ti. érdekes összehasonlítási és jellemzési tételeket kaphatunk, kapcsolatban a *Laplace*-transzformáció elméletével. [20] Ami a törtrendű integráloperátoroknak azt az elemi tulajdonságát illeti, hogy félcsoportot alkotnak, melynek csoporttá bővítése szolgáltatja a törtrendű differenciáloperátorokat — ez az észrevétel a közelmúltban kiindulópontjává vált a félcsoport-elmélet egy új ágának, nevezetesen a „törtkitevős operátorhatványok" elméletének. [21] Az idevágó eredmények kapcsolatban vannak *Banach*-terekre vonatkozó differenciálegyenletek vizsgálatával és a funkcionálanalízis egyes modern kutatási témaköreivel, pl. az absztrakt *Hilbert*-tér bizonyos operátoraira vonatkozólag. [22]

A fenti módszerek egy általános „iteratív-interpolációs" elvet alapoznak meg inhomogén differenciálegyenleteknek törtrendű operátorokkal való megoldására, mely a következőképpen fogalmazható: [23]

Tekintsünk egy

$$\Theta u = f \tag{26}$$

alakú egyenletet, ahol Θ egy lineáris (közönséges vagy parciális) differenciáloperátor, melyre $\Theta u=0$, ha $u=0$ és f ismert függvény. A (7) előállítás felhasználásával (26) bal oldala binomiális együtthatókat tartalmazó limeszkifejezésként írható. Iteráljuk mármost az operátort p-szer; a kapott $\Theta^p u$ ismét (7)-típusú limesz lesz. Kíséreljük meg az utóbbinak kiterjesztését p helyett tetszőleges valós ν-re, úgyhogy ν-nek folytonos függvényére jussunk. Ezek után ν helyébe (-1)-et téve adódik a (26) differenciálegyenletnek egy partikuláris megoldásaként:

$$u = \Theta^{-1} f, \tag{27}$$

feltéve, hogy a $\Theta^{-1}\Theta=\Theta^0$ (=identikus operátor) operátorreláció igazolható.

[20] Vö. pl. G. DOETSCH, *Handbuch der Laplace-Transformation*, III. kötet, Basel: Birkhäuser-Verlag, 1956, 157—169. — Továbbá: H. BERENS—U. WESTPHAL, »Zur Charakterisierung von Ableitungen nichtganzer Ordnung im Rahmen der Laplace-Transformation«, *Mathematische Nachrichten*, **38** (1968), 115—129.

[21] Vö. E. HILLE—R. S. PHILLIPS, *Functional analysis and semigroups*, Providence, R. I.: Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. **31** (1957), 808 pp. — U. WESTPHAL, »Ein Kalkül für gebrochene Potenzen infinitesimaler Erzeuger von Halbgruppen und Gruppen von Operatoren I—II«, *Compositio Mathematica* **22** (1970), 67—103; 104—136. — H. M. HÖVEL—U. WESTPHAL, "Fractional powers of closed operators" *Studia Mathematica*, **42** (1972), 177—194. — U. WESTPHAL, "An approach to fractional powers of operators via fractional differences", *Arbeitsbericht* T. H. AACHEN, 1973.

[22] J. L. LIONS, *Équations différentielles opérationelles et problèmes aux limites*, Berlin—Göttingen—Heidelberg: Springer-Verlag, 1961. — B. Sz. NAGY és C. FOIAŞ, *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert*, Budapest—Paris: Akad. Kiadó, 1967, 374. pp. — Újabban pl. R. K. JUBERG és H. KOBER is publikált idevágó eredményeket.

[23] M. MIKOLÁS, »Über die explizite Auflösung gewisser Differential- und Integralgleichungen und Riszsche Potentiale«, *Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, Klasse für Mathematik, Physik und Technik, 1965/1, 91—93. — Továbbá: M. MIKOLÁS, *Théorie et application du calcul infinitésimal généralisé*, Cours polycopiés à l'université de Montpellier (France), 1964, 65 pp.

Például az $u'+u=f(x)$ $(u=u(x);\ x_0<x\leqq x_1)$ egyenlet esetében a számítás így alakul:

$$\Theta^p u=\left(1+\frac{d}{dx}\right)^p u=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x-x_0}{n}\right)^{-p}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{p}{k}\left(1+\frac{x-x_0}{n}\right)^{p-k}u\left(x-k\frac{x-x_0}{n}\right);$$

innen pedig

$$u=\Theta^{-1}f=\lim_{n\to\infty}\frac{x-x_0}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{x-x_0}{n}\right)^{-k-1}f\left(x-k\frac{x-x_0}{n}\right)=\int_{x_0}^{x}f(t)e^{t-x}\,dt$$

a keresett partikuláris megoldás.

Megjegyzendő, hogy a szóban forgó módszer — ha egyáltalán alkalmazható — egyúttal a megoldás numerikus approximációját is lehetővé teszi.

5. Szakadásos függvények általánosított deriválása

Sokszor előfordul a fizikában és a műszaki tudományokban, hogy bizonyos differenciálrelációk „deriváltak” definiálását teszik kívánatossá a függvény törési pontjaiban vagy éppen szakadási helyein. Jól ismert példák a villamosságtanból: a *Dirac*-féle „delta-függvény” $(\delta(x))$, melyet a *Heaviside*-féle ún. egységugrásfüggvényből:

$$U_0(x)=\begin{cases}1 & (x\geqq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases} \tag{28}$$

„differenciálással” szokás származtatni, továbbá $\delta(x)$ formális deriváltjai; a statika bizonyos alapfüggvényei, amelyeket egymáshoz globálisan a differenciálás művelete köt, de a szóba jövő deriváltak nem léteznek egyes izolált pontokban, ahol koncentrált erők lépnek fel stb.

Az ötvenes évek eleje óta két teljesen különböző utat sikerült találni lokálisan szakadásos függvények „deriváltjainak” korrekt értelmezésére és felhasználására. Ezek egyike a függvényfogalom alkalmas kiterjesztését jelenti és az *általánosított függvények modern elméletében* realizálódott (*Schwartz*-féle „disztribúcióelmélet”, *Mikusinski*-féle „operátorszámítás”).[24] A másik út a *valós szám fogalmának módosítása* annak érdekében, hogy a közönséges értelemben vett derivált egyes szakadási helyeken (mint $U_0(x)$-é az $x=0$ helyen) létezzék.[25]

Néhány évvel ezelőtt a szerző egy harmadik utat javasolt: tartsuk meg mind az analízis aritmetikai alapvetését, mind a klasszikus függvényfogalmat, de alkalmas

[24] Vö. pl. A. Erdélyi, *Operational calculus and generalized functions*, New York: Holt Rinehart and Winston, 1962. —
J. M. Gelfand—G. E. Shilov, *Generalized functions*, New York: Academic Press, vol. I., 1964. — Továbbá:
A. Erdélyi—A. C. McBride, “Fractional integrals of distributions”, *SIAM Journal for Mathematical Analysis*, **4** (1970), 547—557. —
A. Erdélyi, “Fractional integrals of generalized functions”, *Journal of the Australian Mathematical Society*, **14** (1972), 30—37.

[25] C. Schmieden—D. Laugwitz, »Eine Erweiterung des Infinitesimalkalküls«, *Mathematische Zeitschrift*, **69** (1958), 1—39.

módon *terjesszük ki a differenciálás műveletét.* Így a szakadásos függvények „deriváltjai" újra a szokásos értelemben vett függvények lesznek, s megmaradhatunk továbbra is a klasszikus analízis keretei között. Az ismertetendő eljárás hatóköre természetesen szűkebb, mint a disztribúciók vagy a (*Mikusinski*-féle) „konvolúció-hányadosok" használatáé, mindazonáltal elég tág ahhoz, hogy a gyakorlatban fellépő összes esetet magában foglalja.[26]

A részletekre térve, tekintsük a (4) előállítás következő „bilaterális" variánsát:

$$ {}_{x_0}D^{\mu}f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x-x_0)}{\Gamma(m-\mu)} \frac{d^m}{dx^m} \int_{x_0}^{x} f(t)|x-t|^{m-\mu-1}\,dt \tag{29} $$

$$ (m-1 \leqq \mu < m;\ m = 1, 2, \ldots). $$

Célunk, hogy ${}_{x_0}D^{1-\varepsilon}f(x)$ $(\varepsilon>0)$-ből $\varepsilon \to +0$ határátmenettel származtassuk a keresett általánosított deriváltat az x_0 pontban. Ehhez figyelembe kell vennünk néhány előzetes feltételt: 1) a szóban forgó limesznek *lokális* jellegűnek kell lennie, azaz csupán az x_0 helynek egy tetszőlegesen kicsi környezetében felvett függvényértékektől függhet; 2) így $\varepsilon \to +0$ mellett még az $x \to x_0$ határátmenetre is szükségünk van, s e kettő kombinációja révén biztosítanunk kell az általánosított derivált létezését egy elég tág függvényosztályban; 3) ha $f(x_0+0)$ és $f(x-0)$ létezik, akkor a generalizált deriváltnak kapcsolatban kell lennie az $|f(x_0+0)-f(x-0)|$ ugrással.

A felsorolt előírások mind teljesülnek az alábbi definíciók elfogadása esetén: Tegyük fel, hogy az

$$ {}_{x_0}\mathscr{D}_+ f = \lim_{\varepsilon \to +0} [{}_{x_0}D^{1-\varepsilon}f(x_0+\varepsilon) - {}_{x_0}D^{-\varepsilon}f(x_0-\varepsilon)] \tag{30} $$

$$ {}_{x_0}\mathscr{D}_- f = \lim_{\varepsilon \to +0} [{}_{x_0}D^{1-\varepsilon}f(x_0-\varepsilon) - {}_{x_0}D^{-\varepsilon}f(x_0+\varepsilon)] \tag{31} $$

határértékek léteznek (végesek), és egymással egyenlők. Akkor az f függvényt az x_0 pontban *$\mathscr{D}$-differenciálhatónak* mondjuk, és az

$$ {}_{x_0}\mathscr{D}f = {}_{x_0}\mathscr{D}_+ f = {}_{x_0}\mathscr{D}_- f \tag{32} $$

számot f x_0-beli *$\mathscr{D}$-deriváltjának* nevezzük.

Így például elemi számolással adódik, hogy $U_0(x)$ a kezdőpontban $\mathscr{D}$-differenciálható; pontosabban:

$$ {}_{x_0}\mathscr{D}U_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x_0 = 0, \\ 0, & \text{ha} \quad x_0 \neq 0. \end{cases} \tag{33} $$

Általában fennáll a következő tétel:

Ha $f'(x)$ létezik, és folytonos az x_0 pontnak külön egy jobboldali és egy baloldali (magát az x_0 helyet nem tartalmazó) környezetében, továbbá $f'(x_0+0)=f'(x_0-0)=$ $=d_{x_0}$, akkor az f függvény az x_0 helyen $\mathscr{D}$-differenciálható, és

$$ {}_{x_0}\mathscr{D}f = d_{x_0} + [f(x_0+0) - f(x_0-0)]. \tag{34} $$

[26] L. a szerző két cikkét: I) »Die Benutzung verallgemeinerter Funktionen in der Festigkeitslehre«, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 45 (1965), 130—131. — II) »Über die Benützung neuer Operatorenmethoden in den Ingenieurwissenschaften«, Berichte IV. IKM Weimar, 2 (1967), 138—140.

Speciálisan $d_{x_0}=f'(x_0)$, azaz $f'(x)$-nek x_0-ban való létezése és folytonossága esetén fennáll az

$$ {}_{x_0}\mathscr{D}f=f'(x_0) \tag{35}$$

összefüggés.

Kimondhatjuk tehát, hogy (32) úgy tekinthető, mint a sima függvényekre vonatkozó közönséges derivált fogalmának egy erős általánosítása; megjegyezzük, hogy hasonló módon értelmezhetők a *magasabb rendű $\mathscr{D}$-deriváltak* is. Természetesen finomabb deriváltfogalomhoz jutunk, ha (29) helyett a törtrendű deriváltnak valamelyik pontosabb (de kevésbé elemi) definícióját használjuk fel.

Nem bocsátkozhatunk a (30)—(32) típusú deriváltak elméletének részletes kifejtésébe. Hangsúlyozzuk azonban, hogy ez az elmélet, melyből mostanáig csupán néhány alaptény publikálása történt meg, jól alkalmazhatónak látszik a matematikai fizika számos ágában.

6. Záró észrevételek

Ami a kongresszus eredményeinek összefoglalását illeti, helyzetem nem könnyű. Egyrészt mindig problematikus dolog többet mondani puszta általánosságoknál, amikor egy ilyen áttekintésről van szó, különösen, ha az előadások témaköre annyira szerteágazó, mint esetünkben. Másrészt figyelembe véve, hogy a meghívott előadók listáján számos kiváló matematikus neve található, nem vagyok biztos abban, hogy kompetens vagyok egy adekvát beszámoló tartására.

Mindenesetre kétségtelen, hogy ez az első nemzetközi tudományos rendezvény, mely speciálisan a nem-egészrendű differenciálás és integrálás elméletével, valamint alkalmazásaival foglalkozik; továbbá éppen a kongresszus idején jelent meg a tárgykör első monografikus feldolgozása OLDHAM és SPANIER tollából. Ezek a tények és a közlésre benyújtott dolgozatok, a résztvevők váratlanul magas száma, a jelenlevő szakemberek élénk érdeklődése és aktivitása azt mutatja, hogy az általánosított differenciál- és integráloperátorok elmélete ma már a matematika önálló (a klasszikus és a modern analízissel egyaránt szoros kapcsolatban álló) ágává fejlődött; s remélhető, hogy e tény mind a szakirodalomban, mind a matematikai tudományok oktatásában előbb-utóbb éreztetni fogja hatását.

A kongresszus anyagának tanulmányozása közvetlenül meggyőz arról, hogy a tárgyalt témák spektruma meglehetősen kiterjedt. Több olyan ismertető előadás hangzott el, mely az elmélet megalapozásával foglalkozott, és ugyancsak számos előadást hallottunk a különféle fizikai, kémiai, valószínűségszámítási, műszaki alkalmazásokról, különös tekintettel differenciál- és integrálegyenletekre, a legfontosabb integráltranszformációk és az általánosított függvények felhasználására. Így megállapíthatjuk, hogy a kongresszus egyik fő célkitűzését, az alkalmazási lehetőségek előtérbe állítását, ill. erősítését sikerült elérni; s a hatást bizonyára tovább mélyíti majd a *Proceedings* mielőbbi publikálása. Ezen a ponton visszaemlékszem Arthur ERDÉLYI professzornak egy régebbi megjegyzésére, hogy az e területen dolgozó matematikusok a múltban többnyire nem ismerhették kellőképpen másoknak a témakörben elért eredményeit. Jelen összejövetelünk és a *Proceedings* lépést jelent a helyzet javítása felé.

Napjainkban meglehetősen elterjedt a különböző klasszikus matematikai elméletek mennél nagyobb mérvű általánosításának tendenciája, s az ilyen irányú törekvések nem egyszer tisztán formális absztrakciókra vezetnek. Ki kell emelnünk, hogy az általánosított differenciál- és integráloperátorok elmélete nem sorolható bele ebbe a fejlődési trendbe. Kiindulópontja olyan természetes és konkrét (eredete majdnem a differenciál- és integrálszámítás felfedezéséig nyúlik vissza), s alkalmazási köre az egzakt megalapozás keresésének hosszú időszakában annyira kibővült, hogy a *nem-egészrendű differenciálás és integrálás elméletének mint önálló matematikai diszciplínának jövője biztosítva van.* E jövőhöz kongresszusunk nyilván tartósan hozzá fog járulni.

Engedjék meg, hogy a kongresszus meghívott vendégei és összes résztvevői nevében hálámat fejezzem ki a BERTRAM ROSS professzor által vezetett Szervező Bizottság fáradhatatlan, eredményes munkájáért, s köszönetet mondjak a University of New Haven vezetőinek.

(Beérkezett: 1974. december 20.)